

Ю. Г. Ведміцький, В. І. Загоруйко, К. С. Пращарук, В. О. Хонич,
М. О. Хонич, В. В. Хомич, В. О. Волошин, В. М. Іванов,
О. А. Орловський, Є. А. Стародуб, Д. Б. Минаш, І. В. Кізян

ОПЕРАТОРНА ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ МІКРОМЕХАНІЧНИХ АКСЕЛЕРОМЕТРІВ СЕРІЇ ADXL(XXX) КОМПАНІЇ ANALOG DEVICES НА ОСНОВІ ЇХ УТОЧНЕНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі наведено уточнені електричні та математичні моделі мікромеханічних ємнісних акселерометрів серії ADXL(xxx) відомої американської компанії Analog Devices і на основі цих моделей отримано їх важливу динамічну метрологічну характеристику – операторну передатну функцію (за Лапласом).

Ключові слова: акселерометр, електрична та математична моделі, метрологічні характеристики, диференціальне рівняння, передатна функція, перетворення Лапласа

Abstract

In article authors have recreated more exact electric and mathematical models of micromechanical capacitance accelerometers of a row (ADXLxxx) of the known American company Analog Devices. With their help the main dynamic metrological characteristics of the specified sensors are received. In article authors develop transfer-function coefficient of accelerometers and their electric models.

Keywords: accelerometer, electrical analog, mathematical model, metrological performance, differential equations, transfer-function coefficient, Laplace transform

Вступ

Мікромеханічні акселерометри на сьогодні знаходять все більш широке застосування в системах вимірювання та контролю параметрів механічного руху, що є надзвичайно затребуваним в промисловості, енергетиці, на транспорті, сільському господарстві, будівництві тощо.

Сучасні технології обробки матеріалів надають можливість виготовляти акселерометри в інтегральному виконанні з надзвичайно малими габаритами та низькою собівартістю. Це суттєво розширює область їхнього застосування.

З-поміж провідних компаній, які здійснюють розробку та виготовлення інтегральних акселерометрів, помітною є американська компанія Analog Devices. Її сімейству мікромеханічних ємнісних акселерометрів, наприклад, серії ADXL(xxx), порівняно з акселерометрами інших типів та компаній властиві істотні переваги.

Однак, як свідчить огляд супровідної технічної документації та наукової-технічної літератури, наприклад, [1-3], запропоновані та відомі математичні моделі акселерометрів є або доволі наближеними і неточними, або, подекуди, навіть і хибними. Враховуючи пов'язані з цим ймовірні ризики (наприклад, застосування заявлених сенсорів в системах моніторингу рівня вібрацій на турбінах гідроелектростанцій), наукові та інженерні задачі з удосконалення відомих та розробки більш точних математичних і електричних моделей акселерометрів стають задачами важливими і актуальними.

Основною метою цієї публікації є розробка для заявленого класу акселерометрів та їх уточнених електричних моделей однієї з найважливіших динамічних метрологічних характеристик – *операторної передатної функції* (за Лапласом).

2. Уточнена електрична модель акселерометра

Конструкційна схема кожної з окремо узятих ланок сімейства мікромеханічних ємнісних акселерометрів серії ADXL(xxx) Analog Devices показана на рис. 1.

На рис. 2, а показано схему уточненої електричної моделі акселерометрів, яку було побудовано на основі диференціальних рівнянь руху динамічних систем із зосередженими параметрами – *структу-*

рно-топологічних рівнянь, отриманих на основі рівнянь Лагранжа-Максвела під час розробки та формування вихідного базису теорії узагальненого електричного кола [4-10].

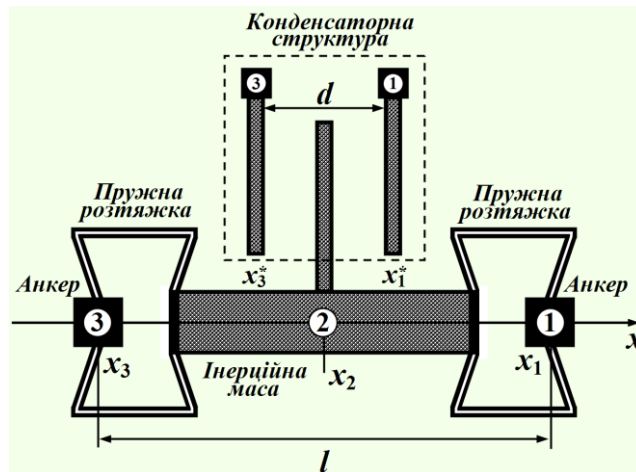


Рис. 1. Конструкційна схема окремої ланки акселерометра серії ADXL(xxx) Analog Devices

В електричному колі схеми заміщення з урахуванням відповідних електричних та магнітних аналогій [11] до уваги були взяті найбільш вагомні фізичні явища механіки, які спостерігаються або можуть спостерігатися під час динамічного руху акселерометра і які пов'язані з фізичними процесами взаємоперетворення та перерозподілу різних форм механічної енергії поміж структурними типовими елементарними ланками динамічної системи.

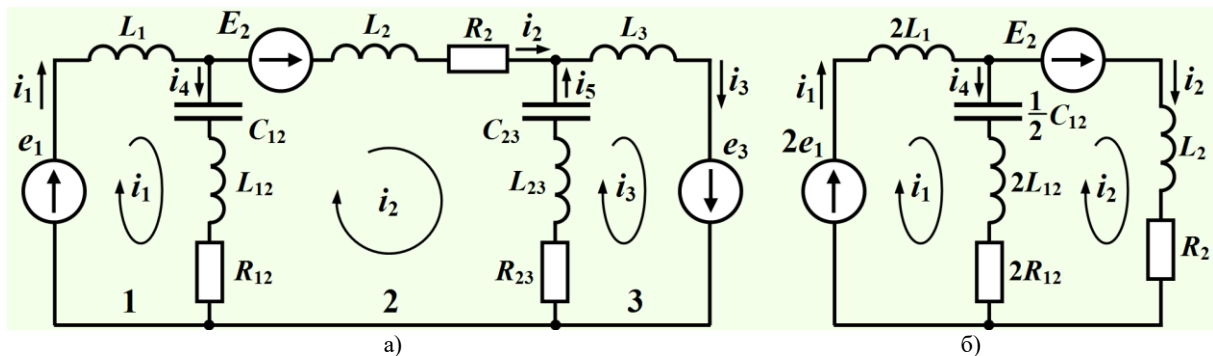


Рис. 2. Схема електричної моделі окремої ланки акселерометра

До таких явищ були віднесені:

- перетворення частини кінетичної енергії T в інерційній масі m_2 (або частини магнітної енергії W_m в індуктивному елементі L_2 електричної моделі);
 - перетворення частини потенціальної енергії Π в пружних розтяжках з коефіцієнтами жорсткості ζ_{12} , ζ_{23} (або частини електричної енергії W_e в ємнісних елементах C_{12} , C_{23});
 - дисипація енергії у випадку деформації пружних розтяжок та руху інерційної маси, ввівши для цього коефіцієнти розсіювання β_{12} , β_{23} та β_2 (або розсіювання енергії електричного струму на активних опорах R_{12} , R_{23} електричної моделі, в одному випадку, та на активному опорі R_2 – в іншому);
 - перетворення частини кінетичної енергії T датчика за рахунок руху анкерів m_1 і m_3 та руху обох пружних розтяжок m_{12} , m_{23} під час їх деформації (або частини магнітної енергії W_m в індуктивних елементах, в одному випадку, L_1 і L_3 , а в іншому – L_{12} , L_{23} електричної моделі),
- а також:

- дію постійної зовнішньої сили земного тяжіння у випадку розташування датчика під кутом α до горизонту $F_2 = m_2 g \sin \alpha$ (або дію постійного зовнішнього джерела е.р.с. E_2 в другому незалежному контурі електричної моделі);

- дію змінної у часі зовнішньої сили F_1 , прикладеної до корпусу акселерометра, яка і викликає зміну його швидкості (або дію зовнішніх джерел змінної е.р.с. $e_1 = e_3$ в першому та третьому контурах відповідно).

Водночас під час аналізу системи рівнянь, складених для даного кола (див. рис. 2, а) за законами Кірхгофа, автором було помічено, що система рівнянь може бути суттєво спрощена, якщо врахувати в'язь, яка існує поміж ланками механічної системи акселерометра, а саме $x_1 - x_3 = const$, звідки $\dot{x}_1 = \dot{x}_3$. Електричним аналогом цієї в'язі є умова: $i_1 = i_3$, за виконання якої система диференціальних рівнянь, складена за законами Кірхгофа, набуває вигляду:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_4 = 0, \\ 2L_1 \frac{di_1}{dt} + u_{C_{12}} + 2L_{12} \frac{di_4}{dt} + 2R_{12}i_4 = 2e_1, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2i_2 - 2R_{12}i_4 - 2L_{12} \frac{di_4}{dt} - u_{C_{12}} = E_2, \\ i_4 = \frac{C_{12}}{2} \frac{du_{C_{12}}}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

у зв'язку з чим і електрична модель зазнає помітних еквівалентних спрощень, утворюючи систему з двома ступенями вільності. Електричне коло такої еквівалентної системи показано на рис. 2, б.

В системі (1) рівняння записано за припущення ідентичності фізичних властивостей як обох анкерів, так і обох пружних розтяжок, закріплених на них, а також тієї обставини, що зовнішня сила F_1 , яка діє на датчик, прикладається і до першого анкера, і до другого водночас.

Також надалі будемо вважати, що акселерометр розташований в горизонтальній площині, відтак е.р.с. E_2 в другому незалежному контурі електричної моделі буде дорівнювати нулю $E_2 = 0$.

3. Побудова операторної передатної функції (за Лапласом) електричної моделі акселерометра

Диференціальним рівнянням електричної моделі заявленого акселерометра є рівняння

$$(L_2 + 2L_{12}) \frac{d^4 y_{вих}}{dt^4} + (R_2 + 2R_{12}) \frac{d^3 y_{вих}}{dt^3} + \frac{2}{C_{12}} \frac{d^2 y_{вих}}{dt^2} = 2L_{12} \frac{d^2 x_{вх}}{dt^2} + 2R_{12} \frac{d x_{вх}}{dt} + \frac{2}{C_{12}} x_{вх}. \quad (2)$$

В рівнянні $y_{вих} = \int i_2 dt$ – це інтеграл другого контурного струму i_2 , що слугує за вихідну фізичну величину (рис. 3) в системі уточненої електричної моделі акселерометра (див. рис. 2, б), оскільки є електричним аналогом механічного зміщення x_2 його інерційної маси (див. рис. 1).

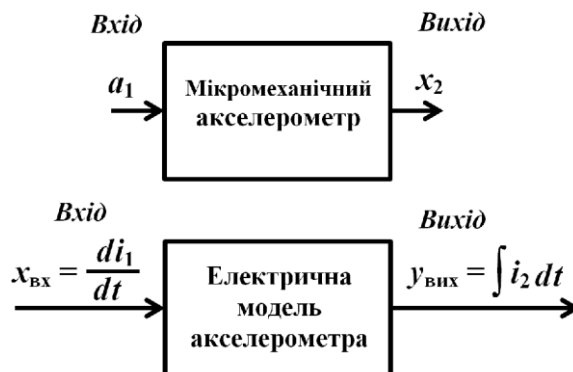


Рис. 3. Ідентифікація вхідних та вихідних фізичних величин

Інша фізична величина з рівняння (2) – *похідна першого контурного струму* $x_{ex} = \frac{di_1}{dt}$. Це – елект-

ричний аналог *механічного прискорення* (анкерів акселерометра) $a_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2}$, що в обох випадках є вхідними фізичними величинами: електричної моделі та самого акселерометра відповідно (див. рис. 3).

Отже, диференціальним рівнянням акселерометра є рівняння виду

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k y_{eux}}{dt^k} = \sum_{s=1}^m b_s \frac{d^s x_{ex}}{dt^s}, \quad (3)$$

де $n=4$, $m=2$, з коефіцієнтами, які визначаються через параметри елементів електричної моделі і від них залежать

$$a_4 = L_2 + 2L_{12}; a_3 = R_2 + 2R_{12}; a_2 = \frac{2}{C_{12}}; a_1 = a_0 = 0; b_2 = 2L_{12}; b_1 = 2R_{12}; b_0 = \frac{2}{C_{12}}. \quad (4)$$

Знайдемо операторні зображення (за Лапласом) лівої та правої частин диференціального рівняння (3) за нульових початкових умов

$$y_{eux}(0) = y'_{eux}(0) = \dots = x_{ex}(0) = x'_{ex}(0) = \dots = 0, \quad (5)$$

врахувавши лінійність інтегрального перетворення Лапласа та теорему про диференціювання оригіналу:

$$L \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k y_{eux}}{dt^k} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k y_{eux}}{dt^k} dt = \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^k y_{eux}}{dt^k} dt = \sum_{k=1}^n a_k p^k \int_0^{\infty} e^{-pt} y_{eux} dt = Y_{eux}(p) \sum_{k=1}^n a_k p^k, \quad (6)$$

$$L \left\{ \sum_{s=1}^m b_s \frac{d^s x_{ex}}{dt^s} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{s=1}^m b_s \frac{d^s x_{ex}}{dt^s} dt = \sum_{s=1}^m b_s \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^s x_{ex}}{dt^s} dt = \sum_{s=1}^m b_s p^s \int_0^{\infty} e^{-pt} x_{ex} dt = X_{ex}(p) \sum_{s=1}^m b_s p^s, \quad (7)$$

де $Y_{eux}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} y_{eux} dt$ – операторне зображення вихідної фізичної величини $y_{eux} = \int i_2 dt$ (реакції)

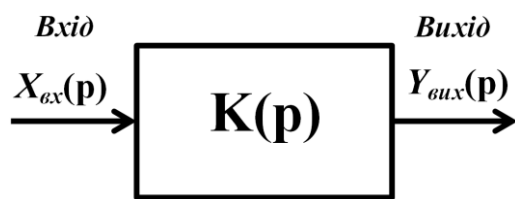


Рис. 4. Операторна передатна функція

електричної моделі (рис. 4), аналога *механічного зміщення* x_2 інерційної маси акселерометра (див. рис. 1);

$X_{ex}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x_{ex} dt$ – операторне зображення вхідної

фізичної величини $x_{ex} = \frac{di_1}{dt}$ (вхідної дії) електричної моделі.

На підставі співвідношень (3), (6) та (7) запишемо

$$Y_{eux}(p) \sum_{k=1}^n a_k p^k = X_{ex}(p) \sum_{s=1}^m b_s p^s. \quad (8)$$

Операторна передатна функція (за Лапласом) визначається як відношення зображення реакції системи до зображення вхідної дії, що цю реакцію викликала [12]:

$$K(p) = \frac{Y_{eux}(p)}{X_{ex}(p)}. \quad (9)$$

Рівняння (8) та (9) виявляють математичний зв'язок між операторною передатною функцією (за Лапласом) динамічної системи і коефіцієнтами її диференціального рівняння, відтак – з параметрами елементів системи

$$K(p) = \frac{\sum_{s=1}^m b_s p^s}{\sum_{k=1}^n a_k p^k}. \quad (10)$$

Для коефіцієнтів диференціального рівняння (2) враховуємо співвідношення (4) і підставляємо їх значення в формулу (10). Тоді *операторною передатною функцією* (за Лапласом) уточненої електричної моделі досліджуваних акселерометрів буде функція

$$K(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2} = \frac{2L_{12} p^2 + 2R_{12} p + \frac{2}{C_{12}}}{p^2 \left[(L_2 + 2L_{12}) p^2 + (R_2 + 2R_{12}) p + \frac{2}{C_{12}} \right]} \quad (11)$$

або

$$K(p) = 2 \frac{C_{12} L_{12} p^2 + C_{12} R_{12} p + 1}{p^2 \left[C_{12} (L_2 + 2L_{12}) p^2 + C_{12} (R_2 + 2R_{12}) p + 2 \right]}. \quad (12)$$

4. Операторна схема уточненої електричної моделі акселерометра

Задля аналізу перехідних процесів, що можуть спостерігатися в уточненій електричній моделі акселерометра, за нульових початкових умов (5) побудуємо його операторну схему (рис. 5).

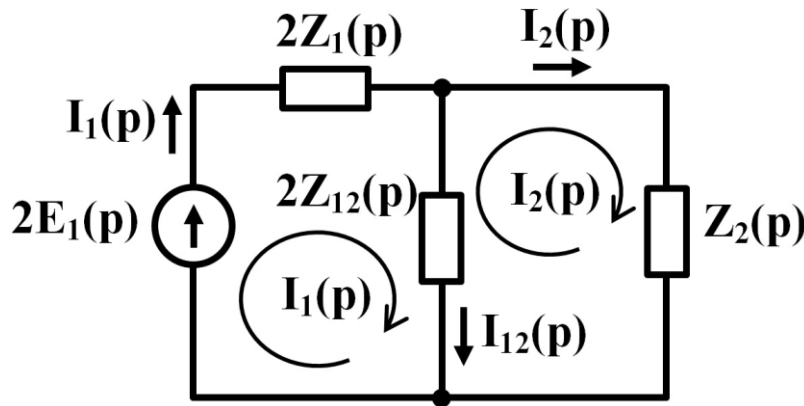


Рис. 5. Операторна схема уточненої електричної моделі акселерометра

В операторній схемі операторними опорами є функції комплексної частоти p , які безпосередньо залежать від топологічної структури кола та параметрів його елементів. В нашому випадку

$$Z_{12}(p) = \frac{1}{C_{12} p} + L_{12} p + R_{12} = \frac{C_{12} L_{12} p^2 + C_{12} R_{12} p + 1}{C_{12} p}; \quad (13)$$

$$Z_1(p) = L_1 p; \quad Z_2(p) = L_2 p + R_2.$$

Операторна е.р.с. $E_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e_1(t) dt$.

Отже, виразимо *операторну передатну функцію* електричної моделі акселерометра в параметрах операторних опорів операторної схеми.

За допомогою закону Ома в операторній формі неважко довести, що співвідношення між зображеннями струмів $I_1(p)$ та $I_2(p)$ визначається як

$$I_2(p) = \frac{2Z_{12}(p)}{Z_2(p) + 2Z_{12}(p)} I_1(p). \quad (14)$$

Оскільки $x_{\text{вх}} = \frac{di_1}{dt}$, з *теорему про диференціювання оригіналу* [12], в нашому випадку струму i_1 ,

за нульових початкових умов (5) впливає

$$X_{\text{вх}}(p) = p I_1(p). \quad (15)$$

Для зображення вихідної фізичної величини $Y_{\text{вих}}(p)$, позаяк $y_{\text{вих}} = \int i_2 dt$, на підставі теорему про інтегрування маємо

$$Y_{\text{вих}}(p) = \frac{1}{p} I_2(p). \quad (16)$$

Переписуємо (14) з урахуванням (15) та (16)

$$Y_{\text{вих}}(p) = \frac{2Z_{12}(p)}{p^2 [Z_2(p) + 2Z_{12}(p)]} X_{\text{вх}}(p). \quad (17)$$

Тоді на підставі формули (9) для *операторної передатної функції* (за Лапласом) остаточно маємо

$$K(p) = \frac{2Z_{12}(p)}{p^2 [Z_2(p) + 2Z_{12}(p)]}. \quad (18)$$

Формула (18) є тотожною до формули (12), в чому неважко пересвідчитися, якщо скористатися співвідношеннями (13).

5. Операторна передатна функція (за Лапласом) акселерометрів серії ADXL(ххх) Analog Devices

Як було зазначено вище (див. рис. 3), вхідною фізичною величиною відносно акселерометра є *механічне прискорення* (анкерів), тобто $a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$, а вихідною – *механічне зміщення* x_2 інерційної маси та її середньої пластини (див. рис. 1), з положенням якої функціонально пов'язана електрична ємність [8, 9] мікромеханічного ємнісного акселерометра.

Тоді, відповідно до першої системи електродинамічних аналогій [8], на підставі формули (12) для *операторної передатної функції акселерометра* записуємо

$$K_{\text{акс}}(p) = 2 \frac{\zeta_{12}^{-1} m_{12} p^2 + \zeta_{12}^{-1} \beta_{12} p + 1}{p^2 [\zeta_{12}^{-1} (m_2 + 2m_{12}) p^2 + \zeta_{12}^{-1} (\beta_2 + 2\beta_{12}) p + 2]}. \quad (19)$$

Висновки

В роботі отримана уточнена операторна передатна функція мікромеханічних ємнісних акселерометрів серії ADXL(ххх) американської компанії Analog Devices. Результати мають важливе спеціально-технічне значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Фрайден Дж. Современные датчики / Дж. Фрайден. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с. – ISBN 5-94836-050-4.
2. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Под. ред. Б. С. Алешина, К. К. Веремеенко, А. И. Черноморского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 424 с. – ISBN 5-9221-0735-6.
3. Аш Ж. Датчики измерительных систем. В 2-х кн. Кн. 1. / Ж. Аш, П. Андре, Ж. Бофрон [та ін.]. – М.: Мир, 1992. – 480 с. – ISBN 5-03-001641-4.
4. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довільного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Випуск 2. — С. 63-69.
5. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2016. — Випуск 4. — С. 207-213.
6. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло з урахуванням фізичного явища гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький. — №2(58). — 2017. — С. 29-36.
7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — 2018. — №2. — С. 1-11. — Режим доступу: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/547/532>.
8. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : монографія / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 196 с.

9. Уточнені математична та електрична моделі мікромеханічних ємнісних акселерометрів / В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький, В. Г. Мадьяров // Вісник Інженерної академії України. — 2009. — Випуск 2. — С. 121-125.

10. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції електротехнічних комплексів та систем на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій / Ю. Г. Ведміцький. — Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. — 2013. — 22 с.

11. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. — 392 с.

12. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук та ін. — Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. — 456 с.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, wjg@ukr.net.

Вадим Ігорович Загоруйко — студент КОІС-18б, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Працарук Катерина Сергіївна — студентка КОІС-18б, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Вікторія Олександрівна Хонич — студентка ЕМ-19мс, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Маріна Олександрівна Хонич — студентка ЕМ-19мс, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Владислав Володимирович Хомич — студент Е-19мс, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Владислав Олександрович Волошин — студент Е-19мс, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Володимир Михайлович Іванов — студент Е-17 з/н, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Олексій Анатолійович Орловський — студент ЛТО-17, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Єлізавета Андріївна Стародуб — студентка ЛТО-17, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Дмитро Борисович Минаш — студент КІВТ-18, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Ірина Валеріївна Кізян — студентка Е-16 з/н, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net.

Vadim I. Zagoruyko — student COIS-18b, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Catherine S. Prasharuk — student COIS-18b, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Victoria A. Honich — student EM-19je, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Marina A. Honich — student EM-19je, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Vladislav V. Homich — student E-19je, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Vladislav A. Voloshin — student E-19je, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Vladimir M. Ivanov — student E-17, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Alexei A. Orlovsky — student LTO-17, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Elizabeth A. Starodub — student LTO-17, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Dmitriy B. Mynash — student KIMT-18, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Irina V. Kizyan — student E-16, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.