

УДК 681.586.773

Й.І. СТЕНЦЕЛЬ, В.П. КОЖЕМ'ЯКО, С.М. ЗЛЕПКО, С.В. ПАВЛОВ

## ФІЗИЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛОВОЇ ЕНЕРГІЇ В БІОЛОГІЧНЕ СЕРЕДОВИЩЕ

*Вінницький національний технічний університет,  
21021, Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна*

*Східноукраїнський національний університету імені Володимира Даля.  
93406, просп.. Радянський, 59 а, м.Сєвєродонецьк Луганської області,. Україна*

**Анотація.** У роботі наведено результати аналізу стану біологічного організму, його теоретичних та експериментальних досліджень при перенесенні теплової енергії, принципи діагностування стану людського організму за зміною температури тіла. Показано, що діагностика стану здоров'я людини за зміною температури базується на основі прямого перенесення теплової енергії без врахування принципів її створення, реологічних переходів, перетворень і стоку. Засоби діагностики, як правило, визначали тільки стік того чи іншого перенесення.

**Ключові слова:** біологічний організм, температура, неінвазивні методи, діагностика, стан, енергія, контроль, час, джерело, випромінювач, людина.

**Аннотация.** В работе приведены результаты анализа состояния биологического организма, его теоретических и экспериментальных исследований при переносе тепловой энергии, принципы диагностирования состояния человеческого организма по изменению температуры тела. Показано, что диагностика состояния здоровья человека по изменению температуры базируется на основании прямого переноса тепловой энергии без учета принципов их создания, реологических переходов, преобразований и стока. Средства диагностики, как правило, определяли только сток того или иного переноса.

**Ключевые слова:** биологический организм, температура, неинвазивные методы, диагностика, состояние, энергия, контроль, время, источник, излучатель, человек.

**Abstract.** The paper presents the results of the analysis of a biological organism, its theoretical and experimental research in heat transfer, principles of diagnostics of the human body by the change in body temperature. It is shown that the diagnosis of human health from the change in temperature is based on the direct transfer of heat energy without regard to the principles of its creation, the rheological transition, transformation and flow. Diagnostic tools are usually determined only flow of a transfer.

**Keywords:** biological organism, temperature, non-invasive methods, diagnostics, status, power, control, time, source, emitter, man.

### ВСТУП

У медичній практиці з метою місцевого нагрівання або охолодження тої чи іншої частини біологічного організму використовують нагріті або охоложені тіла. Звичайно для цього вибирають порівняно доступні речовини, котрі можуть чинити при цьому й корисні механічні та хімічні дії [1]. Фізичні властивості таких речовин вибираються з точки зору їх фізіологічної дії на біологічний організм. Як правило, вони повинні мати велику питому теплоємність (рідини, суспензії) або питому теплоту фазового переходу (високомолекулярні парафінові сполуки, а також лід). Якщо нагріті (охоложені) речовини накладаються безпосередньо на поверхню шкіряного покриву, то тепла енергія передається від цих тіл до біологічного організму шляхом кондуктивного перенесення через шкіру біологічного організму, а далі шляхом конвекційно-кондуктивного перенесення в його глибину. Такий процес перенесення теплової енергії призводить до місцевого механічного розширення (звуження) тканинної системи, підвищення руху рідинних середовищ (крові, лімфорідини), а також сприяє збільшенню швидкості хімічних процесів між відповідними реагуючими компонентами і покращенню відтоку продуктів реакції, що сприяє усуненню впливових факторів з організму. У даному випадку нагріті (охоложені) тіла, котрі накладаються на поверхню біологічного організму, називатимемо джерелами

тепловій енергії. Вони можуть бути джерелами як зі сталою потужністю (наприклад, електронагрівачі або лід), так і змінною в часі (наприклад, нагрітий парафін, вода тощо). Окрім того нагрівання біологічного організму може здійснюватися за рахунок дії випромінюючої енергії (інфрачервоне, біле, ультрафіолетове, лазерне, радіоактивне випромінювання тощо), електричної енергії (проходження електричного струму), електромагнітних полів низької та високої частоти. У всіх випадках здійснюється об'ємний нагрів біологічного організму.

Форма нагрівального об'єму може бути різною і, в основному, залежить від енергії джерела. Якщо джерелом теплової енергії є нагріта (охладжена) речовина, то на границі стикання «джерело  $\Rightarrow$  організм» має місце перетворення температури  $T_0$  джерела в температуру  $T_{III}(l, \theta)$  шкіри, а далі перетворення температури  $T(V, t)$  шкіри до м'язової, кровоносної та інших систем, де  $l$  - товщина шкіряного покриву;  $\theta$  - час перенесення теплової енергії через шар шкіри;  $V$  - об'єм біологічного організму, який нагрівається (охладжується);  $t$  - час стоку (перенесення) теплової енергії в об'ємі  $V$ . Такий процес можна розглядати як перенесення теплової енергії в деякому стрижні об'ємом  $V$  без ізоляції. Якщо нагрівання біологічного організму здійснюється пучком інфрачервоних (ультрафіолетових та інших) променів, які проникають в організм достатньо глибоко, то вони прогривають тільки локальний об'єм циліндричної форми. Тому таке теплове перенесення можна розглядати як процес розподілення температури в ізолюваному стрижні деякої довжини. Пучок радіоактивного випромінювання в медичній практиці використовується для направленої прогривання (наприклад, пухлини). Так як інтенсивність такого пучка є достатньо великою, то він практично пронизує весь біологічний організм і нагрівання його здійснюється у формі циліндра. Нагрівання тіла здійснюється за рахунок поглинання  $\alpha$ ,  $\beta$  чи  $\gamma$  - променів. Ступінь поглинання збільшується там, де є відхилення структури тіла від норми. Такий процес перенесення теплової енергії можна розглядати як перенесення тепла в стрижні з ізолюваною боковою поверхнею. Нагрівання біологічного організму електричним струмом постійної напруги, електромагнітним випромінюванням як низької так і високої частоти, лазерним випромінюванням, інфрачервоним та білим, а також процеси перенесення теплової енергії від нагрітого (охладженого) зовнішнього джерела до поверхні біологічного організму можна віднести до процесів перенесення тепла в стрижні без ізоляції.

У науковій медичній та біологічній літературі такі процеси приймалися як одномірні, котрі, як правило, описувалися найпростішими лінійними диференціальними рівняннями Фур'є для теплопровідності  $q_T = -\lambda \nabla T$ , де  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;  $T$  - температура;

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ ;  $x, y, z$  - координати напрямку перенесення енергії джерела, яке в тілі

перетворюється в теплову енергію. Причому у всіх випадках приймалося, що енергія  $Q$  є сталою та безмежною, тобто  $Q = Q_0 = const$ . Такий процес перенесення визначального параметра енергії джерела описувалося рівнянням вигляду

$$\frac{E(x, \theta) - E_k}{E_0 - E_k} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\xi \cdot \theta}}\right), \quad (1)$$

де  $E(x, \theta)$  - поточне перенесення енергії джерела в напрямку  $x$  за час  $\theta$ ;  $E_k$  - енергія джерела при  $x = x_k$ ;  $x_k$  - відстань від джерела енергії до деякої визначальної точки напрямку  $x$ ;  $\xi$  - коефіцієнт перенесення визначального енергетичного параметра.

Якщо джерелом тепла є нагріте (охладжене) тіло, то рівняння (1) приводиться до такої форми

$$\frac{T(x, \theta) - T_C}{T_0 - T_C} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \theta}}\right), \quad (2)$$

де  $T(x, \theta)$  - поточне значення температури за напрямком перенесення тепла  $x$  на протязі часу  $\theta$ ;  $T_C$  - температура середовища, причому  $T_C$  може дорівнювати температурі біологічного тіла  $T_T$ ;  $T_0 = const$  - температура джерела тепла;  $a = \lambda / c\rho$  - температуропровідність тіла;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності,  $c$  - теплоємність;  $\rho$  - усереднена густина (щільність) тіла в напрямку дії теплової енергії.

## МЕТА СТАТТІ

Розробити фізичні та математичні моделі перенесення теплової енергії в біологічному середовищі з врахуванням зони реологічних переходів та перетворень у вигляді імпульсної інтегральної дельта-функції Дірака.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У науковій літературі [2-6] вказується, що рівняння (1) і (2) можна використовувати лише для описання процесу перенесення тепла від джерела з безмежною потужністю та сталою енергією  $E_0$  (температурою  $T_0$ ) до досліджуваного тіла, де проходять ті чи інші біохімічні процеси (тобто перетворення цієї енергії чи температури в зміну стану біологічного організму). Намагання деяких вчених [7, 8] враховувати процеси, які протікають під дією перенесення енергії чи температури, приводили до складних нелінійних диференціальних рівнянь, які в аналітичній формі не мали розв'язку. Проблема полягала в тому, що розглядалося середовище перенесення енергії як суцільне без наявності стоку, який створюється завжди при перенесенні імпульсу теплової енергії. Розглянемо випадок, коли тепла енергія від джерела тепла (нагріте чи охолоджене тіло) передається в біологічний організм через його поверхню.

## ФІЗИЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛОВОЇ ЕНЕРГІЇ В БІОЛОГІЧНОМУ ОРГАНІЗМІ

Прийmemo до уваги, що тепловий потік, який передається в біологічне тіло, являє собою деякий умовний стрижень, від якого тепло передається у всі напрямки біологічного організму. До цього стрижня умовною довжиною  $L$  і середнім діаметром  $D$  прикладене джерело з безмежною тепловою енергією й температурою  $T_0$ . Задача полягає в тому, щоби знайти розподілення температури нагріву деякого об'єму  $V(\theta)$  тіла навколо умовного стрижня. Приймається, що середовище, в якому формується стрижень, є суцільним і безмежним з температурою  $T_C = T_T$ . Схема реологічних переходів теплової енергії для розглядуваного стрижня показана на рис. 1. Теплота від джерела з температурою  $T_0 = const$  проходить через реологічний перехід РП1 і поступає в тіло у вигляді стрижня. Частина тепла акумулюється в тілі, яке нагрівається до температури  $T(x, \theta)$ , а частина – виводиться з об'єму нагрівання через реологічний перехід РП2 у безмежне середовище, створюючи відповідний стік теплової енергії.

Біохімічні процеси, котрі протікають в біологічному середовищі, є незворотними, тому фізичну модель і графіки незворотних реологічних перетворень (НРП) для реологічних переходів покажемо у графічному вигляді (рис. 2).

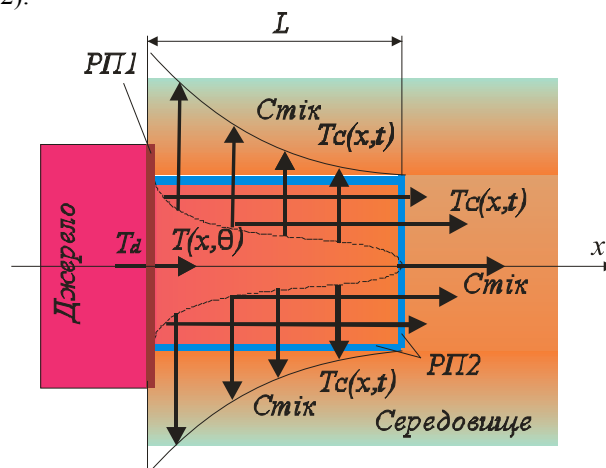


Рис. 1. Схема реологічного переходу теплоти стрижня в біологічному середовищі

Рівняння теплового балансу для такого процесу перенесення теплової енергії в напрямку  $x$  матиме вигляд

$$\frac{\partial T(x, \theta)}{\partial \theta} = a \frac{\partial^2 T(x, \theta)}{\partial x^2} - [\gamma_1(x, \theta) + \gamma_2(r, t)], \quad (3)$$

де  $\gamma_1(x, \theta)$  стік теплової енергії за напрямом довжини умовного стрижня;  $\gamma_2(r, t)$  - стік теплової енергії за час  $t$  у поперечному напрямку радіусом  $r$ .

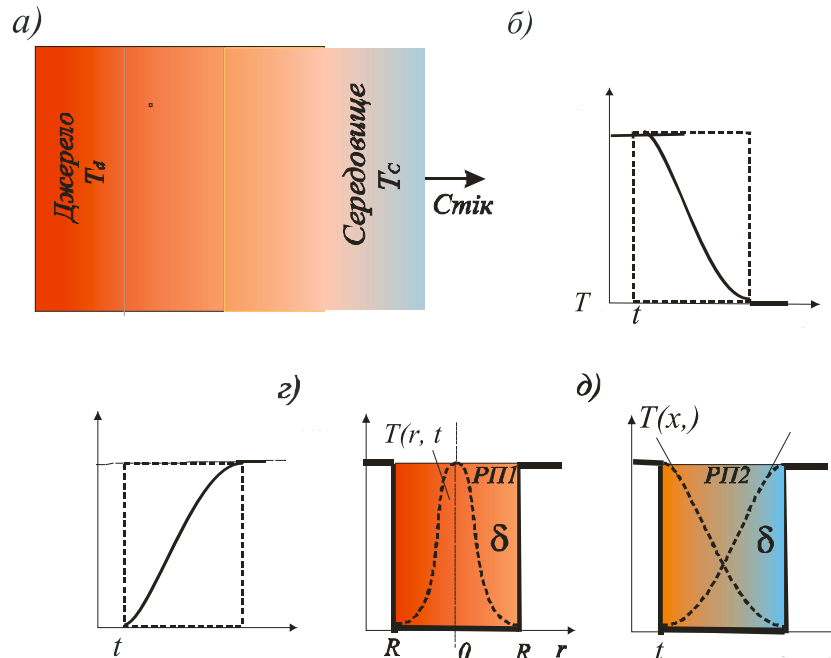


Рис. 2. Фізична модель (а) і графіки НРП для реологічних переходів: б) – графік НРП переносу температури від джерела до тіла; в) – графік НРП переносу температури в стрижень середовища; г) – графік інтегральної імпульсної  $\delta$  – функції Дірака для першого реологічного переходу ПП1; д) - графік інтегральної імпульсної  $\delta$  – функції Дірака для другого реологічного переходу ПП2.

Накопичення теплоти в умовному стрижні, виходячи з рівняння теплового балансу, здійснюється за формулою

$$\gamma_1(x, \theta) = \tau' \frac{d^2 T(x, \theta)}{d\theta^2} + \frac{dT(x, \theta)}{d\theta} - k' \frac{dT(r, t)}{dt}, \quad (4)$$

де  $\tau'$  - стала часу реологічного перенесення;  $k'$  - коефіцієнт передачі;  $T(r, t)$  - розподілення температури за радіусом  $r$  за часом  $t$ .

Розподілення теплової енергії вздовж радіуса умовного стрижня можна описати рівнянням

$$\gamma_2(r, t) = \tau'' \frac{d^2 T(r, t)}{dt^2} + \frac{dT(r, t)}{dt} - k'' \frac{dT(x, \theta)}{dt}, \quad (5)$$

де  $\tau''$  - стала часу;  $k''$  - коефіцієнт передачі.

Так як у результаті перенесення теплової енергії від умовного стрижня до біологічного середовища оцінюється стоком  $\gamma_2(r, t)$ , то для його визначення з рівняння (4) знайдемо

$$\frac{dT(r, t)}{dt} = \frac{\tau'}{k'} \frac{d^2 T(x, \theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{k'} \frac{dT(x, \theta)}{d\theta} - \frac{1}{k'} \gamma_1(x, \theta) \quad (6)$$

та її похідну

$$\frac{dT^2(r, t)}{dt^2} = \frac{\tau'}{k'} \frac{d^3 T(x, \theta)}{d\theta^3} + \frac{1}{k'} \frac{d^2 T(x, \theta)}{d\theta^2} - \frac{1}{k'} \frac{d\gamma_1(x, \theta)}{dt}. \quad (7)$$

Якщо прийняти, що функція  $\gamma_1(x, t)$  є сталою швидкістю стоку, то її похідна дорівнюватиме нулю, тобто  $\gamma_1(x, \theta)/dt = 0$ . Тоді рівняння (7) спрощується й приймає вигляд

$$\frac{dT^2(r, t)}{dt^2} = \frac{\tau' d^3T(x, \theta)}{k' d\theta^3} + \frac{1 d^2T(x, \theta)}{k' d\theta^2}. \quad (8)$$

Розділимо рівняння (5) на коефіцієнт  $k'$ . У результаті отримуємо

$$\frac{1}{k'} \gamma_2(r, t) = \frac{\tau'' d^2T(r, t)}{k' dt^2} + \frac{1 dT(r, t)}{k' dt} - \frac{k'' dT(x, \theta)}{k' dt}. \quad (9)$$

Підставивши рівняння (6) і (7) у (9), маємо

$$\frac{1}{k'} \gamma_1(x, \theta) + \gamma_2(r, t) = \frac{\tau' \tau'' d^3T(x, \theta)}{k' d\theta^3} + \frac{\tau'' d^2T(x, \theta)}{k' d\theta^2} + \quad (10)$$

$$\frac{\tau' d^2T(x, \theta)}{k' d\theta^2} + \frac{1 dT(x, \theta)}{k' d\theta} - k'' \frac{dT(x, \theta)}{dt}$$

Виходячи з того, що на границі розділу фаз температура джерела і тіла є рівними, то коефіцієнт передачі  $k' = 1$ . Тоді рівняння (10) спрощується і приймає вигляд

$$\gamma_1(x, \theta) + \gamma_2(r, t) = \tau' \tau'' \frac{d^3T(x, \theta)}{d\theta^3} + \tau'' \frac{d^2T(x, \theta)}{d\theta^2} + \quad (11)$$

$$\tau' \frac{d^2T(x, \theta)}{d\theta^2} + \frac{dT(x, \theta)}{d\theta} - k'' \frac{dT(x, \theta)}{dt}$$

Підставивши (11) у рівняння (3) і прийнявши, що  $\theta \approx t$ , отримуємо

$$\frac{\partial T(x, \theta)}{\partial \theta} - a \frac{\partial^2 T(x, \theta)}{\partial x^2} = \tau_2^2 \frac{d^3 T(x, t)}{dt^3} + \tau_1 \frac{d^2 T(x, t)}{dt^2} + \quad (12)$$

$$+ k_{PII} \frac{dT(x, t)}{dt}$$

де  $\tau_2^2 = \tau' \tau''$ ;  $\tau_1 = \tau' + \tau''$  - сталі часу реологічного перетворення;  $k_{PII} = 1 - k''$  - коефіцієнт реологічного перетворення.

Рівняння (12) є нелінійним і описує процес перенесення теплової енергії в умовному стрижні біологічного середовищі. Використовуючи метод нульового градієнту [9-11], нелінійне рівняння (12) розділяється на наступну систему двох рівнянь:

$$\frac{\partial T(x, \theta)}{\partial \theta} + a \frac{\partial^2 T(x, \theta)}{\partial x^2} = 0; \quad (13)$$

$$\tau_2^2 \frac{d^2 T(x, t)}{dt^2} + \tau_1 \frac{dT(x, t)}{dt} + k_{PII} T(x, t) = 0. \quad (14)$$

Рішення системи рівнянь дозволяє в аналітичній формі описати розподілення температури в нагрівальній чи охолоджуваній частині біологічного організму. Особливо цікавою є система рівнянь (13) і (14) для оцінювання загального температурного стану біологічного організму.

**ВИСНОВОК**

Аналіз розподілення температурного поля в біологічному організмі показує, що воно є нелінійним і дозволяє оптимізувати процес прогрівання як за часом його виконання так і за потужністю теплового випромінювання. Окрім того з системи рівнянь (13) – (14) випливає, що процес прогрівання біологічного організму можна виконувати за стоком теплової енергії, що є цінним для розробки ефективних принципів лікування тепловими методами та їх діагностики.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа. – 1987. – 638 с.
2. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. – М.: Хмийя, 1974. – 688 с.
3. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – М.: Машгиз, 1962. – 368 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
5. Лыков А.В. и Михайлов Ю.А. Теория тепло-и массопереноса. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 389с.
6. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло-и массообмена. - М.: Госэнергоиздат, 1962. – 562 с.
7. Вайнберг А.М. Математическое моделирование процессов переноса. Решение нелинейных краевых задач. – Москва-Иерусалим, 2009. – 210 с.
8. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетики. – М.: Наука, 1987. -502.
9. Стенцель Й.І. Фотоколориметричні газоаналізатори. Монографія. – К.: ІСДО. 1995. – 126 с.
10. Стенцель Й.І., Томсон А.В., Рябіченко А.В. Математичні моделі ультразвукових рівнемірів рідин. МНТЖ „Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. –Хмельницький, 2006. №2 (28). – с.55-58.
11. Стенцель Й.І. Математичне моделювання хімічних процесів на основі теорії реологічних переходів. Вісник Східноук. нац університету. Науковий збірник. №5 (111), Ч.2.- 2007. – с.91-97.

Надійшла до редакції 04.11.2013 р.

**СТЕНЦЕЛЬ ЙОСИП ІВАНОВИЧ** – д.т.н, професор, завідувач кафедри комп'ютерно-інтегрованих систем управління Технологічного інституту Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. Адреса: 93406, м.Сєвєродонецьк Луганської області, просп. Радянський, 59 а. Телефони: моб. 097-977-6411, 066-837-5130.

**КОЖЕМ'ЯКО В.П.** – д.т.н., професор, академік АІНУ, завідувач кафедри лазерної та оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

**ЗЛЕПКО СЕРГІЙ МАКАРОВИЧ** - д.т.н, професор, завідувач кафедри проектування медико-біологічної апаратури. 21021, м. Вінниця, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе 95.

**ПАВЛОВ СЕРГІЙ ВОЛОДИМИТРОВИЧ** – д.т.н, професор, завідувач кафедри загальної фізики та фотоніки Вінницького національного технічного університету. 21021, м. Вінниця, Вінницький національний технічний університет, вул. Хмельницьке шосе 95.