УДК 512.64

М.М. Підгорний
Є.Є. Стасюк

МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Аналізується методи розв'язання матричних рівнянь та лінійних систем матричних рівнянь, розглянуто ті випадки, коли не можна скористатись оберненою матрицею.

Ключові слова: матричні рівняння, лінійні системи матричних рівнянь, обернені матриці.

Abstract

The methods of solving matrix equations and linear systems of matrix equations are analyzed, and the cases when it is impossible to use the inverted matrix are considered.

Keywords: matrix equations, linear systems of matrix equations, inverted matrices.

Вступ

В даній роботі розглядаються методи розв'язання матричних рівнянь та лінійних систем матричних рівнянь. Розглянуто ті випадки, коли коефіцієнти рівнянь є необоротними матрицями і ми не можемо скористатись оберненою матрицею.

Нехай A - квадратна матриця розмірності $n \times n$, тобто $A \in M_n$, де M_n - множина всіх квадратних матриць n–го порядку, елементи яких належать певному числовому полю. В подальшому це, як правило, буде поле дійсних чисел R.

Якщо маємо дві матриці A, B, то виявляється для того, щоб вони були подібними необхідно і достатньо, щоб вони мали одні і ті ж інваріантні многочлени, або ж, що те саме, одні і ті ж елементарні дільники.

Елементарні дільники матриці A на відміну від інваріантних многочленів істотно зв'язані з даним числовим полем K. Якщо замість поля K взяти друге числове поле, якому належать елементи матриці A, то елементарні дільники можуть змінитись. Разом з елементарними дільниками може змінитись і друга природна нормальна форма.

Так, наприклад, якщо елементи матриці A є дійсні числа, то характеристичний многочлен має дійсні коефіцієнти. Проте корені його можуть бути й комплексні. Якщо K – поле дійсних чисел, то серед елементарних дільників можуть бути Х степені незвідних квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами.

Якщо ж K – поле комплексних чисел, то кожний елементарний дільник має вигляд $(\lambda - \lambda_0)^p$.

В той же час як над полем дійсних чисел матриця A має один елементарний дільник $d_1(\lambda) = \lambda^2 + 1$, $L_{II} = L_I$, то над полем комплексних чисел матриця A має два елементарних дільники $d_1(\lambda) = \lambda + i$, $d_2(\lambda) = \lambda - i$, $L_{II} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

Як було показано в попередньому параграфі для кожної матриці A можна вказати множину матриць $M(A)$ таку, що кожна матриця з цієї множини комутує з A.

Нехай тепер маємо дві матриці A і B з M_n для яких, взагалі кажучи,

$$AB \neq BA.$$

Задача ставиться так: чи існує така матриця $X \in M_n$, що $AXB = BXA$.

Для будь-яких матриць

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ існує ненульова матриця $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

така, що $AXB = BXA$.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} A_{11}X + A_{12}Y = B_1, \\ A_{21}X + A_{22}Y = B_2, \end{cases}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Розв'язання.

Знайдемо змінну Y: $Y = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}\left(B_2 - A_{21}A_{11}^{-1}B_1\right)$

$$A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}A_{11}^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{11}^{-1}A_{12}Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -1 \\ -\frac{19}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Отже, розв'язком системи є пара матриць: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Висновки

Проте, незважаючи на те, що теорію матриць розробляла величезна кількість вчених, багато важливих питань є нез'ясованими по цей день. Зокрема, якщо питання теорії матричних рівнянь ще дещо розроблені, то результатів, що стосуються систем матричних рівнянь, практично немає.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Завало С.Т. Курс алгебри. – К.:Вища школа, 1985 – 503с.

2.Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. – М.:Наука, 1982. –272с.

3.Хорн Р, Джонсон У. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.:Мир, 1989. – 655с.

4. Клочко В.І. Лінійна алгебра: навч. посібник / В.І. Клочко, В.П. Литвинюк –Вінниця: ВНТУ, 2007.– 126 с.

5. Михалевич В.М. Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Частина 1. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Навч. посібник / В.М. Михалевич. – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 111 с.

Науковий керівник ***Віталій Іванович Клочко*** – д. педагогічних наук, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: klochko@vntu.edu.ua;

Максим Максимович Підгорний – студент групи СП-19б, факультет інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця;

Євгеній Євгенійович Стасюк– студент групи СП-19б, факультет інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця;

The scientific worm ***Klochko Vitaliy I.*** – Dr. Sc. (Eng), Professor of mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia;

Pidqorniy Maxim M. – D Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Stasuik Yevgenii Y. – D Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

The scientific worm