Вінницький національний технічний університет

Машницький Максим Олександрович

УДК 519.65

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ БАГАТОВИМІРНИХ ФУНКЦІЙ РІЗНИЦЕВИМИ МЕТОДАМИ

Спеціальність 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Вінниця – 2011

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Вінницькому національному технічному університеті Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник

доктор технічних наук, професор
Квєтний Роман Наумович,
Вінницький національний технічний університет,
завідувач кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки.

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор
Пєтух Анатолій Михайлович,
Вінницький національний технічний університет,
завідувач кафедри програмного забезпечення;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Фінін Георгій Семенович,
Міжнародний Соломонів університет, м. Київ,
перший проректор.

Захист відбудеться «_18_» __03____2011 р. о _12_ $^{-00-}$ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 05.052.01 у Вінницькому національному технічному університеті за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, ГНК, ауд. 210.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Вінницького національного технічного університету за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95.

Автореферат розісланий «14» ____02____ 2011 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради С.М. Захарченко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Стрімкий розвиток електроніки та техніки розширив можливості комп'ютерів та дозволив швидко виконувати складні математичні розрахунки. Це дало поштовх для розвитку методів моделювання складних об'єктів. В сучасних програмних пакетах для моделювання об'єктів та роботи з багатовимірною графікою використовуються одновимірні, двовимірні та тривимірні методи інтерполяції сплайнами. Проте для більш реалістичного моделювання, крім обробки координат поверхні об'єкта, потрібно враховувати інші фактори, які на нього впливають. Для моделювання об'єктів з багатовимірною математичною моделлю, наприклад, моделей фізичних процесів, характер яких залежить від багатьох факторів, виникає задача обробки великих масивів даних. Інтерполяція є одним з найбільш поширених методів обробки даних. Задача інтерполяції полягає в знаходженні аналітичного вигляду функції, яка проходить через задані точки. В літературі представлені різницеві методи для інтерполяції функції однієї та двох змінних, які розроблено в працях багатьох вчених-класиків прикладної математики: Йоганна Карла Фрідріха Гауса, Фрідріха Вільгельма Бесселя, Ісаака Ньютона, Джеймса Стірлінга, Олексія Миколайовича Крилова, Гурія Івановича Марчука, Олександра Андрійовича Самарського, Андрія Миколайовича Тихонова та ін. Раніше розширювати різницеві методи інтерполяції не було сенсу, так як в результаті отримувались громіздкі формули з великою обчислювальною складністю, які було важко та неефективно використовувати при вирішенні практичних задач. На сучасному етапі розвитку обчислювальних ресурсів існує можливість вирішувати задачі великої складності завдяки розробкам ефективних обчислювальних схем з використанням паралелізації обчислень. Якщо проводити обчислення різницевих методів інтерполяції за класичною методикою, то їх реалізація буде не дуже ефективною, навіть для сучасної техніки. Тому через велику кількість обчислень та складність інтерполяційного процесу виникає потреба в знаходженні ефективного представлення математичних моделей для багатовимірної інтерполяції різницевими методами, що дасть змогу забезпечити достатню швидкодію, ефективно використовувати обчислювальні ресурси та реалізовувати переваги різницевих методів в тих областях застосувань, де вони за своєю природою можуть бути конкурентноспроможними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами. Результати досліджень, що представлені в дисертації, виконувалися в межах держбюджетної науково-дослідної роботи „Методологія розв'язання задач багатовимірної інтерполяції в просторі і в часі" (номер державної реєстрації – №0107U002092), що проводилась в Вінницькому національному технічному університеті в 2006–2009 р. р., де автор був виконавцем.

Мета і завдання дослідження. *Мета дослідження* полягає в підвищенні ефективності процесу інтерполювання функцій шляхом подальшого розвитку різницевих методів, що дозволить підвищити точність інтерполяції та розширити можливості застосування різницевих методів для задач багатовимірної інтерполяції.

Задачі дослідження:

1. Аналіз математичних моделей існуючих різницевих методів інтерполяції для узагальнення їх на функції багатьох змінних.
2. Вдосконалення математичних моделей інтерполяції різницевими методами, які дадуть змогу інтерполювати багатовимірну функцію із заданою похибкою поблизу початкових значень (перша формула Ньютона), середніх значень (формули Гауса, Бесселя та Стірлінга) та кінцевих значень (друга формула Ньютона) інтервалу інтерполювання.
3. Дослідження шляхів підвищення ефективності математичних моделей багатовимірної інтерполяції різницевими методами для забезпечення достатньої швидкодії та оптимального використання обчислювальних ресурсів.
4. Розробка алгоритмів, методик та програмного забезпечення для реалізації запропонованих моделей. Апробація та застосування розроблених моделей на тестових

прикладах. Впровадження результатів досліджень в конкретних практичних застосуваннях.

Об'єкт дослідження – процес інтерполяції функцій багатьох змінних.

Предмет дослідження – методи та моделі різницевої інтерполяції функцій багатьох змінних.

Методи дослідження: чисельні методи інтерполяції, теорія різницевих схем, матрична алгебра та теорія алгоритмів для розробки математичних моделей інтерполювання багатовимірних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. В результаті виконаного дисертаційного дослідження отримано нові наукові результати у напрямку інтерполяції багатовимірних функцій різницевими методами, а також сферичної інтерполяції.

1. Запропоновано новий підхід для інтерполяції багатовимірних функцій різницевими методами, який на відміну від існуючих базується на використанні багатовимірних різниць, що дало змогу вперше розробити багатовимірні різницеві математичні моделі для інтерполяції функцій багатьох змінних.
2. Отримали подальший розвиток методи різницевої інтерполяції, які на відміну від існуючих використовують багатовимірні різниці, що дозволяють інтерполювати багатовимірну функцію із заданою похибкою поблизу початкових значень (багатовимірна модель першої формули Ньютона), середніх значень (багатовимірні моделі формул Гауса, Бесселя та Стірлінга) та останніх значень (багатовимірна модель другої формули Ньютона) заданого інтервалу.
3. Вперше запропоновано матричні математичні моделі інтерполяції різницевими методами Ньютона та Гауса, що в порівнянні з класичними формами описання моделей дає змогу збільшити швидкодію за рахунок розпаралелювання процесу обчислень.
4. Вперше запропоновано метод організації обчислень для інтерполювання функцій багатьох змінних за різницевими методами Ньютона та Гауса, який на відміну від класичного методу організації обчислень використовує схему Горнера, що дає змогу зменшити кількість обчислювальних операцій.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що:

1. Розроблено методики практичного використання запропонованих математичних моделей для інтерполювання багатовимірних функцій, що дає змогу ефективного використання отриманих результатів для розв'язання задачі інтерполяції багатовимірної функції у широкому колі практичних задач.
2. Розроблено алгоритми та програмне забезпечення для розрахунку та візуалізації результатів інтерполяції тривимірних функцій.
3. Розроблено алгоритм та програмне забезпечення для інтерполяції багатовимірних функцій, використовуючи першу і другу формули Ньютона в матричному вигляді.

Результати роботи впроваджено для моніторингу температурного стану в елеваторі з пшеницею на підприємстві ТОВ "ІВП ІнноВіннпром" (м. Вінниця, Україна), збільшення розміру кадру при відображенні відеопотоку для компанії "SmartExe"(Рамат-Ган, Ізраїль) та використовуються в навчальному процесі у Вінницькому національному технічному університеті під час викладання лекцій та проведення занять з курсу "Обчислювальні методи та застосування ЕОМ", розділ "Методи обробки даних" для студентів спеціальності 7.091401 "Системи управління і автоматики" на кафедрі автоматики і вимірювальної техніки.

Особистий внесок здобувача. У роботах, що опубліковано у співавторстві: у монографії [1] автору належить розділ 3, присвячений багатовимірній інтерполяції різницевими методами; у статті [2] автором запропонований метод моделювання об'єктів в сферичних системах координат; у статті [3] автором розроблено метод моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Гауса; у статті [4] автором запропонований метод запропоновано метод моделювання тривимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Бесселя; у статті [6] автором розроблено метод моделювання одновимірних об’єктів в просторі; у статті [7] автором запропонований метод моделювання тривимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Ньютона; у статті [9] автором запропонований метод моделювання двохвимірних поверхонь з додатковими параметрами при використанні методу Ньютона та його модифікацій; у статті [10] автором запропоновані та описані математичні моделі для моделювання багатовимірних об’єктів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень дисертаційної роботи пройшли апробацію на наукових конференціях:

1. XIII міжнародна конференція з автоматичного управління (Автоматика–2006). – м. Вінниця, 2006 р.;
2. XXXV, XXXVI, XXXVII, XXXVIII, XXXIX науково-технічні конференції професорсько-викладацького складу, співробітників та студентів Вінницького національного технічного університету з участю працівників науково-дослідницьких організацій та інженерно-технічних працівників підприємств м. Вінниці та області. – м. Вінниця, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010 рр.;
3. Гарантоспособные (надежные и безопасные) системы, сервисы и технологии. – г. Кировоград, 2007 р.;
4. Контроль та управління у складних системах, IX Міжнародна конференція. – Вінниця, ВНТУ, 2008 р.;
5. Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні (м. Дніпропетровськ);
6. Третя міжнародна науково-технічна конференція «Датчики. Приборы. Системы.». – м. Ялта, 2007р.;
7. V міжнародна науково-технічна конференція «ДАТЧИКИ, ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ–2009».

Публікації. За результатами виконаних досліджень опубліковано 13 наукових праць – з них 8 статей у наукових фахових виданнях з переліку ВАК України, 1 монографія, 1 свідоцтво про реєстрацію авторських прав на комп’ютерну програму, 2 публікації у збірниках праць науково-технічних конференцій та 1 публікація у вигляді тез доповідей.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, додатків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 215 сторінок, з яких основний зміст викладено на 150 сторінках друкованого тексту, містить 17 рисунків та 9 таблиць. Список використаних джерел складається з 128 найменувань. Додатки містять окремі лістинги програм та акти впровадження результатів роботи і викладені на 39 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, визначено мету та задачі досліджень, відзначено наукову новизну та практичну цінність роботи.

В першому розділі зроблено огляд літературних джерел за темою дисертаційної роботи, розглянуто класичні та сучасні різницеві методи інтерполяції. Аналіз сучасного стану проблеми інтерполяції дав змогу зробити висновок, що в порівнянні з розглянутими методами інтерполяції функції однієї та двох змінних, задача інтерполяції функцій трьох та більше змінних є не достатньо дослідженою. Хоча для багатьох класичних методів інтерполяції розроблені математичні моделі функцій двох змінних, проте їх тривимірні та багатовимірні варіанти зазвичай відсутні. Серед проаналізованих методів поліноміальної інтерполяції лише різницеві методи та метод Лагранжа мають модифікації для інтерполювання функції двох змінних. Для розв’язання задачі інтерполювання функції, яка залежить від трьох та більше змінних, виникає потреба у створенні нових математичних виразів та їх модифікацій.

Розглянуті прикладні задачі в яких використовується багатовимірна інтерполяція та як вона вирішується сьогодні. Сучасні програмні пакети для роботи з комп’ютерною графікою, такі як 3Ds Max, AutoCad та інші, для двовимірного та тривимірного моделювання використовують метод трикутників, NURBS криві та інші методи сплайн інтерполяції. Метод трикутників є одним із поширених методів побудови тривимірних об’єктів. Проте його недоліком є значне збільшення кількості базових точок для опису опуклих областей моделі. Зі збільшенням опуклості об’єкта збільшується кількість точок для відображення тривимірного об’єкта. Для уникнення такого недоліку варто використовувати нелінійні методи інтерполяції, які дадуть змогу описати опуклість об’єкта значно меншою кількістю точок. При збільшенні кількості вимірів для відображення об’єкта виникає потреба використання багатовимірних методів інтерполяції.

Приділено увагу можливості підвищення ефективності різницевих методів, для яких раніше не було можливості розвивати для інтерполювання функції трьох та більше значень функції, так як зі збільшенням вимірності сітки вузлів заданої функції збільшувалась складність математичної моделі. Ці методи ставали громіздкими та вимагали значних обчислювальних ресурсів, тому вони були не ефективними для застосування на практиці. Хоча сучасний розвиток обчислювальної техніки має великі можливості, але якщо проводити обчислення різницевими методами за класичним підходом для інтерполювання функції багатьох змінних, то вони все одно будуть не достатньо ефективними у практичному застосуванні через надто велику кількість обчислювальних операцій. Підвищення ефективності інтерполяції різницевими методами дасть змогу розширити область застосування у різних задачах багатовимірного моделювання, комп’ютерної графіки, моніторингу та інших математичних задачах обробки багатовимірних даних.

Другий розділ присвячено розробці теоретичних засад теорії інтерполяції різницевими методами функції трьох змінних.

Розроблено аналоги математичних моделей інтерполяції різницевими методами, які на відміну від існуючих використовують тривимірні різниці та дають змогу інтерполювати тривимірну функцію з регламентованою похибкою поблизу початкових значень (перша формула Ньютона), середніх значень (формули Гауса, Бесселя та Стірлінга) та останніх значень (друга формула Ньютона) інтервалу інтерполювання.

Для інтерполяції тривимірної функції різницевими методами використовуються тривимірні різниці різних порядків:

$$\Delta^{m+n+c}\varphi_{ijk} = \Delta^{m+n+c}_{x^m y^n z^c}\varphi_{ijk} = \Delta^m_{x^m}\left(\Delta^n_{y^n}\left(\Delta^c_{z^c}\varphi_{ijk}\right)\right), \tag{1}$$

для яких $\Delta^{0+0+0}\varphi_{ijk} = \varphi_{ijk}$.

Аналог першої інтерполяційної формули Ньютона в узагальненому вигляді для інтерполювання функції трьох змінних:

$$P_n(x,y,z) = \sum_{i=0}^{n} p^{[i]} \sum_{j=0}^{n} q^{[j]} \sum_{k=0}^{n} r^{[k]} \Delta^{i+j+k}\varphi_{000}, \tag{2}$$

де $p = \dfrac{(x-x_0)}{h_x}$, $q = \dfrac{(y-y_0)}{h_y}$, $r = \dfrac{(z-z_0)}{h_z}$ – кількість кроків для досягнення точки x з x_0, y з y_0 та z з z_0 відповідно;

$p^{[n]} = \frac{p}{1}\frac{(p-1)}{2}\frac{(p-2)}{3}\dots\frac{(p-n+1)}{n}$, $q^{[n]} = \frac{q}{1}\frac{(q-1)}{2}\frac{(q-2)}{3}\dots\frac{(q-n+1)}{n}$,

$r^{[n]} = \frac{r}{1}\frac{(r-1)}{2}\frac{(r-2)}{3}\dots\frac{(r-n+1)}{n}$ – узагальнений степінь чисел *p*, *q* та *r*, відповідно;

$p^{[0]} = q^{[0]} = r^{[0]} = 1.$

Аналог другої інтерполяційної формули Ньютона в узагальненому вигляді для інтерполяції функції трьох змінних:

$$P_n(x, y, z) = \sum_{i=0}^{n} p^{[i]} \sum_{j=0}^{n} q^{[j]} \sum_{k=0}^{n} r^{[k]} \Delta^{i+j+k} \varphi_{n-i,n-j,n-k}, \tag{3}$$

де $p = \frac{(x-x_n)}{h_x}$, $q = \frac{y-y_n}{h_y}$ та $r = \frac{(z-z_n)}{h_z}$ – кількість кроків для досягнення точки x з x_0, y з y_0 та z з z_0 відповідно;

$p^{[n]} = \frac{p}{1}\frac{(p+1)}{2}\frac{(p+2)}{3}\dots\frac{(p+n-1)}{n}$, $q^{[n]} = \frac{q}{1}\frac{(q+1)}{2}\frac{(q+2)}{3}\dots\frac{(q+n-1)}{n}$,

$r^{[n]} = \frac{r}{1}\frac{(r+1)}{2}\frac{(r+2)}{3}\dots\frac{(r+n-1)}{n}$ - узагальнений степінь чисел *p*, *q* та *r*, відповідно;

$p^{[0]} = q^{[0]} = r^{[0]} = 1.$

Аналог першої інтерполяційної формули Гауса в узагальненому вигляді для інтерполяції функції трьох змінних:

$$P(x, y, z) = \sum_{i=0}^{2n} (p+s)^{[i]} \sum_{j=0}^{2n} (q+d)^{[j]} \sum_{k=0}^{2n} (r+g)^{[k]} \Delta^{i,j,k} \varphi_{m,l,u}, \tag{4}$$

де $p = \frac{(x-x_0)}{h_x}$, $q = \frac{(y-y_0)}{h_y}$, $r = \frac{(z-z_0)}{h_z}$ – кількість кроків для досягнення точки x з x_0, y з y_0 та z з z_0 відповідно;

$(p+s)^{[n]} = \frac{(p+s)}{1}\frac{(p+s-1)}{2}\frac{(p+s-2)}{3}\dots\frac{(p+s-n+1)}{n}$,

$(q+d)^{[n]} = \frac{(q+d)}{1}\frac{(q+d-1)}{2}\frac{(q+d-2)}{3}\dots\frac{(q+d-n+1)}{n}$,

$(r+g)^{[n]} = \frac{(r+g)}{1}\frac{(r+g-1)}{2}\frac{(r+g-2)}{3}\dots\frac{(r+g-n+1)}{n}$ - узагальнений степінь чисел *p*, *q* та *r*, відповідно;

$(p+s)^{[0]} = (q+d)^{[0]} = (r+g)^{[0]} = 1;$

$m = -\lfloor i/2 \rfloor$, $l = -\lfloor j/2 \rfloor$, $u = -\lfloor k/2 \rfloor$, $s = \lceil i/2 \rceil - 1$, $d = \lceil j/2 \rceil - 1$, $g = \lceil k/2 \rceil - 1.$

Аналог другої інтерполяційної формули Гауса в узагальненому вигляді для інтерполяції функції трьох змінних:

$$P(x,y,z)=\sum_{i=0}^{2n}(p+s)^{[i]}\sum_{j=0}^{2n}(q+d)^{[j]}\sum_{k=0}^{2n}(r+g)^{[k]}\Delta^{i,j,k}\varphi_{m,l,u}, \qquad (5)$$

де $p=\dfrac{(x-x_0)}{h_x}$, $q=\dfrac{(y-y_0)}{h_y}$, $r=\dfrac{(z-z_0)}{h_z}$ – кількість кроків для досягнення точки x з x_0, y з y_0 та z з z_0 відповідно;

$(p+s)^{[n]}=\dfrac{(p+s)}{1}\dfrac{(p+s-1)}{2}\dfrac{(p+s-2)}{3}\dots\dfrac{(p+s-n+1)}{n}$,

$(q+d)^{[n]}=\dfrac{(q+d)}{1}\dfrac{(q+d-1)}{2}\dfrac{(q+d-2)}{3}\dots\dfrac{(q+d-n+1)}{n}$,

$(r+g)^{[n]}=\dfrac{(r+g)}{1}\dfrac{(r+g-1)}{2}\dfrac{(r+g-2)}{3}\dots\dfrac{(r+g-n+1)}{n}$ - узагальнений степінь чисел *p, q* та *r*, відповідно;

$(p+s)^{[0]}=(q+d)^{[0]}=(r+g)^{[0]}=1;$

$m=-\lceil i/2\rceil,\ l=-\lceil j/2\rceil,\ u=-\lceil k/2\rceil,\ s=\lfloor i/2\rfloor,\ d=\lfloor j/2\rfloor,\ g=\lfloor k/2\rfloor.$

Аналог інтерполяційної формули Стірлінга в узагальненому вигляді для інтерполяції функції трьох змінних:

$$P(x,y,z)=\sum_{i=0}^{2n}p[i]\sum_{j=0}^{2n}q[j]\sum_{k=0}^{2n}r[k]\frac{\Delta^{i,j,k}\varphi_{m,l,u}+\Delta^{i,j,k}\varphi_{s,d,g}}{2}, \qquad (6)$$

де $p=\dfrac{(x-x_0)}{h_x}$, $q=\dfrac{(y-y_0)}{h_y}$, $r=\dfrac{(z-z_0)}{h_z}$ – кількість кроків для досягнення точки x з x_0, y з y_0 та z з z_0 відповідно;

$p^{[n]}=p^c(p^2-1^2)(p^2-2^2)\dots(p^2-(w-1)^2)$,

$q^{[n]}=q^c(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-(w-1)^2)$,

$r^{[n]}=r^c(r^2-1^2)(r^2-2^2)\dots(r^2-(w-1)^2)$ – узагальнений степінь чисел *p, q* та *r*, відповідно;

$$c=\begin{cases}1,\ якщо\quad n=1,3,5,\dots;\\ 2,\ якщо\quad n=2,4,6,\dots;\end{cases}$$

$w=\lceil n/2\rceil,\quad m=-\lceil i/2\rceil,\quad l=-\lceil j/2\rceil,\quad u=-\lceil k/2\rceil,\quad s=-\lfloor i/2\rfloor,\quad d=-\lfloor j/2\rfloor,$
$g=-\lfloor k/2\rfloor.$

Аналог інтерполяційної формули Бесселя в узагальненому вигляді для інтерполяції функції трьох змінних:

$$P(x,y,z)=\sum_{i=0}^{2n}p[i]\sum_{j=0}^{2n}q[j]\sum_{k=0}^{2n}r[k]\frac{\Delta^{i,j,k}\varphi_{m,l,u}+\Delta^{i,j,k}\varphi_{m+1,l+1,u+1}}{2}, \qquad (7)$$

де $p = \frac{x - x_0}{h_x}$, $q = \frac{y - y_0}{h_y}$, $r = \frac{z - z_0}{h_z}$ – кількість кроків для досягнення точки x з x_0, y з y_0 та z з z_0 відповідно;

$$p^{[n]} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^c p(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)\ldots(p+(w-1)),$$

$$q^{[n]} = \left(q - \frac{1}{2}\right)^c q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q+(w-1)),$$

$$r^{[n]} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^c r(r-1)(r+1)(r-2)(r+2)\ldots(r+(w-1))$$ – узагальнений степінь чисел p, q та r, відповідно;

$$c = \begin{cases} 1, \textit{якщо} \quad n = 1,3,5,\ldots; \\ 0, \textit{якщо} \quad n = 2,4,6,\ldots; \end{cases}$$

$w = \lceil n/2 \rceil$, $m = -\lceil i/2 \rceil$, $l = -\lceil j/2 \rceil$, $u = -\lceil k/2 \rceil$, $s = -\lfloor i/2 \rfloor$, $d = -\lfloor j/2 \rfloor$, $g = -\lfloor k/2 \rfloor$.

В даному розділі оцінено похибки для кожного із методів та розглянуто використання розроблених методів для інтерполювання кривих в тривимірному просторі та інтерполюванню функції, яка задана в сферичних системах координат.

У **третьому розділі** розроблено аналоги математичних моделей різницевих методів інтерполяції, які використовують багатовимірні різниці та дають змогу інтерполювати багатовимірну функцію із заданою похибкою поблизу початкових значень (перша формула Ньютона), середніх значень (формули Гауса, Бесселя та Стірлінга) та останніх значень (друга формула Ньютона) інтервалу інтерполювання.

Для інтерполяції багатовимірної функції різницевими методами використовуються багатовимірні різниці різних порядків:

$$\Delta^{c1+c2+\ldots+cm}\varphi_{i1,i2,\ldots,im} = \Delta^{c1+c2+\ldots+cm}_{x1^{c1},x2^{c2},\ldots,xm^{cm}}\varphi_{i1,i2,\ldots,im} = \Delta^{c1}_{x1^{c1}}\left(\Delta^{c2}_{x2^{c2}}\ldots\left(\Delta^{cm}_{xm^{cm}}\varphi_{i1,i2,\ldots,im}\right)\right), \quad (8)$$

для яких $\Delta^{0+0+\ldots+0}\varphi_{i1,i2,\ldots,im} = \varphi_{i1,i2,\ldots,im}$.

Аналогічно методиці знаходження аналогів математичних моделей процесу інтерполяції різницевими методами для інтерполювання функції трьох змінних, яка використовувалась у другому розділі, було розроблено аналоги для інтерполяції функції багатьох змінних. Але аналоги в загальному вигляді мають громіздкий характер, тому в даному розділі розглянуто спрощену схему запису розроблених математичних моделей.

Побудовано математичні моделі інтерполяції різницевими методами у матричній формі для інтерполювання одновимірних та двовимірних функцій. Розглянуто можливість розвинення аналогів для випадку інтерполяції багатовимірних функцій. Запропоновані матричні математичні моделі інтерполяції різницевими методами Ньютона та Гауса, що в порівнянні з класичними формами описання моделей дає змогу збільшити швидкодію та ефективно використовувати обчислювальні ресурси за рахунок розпаралелювання процесу обчислень.

В загальному вигляді математична модель інтерполяції різницевими методами у матричній формі для інтерполювання одновимірних функцій

$$Z_n(x_n) = Y \cdot D \cdot P, \tag{9}$$

де Y – значення функції у заданих вузлах інтерполяції;

D – матриця шаблонів для знаходження кінцевих різниць;

P – матриця узагальнених степенів числа *p*.

В даному розділі знайдено матриці Y, D та P для інтерполяції функції однієї змінної для різницевих методів Ньютона та Гауса.

В загальному вигляді математична модель інтерполяції різницевими методами у матричній формі для інтерполювання двовимірних функцій

$$z(x, y) = P \cdot D^T \cdot Z \cdot D \cdot Q, \tag{10}$$

де Z – значення функції у заданих вузлах інтерполяції;

D – матриця шаблонів для знаходження кінцевих різниць;

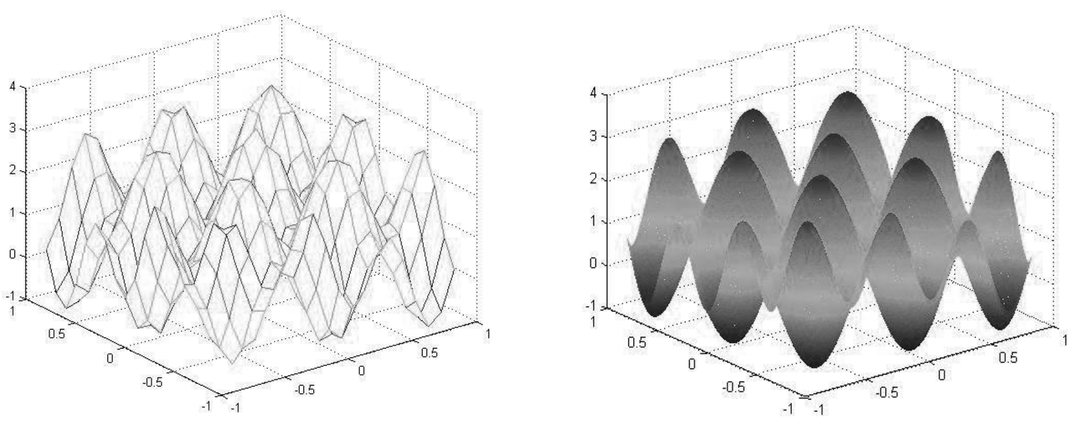
P, Q – матриця узагальнених степенів числа p та q, відповідно.

В даному розділі знайдено матриці Y, D, P та Q для інтерполяції функції двох змінних для різницевих методів Ньютона та Гауса.

Запропоновано метод організації обчислень для інтерполювання функцій багатьох змінних за різницевими методами Ньютона та Гауса, який на відміну від класичного методу організації обчислень використовує схему Горнера, що дає змогу зменшити кількість обчислювальних операцій.

У четвертому розділі розроблено методику використання різницевих методів для інтерполяції тривимірної функції, наведено алгоритм інтерполяції тривимірної функції на основі розроблених методів, описано та проаналізовано на тестових функціях програмне забезпечення для тривимірної інтерполяції. Результат використання програмного забезпечення зображений на рис.1., на якому графік а) – зображення вхідної функція з кроком дискретизації 0,1; б) – зображення вихідної функції з кроком дискретизації 0,005 отриманої за допомогою першої інтерполяційної формули Гауса.

Також розроблено алгоритм використання матричних моделей для інтерполяції функції однієї змінної, що на відміну від класичних моделей, дав змогу в декілька раз збільшити швидкодію завдяки розпаралеленню процесу обчислення та ефективному використанню можливостей багатоядерного процесора.



а) б)

Рис. 1. Зображення вхідної функції, заданої у вигляді сітки (а), та функції, отриманої за

допомогою запропонованої першої інтерполяційної
формули Гауса (б)

Розроблено алгоритм та програмне забезпечення для запропонованих математичних моделей у матричному вигляді та поданих за схемою Горнера для інтерполяції тривимірних функцій. Проведено порівняльний аналіз розроблених методів інтерполяції з аналогічними методами математичного пакету MATLAB. В результаті аналізу з'ясовано, що найкращий результат розроблені методи формують при інтерполяції поліноміальної функції. Для тривимірної поліноміальної функції 5 порядку розроблений метод забезпечив точність більше ніж 10^{-5}, тоді як інтерполяційні методи, реалізовані в MATLAB (метод найближчих сусідів, лінійна інтерполяція, метод інтерполяції сплайнів), забезпечують максимальну точність 10^{-2}.

У додатках наведено акти впровадження результатів дисертаційної роботи та лістинги розроблених програмних забезпечень.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

На даному етапі розвитку комп'ютерної техніки досить актуальною задачею є багатовимірна обробка даних у задачах комп'ютерної графіки та моделювання різного роду об'єктів, які описуються математичними моделями багатьох змінних. Метою дисертаційної роботи було визначено підвищення ефективності процесу інтерполювання функцій багатьох змінних шляхом розвинення та модифікації різницевих методів.

1. Для досягнення поставленої мети дисертаційної роботи було проведено аналіз сучасного стану досліджень застосування різницевих методів у задачах багатовимірної інтерполяції. В результаті аналізу було з'ясовано, що задача інтерполяції різницевими методами для інтерполювання функції трьох і більше змінних в літературі не достатньо глибоко досліджена. Це дозволило вибрати напрямок досліджень та сформувати завдання для розв'язання задач багатовимірної інтерполяції різницевими методами.
2. В роботі вперше запропоновано новий підхід для інтерполяції багатовимірних функцій, який на відміну від існуючих базується на використанні багатовимірних різниць. Це дало змогу вперше розробити модифікації багатовимірних різницевих математичних моделей для інтерполяції функцій багатьох змінних, моделювання багатовимірних об'єктів та фізичних процесів.
3. На основі запропонованого підходу було модифіковано математичні моделі різницевих методів інтерполяції, які на відміну від існуючих дають змогу інтерполювати багатовимірну функцію із заданою похибкою поблизу початкових значень (багатовимірна модель першої формули Ньютона), середніх значень (багатовимірні моделі формул Гауса, Бесселя та Стірлінга) та останніх значень (багатовимірна модель другої формули Ньютона) інтервалу інтерполювання.
4. Запропоновані математичні моделі розглянуто для інтерполяції тривимірної функції як поширений в практичних задачах випадок багатовимірної функції. Проведено оцінювання похибок для розроблених різницевих формул при інтерполюванні тривимірної функції. Подано математичні моделі інтерполяцій кривих у тривимірному просторі на основі різницевих методів (Ньютона, Гауса, Бесселя та Стірлінга).
5. Запропоновано математичні моделі інтерполяції різницевими методами (Ньютона, Гауса, Бесселя та Стірлінга) для інтерполяції функції у сферичній системі координат. Це дозволяє ефективно інтерполювати траєкторію польоту літаків, космічних кораблів, моделювати об'єкти та фізичні процеси, які описуються сферичними координатами.
6. Вперше запропоновані математичні моделі першої та другої формул інтерполювання Ньютона та Гауса у матричній формі для одновимірних та двовимірних функцій. Розглянуто можливість створення аналогів для випадку інтерполяції багатовимірних функцій. На основі запропонованих моделей розроблено алгоритм та

програмне забезпечення для інтерполяції функції однієї змінної, що на відміну від класичного методу дозволяє в декілька раз збільшити швидкодію за рахунок розпаралелення процесу обчислень та ефективного використання багатоядерних процесорів.

7. Вперше запропоновано метод організації обчислень для інтерполювання функцій багатьох змінних за різницевими методами Ньютона та Гауса, який на відміну від класичного методу організації обчислень використовує схему Горнера, що дає змогу зменшити кількість обчислювальних операцій.

8. Розроблено методику та алгоритм застосування розроблених різницевих методів для інтерполяції тривимірної функції. На основі запропонованої методики та математичних моделей інтерполяції різницевими методами розроблено програмне забезпечення для інтерполяції тривимірної функції. Застосування розробленого програмного забезпечення проаналізовано на тестових функціях.

9. Розроблено алгоритм та програмне забезпечення на мові програмування математичного пакету MATLAB, на основі якого проведено аналіз оцінки похибки розробленої методики інтерполяції тривимірної функції. В результаті аналізу з’ясовано, що найкращий результат розроблені методи формують при інтерполяції поліноміальної функції. Для тривимірної поліноміальної функції 5 порядку розроблений метод забезпечив точність більше ніж 10^{-5}, тоді як інтерполяційні методи, реалізовані в MATLAB (метод найближчих сусідів, лінійна інтерполяція, метод інтерполяції сплайнів), забезпечують максимальну точність 10^{-2}.

10. Наведені в дисертації результати досліджень пройшли апробацію на конференціях, публікаціях в наукових журналах, а також оформлені в авторському свідоцтві на твір. Результати досліджень було впроваджено в систему моніторингу температурного стану в елеваторі з пшеницею на підприємстві ТОВ “ІВП ІнноВіннпром” (м. Вінниця, Україна) та алгоритми покращення якості відеоданих під час збільшення розміру кадру шляхом згладжування пікселя при розробці програмного забезпечення Seraphim PC Players компанії “Smart.exe Ltd.” та використовуються в навчальному процесі у Вінницькому національному технічному університеті під час викладання лекцій та проведення занять з курсу “Обчислювальні методи та застосування ЕОМ”, розділ “Методи обробки даних” для студентів спеціальності 7.091401 “Системи управління і автоматики” на кафедрі автоматики і вимірювальної техніки.

ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

1. Машницький М.О. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції: Монографія. / [Квєтний Р. Н., Дементьєв В. Ю., Машницький М. О., Юдін О. О.]. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. — 83 с.

2. Машницький М.О. Моделювання об’єктів в сферичних системах координат / Р. Н. Квєтний, М.О. Машницький // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – №6. – С. 141-143.

3. Машницький М.О. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Гауса / Машницький М.О. Квєтний Р.Н. // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Спецвипуск, 2007. – С.105-108.

4. Машницький М.О. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Бесселя. [Електроний ресурс] / Богач І.В. Машницький М.О. Хомчук А. Ф. // Наукові праці ВНТУ. – 2009. - №2.– Режим доступу до журналу: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.files/uk/09ivbdbm_ua.pdf .

5. Mashnitskiy M.A. Function interpolation in spherical coordinate system / Mashnitskiy M.A. // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Спецвипуск, 2009. – С.23-25.

6. Машницький М.О. Моделювання одновимірних об’єктів в просторі / Квєтний Р. Н., Машницький М.О. // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2008. – №3(56). – С. 81-86.

7. Машницький М.О. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Ньютона / М.О. Машницький, Р. Н. Квєтний // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. - 2007. - №6(25). – С. 225-229.

8. Машницький М.О. Інтерполяція багатопараметричних функцій на основі модифікацій різницевих методів Гауса / М.О. Машницький // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. - 2010. - №7. – С. 82-85.

9. Машницький М.О. Особливості моделювання двохвимірних поверхонь з додатковими параметрами при використанні методу Ньютона та його модифікацій / М.О. Машницький, І.В. Богач, І. Семенюк // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова. – К.; 2007. – №39. – С.118-124.

10. Mashnitskiy M.A. Mathematic models for modeling multidimensional object / Mashnitskiy M.A., Kvetny R.N. // Nauka i Studia. – Przemysl, 2009. – C.64-70.

11. Машницький М.О. Інтерполяція функції трьох змінних різницевим методом / М.О. Машницький, Р. Н. Квєтний // Автоматика-2006 : XIII міжнародна конференція з автоматичного управління, 25–28 вер. 2006 р. : матеріали конф. - Вінниця, 2007. – С.25-28.

12. Машницький М.О. Багатовимірна інтерполяція різницевими методами / М.О. Машницький // Автоматика-2006 : XIII міжнародна конференція з автоматичного управління, 25–28 вер. 2006 р. : тези доповіді. - Вінниця, 2006. – С.24.

13. Машницький М. О. Комп’ютерна програма «Багатовимірна інтерполяція різницевими методами». Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. Україна. №22687 від 14.11.2007.

АНОТАЦІЯ

Машницький М. О. Інтерполяція багатовимірних функцій різницевими методами. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. — Вінницький національний технічний університет, Вінниця — 2011.

Дисертація присвячена інтерполяції багатовимірних функцій різницевими методами та підвищенню ефективності процесу інтерполяції.

В роботі запропоновано підхід використання багатовимірних різниць для інтерполяції функцій багатьох змінних, який дав змогу розширити область застосування різницевих методів. Також було проведено оцінювання похибки, яку дають різницеві методи при інтерполяції функції трьох змінних. Швидкодія інтерполяції різницевими методами була підвищена за рахунок представлення математичних моделей в матричному вигляді, що дало можливість розпаралелити процес обчислення, та організації обчислень за схемою Горнера, що дозволило знизити складність задачі інтерполяції функції багатьох змінних. Проведено дослідження ефективності розроблених методів щодо швидкодії та точності обчислення. Розроблено методики та алгоритми для реалізації запропонованих математичних моделей та на основі них розроблено програмне забезпечення.

Ключові слова: багатовимірна інтерполяція, різницеві методи, методи Ньютона, методи Гауса, метод Бесселя, метод Стірлінга, матричні математичні моделі інтерполяції, схема Горнера.

АННОТАЦИЯ

Машницкий М. А. Интерполяция многомерных функций разностными функциями. — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук по

специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Винницкий национальный технический университет, Винница. – 2011.

Диссертация посвящена интерполяции многомерных функций разностными методами, а также повышению эффективности процесса интерполяции.

В работе исследованы существующие разностные методы для интерполяции одно- и двумерных функций. В результате анализа определены направления повышения эффективности и расширения области применения разностных методов, разработки разностных математических моделей, которые бы позволили интерполировать функции трех и более переменных. В связи с быстрыми темпами развития науки и техники возрастает актуальность обработки многомерных массивов данных. Задача обработки и визуализации многомерных массивов данных часто встречается при моделирования сложных объектов, у которых описывающая математическая модель зависит от многих аргументов, а также при решении задач математической физики, в задачах компьютерной графики и во многих других задачах. Решением подобного рода проблем и обусловлена актуальность разработки эффективных разностных методов для интерполяции многомерных зависимостей.

В работе предложен подход на основе использования многомерных разностей для интерполяции функции трех и более переменных, который позволил разработать математические модели для интерполяции многомерных функций. Разработаны многомерные математические модели интерполяции разностными методами, используя разные виды разностей, которые дают возможность интерполировать функции с регламентированной погрешностью в начале диапазона заданных значений (многомерный аналог первой интерполяционной формулы Ньютона),в середине (многомерные аналоги для формул Гаусса, Бесселя и Стирлинга) и вблизи конечных значений (многомерный аналог второй интерполяционной формулы Ньютона). Также было проведено оценивание погрешностей, которые возникают при интерполяции трехмерной функции разностными методами. Исследована возможность использования трехмерных математических моделей интерполяции разностными методами при моделировании одномерных объектов в пространстве и интерполировании многомерных зависимостей, которые заданы в сферической системе координат.

Разработаны матричные математические модели интерполяции разностными методами Ньютона и Гаусса, что в отличие от классических форм записи моделей дали возможность повышения быстродействия интерполяции и более эффективного использования вычислительных ресурсов за счет распараллеливания процесса вычислений.

Предложен метод организации вычислений для интерполирования функции многих переменных разностными методами Ньютона и Гаусса, который в отличие от классического метода организации вычислений использует схему Горнера, что дало возможность увеличить эффективность путем уменьшения количества вычислительных операций.

Созданы методики практического применения разработанных математических моделей для интерполирования функций многих переменных, которые дают возможность эффективного использования полученных результатов для решения задач интерполяции многомерных функций в широком круге практических задач.

Разработано алгоритмическое и программное обеспечение, использование которого подтверждает адекватность теоретических выводов и практическую ценность результатов диссертационного исследования. Проведен сравнительный анализ разработанных методов с существующими методами.

Таким образом, в диссертационной работе изложены теоретические и практические аспекты, связанные с использованием и разработкой многомерной интерполяции разностными методами и их применением в современной науке и технике.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, разностные методы, методы Ньютона, методы Гаусса, метод Бесселя, метод Стирлинга, матричные математические модели интерполяции, схема Горнера.

ABSTRACT

Mashnitsky M. A. Interpolation of multidimensional functions by difference methods. — A manuscript.

Thesis for achievement of a candidate's degree on technical sciences on a specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. — Vinnytsia National Technical University. — Vinnytsia. — 2011.

The thesis is devoted to the multidimensional functions interpolation by difference methods, and increasing of interpolation process efficiency .

In the work an approach for interpolation of functions with multiple variables by using the multidimensional difference is suggested. It gives an opportunity to expand the scope of difference methods usage. The error, occurring during the interpolation of three-dimensional function difference methods, is estimated. Performance of the interpolation by using differences methods is improved by means of representing mathematic models in matrix form, that gives an opportunity to parallel the calculating process, and organizing calculation ин using Horner's scheme. It allows to decrease complexity of the task of multidimensional functions interpolation. Performance and accuracy of suggested methods was investigated. Methodologies and algorithms of suggested methods usage were developed. Software was developed by using suggested methodologies and algorithms as well.

Key words: multidimensional interpolation, difference methods, Newton's methods, Gauss' methods, Bessel's method, Stirling's methods, matrix mathematic models of interpolation, Horner's scheme.

Підписано до друку 4.02.2011 р. Формат 29,7×42$^1/_4$
Наклад 100 прим. Зам. № 2011-033
Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95. Тел.: 59-81-59