І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Вища математика

Частина 3

Функції багатьох змінних

Практикум

Вінниця
ВНТУ
2020

УДК 51(075)
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30.04.2020 р.)

Рецензенти:
А. А. Яровий, доктор технічних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, І.В.
Х76 Вища математика. Ч. 3. Функції багатьох змінних : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 71 с.

У практикумі на системній основі наводиться теоретичний мінімум із базової теми курсу вищої математики, а саме з «Функції багатьох змінних» та основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади завдань для індивідуальної роботи студентів.

Розрахований на студентів технічних ЗВО усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)

ЗМІСТ

Рано чи пізно будь-яка правильна математична ідея знаходить застосування в тій чи іншій справі
Академік Крилов

ВСТУП

В даному практикумі викладено один із розділів курсу вищої математики «Функції багатьох змінних». Бурхливий розвиток економіки в наш час досить часто потребує розв'язання задач на екстремум функції багатьох змінних, оскільки економічні показники, як правило, залежать від багатьох змінних. Такі задачі добре вивчені теорією функцій багатьох змінних, яка використовує методи диференціального числення.

У **практикумі** подано декілька практичних занять із даного розділу. Кожне практичне заняття містить: тему, мету, питання для самопідготовки, план, термінологічний словник ключових понять, зразки розв'язування типових задач, добірку завдань для аудиторної та самостійної роботи. Для допомоги у підготовці до практичних занять, а також для виконання самостійної роботи у практикумі наведений список рекомендованої літератури.

Практикум призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення вищезгаданого розділу курсу.

Практичне заняття № 1

Тема. Поняття функції багатьох змінних. Неперервність. Частинні похідні. Диференційовність і диференціал функцій.

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з даної теми, набути навичок і вмінь знаходження частинних похідних ФБЗ, обчислення похідних складених функцій.

Питання для самопідготовки

Основні поняття.

Поняття границі та неперервності функції багатьох змінних.

Частинні похідні.

Частинні похідні вищих порядків.

План практичного заняття

1. Поняття ФБЗ. Область визначення, область значень, лінії рівня.
2. Обчислення частинних похідних I та II порядків.

Теоретичний довідник

Нехай $D-$деяка множина впорядкованих пар дійсних чисел: $D = X \times Y$. Припустимо, що кожній парі $(x, y) \in D$ поставлено у відповідність число z із множини Z. Тоді кажуть, що на множині D задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають незалежними змінними, або аргументами; $z-$залежною змінною; кажуть також, що $f(x, y)-$значення функції f у точці (x, y). Множину D називають областю визначення функції. Всі значення, яких набуває функція $f(x, y)$ при (x, y), що належать області визначення, утворюють область значень функції z. Аналогічно можна ввести поняття функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, визначеної на множині D, що складається з упорядкованих трійок чисел (x, y, z). Усі такі функції називаються функціями багатьох змінних. Оскільки кожній впорядкованій парі чисел (x, y) у фіксованій прямокутній системі координат відповідає єдина точка М площини, і навпаки, кожній точці М відповідає єдина впорядкована пара чисел (x, y), то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки М і записувати $z = f(M)$ замість $z = f(x, y)$. Областю визначення функції тоді буде множина $\{M\}$ точок площини.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$. називають множину точок (x, y) площини Oxy, в яких функція набуває одного й того ж самого значення c і визначається співвідношенням $f(x, y) = c$. ***Поверхнею рівня функції*** $u = f(x, y, z)$ називається поверхня $f(x, y, z) = c$, в точках якої функція зберігає стале значення $u = c$.

Стала b називається ***границею функції*** $f(x,y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якої послідовності точок (з області визначення функції) $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),...,(x_n,y_n),...$, відмінних від $M(x_0,y_0)$, що прямують до точки $M(x_0,y_0)$, відповідна послідовність $f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), f(x_3,y_3),..., f(x_n,y_n),...$ значень функції завжди прямує до b. Коротко це записують так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$.

Функція $f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** $M(x_0,y_0)$, якщо вона визначена в області, що містить точку M_0, та в самій точці M_0 і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. Функція називається неперервною в деякій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ є ***повним приростом функції*** $f(x,y)$.

Якщо надається приріст, наприклад, лише змінній x, а y залишається незмінною величиною, то $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$ є ***частинним приростом функції*** $f(x,y)$ ***за змінною*** x.

Так само $\Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ є ***частинним приростом функції*** $f(x,y)$ ***за змінною*** y.

Функція $f(x,y)$ називається неперервною в точці $M(x_0,y_0)$, якщо нескінченно малим приростам змінних x та y відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \right] = 0$.

Нехай $z = f(x,y)$ є функцією від двох незалежних змінних x та y. Утворимо частинний приріст функції $f(x,y)$ за змінною x

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

(припустимо, що y залишається незмінним) і розглянемо відношення

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Якщо існує границя цього відношення, коли Δx прямує до нуля, то вона називається частинною похідною функції $z = f(x,y)$ за змінною x у точці (x,y) і позначається символом $f_x^{'}(x,y)$ або $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Отже, $f_x^{'}(x,y) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$

Аналогічне означення частинної похідної за y

$$f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні $f_x'(x,y)$ і $f_y'(x,y)$ називають частинними похідними першого порядку, які є функціями від x та y і від них можна шукати частинні похідні. В результаті одержимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Похідна $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ називається ***мішаною похідною другого порядку***.

Теорема (Шварца). Якщо частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ існують в деякому δ-околі точки $M(x,y)$ і неперервні в самій точці, то вони рівні між собою в цій точці, тобто справедлива рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

З геометричної точки зору $z=f(x,y)$ – це поверхня у просторі прямокутної системи координат. Нехай $A(x_0;y_0;z_0)$ точка цієї поверхні $z_0=f(x_0;y_0)$. Проведемо через неї площину, паралельну Oz і перпендикулярну до Oy. Рівняння площини $y=y_0$. У перетині з поверхнею отримуємо криву, яка проходить через точку $A(x_0;y_0;z_0)$ і належить поверхні. В площині $y=y_0$ крива має рівняння $z=f(x;y_0)$.

Частині похідні першого порядку від $z=f(x,y)$ в точці $(x_0;y_0)$ є ***кутовими коефіцієнтами дотичних ліній*** перетину поверхні площинами, паралельними координатним площинам zOy, zOx, що проходять через точку $A(x_0;y_0;z_0)$.

Теорема. Нехай на множині D визначено складну функцію $z=f(u,v)$, де $u=u(x,y), v=v(x,y)$, і функції $u(x,y), v(x,y)$ у деякому околі точки (x_0,y_0) мають неперервні частинні похідні за x і y, а функція $f(u,v)$ має неперервні частинні похідні за змінними u,v в деякому околі точки (u_0,v_0), де $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$. Тоді складна функція $z=f\left[(u(x,y),v(x,y)\right]$ диференційовна в точці (x_0,y_0), причому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Якщо рівність $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\right)=0$ визначає неявну функцію $z=z\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, яка є диференційовною, то її похідні можуть бути знайдені з рівнянь $\frac{\partial F}{\partial x_k}+\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k}=0 \quad (k=1,2, \ldots, n)$.

Частинні похідні функції двох незалежних змінних $z=f\left(x ; y\right)$, яку задано за допомогою рівняння $F\left(x ; y ; z\right)=0$, де $F\left(x ; y ; z\right)$ – диференційовна функція змінних *x, y, z*, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ за умови, що } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 .$$

Якщо рівняння $F(x, y)=0$ задає деяку функцію $y(x)$ в неявному вигляді і $F_x'(x, y) \neq 0,$ то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)} .$$

Якщо рівняння $F(x, y, z)=0$ задає функцію двох змінних $z(x, y)$ в неявному вигляді і $F_z'(x, y, z)=0,$ то справедливі формули

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)} .$$

Приклади розв’язування типових завдань

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

а) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; в) $u=\sqrt{x+y+z-2}$

Розв’язування

а) Очевидно, z набуватиме дійсних значень лише тоді, коли $1-x^2-y^2 \geq 0,$ тобто, коли $x^2+y^2 \leq 1.$ Цю нерівність задовольняють координати всіх точок, що лежать на полі круга з радіусом 1, також і точки його контура, тобто точки кола $x^2+y^2=1.$

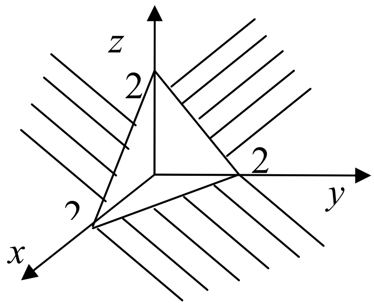
б) Шуканою областю буде прямокутник. Оскільки, з нерівності $4-x^2 \geq 0$ та $1-y^2 \geq 0$ маємо $x^2 \leq 4, \quad y^2 \leq 1,$ або $-2 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1.$

Отже, до області визначення функції належать всі точки, що знаходяться на полі прямокутника, також точки контура (прямокутника).

$$u=\sqrt{x+y+z-2},$$

в) $x+y+z-2\geq 0,$

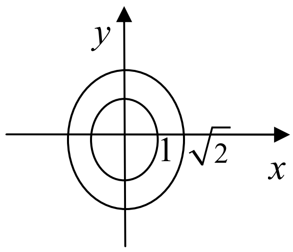
$$x+y+z\geq 2.$$



Приклад 2. Побудувати лінії рівня функцій $u=x^2+y^2$.

Розв'язування

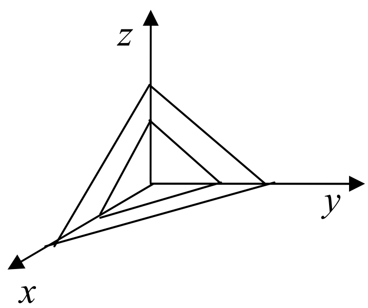
$$x^2+y^2=1,$$
$$x^2+y^2=2.$$



Приклад 3. Побудувати поверхні рівня $u=\dfrac{x+y+z}{3}$.

Розв'язування

$$\frac{x+y+x}{3}=1,$$
$$\frac{x+y+x}{3}=2.$$



Література

1. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник. / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
2. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посібник : у 2 ч. Ч. 1. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Валєєв К. Г. Математичний практикум : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання, 2007. – 454 с.
5. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : КнигиУкраїниЛТД, 2009. – 578 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебн. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1980. – 320 с.
7. Демчишин О. І. Вища математика : навч. посіб. / О. І. Демчишин, Б. Г. Шелестовський. – Тернопіль : Навчальна книга - Богдан, 2010. – 592 с.
8. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
9. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
10. Кривуца В. Г. Вища математика : практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
11. Лиман Ф. М. Вища математика : навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
12. Лозовий Б. Л. Практикум з вищої математики : навч. посіб. / Б. Л. Лозовий, Я. С. Пушак, О. Є. Шабат. – Львів : «Магнолія – 2006», 2007. – 285 с.
13. Лунгу К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю.А. Шевченко. — М. : Айрис-пресс, 2007. – 576 с.
14. Міхайленко В. М. Збірник прикладних задач з вищої математики : навч. посіб. / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.
15. Огурцов А. П. Вища математика для підготовки бакалаврів з інженерії : навч. посіб. : у 3 ч. / А. П. Огурцов, Т. В. Наконечна, О. В. Нікулін; за заг. ред. А. П. Огурцова. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2008. – Ч. 1. – 428 с.; Ч. 2. – 340 с.; Ч. 3. – 320 с.
16. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1987. – 552 с.

17. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач : навч. посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – К. : Діал, 2000. – 160 с.
18. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебн. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйша школа, 1990. – Ч. 2. – 270 с.
19. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный и др.; под. ред. С. Н. Федина. – 4-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 592 с.

Навчальне видання

Хом'юк Ірина Володимирівна
Хом'юк Віктор Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум

Рукопис оформила *І. Хом'юк*

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготував О. Ткачук

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад 50 (1-й запуск 1-21) пр. Зам. № 2020-

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.