

Вінницький національний технічний університет

**Дементьєв Віктор Юрійович**

**УДК 519.65**

**ІНТЕРПОЛЯЦІЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ  
ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ СПЛАЙНАМИ В ЗАДАЧАХ ОБРОБКИ  
ДИСКРЕТНИХ ДАНИХ**

Спеціальність 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні  
методи

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Вінниця – 2011

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Вінницькому національному технічному університеті Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник

доктор технічних наук, професор  
**Кветний Роман Наумович,**  
Вінницький національний технічний університет,  
завідувач кафедри автоматики та інформаційно-  
вимірjuвальної техніки.

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор  
**Петух Анатолій Михайлович,**  
Вінницький національний технічний університет,  
завідувач кафедри програмного забезпечення;

доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник  
**Фінін Георгій Семенович,**  
Міжнародний Соломонів університет, м. Київ,  
перший проректор.

Захист відбудеться «14» жовтня 2011 р. о 12-30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 05.052.01 у Вінницькому національному технічному університеті за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, ГНК, ауд. 210.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Вінницького національного технічного університету за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95.

Автореферат розісланий «6» вересня 2011 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

С.М. Захарченко

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Хоча процес інтерполяції є суто математичним інструментом він так чи інакше присутній та використовується в багатьох сферах людської діяльності, таких як наука, медицина, розваги (комп'ютерна графіка та ігри), виробництво, контроль, вимірювання. Покращення методів інтерполяції дозволить підвищити ефективність систем, в яких вони використовуються, підвищити швидкість обробки даних, точність розрахунків. Розроблені методи інтерполяції не завжди задовольняють вимогам тих чи інших задач.

В практичних інженерних задачах обробки звукових сигналів та суто математичних розрахунках, зокрема при розв'язанні диференційних рівнянь, часто виникає потреба обробки функцій майже періодичного характеру. Застосування поліноміальних методів сплайн-інтерполяції для майже періодичних функцій (МПФ) малоефективне через низьку точність отриманих результатів. Для інтерполювання МПФ природно використовувати тригонометричні сплайни, проте такі методи інтерполяції недостатньо розроблені. Класичні методи тригонометричної інтерполяції, розроблені на основі розкладу функції в ряд Фур'є, призначені для відновлення періодичних функцій. При використанні методів інтерполяції згаданого типу накладаються жорсткі умови на розташування вузлових точок інтерполювання. Лише для деяких методів тригонометричної інтерполяції розроблено моделі на основі функцій двох та більше незалежних змінних. Тому подальший аналіз, удосконалення існуючих та розробка нових методів тригонометричної інтерполяції є необхідними та актуальними задачами.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами.** Результати досліджень, що представлені в дисертації, виконувалися в межах держбюджетної науково-дослідної роботи „Методологія розв'язання задач багатовимірної інтерполяції в просторі і в часі” (номер державної реєстрації – №0107U002092), що проводилась в Вінницькому національному технічному університеті в 2006–2009 р. р., де автор був співвиконавцем.

**Мета і завдання дослідження.** *Мета дослідження* полягає в підвищенні точності інтерполювання дискретних майже періодичних функцій на основі застосування нового методу тригонометричної сплайн-інтерполяції та розширенні області його застосування на багатопараметричні функції.

### **Задачі дослідження:**

1. Аналіз класичних та сучасних методів інтерполяції, способів їх побудови. Визначення їх переваг, недоліків, областей застосування, кола задач, для яких застосування кожного окремого методу є найбільш ефективним. Аналіз застосування методів інтерполяції для задач з майже періодичним характером зміни процесів.

2. Розробка математичної моделі сплайн-інтерполяції, яка, порівняно з іншими методами, підвищить ефективність інтерполювання функцій майже періодичного характеру.

3. Розширення області застосування запропонованої математичної моделі тригонометричної сплайн-інтерполяції шляхом розробки методу для інтерполювання функцій двох незалежних змінних.

4. Розробка багатовимірної моделі методу тригонометричної сплайн-інтерполяції для застосування в задачах обробки даних, які залежать від багатьох змінних. Модифікація розробленої багатовимірної математичної моделі для застосування матричних операцій для розпаралелювання процесів обробки багатовимірних даних.

5. Алгоритмізація розробленого методу багатовимірної тригонометричної сплайн-інтерполяції. Розробка методики застосування алгоритму виконання сплайн-інтерполяції функціями однієї, двох та багатьох змінних.

6. Практична реалізація розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції. Перевірка ефективності реалізованої математичної моделі запропонованого методу сплайн-інтерполяції.

*Об'єкт дослідження* – процес інтерполяції майже періодичних функцій в задачах обробки багатовимірних дискретних даних.

*Предмет дослідження* – математичні моделі та методи інтерполяції майже періодичних функцій в технічних задачах обробки багатовимірних дискретних даних.

*Методи дослідження* – чисельні методи та теорія інтерполяції дискретних даних для дослідження та удосконалення існуючих і розробки нових методів інтерполювання, матрична алгебра та теорія алгоритмів для розробки математичних моделей одновимірних та багатовимірних методів інтерполяції функцій.

**Наукова новизна одержаних результатів.** В результаті виконаного дисертаційного дослідження отримано нові наукові результати у напрямку розвитку методів сплайн-інтерполяції.

1. Вперше запропоновано новий метод тригонометричної сплайн-інтерполяції на основі кубічного ермітового сплайну зі зменшеною кількістю шуканих коефіцієнтів на кожному інтерполяційному сплайн відрізку, що дає змогу підвищити точність інтерполювання при збереженні кількості обчислювальних операцій, порівняно з аналогічними методами, для дискретних даних, які мають майже періодичний характер.

2. Запропоновано двовимірні та багатовимірні математичні моделі для нового методу тригонометричної сплайн-інтерполяції, які на відміну від існуючих дозволяють інтерполювати майже періодичні дискретні функції багатьох змінних, що дає змогу застосовувати запропонований метод для широкого кола практичних задач довільної вимірності.

3. Запропоновано матричні моделі розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції для майже періодичних функцій заданої кількості незалежних змінних, що на відміну від існуючих форм запису створює основу для алгоритмізації математичної моделі розробленого

методу і дає змогу підвищити швидкість інтерполювання шляхом розпаралелювання матричних операцій в багатопотокових процесорних пристроях.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в наступному:

1. Розроблено методику побудови інтерполяційної функції за допомогою запропонованого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції.

2. Розроблено методику побудови інтерполяційної функції з двома та багатьма незалежними змінними на основі запропонованого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції з використанням розроблених операцій над багатовимірними матрицями.

3. Розроблено алгоритм програмної реалізації запропонованого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції. Також розроблено програмний модуль – реалізацію запропонованого алгоритму для методу тригонометричної сплайн-інтерполяції в математичному програмному середовищі Matlab.

4. Розроблено програмний продукт – реалізацію запропонованого алгоритму для методу тригонометричної сплайн-інтерполяції на мові програмування C#. Створено графічний інтерфейс для візуалізації результатів інтерполювання та зручного доступу до даних. Розроблений програмний продукт дозволяє застосувати розпаралювання обчислень для багатоядерних процесорних пристроїв та оцінити час виконання інтерполювання.

5. Розроблено програмний модуль для збільшення (масштабування) зображень – застосування розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції. На основі розробленого програмного модуля виконується оцінки точності відновлення зменшеного зображення до початкового.

6. Розроблено програмний модуль покращення якості та зміни параметру аудіо запису – ще одне застосування розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції. В цьому програмному модулі виконується обробка дискретного аудіо сигналу, оцінка точності результатів та порівняння точності застосування методів сплайн-інтерполяції.

Результати дисертаційної роботи з масштабування зображень, зміни параметру та покращення якості аудіо сигналу впроваджено на науково-виробничому підприємстві «Спільна Справа» у співпраці з компанією «Samrtex» в програмному продукті потокової обробки і збереження аудіо та відео даних «Seraphim PC Player». Результати дисертаційного дослідження впроваджено в процес градування первинного перетворювача абсолютного тиску МИДА-ДА на підприємстві ДП «Енергооблік». Отримані результати дисертаційного дослідження використовуються в навчальному процесі у Вінницькому національному технічному університеті під час викладання лекцій та проведення занять з курсу “Обчислювальні методи та застосування комп’ютерів”, розділ “Методи обробки даних” для студентів спеціальностей 7.091401 “Системи управління і автоматики” на кафедрі автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати, що складають основний текст роботи, отримані автором одноосібно. У публікаціях, написаних у співавторстві, автору належать: розділ 2 монографії [1], що присвячений модифікованим методам інтерполяції сплайнами; запропоновано нове застосування методу інтерполяції кубічними сплайнами в задачі обчислення середнього значення кількості енергоносія [3]; запропоновано новий метод інтерполяції модифікованими тригонометричними сплайнами [4]; запропонована розробка тригонометричного методу сплайн інтерполяції [5].

**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень дисертаційної роботи пройшли апробацію на наукових конференціях:

1. I Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених, студентів та аспірантів «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» (Київ, КПІ, 2011);

2. XI Міжнародна конференція «Контроль та управління у складних системах» (Вінниця, ВНТУ, 2010);

3. XII міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика - 2006» (Вінниця, ВНТУ, 2006);

4. XXXVI, XXXVII, XXXVIII, XXXIX науково-технічних конференціях професорсько-викладацького складу, співробітників та студентів Вінницького національного технічного університету з участю працівників науково-дослідницьких організацій та інженерно-технічних працівників підприємств м. Вінниці та області (Вінниця, ВНТУ, 2007, 2008, 2009, 2011).

**Публікації.** За результатами проведених досліджень опубліковано 7 наукових праць, з яких 4 – в періодичних фахових виданнях з переліку ВАК України, 1 монографія, 1 матеріал конференції, 1 свідоцтво про реєстрацію авторських прав на комп'ютерну програму.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, додатків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 150 сторінок, з яких основний зміст викладено на 115 сторінках друкованого тексту, містить 29 рисунків та 9 таблиць. Список використаних джерел складається з 106 найменувань. Додатки містять окремі лістинги програм та акти впровадження результатів роботи і викладені на 11 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**У вступі** обґрунтовано актуальність теми, визначено мету та задачі дослідження, відзначено наукову новизну та практичну цінність роботи.

**В першому розділі** зроблено огляд літературних джерел за темою дисертаційної роботи, розглянуто класичні та сучасні методи сплайн-інтерполяції. Наводиться перелік галузей, для яких застосування методів сплайн-інтерполяції є важливим етапом при розв'язанні окремої практичної

задачі. Методи сплайн-інтерполяції орієнтовані на обробку окремих класів функцій або розв'язання певного класу задач, тому в роботі виконується звуження області практичних задач, для яких застосування існуючих методів сплайн-інтерполяції малодосліджене або є неефективне. Такою областю практичних задач та класом функцій обрано майже періодичні процеси і дискретні функції, що мають майже періодичний характер. В розділі зосереджено увагу на практичних задачах, в яких виникає необхідність обробки майже періодичних дискретних даних. Виконується огляд та детальний аналіз двох показових задач такого класу – це збільшення цифрових зображень та обробка цифрових аудіо сигналів. Визначаються критерії вибору оптимального методу інтерполяції при розв'язання окремого класу практичних задач.

Основну увагу зосереджено на існуючих методах тригонометричної сплайн-інтерполяції. Проаналізувавши сучасний стан розв'язання проблеми інтерполювання сплайн методами в контексті обробки майже періодичних даних, зроблено висновок про недостатню вивченість та розробку методів інтерполювання для класу майже періодичних функцій. Відсутність математичних моделей для інтерполювання функцій багатьох незалежних змінних є суттєвим недоліком, який часто перешкоджає застосуванню метода. Для підвищення ефективності інтерполювання функцій майже періодичного характеру, порівняно з іншими методами, виникає потреба в розробці математичної моделі сплайн-інтерполяції. Підкреслюється необхідність розробки математичної моделі для роботи з багатовимірними даними.

**Другий розділ** присвячено розробці математичних моделей тригонометричної сплайн-інтерполяції на основі кубічних ермітових сплайнів.

Розробляється модифікована математична форма кубічних сплайнів Ерміта, яка дозволяє покращити їх інтерполювальні властивості. Розроблену модель інтерполяції варто застосовувати для наборів базових точок, які описують плавні, наближені до періодичних графіки. Розрахунок невідомих коефіцієнтів сплайну виконується наближено, що зумовлює підвищення швидкодії, проте знижує точність інтерполювання, порівняно зі сплайнами Ерміта.

Для сітки вузлових значень аргументу та функції  $f(x_k) = y_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $k \in N$ , інтерполяція виконується на інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$ , який нормалізується до змінної  $t_k = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$ ,  $t \in [0,1]$ . Введемо позначення  $y'_k = m_k$ .

На кожному нормалізованому інтервалі в початковій точці  $x_i$ ,  $t_i = 0$ , в кінцевій точці  $x_{i+1}$ ,  $t_i = 1$ . Кубічний сплайн Ерміта матиме вигляд:

$$S_i(t_i) = (2t_i^3 - 3t_i^2 + 1)y_i + (t_i^3 - 2t_i^2 + t_i)m_i + (-2t_i^3 + 3t_i^2)y_{i+1} + (t_i^3 - t_i^2)m_{i+1}; \quad t_i \in [0,1]. \quad (1)$$

Вирази біля кожного з коефіцієнтів  $y_i, y_{i+1}, m_i, m_{i+1}$  від нормалізованої змінної  $t_i \in [0,1]$  замінимо на вирази з використанням тригонометричних функцій. Отримаємо тригонометричний сплайн вигляду:

$$S_i(t) = y_i \cos(t_i)^2 + m_{i+1} \cdot w \cdot (\cos(3t_i) - \cos(t_i)) + y_{i+1} \sin(t_i)^2 + m_i \cdot w \cdot (\sin(3t_i) + \sin(t_i)); \quad (2)$$

$$w = 0.096225; \quad t_i \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Для виразу (2) застосовувалась нормалізація вигляду  $t_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{\pi}{2}$ ,  $t_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Числовий коефіцієнт  $w$  в виразі (2) розрахований в процесі мінімізації відстані базових функцій кубічного ермітового сплайну та запропонованого виразу модифікованого сплайну. Подібно до Ермітового кубічного сплайну, розроблений вираз має неперервну першу похідну на всьому діапазоні інтерполювання  $x \in [x_0, x_n]$ .

Запропонований модифікований сплайн Ерміта окрім переваг має окремі недоліки, які також потрібно розглянути:

1. Емпірично виведені вирази та коефіцієнти знижують точність результуючої кривої сплайну.

2. Запропонований вираз сплайну має кращі інтерполяційні характеристики, в порівнянні зі сплайнами Ерміта лише для окремих періодичних та майже періодичних наборів вхідних даних.

Взявши до уваги переваги та недоліки розробленого модифікованого сплайну, виникає необхідність розробки іншого варіанту методу сплайн-інтерполяції на основі тригонометричних функцій з кращими інтерполяційними характеристиками.

З огляду на обрану область застосувань – майже періодичні функції, розроблено метод сплайн-інтерполяції, який володіє перевагами поліноміальних сплайнів:

1. Простота побудови та конструювання.
2. Компактна форма запису.
3. Можливість застосовувати різні методи та підходи для розрахунку невідомих коефіцієнтів.

Перевагами тригонометричних сплайнів є:

1. Орієнтація на майже періодичну форму вихідної кривої.



2. Врахування, прогнозування, оцінка значення періоду та еквівалентного йому параметра.

Враховуючи наведені переваги класичних тригонометричних та поліноміальних сплайнів створено наступну форму нового тригонометричного сплайну

$$T(x) = p_1 + p_2x + p_3 \cdot \cos(x) + p_4 \cdot \sin(x), \quad x \in [0; \pi/2]. \quad (3)$$

Форма нового тригонометричного сплайну є комбінацією поліноміального виразу першого степеня та перших гармонік з розкладу функції в ряд Фур'є. Комбінація таких доданків дозволить отримати проміжний метод сплайн-інтерполяції орієнтований для обробки майже періодичних дискретних даних.

Для побудови модифікованого тригонометричного сплайну за основу використовується вираз (4)

$$S(t) = a + bt + c \cdot \cos(t) + d \cdot \sin(t), \quad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad t \in [0; \pi/2]. \quad (4)$$

Змінна  $x$  між вузловими точками інтерполяційної сітки  $[x_i; x_{i+1}]$  нормуються до змінної  $t$ . Для побудови сплайну розраховуються коефіцієнти  $a, b, c, d$ , виразивши їх через значення функцій та її похідних  $f'(x_i) = R_i, f'(x_{i+1}) = R_{i+1}$  в точках інтервалу інтерполяції  $x_i$  та  $x_{i+1}$  (рис. 1).

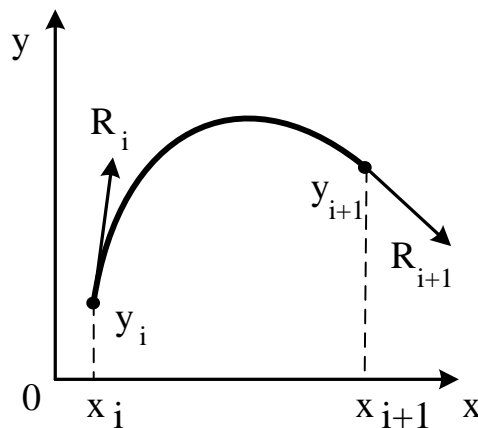


Рис. 1. Модель побудови тригонометричного сплайну

Вираз (5) є повним записом модифікованого тригонометричного сплайну. Замість кубічного поліному в тригонометричних сплайнах використовуються функції  $\sin(x)$  та  $\cos(x)$ . Комбінацією базових функцій з різними коефіцієнтами досягається необхідна форма результуючої інтерполяційної кривої.

$$\begin{aligned}
S_i(t) = & \frac{-2t + 2\sin(t) + (\pi - 2) - 2\cos(t)}{\pi - 4} S(t_i) + \\
& + \frac{-2 + 2t + 2\cos(t) - 2\sin(t)}{\pi - 4} S(t_{i+1}) + \\
& + \frac{-2\cos(t) + 2 - 2t + \sin(t) \cdot (\pi - 2)}{\pi - 4} S'(t_i) + \\
& + \frac{-2t + (\pi - 2) - \cos(t) \cdot (\pi - 2) + 2\sin(t)}{\pi - 4} S'(t_{i+1}).
\end{aligned} \tag{5}$$

В запропонованому методі умова рівності перших похідних наступного та попереднього сплайнів в точках інтерполяційної сітки виконується автоматично. При використанні запропонованого методу на практиці значення похідних  $S'(t_i)$  та  $S'(t_{i+1})$  розраховуються як точним, так і наближеним методом. В розділі наводиться виведення оцінки похибки для розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції.

Виконується розширення запропонованої математичної моделі шляхом збільшення кількості незалежних змінних початкових даних до двох. Для спрощення та скорочення запису використовується матричне представлення. Розрахунок кінцевого значення інтерполюючої функції в шуканій точці полягає у виконанні операції множення квадратної матриці коефіцієнтів  $m$  та матриць виразів вільних коефіцієнтів тригонометричного сплайну:

$$\begin{aligned}
S(x, y) &= (F_{i,j} \cdot R_x(x)) \cdot R_y(y), \\
x &\in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}], \\
R(k) &= \begin{bmatrix} \frac{-2k + 2\sin(k) + (\pi - 2) - 2\cos(k)}{\pi - 4} \\ \frac{-2 + 2k + 2\cos(k) - 2\sin(k)}{\pi - 4} \\ \frac{-2\cos(k) + 2 - 2k + \sin(k) \cdot (\pi - 2)}{\pi - 4} \\ \frac{-2k + (\pi - 2) - \cos(k) \cdot (\pi - 2) + 2\sin(k)}{\pi - 4} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{6}$$

де  $R(k)$  – вільні коефіцієнти тригонометричного сплайну для одного виміру,  $F_{i,j}$  – матриця коефіцієнтів  $m_{i,j}^{(p_x, p_y)}$  розміром  $4 \times 4$ , яка будується для області  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $y \in [y_j, y_{j+1}]$ .

$$F_{i,j} = \begin{bmatrix} m_{i,j}^{(0_x,0_y)} & m_{i+1,j}^{(0_x,0_y)} & m_{i,j}^{(1_x,0_y)} & m_{i+1,j}^{(1_x,0_y)} \\ m_{i,j+1}^{(0_x,0_y)} & m_{i+1,j+1}^{(0_x,0_y)} & m_{i,j+1}^{(1_x,0_y)} & m_{i+1,j+1}^{(1_x,0_y)} \\ m_{i,j}^{(0_x,1_y)} & m_{i+1,j}^{(0_x,1_y)} & m_{i,j}^{(1_x,1_y)} & m_{i+1,j}^{(1_x,1_y)} \\ m_{i,j+1}^{(0_x,1_y)} & m_{i+1,j+1}^{(0_x,1_y)} & m_{i,j+1}^{(1_x,1_y)} & m_{i+1,j+1}^{(1_x,1_y)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}.$$

В розділі також розроблена математична модель запропонованого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції для загального випадку – обробки дискретних даних довільної кількості незалежних змінних. Виконується конкретизація критерію оцінки ефективності розробленого методу сплайн-інтерполяції.

**Третій розділ** присвячено алгоритмізації розробленого методу та розробки програмного модуля на основі розробленого алгоритму.

Розроблено алгоритм роботи запропонованого методу сплайн-інтерполяції, наводиться блок-схема алгоритму та детальний опис кожного його блоку. Наводиться методика практичного застосування розробленого методу, де подається приклад формування одновимірних та двовимірних початкових даних інтерполювання.

Виконується аналіз та оцінка складності розробленого алгоритму. В загальному вигляді складність алгоритму поліноміальна  $O(n^t)$ , де  $n$  – зведена кількість базових точок по одному вимірі,  $t$  – вимірність задачі інтерполювання.

За розробленим алгоритмом виконана програмна реалізація в математичному програмному середовищі Matlab. Програмний модуль розроблено з дотриманням стилю середовища розробки, тому може легко використовуватися розробниками для розв'язання задачі інтерполяції. В розділі наведені приклади роботи програми при обробці одновимірних, двовимірних та тривимірних дискретних даних. На основі розробленого програмного модуля виконане тестування точності результуючої функції різної вимірності. Отримані результати наведено в цьому розділі.

В розділі також подається опис програмної реалізації розробленого алгоритму на мові програмування C#. Наводяться зображення розробленого графічного інтерфейсу користувача. Подається детальний опис функціональних можливостей та опцій розробленої програми. Крім реалізації запропонованого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції, в програмі, для порівняння, реалізовані класичні поліноміальні на тригонометричні сплайн методи. На основі розробленої програми було проаналізовано швидкість роботи програми і точність отриманих даних при застосуванні запропонованого тригонометричного методу та класичних методів поліноміальних та тригонометричних сплайнів. При тестуванні запропонованого сплайну та ермітових сплайнів виявлено, що для обробки

тригонометричних сплайнів витрачається до 2% більше часу порівняно з ермітовими поліноміальними сплайнами. Аналіз результатів виконаних порівняльних тестів показав збільшення точності інтерпольованих даних до двох раз при застосуванні точного методу розрахунку перших похідних в базових точках порівняно з наближеним. Проаналізувавши та порівнявши результати тестувань методів інтерполяції з використанням засобів розпаралелювання зроблено висновок про скорочення часу роботи до 25% порівняно зі звичайним однопотоковою обробкою даних.

**У четвертому розділі** виконується практична реалізація розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції. Для перевірки роботи запропонованого методу тригонометричного сплайна в цьому розділі виконується інтерполяція та оцінка точності результатів обробки тестових функцій, що мають майже періодичний та квазіперіодичний характер. Також в розділі виконується перевірка ефективності розробленого методу інтерполяції тригонометричними сплайнами на двох практичних задачах.

Виконане практичне застосування розробленого методу для задачі збільшення (масштабування) зображень. Для цього обґрунтовано майже періодичність сигналу, утвореного значеннями інтенсивності кожного пікселя. Визначено клас зображень – текстури, для яких застосування реалізованої моделі тригонометричної сплайн-інтерполяції є точнішим, в порівнянні з існуючими методами збільшення. Кожне зображення представляється в кольоровій палітрі RGB і є трьома двовимірними майже періодичними функціями інтенсивності пікселів для кожного кольору. Застосування розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції дозволило точніше виконати операцію збільшення для обраного класу зображень навіть в порівнянні з аналогічними інструментами такими професійних визнаних програмних продуктів як Adobe Photoshop CS5 та Matlab R2009a. Числове значення покращення точності, розраховане на основі показників NMSE, при збільшенні зображення запропонованим тригонометричним сплайн методом змінюється від 16.09% до 3% для збільшення  $\times 2$  та від 9.34% до 1.45% для збільшення  $\times 5$ , в залежності від обраного методу порівняння.

Іншою практичною задачею, що розглядається в цьому розділі є покращення якості та зміна параметру аудіо запису. Для цієї практичної задачі обґрунтовано майжеперіодичність аудіо сигналу та визначено клас звукових доріжок з яскраво вираженим темпом, ритмічністю та повторюваністю частин запису, які в дискретному вигляді формують набір даних, що за своєю формою подібні до класу майже періодичних функцій. Для таких аудіо даних застосування розробленої програмної моделі є ефективнішим, порівняно з іншими методами інтерполяції. Для розв'язання цієї задачі було розроблено програмний модуль формування, обробки та оцінки точності покращення якості аудіо даних, застосовуючи різні методи інтерполяції. Результати тестувань розробленого програмного модуля

відновлення аудіо підтвердили ефективність застосування запропонованого в дисертаційному дослідженні методу інтерполяції тригонометричними сплайнами в порівнянні з іншими методами для обраного класу аудіо записів. За розрахованими оцінками точності застосування розробленого методу сплайн-інтерполяції дозволяє покращити точність відновлення аудіо сигналу в діапазоні від 94.72% до 16.79%, в залежності від методу з яким виконується порівняння.

В розділі описуються впровадження розробленого методу в навчальний процес на кафедрі Автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки ВНТУ, в практичну задачу градування терморезистивного первинного перетворювача абсолютного тиску МИДА-ДА на підприємстві ДП “Енергооблік”, а також в модуль зміни розмірів та якості кадрів відео потоку в програмному продукті «PC Player», призначеного для прийому, обробки, програвання, запису та ретрансляції медіа потоку.

У додатках наведено акти впровадження результатів дисертаційної роботи та лістинги розроблених програмних забезпечень.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. В роботі запропоновано новий метод тригонометричної інтерполяції сплайнами. Особливість розробленого методу сплайн-інтерполяції полягає в його ефективному, в порівнянні з іншими методами, застосуванні для майже періодичних та псевдо періодичних функцій. Ермітові кубічні сплайни було взято за основу при розробці тригонометричних сплайнів, оскільки така форма представлення кубічного виразу дозволяє зменшити кількість шуканих параметрів, а також застосовувати як точні, так і наближені методи для їх розрахунку.

2. Аналіз кола задач та типів функцій, для яких розроблено методи інтерполяції дозволив виокремити порівняно мало вивчений, з погляду ефективного застосування методів інтерполяції, клас функцій – майже періодичні функції. Основною областю застосування розроблених методів сплайн-інтерполяції обрано майже періодичні та квазіперіодичні функції. В роботі виконано аналіз найбільш поширених методів інтерполяції взагалі та сплайн-інтерполяції зокрема, щодо можливості та ефективного застосування для обраних типів функцій. Основна увага в роботі приділяється методам інтерполяції сплайнами. Оскільки кожний метод сплайн-інтерполяції розроблений і ефективний для розв’язання певного класу задач, то створення окремого методу сплайн-інтерполяції для обробки дискретних послідовностей майже періодичного характеру є логічним розвитком та розширення теорії сплайнів.

3. Другий розділ цієї дисертаційної роботи містить послідовність виведення математичної моделі нового методу сплайн-інтерполяції. Застосування тригонометричних виразів в записі розробленого методу

дозволяє отримати точніший результат інтерполювання для майже періодичних, псевдо періодичних та наближених до періодичних вхідних числових дискретних послідовностей в порівнянні з іншими методами інтерполяції. Для розробленого методу інтерполяції в роботі виводяться вирази оцінок похибок, використовуючи розклад функції в ряд Тейлора.

4. Для розширення кола задач застосування розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції в роботі виводяться вирази інтерполювання двовимірних та багатовимірних функцій. Вирази розробленого методу інтерполяції для інтерполювання багатовимірних функцій представлено в матричному вигляді, що є базою для алгоритмізації розробленого методу та дозволяє підвищити ефективність інтерполювання шляхом розпаралелювання обчислювальних операцій на персональних комп'ютерах з багатоядерними процесорними пристроями.

5. Розроблено алгоритм та методику застосування розробленого методу інтерполяції тригонометричними сплайнами як для інтерполювання простої одновимірної функції, так і для обробки багатовимірних числових даних. Наводиться схема роботи алгоритму та його детальний опис.

6. В дисертаційній роботі виконана програмна реалізація розробленого алгоритму запропонованого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції в математичному програмному пакеті Matlab. Код програмної реалізації розроблено в вигляді функціонального модуля з набором вхідних і вихідних параметрів, подібним до вбудованих функцій інтерполювання математичного пакету. Аналізуються основні функціональні блоки розробленого програмного модуля, їх параметри та призначення. В роботі перевіряється розроблений програмний модуль шляхом виконання інтерполяції тестових функцій різного виду та порівняння точності результатів інтерполювання проаналізованими методами. Виконаний порівняльний аналіз результатів інтерполювання дозволив зробити висновок, що розроблений метод тригонометричної сплайн-інтерполяції є ефективнішим для майже класу періодичних та квазіперіодичних функцій. Основним критерієм ефективності методів інтерполяції в роботі є точність.

7. Для дослідження якісних характеристик розробленого методу тригонометричної інтерполяції алгоритм його роботи реалізовано на мові C#. При тестуванні запропонованого сплайну виявлено, що для обробки тригонометричних сплайнів витрачається до 2% більше часу порівняно з ермітовим кубічним поліноміальним сплайном. Аналіз результатів виконаних тестів показав збільшення точності інтерпольованих даних до двох раз при застосуванні точного методу розрахунку перших похідних в базових точках порівняно з наближеним. Проаналізувавши та порівнявши результати тестувань методів інтерполяції з використанням засобів розпаралелювання зроблено висновок про скорочення часу роботи до 25% порівняно зі звичайною однопотоковою обробкою даних. Наведені дані підтверджують третій пункт новизни про підвищення ефективності застосування

розпаралелювання обчислень на основі запропонованого матричного представлення розробленої математичної моделі.

8. В роботі виконано застосування запропонованого методу інтерполяції для задачі збільшення (масштабування) цифрових зображень. Визначено клас зображень - текстури, для яких застосування розробленого алгоритму збільшення, дозволить отримати точніше відновлене зображення, в порівнянні із застосуванням інших методів збільшення. Для обраних типів растрових зображень, що містять подібні, проте не ідентичності області, а також розмір схожих областей зображення наближається до розміру точки цього зображення, виконується обґрунтування майже періодичності функції, яку формує сигнал інтенсивності пікселів зображення. Відповідно до обраної кольорової палітри пікселя формату RGB, кожне зображення розглядається та обробляється як комбінація трьох кольорових складових – червоного, зеленого та синього. На основі запропонованого методу розроблено алгоритм та програмне для збільшення (масштабування) зображень. Для цієї задачі виконано оцінку похибки збільшених зображень розробленим методом сплайн-інтерполяції та стандартними методами збільшення зображень програмного пакету Matlab та графічного редактора Adobe Photoshop CS5. Результати тестувань показали, що розроблений метод тригонометричної сплайн-інтерполяції формує точніше, в порівнянні зі класичними методами збільшення, вихідне зображення. Числове значення покращення точності, розраховане на основі показників NMSE, при збільшенні зображення запропонованим тригонометричним сплайн методом змінюється від 16.09% до 3% для збільшення  $\times 2$  та від 9.34% до 1.45% для збільшення  $\times 5$ , в залежності від обраного методу порівняння.

9. В дисертаційній роботі виконане ще одне практичне застосування розробленого методу тригонометричної сплайн-інтерполяції для задачі покращення якості та зміни параметрів аудіо запису. Аналіз аудіо записів різного типу дозволив виокремити клас звукових доріжок, з яскраво вираженим темпом, ритмічністю та повторюваністю частин запису, які в дискретному вигляді формують набір даних, що за своєю формою подібні до класу майже періодичних функцій. До таких записів належать дзвінок телефону, звук поліцейської сирени, брехання собаки, звук падаючої краплі. Для обраного класу аудіо даних виконане обґрунтування майже періодичної форми сигналу. Реалізований програмний модуль, який складається з блоків формування аудіо даних – запис голосу або завантаження файлу, відновлення аудіо даних використовуючи новий реалізований метод тригонометричної сплайн-інтерполяції та оцінки точності результатів обробки початкового та відновленого сигналів. За розрахованими оцінками точності застосування розробленого методу сплайн-інтерполяції дозволяє покращити точність відновлення аудіо сигналу в діапазоні від 94.72% до 16.79%, в залежності від обраного методу порівняння.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції / [Кветний Р.Н., Дементьєв В.Ю., Магницький М.О., Юдін О.О.] – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 92 с.
2. Дементьєв В. Ю. Багатовимірні інтерполяції сплайнами / В. Ю. Дементьєв // Вісник Черкаського державного технічного університету (спецвипуск). – Черкаси: ЧДТУ, 2007. – С. 74-76.
3. Дементьєв В. Ю. Застосування чисельного інтегрування кубічними сплайнами в пристроях обліку кількості енергоносія / Ю. В. Дементьєв, В. Ю. Дементьєв // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2010. – №1(17). – С. 21-27.
4. Дементьєв В. Ю. Модифіковані тригонометричні сплайни / Р. Н. Кветний, В. Ю. Дементьєв // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2009. – №1 (17) . – С. 65-70.
5. Дементьєв В. Ю. Тригонометрична інтерполяція сплайнами / Р. Н. Кветний, В. Ю. Дементьєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 5. – С. 67-68.
6. Дементьєв В. Ю. Комп'ютерна програма «Багатовимірні інтерполяції тригонометричними сплайнами». Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. Україна. №22676 від 14.11.2007.
7. Дементьєв В. Ю. Багатовимірні інтерполяції сплайнами / В. Ю. Дементьєв // Автоматика-2006 : XIII міжнародна конференція з автоматичного управління, 25–28 вер. 2006 р. : матеріали конф. - Вінниця, 2007. – С.13-15.

## АНОТАЦІЇ

**Дементьєв В. Ю. Інтерполяція майже періодичних функцій тригонометричними сплайнами в задачах обробки дискретних даних. —** Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. — Вінницький національний технічний університет, Вінниця — 2011.

Дисертація присвячена підвищенню ефективності процесу інтерполяції майже періодичних дискретних даних при застосуванні тригонометричного сплайн методу.

В роботі запропоновано новий метод тригонометричної сплайн-інтерполяції, який дозволяє підвищити ефективність інтерполювання майже періодичних дискретних даних. Розширено область застосування



запропонованого методу для обробки двовимірних та багатовимірних дискретних даних. Для розробленої математичної моделі сплайн-інтерполяції отримано оцінки похибок результуючих даних. Досягається підвищення швидкодії методу сплайн-інтерполяції за рахунок представлення запропонованої математичної моделі в матричному вигляді, що дало можливість розпаралелити процес обчислення. Проведено дослідження ефективності розробленого методу за критеріями часу обробки та точності результуючих даних. Розроблено методику та алгоритм для реалізації запропонованої математичної моделі, на основі яких створено програмне забезпечення.

*Ключові слова:* майже періодична функція, інтерполяція, багатовимірна інтерполяція, сплайн-інтерполяція, тригонометрична інтерполяція, матричне представлення.

**Дементьев В. Ю. Интерполяция почти периодических функций тригонометрическими сплайнами в задачах обработки дискретных данных.** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Винницкий национальный технический университет, Винница. – 2011.

Диссертация посвящена повышению эффективности процесса интерполяции почти периодических дискретных данных при применении тригонометрического сплайн метода.

В работе предложен новый метод тригонометрической сплайн-интерполяции, позволяющий повысить эффективность интерполирования почти периодических дискретных данных. Кубические сплайны Эрмита были взяты за основу при разработке тригонометрических сплайнов, поскольку такое выражение позволяет уменьшить количество искомых параметров, а также применять как точные, так и приближенные методы для их расчета. Для расширения задач применения разработанного метода тригонометрической сплайн-интерполяции в работе выводятся выражения интерполирования двумерных и многомерных функций. Выражения разработанного метода интерполяции для многомерных функций представлено в матричном виде, что является базой для алгоритмизации разработанного метода и позволяет повысить эффективность интерполирования путем распараллеливания вычислительных операций на персональных компьютерах с многоядерными процессорными устройствами. Для разработанной математической модели сплайн-интерполяции получены оценки погрешностей результующих данных. Изучена эффективность разработанного метода по критериям времени обработки и точности результующих данных.

Разработана методика и алгоритм для реализации предложенной

математической модели как для одномерной, так и многомерной функции. В диссертационной работе выполнена программная реализация разработанного алгоритма предложенного метода тригонометрической сплайн-интерполяции в математическом программном пакете Matlab. Программа разработана в виде функционального модуля с набором входных и выходных параметров. Детально анализируются основные функциональные блоки разработанного программного модуля, их параметры и назначение. В работе проверяется разработанный программный модуль путем выполнения интерполяции тестовых почти периодических функций различного вида и сравнения точности результатов интерполирования. Сравнительный анализ результатов интерполирования позволил сделать вывод, что разработанный метод тригонометрической сплайн-интерполяции является эффективным для класса почти периодических функций. Критериями эффективности методов интерполяции в работе являются точность и быстродействие.

Исследованы качественные характеристики работы алгоритма на основе метода тригонометрической сплайн-интерполяции, который реализован на языке C#. Тестирование предложенного метода показало, что для обработки тригонометрических сплайнов тратится до 2% больше времени по сравнению с кубическим полиномиальным сплайном Эрмита. Анализ результатов выполненных тестов показал увеличение точности интерполированных данных до двух раз при применении точного метода расчета первых производных в базовых точках, по сравнению с приближенным. Сравнение результатов тестирования методов интерполяции с использованием средств распараллеливания позволяет сделать вывод о сокращении времени работы до 25% по сравнению с обычной однопоточковой обработкой данных.

Предложенный метод интерполяции применен к задаче увеличения (масштабирование) цифровых изображений. Определен класс изображений – текстуры, для которых использование разработанного алгоритма увеличения, позволит получить более точное восстановленное изображение, в сравнении с применением других методов. В соответствии с выбранной цветовой палитры пикселя формата RGB, каждое изображение рассматривается и обрабатывается как комбинация трех цветовых составляющих - красного, зеленого и синего. На основе предложенного метода разработан алгоритм и программное обеспечение для увеличения (масштабирование) изображений. Результаты тестирований показали, что разработанный метод тригонометрической сплайн-интерполяции формирует более точное, в сравнении с классическими методами увеличения, исходное изображение. Числовое значение улучшения точности, рассчитанное на основе показателя нормированной среднеквадратической погрешности, при использовании предложенного тригонометрического сплайна меняется от 16.09% до 3% для увеличения  $\times 2$  и от 9.34% до 1.45% для увеличения  $\times 5$ , в зависимости от выбранного метода сравнения.

Выполнено применение разработанного метода тригонометрической сплайн-интерполяции для задачи улучшения качества и изменения параметров аудио записи. Анализ аудиозаписей различного типа позволил выделить класс звуковых дорожек, с ярко выраженным темпом, ритмичностью и повторяемостью частей записи, которые в дискретном виде формируют набор данных, по своей форме подобны классу почти периодических функций. Для выбранного класса аудио данных выполнено обоснование почти периодической формы сигнала. Рассчитанные значения точности при применении разработанного метода сплайн-интерполяции показывают улучшение точности восстановления аудио сигнала в диапазоне от 94.72% до 16.79%, в зависимости от выбранного метода сравнения.

*Ключевые слова:* почти периодическая функция, интерполяция, многомерная интерполяция, сплайн-интерполяция, тригонометрическая интерполяция, матричное представление.

**Dementiev V. Y. Almost periodic functions interpolation by trigonometric splines in discrete data processing problems.** — A manuscript.

Thesis for achievement of a candidate's degree in technical sciences by specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. — Vinnytsia National Technical University. Vinnytsia. — 2011.

The thesis is devoted to improve the efficiency of almost periodic discrete data interpolation process processing by applying trigonometric spline method.

This thesis proposes a new method of trigonometric spline interpolation which provides interpolation efficiency increasing of almost periodic discrete data. The proposed method application has been expanded by processing two-dimensional and multidimensional discrete data. Resulting data error estimates were obtaining for developed spline interpolation mathematical model. Spline interpolation method performance improvement had been achieved through the presentation in matrix form of proposed mathematical model, which is enable to use multi threads calculation. Performance and accuracy of suggested methods was investigated. Methodology and algorithm of suggested methods usage were developed. Software was developed by using suggested methodology and algorithm as well.

*Keywords:* almost periodic function, interpolation, multivariate interpolation, spline interpolation, trigonometric interpolation, matrix representation.

Підписано до друку 31.08.2011 р. Формат 29,7×42<sup>1</sup>/<sub>4</sub>  
Наклад 100 прим. Зам. № 2011-132

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95. Тел.: 59-81-59