

Моделювання і оптимізація

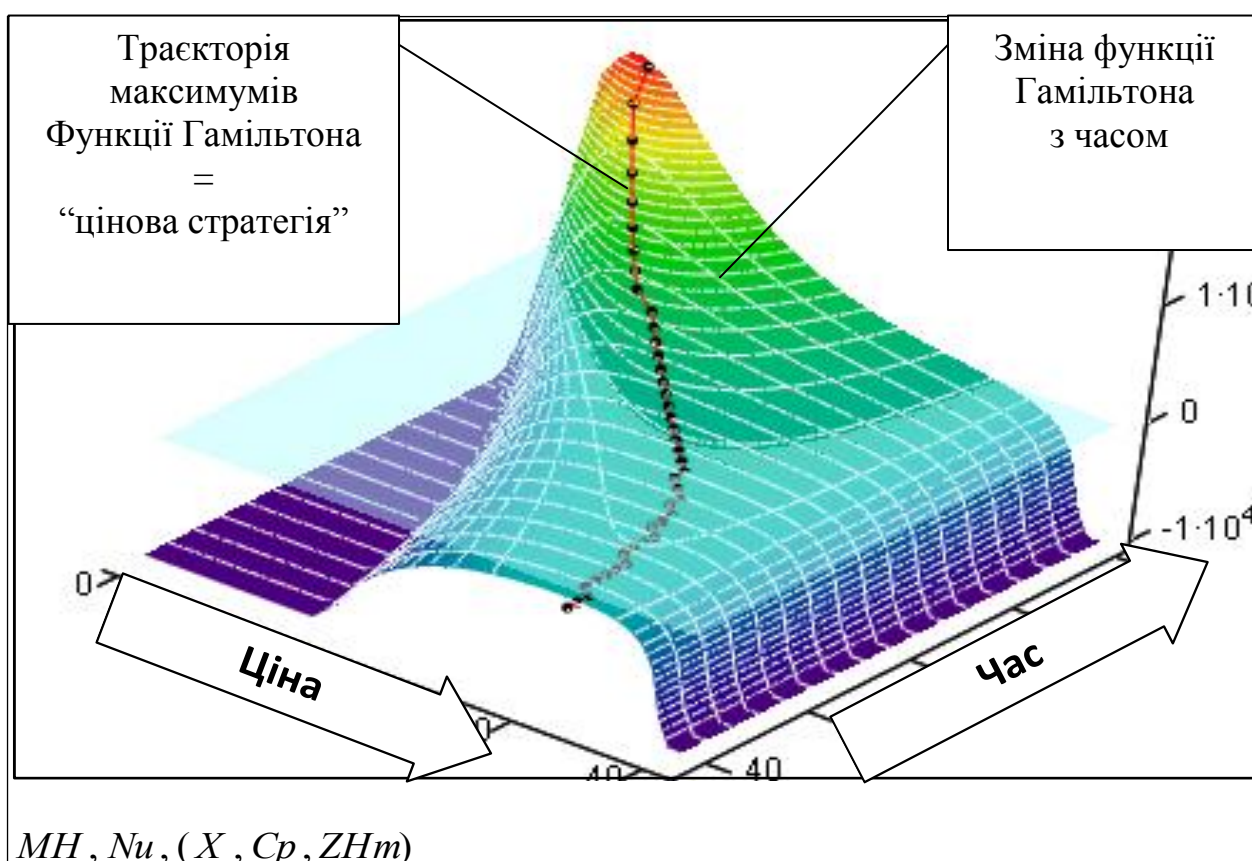
процесів розвитку

виробничих систем

з урахуванням використання

зовнішніх ресурсів

та ефектів освоєння



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ
ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ
СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ
ВИКОРИСТАННЯ ЗОВНІШНІХ
РЕСУРСІВ ТА ЕФЕКТІВ ОСВОЄННЯ**

Монографія

За загальною редакцією Т. М. Боровської

УНІВЕРСУМ – Вінниця 2009

УДК 519.81

М 74

Автори:

Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов, П. В. Северілов

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 13 від 3.07.2008 р.)

Рецензенти:

І. І. Хаймзон, доктор технічних наук, професор

С. В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор

М 74 Моделювання і оптимізація процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння: Монографія / За заг. ред. Т. М. Боровської. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 245 с.

ISBN 978-966-641-312-6

В монографії розглядаються питання теоретичного обґрунтування, програмної реалізації і практичного застосування методів оптимізації процесів розвитку виробничих систем з урахуванням ефектів освоєння виробництва. Розглядаються альтернативні постановки задач оптимального управління розвитком – з горизонтальною і вертикальною інтеграцією виробничих елементів і централізованим управлінням, децентралізованих з локальними управліннями, з різними змінними управління. Об'єднує різноманітні задачі концепція раціональних технологій конструювання робочих математичних моделей – таких, що виконуються в середовищах пакетів для моделювання. Для кожної задачі подано повний цикл моделювання – від побудови лінгвістичної моделі до конструювання програмної системи для проведення широкого кола досліджень, в тому числі – повного аналізу ризиків розвитку. Монографія повністю написана в середовищі математичного пакета.

УДК 519.81

ISBN 978-966-641-312-6

© Т. Боровська, С. Бадьора, В. Северілов, П. Северілов, 2009

ЗМІСТ

Перелік умовних скорочень	6
Вступ	8
1. Огляд існуючих моделей для задач розвитку	9
1.1. Визначення понять	9
1.2. Задача розподілу ресурсу в багатокрокових процесах.....	15
1.3. Задача Марковіца – Беллмана	16
1.4. Задача балансу попиту і пропозиції	36
1.5. Моделі обміну ресурсами.....	45
1.5.1. Моделі натурального обміну.....	46
1.5.2. Моделі ринкового обміну.....	49
1.5.3. Розробка програми моделювання ринків з довільними функціями корисності елементів.....	63
1.5.4. Дворівнева модель обміну.....	71
1.6. Моделі систем з відкритим управлінням.....	80
Висновки.....	87
2. Узагальнення задачі оптимального розвитку виробничої системи	88
2.1. Узагальнення задачі моделювання розвитку розподіленої системи.....	88
2.2. Наближене розв’язання узагальненої варіаційної задачі розподілу.....	90
2.3. Точне розв’язання узагальненої задачі розподілу.....	91
2.4. Розв’язання узагальненої задачі розподілу для випадку використання зовнішніх ресурсів.....	94
2.5. Аналіз результатів моделювання оптимальних процесів розвитку.....	98
2.6. Розробка системи для аналізу оптимальних процесів розвитку при урахуванні еластичності цін продажу продукції	102
Висновки	115
3. Задача оптимального розвитку з урахуванням ефектів освоєння	116
3.1. Визначення понять для моделей розвитку розподілених технологічних систем.....	116
3.2. Розробка моделей для задач розвитку	119
3.2.1. Розробка графових моделей розвитку з освоєнням.....	119
3.2.2. Розробка функціональних моделей для процесу розвитку..	121
3.2.3. Аналіз усталених станів процесів розвитку.....	125

3.3.	Розробка моделі динаміки процесу розвитку розподіленої системи.....	128
3.4.	Отримання точного розв'язку задачі розвитку з урахуванням ефекту освоєння виробництва.....	132
3.4.1.	Постановка варіаційної задачі оптимізації.....	132
3.4.2.	Визначення спряжених функцій.....	134
3.4.3.	Визначення функції Гамільтона.....	136
3.4.4.	Знаходження спряжених функцій.....	136
3.5.	Дослідження стратегій розвитку розподілених систем.....	138
3.5.1.	Аналіз оптимальних та емпіричних стратегій розвитку....	139
3.5.2.	Дослідження чутливості стратегій розвитку до варіацій параметрів математичної моделі.....	142
	Висновки	147
4.	Альтернативні моделі процесів розвитку: децентралізовані системи	148
4.1.	Постановка задачі.....	148
4.2.	Побудова математичної моделі і програми.....	151
4.2.1.	Аналіз емпіричних стратегій розвитку системи.....	151
4.2.2.	Аналіз і вибір функціональних субмоделей для детермінованої моделі.....	152
4.2.3.	Розробка інтерфейсу програми моделювання.....	156
4.3.	Аналіз результатів моделювання детермінованої системи	157
4.4.	Розробка програми для моделювання розподіленої системи з урахуванням невизначеностей.....	164
4.4.1.	Аналіз невизначеностей.....	164
4.4.2.	Розробка моделі локального управління в умовах невизначеності.....	165
4.4.3.	Розробка програми моделювання та інтерфейсу.....	167
4.5.	Аналіз результатів моделювання імовірнісної розподіленої системи.....	169
4.6.	Розширення математичної моделі розподіленої системи	173
4.6.1.	Модифікація функціональних моделей розподіленої системи.....	174
4.6.2.	Аналіз результатів отриманих на модифікованій моделі розподіленої системи.....	175
	Висновки	181
5.	Розробка системи для аналізу і оптимізації живучості автоматизованих систем управління	182
5.1.	Структура автоматизованої системи управління трубчастими обертовими печами	182
5.1.1.	Підсистема нижнього рівня.....	184

5.1.2.	Підсистема середнього рівня.....	185
5.1.3.	Підсистема верхнього рівня.....	186
5.2.	Узагальнення задач побудови розподілених виробничих систем	188
5.3.	Розробка робочої моделі обчислювальної мережі для розподіленої виробничої системи	190
5.4.	Використання розробленої програмної системи для аналізу відмовостійкості АСУ	202
5.4.1.	Приклад застосування програмної системи для аналізу живучості АСУ феронікелевого виробництва.....	202
5.4.2.	Приклад застосування програмної системи для аналізу живучості АСУ олієжиркомбінату.....	208
5.4.3.	Оцінка ефекту застосування теоретичних результатів....	209
	Висновки	212
6.	Задачі оптимального розвитку вертикально інтегрованих систем	213
6.1.	Приклади вертикально інтегрованих систем	214
6.2.	Розробка математичних моделей базового об'єкта	221
6.2.1.	Залежність виходу газу від температури процесу	221
6.2.2.	Модель динаміки анаеробного бродіння	222
6.3.	Розробка базових моделей вертикально інтегрованих систем	225
6.3.1.	Застосування методу оптимального агрегування для оптимізації системи з послідовно працюючими елементами ...	226
6.3.2.	Приклад отримання оптимальної виробничої функції системи	230
6.4.	Задача оптимального розвитку вертикально інтегрованої системи	231
6.4.1.	Постановка задачі оптимізації продуктивності вертикально інтегрованої системи	233
6.4.2.	Задача оптимізації системи "виробництво–постачання"....	236
6.4.3.	Дискретна задача оптимізації розподілу ресурсу між елементами вертикально інтегрованої системи	238
	Висновки	241
	Загальні висновки.....	242
	Література	243

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

- $f_i(x)$ – виробнича функція i -го елемента системи
 $F(x,y)$ – критеріальна функція у варіаційній задачі розподілу
 $G(x,y)$ – функція розвитку у варіаційній задачі розподілу
 x – темп виробництва у варіаційній задачі розподілу
 y – темп ресурсів на розвиток у варіаційній задачі розподілу
 $Fin(y)$ – монотонна позитивна функція, що може бути випуклою, увігнутою, не мати неперервних похідних
 $FinO(dx_p)$ – функція обернена до функції $Fin(y)$
 p_o – коефіцієнт освоєння
 α – параметр оновлення ковзного середнього
 $fcv(\cdot), fd(\cdot)$ – функції освоєння, попиту
 $fin(\cdot), fj(\cdot)$ – функції розвитку та критерію
ЦОМ – центральна обчислювальна машина
 $\varphi_1(\cdot)$ – обмеження по вартості елемента
 $\bar{\varphi}_2$ – вектор-функція, яка задає зв'язки між $r_{i,j}$
 $krok$ – крок моделювання
 $H(cv, cp)$ – функція Гамільтона для динамічної системи
 $\psi J(t), \psi cv(t)$ – спряжені функції
 rzp – нормований критерій перспективності задач
 $Vygr(r_i)$ – функція від рангу елемента
САК – система автоматизованого керування
УСО – пристрій віддаленого зв'язку з об'єктом
РТП – рудно-термічна піч
ПЛК – програмований логічний контролер
 T_1, \dots, T_N – окремі задачі системи
 A_{ik} – матриця інформаційного обміну між окремими задачами
 R_{ij} – матриця реалізації системи задач в розподіленій системі
 B_{il} – матриця інформаційного обміну між елементами розподіленої системи
Змінні програмних модулів
 V_v, v_v, vV – коефіцієнт "змінних" витрат: вектор, скаляр, змінна без значень
 V_p, v_p, vP – коефіцієнт "постійних" витрат: вектор, скаляр, змінна без значень
 X_p, x_p, xP – темп випуску продукції: вектор, скаляр, змінна без значень
 cv, cv_t – виробничі витрати на одиницю вимірювання

- xs – накопичений випуск продукції
- $Vytr$ – виробничі витрати
- $xkro(t)$ – зовнішні ресурси
- τ – запізнення віддачі витрат на розвиток
- Inv – темп витрат на розвиток
- $\Delta X_{i,j}$ – прирощення виробничих потужностей в розподіленій системі
- k_i – показник ефективності витрат на розвиток
- R_t – поточний обсяг потреб
- R_y – обсяг потреб за попередній період
- Dxp – потрібне прирощення темпу випуску
- Sxp – сумарний темп виробництва в розподіленій системі
- Sus – накопичений темп сумарного виробництва
- xin – темп витрат на розвиток
- (Roz_t) – матриця поточного нормованого розподілу ресурсів

Примітка. В зв'язку з тим, що робота виконана повністю в об'єктному середовищі математичного пакета, одна і та ж змінна в різних математичних виразах і програмних модулях може бути скалярною змінною, ранжованою (вектором), матрицею і "змінною без значення", що використовується в символічних обчисленнях. В роботі така змінна позначається однаковими літерами, але великими або малими, наприклад: xp – скаляр, Xp – вектор, xP – змінна без значення.

ВСТУП

Чим відрізняються сьогоднішні виробничі системи від систем вчорашніх?

Вважається, що – коротким життєвим циклом продуктів і технологій. Дійсно, моделі автомобілів змінюються раз на рік, мобільних телефонів – два три рази на рік. Зрозуміло, що коефіцієнт конструкторської і технологічної новизни складає не більше 2–7%. Однак, це наслідки, причина в глобалізації і швидкому насиченні потреб в певному продукті. В епоху Адама Сміта для насичення потреб в шкарпетках потрібно було 100 років, сьогодні для насичення потреб в новому поколінні телевизорів, мобільних телефонів, автомобілів достатньо 3–10 років. Ще одна глибока відмінність сучасних виробничих систем – суттєве зменшення собівартості продуктів протягом життєвого циклу.

Як планувати виробництва окремих продуктів? Куди віднести задачі оптимального управління розвитком? Монографія – спроба предметної відповіді – через розв'язку задач оптимального управління розвитком і моделювання процесів розвитку. Застосуємо аналогію для визначення змін в постановці оптимізаційних задач і проведенні міждисциплінарних границь: 50 років тому змінилась концепція проектування пасажирських літаків від "спочатку зробимо вище, швидше, далі від усіх, потім бомболюк переробимо на кабінку для пасажирів", до: "вивчимо дійсні потреби пасажирів, посадимо його в крісло і побудуємо навколо крісел салон, а навколо салону – літак". Тобто, майже одразу очевидно, що розробка певного виробу повинна починатися з урахування потреб споживачів, а функції економіки зводяться до ефективної реалізації оптимальних стратегій: укладання угод, мінімізації транзакційних витрат, ефективного обліку, нарешті. В рамках "чистої економіки" проблеми оптимального розвитку принципово не можуть бути розв'язані, тому що першопричина змін – дослідники, конструктори і технологи, що створюють високі технології та наукомістку продукцію. Чим відрізняються моделі і методи нашої монографії від аналогів? – Звернемось до аналогії: танковий дизель є багатопаливним – працює фактично на всьому, що горить. Згадаємо структуру класичних робіт з оптимізації і моделювання – спочатку формалізоване викладення обмежень типу: лінійність, строга монотонність, випуклість, наявність відповідної кількості неперервних похідних. Потім за допомогою вишуканих і витончених аналітичних методів знаходиться точне чи наближене аналітичне розв'язку; витонченими і вишуканими методами доводяться і досліджуються властивості вихолощеного розв'язку. В монографії універсальність досягається відмовою від пошукових обчислювальних методів на користь "безвідмовного" методу прямого перебору, а проблема розмірності вирішується застосуванням декомпозиційних методів.

1. ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗВИТКУ

В цій монографії не ставиться ціль дати повний огляд робіт з оптимального управління процесами розвитку – це просто неможливо зробити в рамках монографії. Це фундаментальна задача для наукознавців та істориків науки. В першому розділі "*розглянуто*" класичні моделі для задач розвитку, зокрема, і коеволюційної динаміки, взагалі. Відібрано тільки ті моделі, що були стартовими прототипами, початковими "*станами розуму*" при розробці нових математичних моделей, адекватних сучасним потребам практики і можливостям обчислювальних систем. Запорука успішності процесу побудови математичних моделей для нових задач – ефективність лінгвістичної моделі – словесного опису об'єкта і задачі. Тому просто необхідно уточнювати зміст термінів, що часто є пустими безреферентними штампами. Як спонтанний приклад семантичних і прагматичних проблем визначимо два використаних вище терміни.

"*Розглянути*": всі відібрані математичні моделі були реалізовані в середовищах математичних пакетів і на цих робочих моделях відтворені були відомі теоретичні результати і проведені дослідження. Простіше: можна вивчити властивості об'єкта "велосипед" за описами, а можна зробити згідно з описом "велосипед" і "покататись" на ньому.

"*Станами розуму*": Р. Беллман називав метод динамічного програмування не методом, а саме *станом розуму*, тобто для вихованих на роботах Беллмана словосполучення "стан розуму" є також специфічним асоціативним ключем, або паролем.

Прямими прототипами для моделей і методів нашої монографії були роботи [8, 21–23, 30, 31]. Для поставлених цілей там містяться усі використані "зовнішні ресурси". Починаємо розділ з визначення використаних і введених понять.

1.1. Визначення понять

Терміни, що використовуються в роботі і широко вживаються в технічній і економічній літературі, є досить розмитими, тому даємо визначення термінів саме стосовно задач роботи. Визначимо поняття і термінологію для вибраного напрямку досліджень.

Технічні об'єкти в роботі – розподілені виробничі системи – металургійні, хімічні, енергетичні, підприємства харчової промисловості та автоматизовані системи управління виробництвом. Спільним для виробництв – об'єктів роботи, є розподіленість і неперервне оновлення технологій і продуктів виробництва і, відповідно, – математичні моделі функціонування і розвитку. Можливе розширення області застосування

моделей оптимального управління розвитком на інформаційні продукти і послуги, однак, в рамках нашої роботи, така задача не ставиться.

Ресурси – матеріальні, інформаційні, енергетичні та інші витрати в процесах виробництва і розвитку засобів виробництва [54–56, 116]. Власні, зовнішні ресурси – системно-аналітичні поняття, що залежать від того, як проводяться границі системи: власні ресурси – ті, що створені в границях системи.

Виробничий елемент – перетворювач певних ресурсів у певний продукт. Ресурс і продукт вважаються вимірюваними. Виробничий елемент вважається нероздільним. Розподілені технологічні системи можуть бути багатопродуктовими і багаторесурсними.

Вважається, що завжди можна агрегувати ресурси і продукти [22, 24, 67, 83, 113, 121]. Це дає нам можливість розглядати агреговані – одноресурсні, однопродуктові технічні системи, в тому числі оптимально агреговані [89].

Продукт – результат виробництва, що знайшов використання за межами, або в середині системи. Це вироби, матеріали, продукти, інформація та ін.

Виробнича функція (ВФ) – залежність між кількістю витрачених ресурсів і кількістю виробленого продукту в деякій виробничій системі. Модель виробничої функції – математичний опис ВФ для певного класу реальних виробничих елементів. Далі, за замовчуванням, замість терміну "модель виробничої функції" використовуємо термін "виробнича функція" (ВФ).

Виробнича система – набір виробничих елементів та зв'язків типу "вхід-вихід" між елементами [143]. Серед множини можливих структур виробничих систем виділимо такі, що досліджуються в цій роботі.

Система з паралельно-працюючими елементами – набір виробничих елементів, кожний з яких переробляє певну частку загального ресурсу, що надходить до системи у певний продукт. Усі елементи використовують один і той же ресурс і виробляють один і той же продукт.

Вхідний ресурс за певними правилами розподіляється між елементами, а виходи усіх елементів об'єднуються в сумарне виробництво продукту. Особливістю реальних виробничих систем є те, що технології і відповідні виробничі функції можуть суттєво відрізнитись [143].

Неважко побудувати моделі для послідовно поєднаних систем. На базі моделей паралельно і послідовно поєднаних систем можна будувати моделі виробничих систем з довільними структурами.

Вертикально інтегрована система – система, елементи якої поєднані згідно з етапами певної технології для виробництва певного класу кінцевих продуктів. Приклади таких систем – нафтодобування, нафтопереробка і постачання нафтопродуктів, видобування руди і вугілля,

сталеваріння, заготовки, профілі і листи, кораблі, мости, вагони. В певних умовах виробничій системі вигідно спеціалізуватись на окремому етапі технологічного процесу, в інших умовах – інтегрувати декілька етапів технологічного процесу.

Розподілена система – в нашій роботі це система з паралельно працюючими елементами, що пов'язані тільки через спільний ресурс і сумарне виробництво. В цьому аспекті робота є продовженням досліджень цього класу систем [28, 89].

Термін "паралельно працюючі елементи" означає також, що при моделюванні систему можна оптимально агрегувати – замінити одним еквівалентним елементом, що витрачає усі ресурси системи і виробляє продукції стільки ж, скільки виробляє вся система при оптимальному розподілі ресурсу [46, 89]. Типовий приклад розподілених систем – сучасні металургійні, нафтохімічні, енергетичні системи, обчислювальні мережі і алгоритми для оптимізаційних задач високої розмірності [81].

Розподілена технологічна система – в нашій роботі це розподілена система, де головним системоутворювальним фактором є технологія виробництва.

Саме технологія визначає рівень економічності, екологічності та якості металургійних виробництв, що при старих технологіях забруднюють оточення в радіусі десятків кілометрів, а при нових технологіях можуть працювати в центрі міста. Приклад – металургійні мінізаводи з виробництва якісних сталей і прецизійних складних металевих профілів.

Децентралізована система – розподілена система, елементи якої можуть самостійно, виходячи з власних локальних критеріїв, управляти своїм функціонуванням і розвитком, а "центральний елемент управління" визначає загальні для всіх елементів параметри [109].

Проблеми децентралізації досить вичерпно розглянуті, узагальнені і формалізовані в [108–110], однак там не подано конструктивних методів управління децентралізованими системами. Запропоновані методи "узгодження взаємодій елементів", "координації взаємодій" самими авторами визначені як обмежені [109].

Процес розвитку – дуже розмитий термін, в нашій роботі означає тільки якісні (нові технології) і кількісні (потужність та кількість технологічних агрегатів) зміни засобів виробництва.

Функція розвитку – залежність між обсягом ресурсів, що вкладаються в розширення виробничої потужності (максимального значення ВФ) і прирощенням виходу "продукції". В цій роботі поняття "функція виробництва", "функція розвитку", "ціна" – конкретні, суто технологічні показники. Наприклад, виробнича функція визначається так: використано X фізичних одиниць ресурсу і отримано Y одиниць продукту, що в

рамках виробничого об'єднання (сьогодні в єдині технологічні системи об'єднуються металургійні, гірничорудні, вугільні, коксохімічні виробництва) може бути обміняна на $XV(Y)$ одиниць ресурсу.

Різниця $(XV(Y) - X)$ – ефект виробництва, може бути використана як для розширення виробництва, так і для зовнішніх, відносно цієї технологічної системи, цілей (розвитку інших виробництв, накопичення та ін.).

Відношення $XV(Y)/X$ – показник ефективності технологічного перетворювача ресурсу. Природна мета будь-якої виробничої системи – максимізація обсягу виробництва за певний "плановий період".

Плановий період – інтервал часу від початку розвитку до моменту, коли це виробництво вичерпує свої можливості, замінюється принципово іншими за технологією і навіть за призначенням.

Критерії. Коли визначені технології узагальненого виробництва і технології розширення виробництва, природно поставити задачу максимізації накопиченого прибутку за рахунок оптимального розподілу власних і зовнішніх ресурсів між накопиченням та розширенням виробництв, а також розподілу ресурсів між напрямками розвитку розподіленої системи. Мета накопичення – створити ресурси для нових виробництв, нових проектів. Тому як основний критерій оптимізації вибираємо сумарне накопичення за період розвитку.

Математичне моделювання – в літературі існують дещо різні визначення цього поширеного поняття. Поняття "математичне моделювання" охоплює широкий спектр задач – від математичних моделей простих технічних систем – транзистора, електродвигуна, вібростенда до математичних моделей металургійного агрегату і системи підприємств.

Деякі автори [108–110, 122, 142, 143] відносять моделі технічних пристроїв до *метричних моделей*, якщо вони тільки дають зв'язок між змінними вектора вимірювання і вектора стану, і навіть *апроксимацій*, що дають наближення емпіричних даних в класі певних функцій – сплайнів, сплесків та ін.

В монографії розробляються і досліджуються математичні моделі технологічних агрегатів і виробничих систем, що не обов'язково складніші за метричні моделі та апроксимації, але якісно інші, ніж метричні та апроксимаційні моделі. До моделей рівня "технологічний агрегат", "виробнича система" не можна застосовувати критерії адекватності і точності метричних та апроксимаційних моделей. Подамо цю різницю цитатами: "Перевірка адекватності моделі є різною в залежності від застосувань ... модель слід оцінювати по її здатності відтворювати і прогнозувати характеристики поведінки системи – стійкість, коливання, зростання, середній період коливань, загальні взаємозв'язки змінних,

що змінюються з часом, і тенденції до підсилення чи послаблення збурень, викликаних зовнішніми причинами" [142].

Метамодель – в нашій роботі це модель процесу побудови моделі складної технічної системи. Це конкретизація запропонованого М. Пешелем [122] підходу до моделювання еволюційних процесів на базі ієрархії елементарних процесів росту з обмеженням.

В табл.1.1 подано схему "породжуючого механізму" для виробничої системи – "вежі" з елементарних процесів. На кожному рівні діє механізм зростання з обмеженням, що має внутрішні зворотні додатні і від'ємні зв'язки (ЗЗ) та зовнішні входи від вищого рівня ієрархії. Для виробничої системи це:

1) розробка виробів і технологій – "виробництво інтелектуальної продукції";

2) створення виробничих фондів – створення засобів виробництва;

3) виробництво продукції – виробництво продуктів і виробів.

У великих системах зв'язки між рівнями замикаються. Обмежуємося моделями рівнів 2 і 3 з урахуванням дії механізмів розвитку. Ієрархічна модель процесів розвитку добре узгоджується з емпіричними даними про "швидку" і "повільну" виробничу функцію виробничої системи. Виробничі функції розглядаємо як зовнішній емпіричний факт, досить пояснений і обґрунтований теоретично.

Процеси функціонування і розвитку. Вибрана багаторівнева модель узагальнених виробничих функцій визначає процеси функціонування і розвитку. Конкретизуємо терміни, що часто використовуються в цьому науковому напрямку.

Процес функціонування – процес нижнього рівня (табл.1.1), виходом якого є певний матеріальний чи інформаційний продукт.

Процес розвитку – процес середнього рівня (табл.1.1), виходом якого є параметр нижнього рівня – узагальнена "виробнича потужність" [109]. Розвиток може бути і зворотним, коли "виробничі потужності" згортаються, конвертуються, утилізуються.

Процес "навчання" – процес третього – верхнього рівня, інтерпретація якого – підвищення ефективності перетворення ресурсу в продукт на першому і другому рівнях.

Змістовно, "навчання" – вдосконалення технологічних процесів, програм управління, комунікації, введення інновацій – нових матеріальних та інформаційних технологій, зокрема, нових моделей і методів управління. Саме цьому напрямку присвячені дослідження описані в цій роботі.

Таблиця 1.1

Багаторівнева модель росту (розвитку) розподіленої системи

Рівень	Математична модель	Інтерпретація міжрівневих зв'язків	Інтерпретація функцій
1	$\frac{d}{dt}x_1 = f_1(x_1, x_0, Vp_1)$	x_0 – максимальне значення $f_1(\cdot)$	Функція інновацій
2	$\frac{d}{dt}x_2 = f_2(x_2, x_1, Vp_2)$	x_1 – максимальне значення $f_2(\cdot)$	Функція розвитку
3	$\frac{d}{dt}x_3 = f_3(x_3, x_2, Vp_3)$	x_2 – максимальне значення $f_3(\cdot)$	Функція виробництва

Ціни обміну ресурсів. Математичні моделі розподілених систем будуть принципово неадекватними реальним, якщо в них не включено процеси обміну між елементами, продуктами і ресурсами.

Визначимо це на прикладі: дві ЦОМ обчислювальної системи можуть обмінятися задачами, що вимагають різних витрат обчислювальних ресурсів. Природно тут ввести міри вагомості задач в системі – "ціни". Розглянемо математичні моделі розподілених систем, де "природним" чином виникають поняття "ціни" (оцінки):

– Пряма і спряжена задачі лінійного програмування. Для виробничої задачі змінні спряженої задачі трактуються як "оптимальні оцінки ресурсів", зокрема, надлишкові ресурси мають нульові оцінки.

Наприклад: *"в рассматриваемом алгоритме декомпозиции осуществляется координация решения подзадач с помощью системы цен. Двойственные переменные представляют собой так называемые цены на дефицитные ресурсы"* [81].

– Метод невизначених множників Лагранжа. В класичній задачі нелінійного програмування [45] множники Лагранжа теж інтерпретуються як "ціни" ресурсів.

– Спряжені функції у варіаційній задачі Лагранжа теж характеризують "ціни" певних параметрів відносно значення критерію – звичайно інтегрального функціоналу [4, 20, 32, 75, 99].

Тобто в конкретний момент часу процесу спряжена функція характеризує прирощення критерію (звичайно сумарного випуску продукції за певний період) на одиницю прирощення певної змінної – стану чи управління.

1.2. Задача розподілу ресурсу в багатокрокових процесах

Р. Беллман називає задачу розподілу ресурсу в багатокрокових процесах "задачею розподілу" [35]. Ця задача у Беллмана є тестовою для альтернативних методів оптимізації в тому числі і для методу динамічного програмування. По суті це задача оптимізації розвитку виробничих систем, що була досить повно досліджена 50 років тому Беллманом і особливо актуальною стала сьогодні. Зміст цього і наступного підрозділу – ретельне перенесення задач з першоджерела [35, 37] в середовище математичного пакету, перетворення в робочі моделі.

Головна мета такого конкретного розгляду була в розумінні логіки і методології побудови моделей процесів розвитку і пошук можливостей, в рамках цієї логіки і методології, розв'язання більш складних задач розвитку.

Виявилось, що у випадку довільних цільових функцій і функцій обмежень задачі оптимального управління розвитком вимагають інших підходів (можна сказати і "іншої парадигми", але це не допоможе пошуку розв'язання).

Тому, перш ніж відмовлятися від певних здобутків певного напрямку, переглядаємо їх з усіма дрібницями – отриманням похідних, групуванням змінних і т.д.

Постановка одновимірної задачі

Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J(y) = \int_0^T F(x, y) dt, \quad (1.1)$$

де функції $x(t)$, $y(t)$ зв'язані диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} x(t) = G(x(t), y(t)), \quad x(0) = c > 0 \quad (1.2)$$

і на функцію $y(t)$ накладено обмеження

$$0 \leq y \leq x. \quad (1.3)$$

Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими. При відсутності обмежень – це класична задача варіаційного числення, при наявності обмеження – це окремий випадок задачі Больца. Беллман довів, що розв'язання може мати три інтервали ("все в розвиток", "пропорційно", "все в накопичення").

Головна мета цього розділу виявлення і строге обґрунтування структури розв'язання узагальненої задачі розподілу. При виконанні певних "природних" умов розв'язання має такий вигляд

$$\begin{array}{lll}
y(t) = x(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 & - \text{"все в розвиток"} \\
0 < y(t) < x(t) & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 & - \text{"ейлерова ділянка"} \\
y(t) = 0 & \text{при } t_2 \leq t \leq T & - \text{"все в накопичення"}.
\end{array}$$

Припускаємо, що функції $F(x, y)$, $G(x, y)$ задовольняють умови:

$$\left. \begin{array}{l}
\text{а) функції } F \text{ та } G \text{ належать до класу } C^2, \text{ тобто мають неперервні} \\
\text{окремі похідні другого порядку;} \\
\text{б) існують константи } p, q, r \text{ такі, що} \\
p \cdot x < G(x, y) < q \cdot x + r \text{ при } x > 0 \text{ та } 0 < y < x; \\
\text{в) функція } G_y \text{ (частинна похідна } \frac{\partial}{\partial y} G(x, y)) \text{ приймає значення} \\
\text{тільки одного знака: або } G_y > 0 \text{ або } G_y < 0 \text{ при усіх значеннях} \\
x, y, \text{ що задовольняють умови } x > 0 \text{ та } 0 < y < x.
\end{array} \right\} (1.4)$$

Умова б) означає, що на інтервалі $(0, T)$ функція $x(t)$ буде (в силу диференціального рівняння (1.2)) обмежена позитивними константами

$$0 < m \leq x(t) \leq M. \quad (1.5)$$

Постановка багатовимірної задачі

Багатовимірна задача не створює принципово нових проблем крім чисто кількісної проблеми розмірності. Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J = \int_0^T F(x(t), y(t)) dt, \quad (1.6)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – вектор стану системи (темпи виробництва); $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор управління. Вектор-функції $x(t), y(t)$ зв'язані системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} x_i = G_i(x(t), y(t)), \quad x_i(0) = c_i > 0, \quad i = 1..N \quad (1.7)$$

і на вектор-функцію $y(t)$ – управління накладено обмеження

$$0 \leq y_i \leq x_i, \quad i = 1..N. \quad (1.8)$$

Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими. Розв'язання багатовимірної задачі в загальному випадку теж має ділянки "все в розвиток", "ейлерова ділянка", "все в накопичення" [35–37].

1.3. Задача Марковіца–Беллмана

Задача Марковіца–Беллмана є окремим випадком задачі розподілу [35]. В цьому випадку критерій і обмеження є адитивними функціями (сумами). Більшість актуальних практичних задач належать саме до

цього підкласу задач розподілення.

Постановка задачі. В децентралізованій системі виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ (в задачі 1 через x позначались витрати ресурсу). Продукція може йти в накопичення або на збільшення виробничих потужностей. Задані рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = \text{fin}_i(y(t)_i) = \text{fin}_i(xs(t) \cdot u_i),$$

де $\text{fin}_i(y(t)_i)$ – функція розвитку для i -го виробництва, що належить до класу невід’ємних не строго монотонно зростаючих функцій;

$xs(t) = \sum_{j=1}^N x(t)_j$ – сумарне виробництво в момент t ; $0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управ-

ління, відповідно, це частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей по i -му продукту. Для управління виконується умова нормування (обмеження на

управління):
$$\sum_{j=1}^N u(t)_j + \text{unak}(t) = 1,$$

де $0 \leq \text{unak} \leq 1$ – частка ресурсів, що йде в накопичення. Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку – вектор-функцію $uop(t)$, що максимізує інтегральний критерій – сумарний накопичений випуск за плановий період T

$$JN = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N x(t)_j \right) \cdot \text{unak}(t) dt.$$

На відміну від більшості робіт з оптимізації того часу і сучасних Беллман не обмежувався випадком випуклих і гладких (таких що мають першу і другу похідні) функцій F та G . Він отримав і проаналізував розв’язання задачі розподілу для випадків випуклих та невивуклих функцій. Причому отримав загальні розв’язання задачі альтернативними методами – варіаційного числення і динамічного програмування.

Беллман знайшов загальну методику розв’язання таких задач для випадку лінійних рівнянь динаміки виробничих потужностей. Оптимальні управління (стратегії) в цьому випадку є розривними – вони складаються з двох інтервалів – "все в розвиток", "все в накопичення". Складність рівнянь для визначення відповідних моментів переключення управління швидко зростає з ростом розмірності виробничої системи.

Оптимізаційні задачі стратегічного управління є варіаційними задачами. В такій задачі шукається не одна точка – координати екстремуму цільової функції, а певна функція часу, що дає екстремум цільовій функції – звичайно інтегральному функціоналу. На першому етапі ми відтворимо в середовищі математичного пакета результати Беллмана –

зробимо програмні модулі для обчислення оптимальних управлінь. На другому етапі виконаємо ряд модифікацій цієї базової задачі і запропонуємо засоби розв'язання. На третьому етапі застосуємо, метод оптимального агрегування [18, 20, 91] для зведення багатопродуктової системи до еквівалентної однопродуктової.

Розв'язання задачі Марковіца–Беллмана

Задача максимізації виробництва за декілька кроків (періодів) функціонування децентралізованої виробничої системи є природним узагальненням однокрокової задачі оптимізації розподілу ресурсу. Наприклад, задачу максимізації виробництва певного продукту за рік можна трактувати так: в перші півроку витратимо всі ресурси на технологічне вдосконалення процесу виробництва (змінимо виробничу функцію), а в останні півроку витратимо ресурси тільки на виробництво і отримаємо в результаті більше продукції, ніж за умови виробництва протягом року за старою технологією.

Враховуємо ще один момент, який наближує задачу оптимального розподілу ресурсів до реальності: зворотні зв'язки "вихід–вхід". В однокроковій задачі обмеження по ресурсу є екзогенним. В багатокроковій задачі обмеження по ресурсу є ендогенними – це результат функціонування виробничої системи. Сьогодні головним аспектом функціонування виробничих систем стає інноваційна діяльність. Однак, "типові підходи і методи прогнозування, орієнтовані на дослідження еволюційного, поступового розвитку, не можуть виявити і передбачити зміни процесів, стрімких у часі і стрибкоподібних за властивостями" [61]. Високі наукоємні технології, глобалізація вимагають високих темпів розвитку виробничих систем. Задача оптимізації стратегічного управління такими нестаціонарними, нелінійними, невизначеними організаційно-виробничими системами вимагає високого рівня математичних моделей і практичного досвіду, який в значній мірі буде набиратись через моделювання – на віртуальній реальності [61].

Ще одна причина – методологічна: саме задача такого класу є наскрізною моделлю і прикладом в роботах Р. Беллмана, присвячених динамічному програмуванню, функціональній апроксимації, адаптивному управлінню [32, 35, 37].

Одновимірна задача. Розглянемо спочатку одновимірну (однопродуктову) задачу розподілу. Задано: дифрівняння процесу розширення виробництва

$$\frac{d}{dt}x(t) = a11 \cdot y(t), \quad a11 > c; \quad (1.9)$$

початкове значення темпу виробництва $t = 0$: $x(0) = c1$;

$$\text{критерій оптимізації (функціонал)} \quad J = \int_0^T (x(t) - y(t)) dt; \quad (1.10)$$

ціль оптимізації: максимум функціоналу (1.10); змінна управління $y(t)$, обмеження управління $y(t) \leq x(t)$ (= розвиток за рахунок власних поточних ресурсів).

Розв'язання задачі. Розв'яжемо диференціальне рівняння процесу відносно x :
 $\frac{d}{dt} x(t)_i = a_{1,1} \cdot y(t)_i; \quad dx_1 = a_{1,1} \cdot y(t)_i \cdot dt$; інтегруємо і отримуємо

$$x(t)_i = c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t)_i dt. \quad (1.11)$$

Підставимо (1.11) у функціонал (1.10) :

$$J = \int_0^T \left(c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t)_i dt - y(t)_i \right) dt, \quad (1.12)$$

де $y(t)_i$ задовольняє умову

$$0 \leq y(t)_i \leq c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t)_i dt. \quad (1.13)$$

Очевидно, права частина нерівності – це вираз для x_1 (1.11).

Змінюємо порядок інтегрування у (1.12) і отримуємо

$$J = c_1 \cdot T + \int_0^T [a_{1,1} \cdot (T - t) - 1] \cdot y(t)_i dt. \quad (1.14)$$

Проаналізуємо інтеграл (1.14). Щоб функціонал був максимальним, підінтегральний вираз в кожний момент часу повинен бути максимально можливим. Як цього досягнути? Бачимо, що підінтегральний вираз – це добуток виразів $[a_{1,1} \cdot (T - t) - 1]$ та $y(t)_i$. Перший множник – функція часу, на яку ми не маємо впливу, другий множник – $y(t)_i$ – це управління, яке потрібно знайти – обсяг ресурсу витрачений на розширення виробництва.

Множник $[a_{1,1} \cdot (T - t) - 1]$ в (1.14) – функція часу. При умові: $t = 0$, та $a_{1,1} \cdot T > 1$, ця функція спочатку є додатною, але в певний момент $t = T_1$ стає меншою нуля. Неважко визначити (в середовищі математичного пакета з використанням символьних обчислень) момент переключення управління

$$a_{1,1} \cdot (T_1 - t) - 1 = 0 \text{ solve, } t_1 \rightarrow \frac{a_{1,1} \cdot T - 1}{a_{1,1}}; \quad T_1 = \frac{(a_{1,1} \cdot T - 1)}{a_{1,1}}.$$

При заданих нами додаткових умовах відносно $a_{1,1}$ і T , що є природними, функція $y(t)_i$ повинна бути максимально можливою на

інтервалі, де перший множник додатний, і нульовою, там де він від'ємний. Тобто, в момент часу T_1 має місце "переключення" управління з стратегії "усе в розвиток виробництва" в стратегію "усе в накопичення". Записуємо вираз для оптимального управління

$$y_1(t) = \begin{cases} \left(c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y_1(t) dt \right) & \text{if } 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{if } T_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.15)$$

Отримаємо явний вираз для $y_1(t)$. Продиференціюємо (1.11):

$$y_1(t) = c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^T y_1(t) dt; \quad \frac{d}{dt} y_1(t) = a_{1,1} \cdot y_1(t);$$

$$\frac{d}{dt} y_1(t) - a_{1,1} \cdot y_1(t) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння: $y_1(t) = c_1 \cdot e^{a_{1,1} \cdot t}$ – до моменту переключення T_1 . Після того, як оптимальне управління знайдено, його реалізація та моделювання процесів розвитку однопродуктової системи є тривіальними, однак, доведемо задачу до кінця.

Розробка стенда для аналізу оптимальних процесів розвитку

Сьогодні нераціонально і дуже замало отримати якийсь розв'язок конкретної інженерно-економічної задачі. Перший крок в модифікації "просто програми для розрахунку процесу" – розробка документа для аналізу впливу розкидів параметрів (що буде якщо аналізу), потім – документа для побудови функцій впливу, документа для отримання розподілів ймовірностей вихідних даних в залежності від розподілів ймовірностей вхідних даних.

Інтерфейси прикладних програм звичайно оформлюють як дошку приладів літака чи стенд для випробування і дослідження певної технічної системи. Назва "стенд" є певним перебільшенням для дослідження лінійної одновимірної задачі, однак, далі розглядаються більш складні моделі і задачі дослідження.

Вводимо значення параметрів:

$$a_{11} := 0.27; \quad c_1 := 2; \quad T := 12; \quad t := 0, 0.5.. 12.$$

Визначимо момент T_1 переключення управління з стратегії "усе у виробництво" в стратегію "усе у накопичення–споживання".

$$a_{11} \cdot (T_1 - t) - 1 = 0 \text{ solve, } t_1 \rightarrow \frac{(a_{11} \cdot T_1 - 1)}{a_{11}}; T_1 := \frac{(a_{11} \cdot T - 1)}{a_{11}}; T_1 = 8.3 .$$

Ми використали символний процесор для розв'язання рівняння відносно змінної T_1 . Але нам довелося ввести штучні "змінні без числових значень", тому що пакет примусово підставляє у символні вирази значення тих змінних, які ці значення мають. Потім ми скопіювали результат і повернулися до старих змінних і вивели числовий результат $T_1 = 8.3$.

Записуємо рівняння для темпу виробництва $x_1(t)$, інвестицій $y_1(t)$, "прибутку" $z_1(t)$, сумарного прибутку $Sz(t)$:

$$T_1 := \frac{(a_{11} \cdot T - 1)}{a_{11}};$$

$$y_1(t, T_1, a_{11}) := \begin{cases} \left(c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t c_1 \cdot e^{a_{11} \cdot t} dt \right) & \text{if } 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{if } T_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$x_1(t, T_1, a_{11}) := \begin{cases} y_1(t, T_1, a_{11}) & \text{if } 0 \leq t \leq T_1 \\ y_1(T_1 - .01, T_1, a_{11}) & \text{if } T_1 \leq t \leq T \end{cases};$$

$$z_1(t, T_1, a_{11}) := x_1(t, T_1, a_{11}) - y_1(t, T_1, a_{11});$$

$$Sz(t, T_1, a_{11}) := \int_0^t z_1(t, T_1, a_{11}) dt.$$

Робимо стенд – збираємо разом входи і виходи, будемо графік процесу $c_1 = 2$; $a_{11} = 0.27$; $T = 12$; $T_1 = 8.3$; $Sz(T, T_1, a_{11}) = 69.4$ угр.

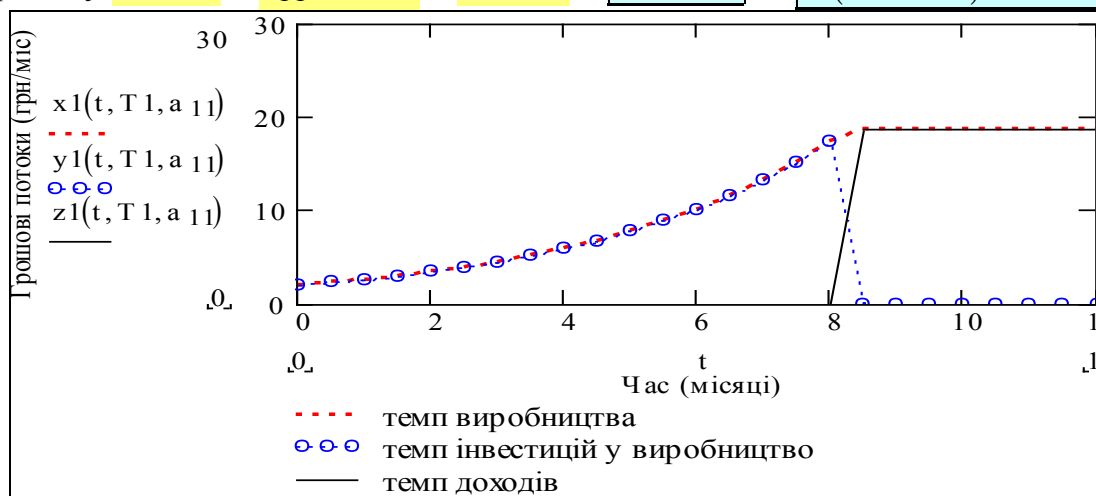


Рис. 1.1. Оптимальний процес розвитку

Отриманий розв'язок дійсно оптимальний – спробуємо змінити момент переключення:

$$Sz(T, T1 \cdot 0.9, a_{11}) = 67.9; Sz(T, T1, a_{11}) = 69.4; Sz(T, T1 \cdot 1.1, a_{11}) = 67.4.$$

Бачимо, що дійсно "крок вправо, крок вліво – втеча" від максимального прибутку. Числа в прикладі взято умовні. На рис. 1.2 подано дві копії екрану для двох значень параметра a_{11} – "ефективність інвестицій" (грн/рік приросту темпу випуску на грн/рік інвестицій).

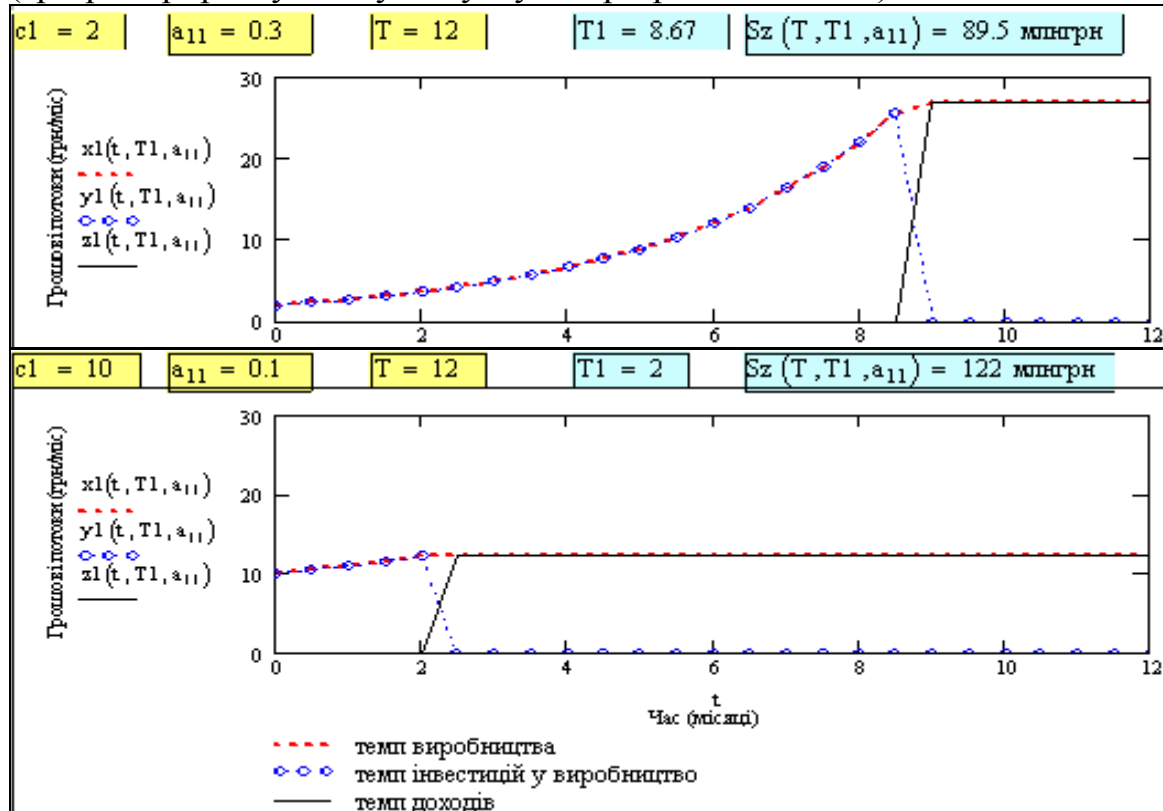


Рис. 1.2. Оптимальні процеси розвитку: вплив коефіцієнта віддачі інвестицій a_{11}

Бачимо, що при малій ефективності інвестицій інтервал "все в накопичення" починається раніше.

Двовимірна задача. Розв'язання багатовимірних задач такого класу має таку ж структуру і властивості, що і одновимірних задач, але більш трудомістке і складне. Оцінимо вплив розмірності на конкретному прикладі двовимірної задачі.

Задано: систему диференціальних рівнянь процесу розширення виробництва

$$\frac{d}{dt} x_1 = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2; \quad \frac{d}{dt} x_2 = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2; \quad (1.8)$$

коефіцієнти якої задовольняють обмеження $a_{ij} \geq 0, i=1,2; j=1,2$; початкові значення темпів виробництва $t = 0$: $x(0)_1 = c_1; x(0)_2 = c_2$; критерій оптимізації (функціонал)

$$J2 = \int_0^T (z_1 + z_2) dt, \quad (1.9)$$

де $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$; ціль оптимізації – максимум функціоналу (1.9); змінні управління $y(t)_1$, $y(t)_2$, обмеження управління $y(t)_1 \leq x(t)_1$, $y(t)_2 \leq y(t)_2$. Далі за замовчуванням записуємо x_1 , y_1 , замість $x(t)_1$, $y(t)_1$.

Розв'язання задачі. Розв'яжемо систему диференціальних рівнянь процесу розвитку (1.8). Інтегруємо і отримуємо

$$x(t)_i = c_i + a_{i,1} \cdot \int_0^t y(t)_1 dt + a_{i,2} \cdot \int_0^t y(t)_2 dt, \quad i=1,2. \quad (1.10)$$

Підставимо (1.10) у функціонал (1.9)

$$J2 = \int_0^T \left(c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{12} \cdot \int_0^t y_2 dt - y_1 \right) dt + \int_0^T \left(c_2 + a_{21} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{22} \cdot \int_0^t y_2 dt - y_2 \right) dt, \quad (1.11)$$

де $y(t)_i$ задовольняє умову

$$0 \leq y(t)_i \leq c_i + a_{i,1} \cdot \int_0^t y(t)_1 dt + a_{i,2} \cdot \int_0^t y(t)_2 dt, \quad i=1,2. \quad (1.12)$$

Праві частини нерівностей (1.12) – це вирази (1.10) для x_1 , x_2 .

Подивимось на вираз (1.11). Інтеграл в дужках (по змінній t_1) – це обчислення виробничих потужностей на поточний момент часу. Зовнішній інтеграл (по змінній t) характеризує сумарну кількість продукції, що буде вироблена на поточних потужностях до кінця періоду – моменту T . До такого подвійного інтеграла можна застосувати операцію зміни порядку інтегрування.

Зміна порядку інтегрування у виразі (1.11) дозволяє розділити підінтегральні вирази на множники, що залежать тільки від часу, і множники, що залежать тільки від управління – тоді легко буде зробити висновки про структуру оптимального управління.

На рис. 1.3 подано дискретну графічну інтерпретацію подвійного інтеграла.

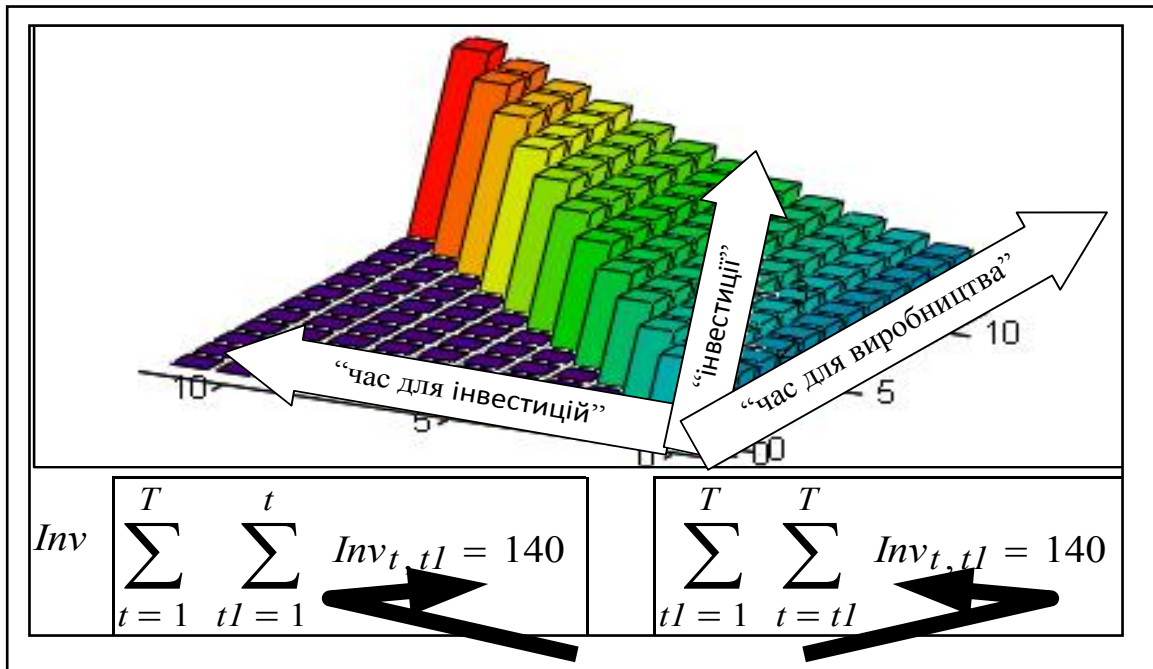


Рис. 1.3. Суть зміни порядку інтегрування

Після зміни порядку інтегрування у (1.11) і алгебраїчних перетворень отримуємо:

$$J2 = (c1 + c2) \cdot T \cdot \left[\int_0^T [(a_{11} + a_{21})(T - t) - 1] \cdot y_1 dt + \int_0^T [(a_{12} + a_{22})(T - t) - 1] \cdot y_2 dt \right] \quad (1.13)$$

У цьому виразі множники $[(a_{11} + a_{21})(T - t) - 1]$, $[(a_{12} + a_{22})(T - t) - 1]$ є функціями часу, що не залежать від управління. Тому для максимізації функціоналу потрібно управління y_1 та y_2 вибирати так, щоб величина їх була максимально можливою, коли вирази у дужках додатні, і нульовими, коли – від’ємні.

Таким чином, стратегія управління має бути такою: спочатку всі ресурси системи йдуть на розширення виробництва, після певних моментів T_1 , T_2 припиняється розширення виробництва і все йде у накопичення. Визначимо моменти переключення управління за допомогою символічного блока розв’язання систем рівнянь.

Given – початок блока, вводимо систему рівнянь:

$$(a_{11} + a_{21})(T - T_1) - 1 = 0; \quad (a_{12} + a_{22})(T - T_2) - 1 = 0$$

кінець блока *given-find*: виводимо розв’язання у символічному вигляді

$$Find(T_1, T_2) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{(12 \cdot a_{11} + 12 \cdot a_{21} - 1)}{(a_{11} + a_{21})} \\ \frac{(12 \cdot a_{12} + 12 \cdot a_{22} - 1)}{(a_{12} + a_{22})} \end{array} \right],$$

$$\text{звідки маємо: } T_1 = \frac{(a_{11} + a_{21}) \cdot T - 1}{a_{11} + a_{21}}, \quad T_2 = \frac{(a_{12} + a_{22}) \cdot T - 1}{a_{12} + a_{22}}. \quad (1.14)$$

За рахунок перестановки рівнянь можна зробити $T_2 > T_1$. В [37] доведено, існування моменту T_3 : $T_1 \leq T_3 \leq T_2$ переключення другого управління. Визначити аналітично цей момент для систем вище третього порядку майже неможливо. Однак для практики досить знання про існування моменту переключення T_3 , який будемо знаходити числовим – пошуковим методом.

Таким чином, максимум критерію за період часу T для заданих обмежень досягається при такій стратегії:

накопичення першого продукту $z_1=0$ при $0 \leq t \leq T_3$;

накопичення другого продукту $z_2=0$ при $0 \leq t \leq T_2$;

витрати на розширення першого виробництва $y_1=0$ при $T_3 \leq t \leq T$;

витрати на розширення другого виробництва $y_2=0$ при $T_2 \leq t \leq T$.

У підсумку ми можемо побудувати систему оптимального управління, де на кожному кроці процесу знаходяться y_1 та y_2 , що забезпечують максимум критерію (1.11) (рис. 1.4).

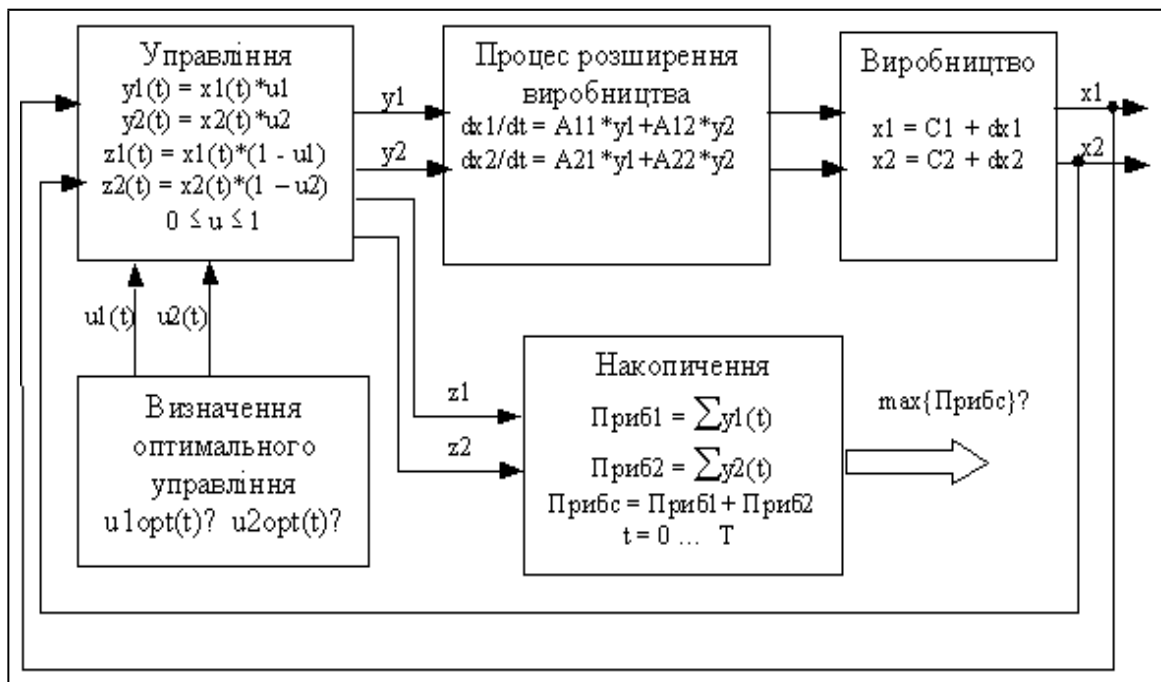


Рис. 1.4. Схема системи оптимального управління розвитком.

Приклад

Як приклад технології отримання і аналізу математичних моделей використаної Р. Беллманом наводимо доведення вигляду оптимального управління на інтервалі $T_1 \leq t \leq T_2$ – точно за *першоджерелом* [37].

Для визначення значення стратегії z_1 при $T_1 \leq t \leq T_2$ використаємо (1.11) і (1.14):

$$J_2 = \int_{T_1}^{T_2} z_1 dt + (T - T_2) \cdot (x_1(T_2) + x_2(T_2)). \quad (1.15)$$

Враховуємо (1.14) для визначення $x_1(T_2)$:

$$x(T_2)_1 = c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^{T_2} y(t)_1 dt + a_{1,2} \cdot \int_0^{T_2} y(t)_2 dt = c_3 + a_{1,1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} y(t)_1 dt + a_{1,2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} x(t)_2 dt,$$

де c_3 – константа, що не залежить від значення $y(t)_2$ на інтервалі $[T_1, T_2]$. Аналогічно знаходимо

$$x(T_2)_1 = c_4 + a_{2,1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} y(t)_1 dt + a_{2,2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} x(t)_2 dt.$$

Визначаємо накопичення z_1 через x_1 – виробництво та y_1 – інвестиції

$$z_1 = x_1 - y_1 = c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t)_1 dt + a_{1,2} \cdot \int_0^t y(t)_2 dt - y_1.$$

Підставляємо z_1 у вираз (1.15) для критерію і після перетворень отримуємо

$$J_2 = c_5 + \int_{T_1}^{T_2} (c_6(T-t) - 1) \cdot y_1 dt + a_{1,2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \int_0^t y_2 dt dt + (a_{1,2} + a_{2,1}) \cdot \int_{T_1}^{T_2} y_2 dt. \quad (1.16)$$

Визначимо інтеграл $\int_0^t y_2 dt$ на інтервалі $T_1 \leq t \leq T_2$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t y_2 dt \right) = y_2 = c_1 + a_{2,1} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{2,2} \cdot \int_0^t y_2 dt.$$

Розв'язуємо цей вираз як диференціальне рівняння із змінною $\left(\int_0^t y_2 dt \right)$:

$$\int_0^t y_2 dt = e^{a_{2,2} \cdot t} \cdot \int_0^t \left(c_2 \cdot e^{-a_{2,2} \cdot s} + a_{2,1} \cdot \int_0^s y_1 dt \right) ds =$$

продовження: $= \phi_1(t) + a_{2,1} \cdot e^{-a_{2,2} \cdot t} \cdot \int_{T_1}^t \left(e^{-a_{2,2} \cdot s} \cdot \int_{T_1}^s y_1 dt \right) ds.$

Функція $\phi_1(t)$ не залежить від значення y_1 на інтервалі $T_1 \leq t \leq T_2$, тому маємо

$$\int_{T_1}^{T_2} x_2 dt = \int_{T_1}^{T_2} y_2 dt = c_7 + a_{2,1} \cdot e^{a_{2,2} \cdot T_2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \left(e^{-a_{2,2} \cdot s} \cdot \int_{T_1}^s y_1 dt_1 \right) ds .$$

Змінюємо порядок інтегрування і виконуємо алгебраїчні перетворення

$$\int_{T_1}^{T_2} y_2 dt = c_7 + a_{2,1} \cdot e^{a_{2,2} \cdot T_2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \left(y_1(t_1) \cdot \int_{t_1}^{T_2} e^{-a_{2,2} \cdot s} ds \right) dt_1 .$$

Дивимось на коефіцієнт при $y_1(t_1)$

$$a_{2,1} \cdot e^{a_{2,2} \cdot T_2} \cdot \int_{t_1}^{T_2} e^{-a_{2,2} \cdot s} ds$$

і бачимо, що він є функцією t_1 , що монотонно зменшується.

Виконаємо спрощення виразу $\int_{T_1}^{T_2} \left(\int_0^t y_2(t) dt \right) dt$, що входить до

критерію J_2 (1.15). Виконуємо перетворення

$$\int_{T_1}^{T_2} \left(\int_0^t y_2(t) dt \right) dt = c_8 + a_{2,1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \left[e^{a_{2,2} \cdot t} \cdot \int_{T_1}^t \left(e^{-a_{2,2} \cdot s} \cdot \int_{T_1}^s y_1(t_1) dt_1 \right) ds \right] dt =$$

продовження: $= c_8 + a_{2,1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \left[e^{-a_{2,2} \cdot t} \cdot \int_{T_1}^t \left(y_1(t_1) \cdot \int_{t_1}^t e^{-a_{2,2} \cdot s} ds \right) dt_1 \right] dt .$

Останній інтеграл можна подати у вигляді

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{a_{2,2} \cdot t} \cdot \left(\int_{T_1}^t y_1(t_1) \cdot \psi(t, t_1) dt_1 \right) dt = \int_{T_1}^{T_2} y_1(t_1) \cdot \left(\int_{t_1}^{T_2} e^{a_{2,2} \cdot t} \cdot \psi(t, t_1) dt \right) dt_1 . \quad (1.17)$$

Уважно дивимось на (1.17) і бачимо – під інтегралом функція управління $y_1(t_1)$ помножена на функцію часу. Дослідимо її – візьмемо похідну по t_1 .

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t_1}^{T_2} e^{a_2,2 \cdot t} \cdot \psi(t, t_1) dt \right) = e^{a_2,2 \cdot t} \cdot \psi(t_1, t_1) + \int_{t_1}^{T_2} e^{a_2,2 \cdot t} \cdot \frac{d}{dt} \psi(t, t_1) dt.$$

Ураховуємо визначення функції $\psi(t, t_1)$ (див. вище) і нарешті отримуємо

$$e^{a_2,2 \cdot t} \cdot \psi(t_1, t_1) + \int_{t_1}^{T_2} e^{a_2,2 \cdot t} \cdot \frac{d}{dt} \psi(t, t_1) dt = 0 + \int_{t_1}^{T_2} e^{a_2,2 \cdot t} \cdot (-e^{-a_2,2 \cdot t_1}) dt.$$

Тепер чітко бачимо, що коефіцієнт при $y_1(t_1)$ в інтегралі (1.17) – функція часу, що монотонно зменшується. Дивимося на вираз (1.16) для критерію, бачимо також, що $c_6 > 0$, тому функція $c_6 \cdot (T - t) - 1$ монотонно зменшується по t і може змінювати знак.

Таким чином, повний коефіцієнт при y_1 зменшується в інтервалі (T_1, T_2) . Тепер можемо записати те, за що ми боролися на двох сторінках інтегралів:

$$J_2 = c_8 + \int_{T_1}^{T_2} k(t_1) \cdot y_1(t_1) dt_1.$$

Тому, для максимізації прибутку слід вибирати y_1 найбільшим можливим на інтервалі $[T_1, T_3]$, де $k_1(t_1) > 0$ і нульовим на інтервалі $[T_3, T_2]$, де $k_1(t_1) < 0$.

Оскільки величина $c_6 \cdot (T - t) - 1$ (див. (1.16)) буде від'ємною при $t > T_1$, а інші коефіцієнти стають рівними нулю при $t > T_2$, то дійсно $T_1 < T_3 < T_2$.

Виділимо елементи методів розв'язку варіаційних задач. З точки зору математика це типовий прийом у варіаційному обчисленні, методах принципу максимуму, динамічного програмування – так перетворити інтегральний критерій, щоб під інтегралом був добуток функції часу і функції управління. Це дає можливість визначити структуру і властивості оптимального управління, "вгадати" його вигляд, побудувати методи його визначення.

Як же привести критерій до бажаної форми? – Іноді, хтось, якимсь додумується, і з'являються очевидні для усіх "підстановка Ейлера", "задача Марковіца" та ін.

З точки зору менеджера-практика витрачається багато зусиль на те, щоб під інтегралом був добуток функції управління, що залежить від нас і функції часу, яка від нас не залежить, іноді ще й невизначена. В термінальних задачах управління, коли треба досягнути певної цілі на певний момент часу, функція, що від нас не залежить, зменшується з наближенням кінця планового періоду. Це означає, що, чим менше часу

до кінця процесу, тим більшими стають потрібні для досягнення одного й того ж результату управління. Менеджер знає це з досвіду і шукає примітивні моделі, що дають задовільні результати. Різниця між підходами математика і менеджера в тому, що математик може витратити 20 років на отримання розв'язання задачі, на яку менеджеру дається година. Далі буде розглянуто наближене розв'язання варіаційної задачі розвитку – "з позиції менеджера".

Розробка робочої програми для розв'язання задачі Марковіца.

Зробимо крок до наближеного розв'язання – створимо для лінійної задачі програму оптимізації і моделювання процесу розвитку. Будемо не тільки обчислювати моменти переключення управління для певної задачі, але й моделювати процес функціонування виробничої системи. Нам потрібно обчислювати поточні виробничі потужності $x_1(t)$, $x_2(t)$, інвестиції $y_1(t)$, $y_2(t)$, темпи "прибутків" $z_1(t)$, $z_2(t)$, сумарний прибуток $Sz(t)$. Отримаємо відповідні вирази і зберемо з них програму. Введемо значення параметрів:

$$A := \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 \\ 0.08 & 0.15 \end{pmatrix}; C := \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix}; T = 12 ; Kh = 60 ; k := 1..Kh+1; t_k := \frac{T}{Kh} \cdot (k-1).$$

Записуємо вирази для моментів переключення T_1 , T_2 (1.14), і приблизне значення T_3

$$T_1 := \frac{(A_{1,1} + A_{2,1}) \cdot T - 1}{A_{1,1} + A_{2,1}}; T_2 := \frac{(A_{1,2} + A_{2,2}) \cdot T - 1}{A_{1,2} + A_{2,2}}; T_{3o} := (T_1 + T_2) \cdot 0.5;$$

$$T_1 = 4.31 ; T_2 = 8 ; T_{3o} = 6.15 ; \Delta t := T \div Kh.$$

Формуємо програмний модуль для визначення оптимальних управлінь (рис. 1.5), будуємо графіки (рис. 1.6)

```

(u1)
(u2) := for k ∈ 1..Kh+1
          |
          | t ←  $\frac{T}{Kh} \cdot (k-1)$ 
          |
          | u2k ← | 1 if 0 ≤ t ≤ T2
          |         | 0 otherwise
          |
          | u1k ← | 1 if 0 ≤ t ≤ T3o
          |         | 0 otherwise
          |
          | "qq"
          |
          | (u1)
          | (u2)

```

Рис. 1.5. Модуль визначення оптимального управління

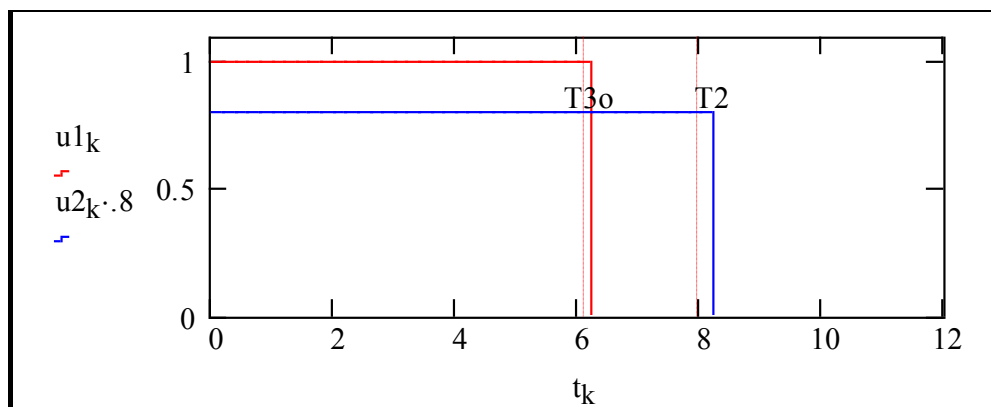


Рис. 1.6. Оптимальне управління процесом розвитку двопродуктового виробництва

Потрібні нам залежності для виробничих потужностей та інвестицій в цьому випадку можна отримати:

- а) в аналітичній формі (приклад подано в підрозділі 1.1);
- б) числовими методами інтегрування диференціальних рівнянь.

В загальному випадку аналітичні розв'язання отримати неможливо, тому вибираємо універсальні числові методи. Програму моделювання $MP(A, C, pr)$ оформляємо, як функцію від параметрів:

A – матриці параметрів інвестиційного процесу;

C – вектора початкових виробничих потужностей;

pr – параметра, що задає значення $T3$: $T3 = T1$ при $pr = 0$ та $T3 = T2$ при $pr = 1$.

Вхідні дані задаються там далі, в абсолютному присвоєнні. В пакеті Mathcad можливо вибирати зображення для основних математичних операторів – зокрема, можливі такі альтернативні форми подання операції ділення: $\frac{T}{Kh} = 0.2$ і $T \div Kh = 0.2$. Нагадуємо також, що змінні, які

визначені в середині Mathcad-програми є локальними змінними тільки цієї програми. Змінні, що визначені в документі, є глобальними, Mathcad-програма їх "бачить". Наприклад, змінні T , Kh – глобальні, змінні $Te1$, $Te2$ визначені в програмі – вони локальні.

Ми розглядаємо ці технологічні дрібниці роботи в середовищі математичного пакета, тому що саме на цих дрібницях базуються робочі моделі, які дозволяють вести обчислювальні експерименти, шукати і перевіряти гіпотези про властивості об'єкта моделювання. Головне у використанні пакета – можливість системного контролю коректності моделей.

Програма (рис. 1.7) повертає в документ те, що записано в останньому рядку. В нашому випадку це масив поточних значень інвестицій та прибутків.

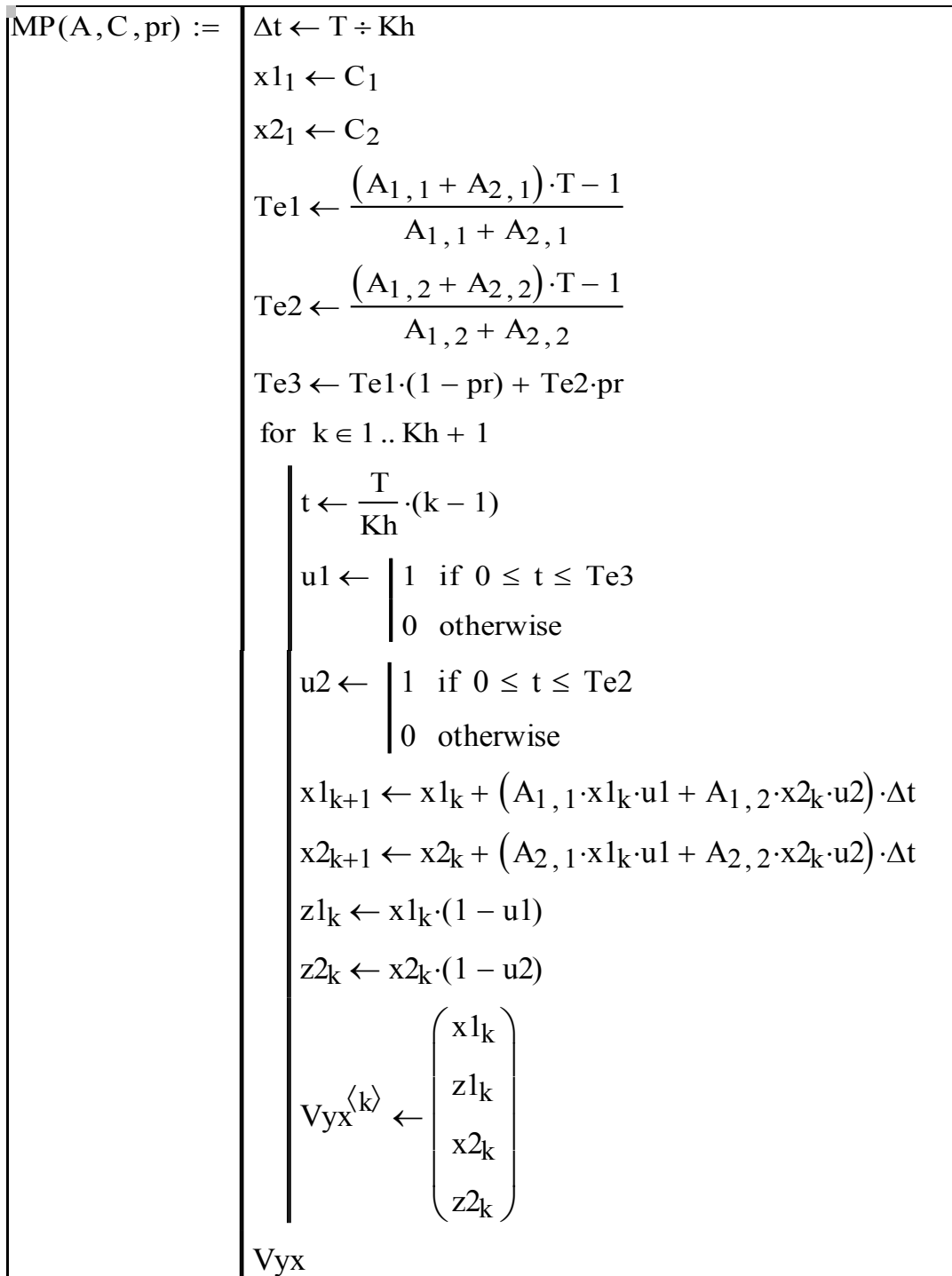


Рис. 1.7. Модуль оптимізації і моделювання процесу розвитку

MP(A1, C1, .6) =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16	16
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Робимо модуль, що не тільки знаходить оптимальне значення моменту переключення ТЗ, але і дає залежність сумарного прибутку від значення ТЗ (рис. 1.8).

Тестуємо модуль (рис. 1.9) на двох наборах вхідних даних (А, С) та (А1, С1). Програма повертає структуру даних з масиву Nkrok × 2 та двох скалярів. Розпаковуємо виходи програми для кожного набору даних: i := 1..25; "пропорція" для ТЗ: prorp := ОпТЗ(А1,С1)₃; значення ТЗ: ТЗq := ОпТЗ(А1,С1)₄; масив поточних даних модуля qq := ОпТЗ(А1,С1)₁; prorpk := ОпТЗ(А,С)₃; ТЗk := ОпТЗ(А,С)₄; qk := ОпТЗ(А,С)₁.

Значення максимальних прибутків:

$$\max\text{prbq} := \text{ОпТЗ}(A1, C1)_2; \quad \max\text{prbk} := \text{ОпТЗ}(A, C)_2.$$

ОпТЗ(А,С) :=	$Nkrok \leftarrow 25$ $Te1 \leftarrow \frac{(A_{1,1} + A_{2,1}) \cdot T - 1}{A_{1,1} + A_{2,1}}$ $Te2 \leftarrow \frac{(A_{1,2} + A_{2,2}) \cdot T - 1}{A_{1,2} + A_{2,2}}$ $\max\text{pryb} \leftarrow 0$ $krok \leftarrow 1 \div Nkrok$ $\text{for } i \in 1..Nkrok$ <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $\text{prp} \leftarrow 0 + krok \cdot (i - 1)$ $bb \leftarrow MP(A, C, \text{prp})$ $\text{pryb}_i \leftarrow \sum_{k=1}^{Kh+1} bb_{2,k} + \sum_{k=1}^{Kh+1} bb_{4,k}$ $\text{if } \text{pryb}_i > \max\text{pryb}$ <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $\max\text{pryb} \leftarrow \text{pryb}_i$ $\text{prop} \leftarrow \text{prp}$ </div> $Te3_i \leftarrow Te1 \cdot (1 - \text{prp}) + Te2 \cdot \text{prp}$ $V_{yx}^{(i)} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{pryb}_i \\ Te3_i \end{pmatrix}$ </div> $T3o \leftarrow Te1 \cdot (1 - \text{prop}) + Te2 \cdot \text{prop}$ $\begin{pmatrix} V_{yx} \\ \max\text{pryb} \\ \text{prop} \\ T3o \end{pmatrix}$
--------------	---

Рис. 1.8. Модуль пошуку оптимального моменту "переключення"

Виводимо обчислене програмою значення моменту переключення (складова V_{ux} вектора вихідних даних)

$q_k =$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1607	1610	1612	1612	1614	1614	1614	1613	1611	1608	1608	1604	1599	
2	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	

Будуємо графіки – дивимось в околі і положення екстремумів (рис. 1.9) (дивно читати роботи де тільки знаходяться точки екстремуми без аналізу околів).

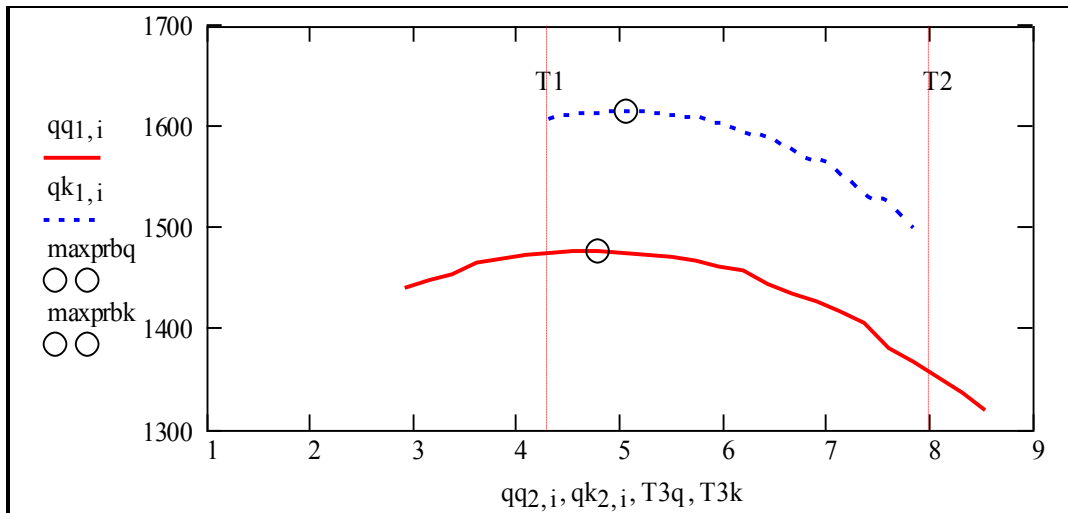


Рис. 1.9. Визначення оптимального моменту переключення T_3

Дивимось на графіки і робимо перший висновок – момент T_3 не обов'язково визначати з великою точністю – екстремум розмитий. Другий висновок – програма працездатна – вона дійсно знаходить екстремум. Слід, однак, вбудувати в програму "запобіжник" для випадків $T_2 < T_1$, $T_1 < 0$. Це робиться за допомогою команди: `on error, або функції error("x повинно бути позитивним") if x ≤ 0`.

Тепер на базі розроблених програм побудуємо *стенд* для дослідження виробництва та інвестиційних процесів. Вхідні дані A та C вводимо в абсолютному присвоєнні. Це дозволяє розмістити їх поряд з графіками та вихідними даними. Обчислюємо потрібні дані, наприклад, моменти переключення T_1 , T_2 . Їх можна було б обчислити в програмі моделювання, але ми робимо все відкритим для користувача, і записане по можливості в "природному вигляді" – як писали Ньютон та Ейлер.

$$T_1 := \frac{(A_{1,1} + A_{2,1}) \cdot T - 1}{A_{1,1} + A_{2,1}}; \quad T_2 := \frac{(A_{1,2} + A_{2,2}) \cdot T - 1}{A_{1,2} + A_{2,2}}$$

Обчислюємо оптимальне T_3 та процес інвестицій та накопичень для заданих A, C . На рис. 1.10 подано стенд – вхідні дані і результати моделювання.

$$T_3 := \text{OpT}_3(A1, C1)_4; \quad \text{prop} := \text{OpT}_3(A1, C1)_3; \quad \text{byb} := \text{MP}(A1, C1, \text{prop}).$$

Обчислюємо прибутки – по окремих продуктах та сумарний.

$$\text{Прибу1} := \sum_{k=1}^{Kh+1} \text{byb}_{2,k}; \quad \text{Прибу2} := \sum_{k=1}^{Kh+1} \text{byb}_{4,k}; \quad \text{TotalPr} := \text{Прибу1} + \text{Прибу2}.$$

Тривалість періоду $T \equiv 12$; кількість кроків моделювання $Kh \equiv 60$; стартові темпи виробництв $C1 \equiv \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$; матриця інвестиційного процесу: $A1 \equiv \begin{pmatrix} 0.05 & 0.06 \\ 0.06 & 0.25 \end{pmatrix}$.

Прибуток від 1-го виробництва	Прибу1 = 829	Т1 = 2.91
Прибуток від 2-го виробництва	Прибу2 = 647	Переключення 2-го T2 = 8.77
Прибуток сумарний	TotalPr = 1476	Переключення 1-го T3 = 4.79

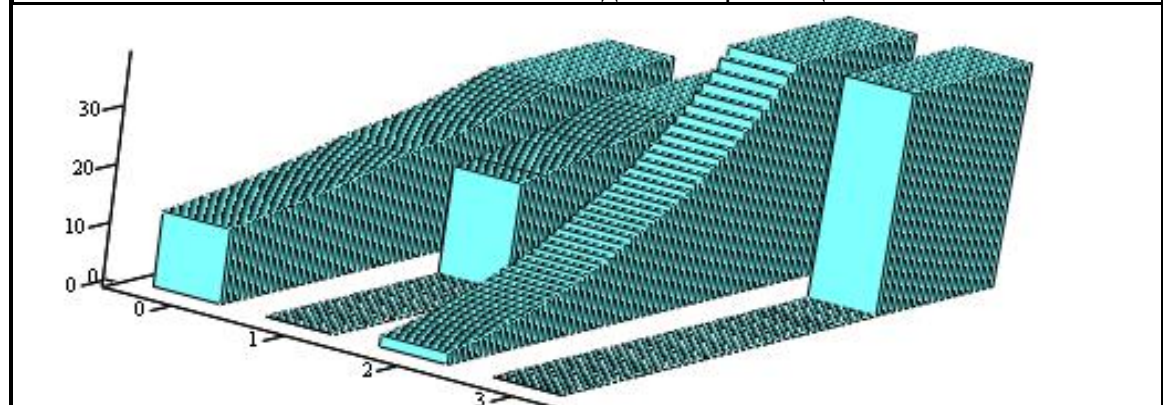
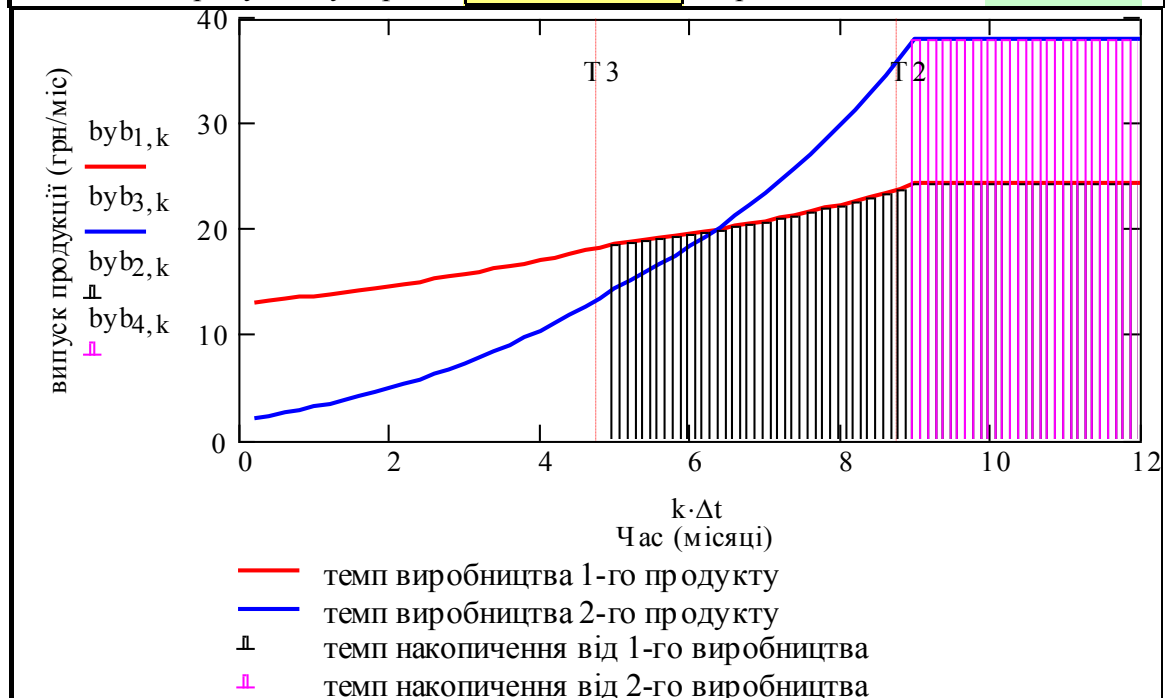


Рис.1.10. Процеси оптимального розвитку виробничої системи

На рис. 1.10 подано таку ситуацію – перше виробництво – з малою віддачею інвестицій і великим початковим рівнем; друге виробництво – з великою віддачею інвестицій і малим початковим рівнем. Те, що бачимо, інтерпретується так: досить рано, в момент $T_3 = 4.79$ вихід 1-го виробництва забирається у накопичення (другий рядок на графіку); вихід 2-го ще йде в інвестиції – обидва виробництва (рядки 1 і 3) зростають, але дещо повільніше. З моменту $T_2 = 8.77$ все йде в накопичення.

Організація досліджень “що буде якщо”. Розглянемо приклад використання розроблених програм для аналізу чутливості оптимального управління. Менеджера завжди цікавить розкид вихідних величин при можливих розкидах вхідних величин. Дослідимо вплив відхилення моменту переключення T_2 на розмір прибутку. Для цього дещо модифікуємо програму моделювання (рис.1.11).

$VP(A, C, vT_2) :=$	$\Delta t \leftarrow T \div Kh$ $x_{11} \leftarrow C_1$ $x_{21} \leftarrow C_2$ $Te_2 \leftarrow \frac{(A_{1,2} + A_{2,2}) \cdot T - 1}{A_{1,2} + A_{2,2}}$ $Te_3 \leftarrow OpT_3(A, C)_4$ for $k \in 1 .. Kh + 1$ $t \leftarrow \frac{T}{Kh} \cdot (k - 1)$ $u_1 \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq Te_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $u_2 \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq Te_2 \cdot vT_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $x_{1k+1} \leftarrow x_{1k} + (A_{1,1} \cdot x_{1k} \cdot u_1 + A_{1,2} \cdot x_{2k} \cdot u_2) \cdot \Delta t$ $x_{2k+1} \leftarrow x_{2k} + (A_{2,1} \cdot x_{1k} \cdot u_1 + A_{2,2} \cdot x_{2k} \cdot u_2) \cdot \Delta t$ $z_{1k} \leftarrow x_{1k} \cdot (1 - u_1)$ $z_{2k} \leftarrow x_{2k} \cdot (1 - u_2)$ $pryb \leftarrow \sum_{k=1}^{Kh+1} z_{1k} + \sum_{k=1}^{Kh+1} z_{2k}$ pryb
---------------------	---

Рис. 1.11. Програмний модуль для: що буде якщо аналізу

Обчислюємо нормовані прибутки при відхиленнях параметра T_2

$$\text{Minus}\Phi(A, C, dd) := \frac{VP[A, C, (1 - dd)]}{VP(A, C, 1)};$$

$$\text{Plus}\Phi(A, C, dd) := \frac{VP[A, C, (1 + dd)]}{VP(A, C, 1)};$$

$$va := 0.5, 0.55 \dots T \div T_2; \quad T \div T_2 = 1.37; \quad T = 12;$$

$$Te_2 := \frac{(A_{1,2} + A_{2,2}) \cdot T - 1}{A_{1,2} + A_{2,2}}; \quad A = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 \\ 0.08 & 0.15 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.06 \\ 0.06 & 0.25 \end{pmatrix}; \quad C_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boxed{\text{Розкид}T_2 := 0.2};$$

$$\text{Minus}\Phi(A, C, \text{Розкид}T_2) = 0.98; \quad \text{Minus}\Phi(A_1, C_1, \text{Розкид}T_2) = 0.96;$$

$$\text{Plus}\Phi(A, C, \text{Розкид}T_2) = 0.97; \quad \text{Plus}\Phi(A_1, C_1, \text{Розкид}T_2) = 0.92 .$$

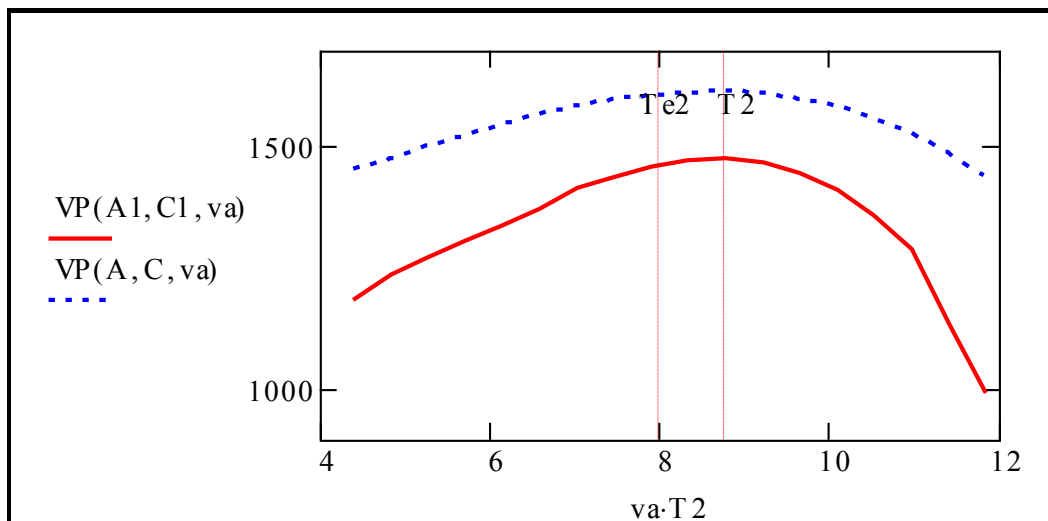


Рис. 1.10. Вплив відхилень параметра T_2 на сумарний прибуток

Використовуючи програмний модуль можемо дослідити чутливість оптимального управління від параметрів матриці A . Запізнення переключення дає більші втрати, ніж випередження. Оптимальне управління є досить "гуманним" – при розкиді моменту переключення T_2 на 20% втрати доходу становлять 2–8%.

1.4. Задача балансу попиту і пропозиції

В цьому розділі розглянемо задачі управління розподіленими, нелінійними дискретними системами класу "попит–пропозиція". Назва класу задач, не є ознакою їх економічного характеру, а просто зручний "ан-

тропоморфізм". Ціль моделювання – визначення стану рівноваги, ціль управління – утримання системи в стані рівноваги з малими помилками і малими витратами ресурсів на управління.

Постановка задачі, інтерпретації. Подаємо словесний опис елементарної задачі класу "попит–пропозиція". В системі є два елементи As , Ad , один з яких виробляє певний ресурс, другий – використовує цей ресурс. Ресурс характеризується "ціною" p , яка залежить від стану системи. Обсяги обміну ресурсами визначаються функціями $Fd(p)$, $Fs(p)$ (d – demand, s – supply). Вважаємо, що виробництво одразу встановлюється на рівні попиту, що попит при зміні ціни змінюється згідно з функцією "ціна–попит". Це ідеалізація – зміна попиту і пропозиції проходить не миттєво, а з певною інерційністю та запізненням, що приводить до коливань цін, попиту і пропозиції і, навіть, до нестійкості системи обміну.

В цьому розділі ми *розглянемо* проблему встановлення рівноваги попиту і пропозиції та визначення цін рівноваги. На базі цього розгляду побудуємо програми для моделювання процесів встановлення рівноваги попиту і пропозиції.

Логіка павутинної моделі встановлення рівноваги. Класичні моделі є дискретними. Класичний приклад дискретного процесу – сільське господарство з природною дискретністю процесу – від врожаю до врожаю, і запізнення реакції – корекція обсягу випуску продукції робиться вже на наступний сезон. Сьогодні природна дискретність розвивається агротехнологіями і глобалізацією виробництва.

Припустимо, що існують і визначені залежності попиту (споживання) і пропозиції (те, що можуть дати виробники) від ціни, що склалася на ринку. При відсутності збурень існує точка рівноваги – на перетині цих залежностей. Класична модель "попит–пропозиція" – невід’ємна складова "економіки підручників". В цій категорії літератури за 1990 – 2007 роки виявлено, що картинки павутинних моделей нарисовані, а не побудовані програмою.

Винятком з переглянутої літератури виявилась японська книга (1991) "Математическая экономика на персональном компьютере" [114] де всі класичні моделі економіки реалізовані відповідними програмами. В якісному англійському підручнику від 1996 року [156] "павутинні моделі" не обчислені а нарисовані. Тобто, якщо вибирати орієнтацію (в Європу чи Азію), то слід вибрати орієнтацію на створення нових моделей для нових задач.

На рис. 1.11 подано графік "павутинного" процесу, побудований програмою моделювання. На комп’ютерний графік накладено стрілки і координати точок "переключення".

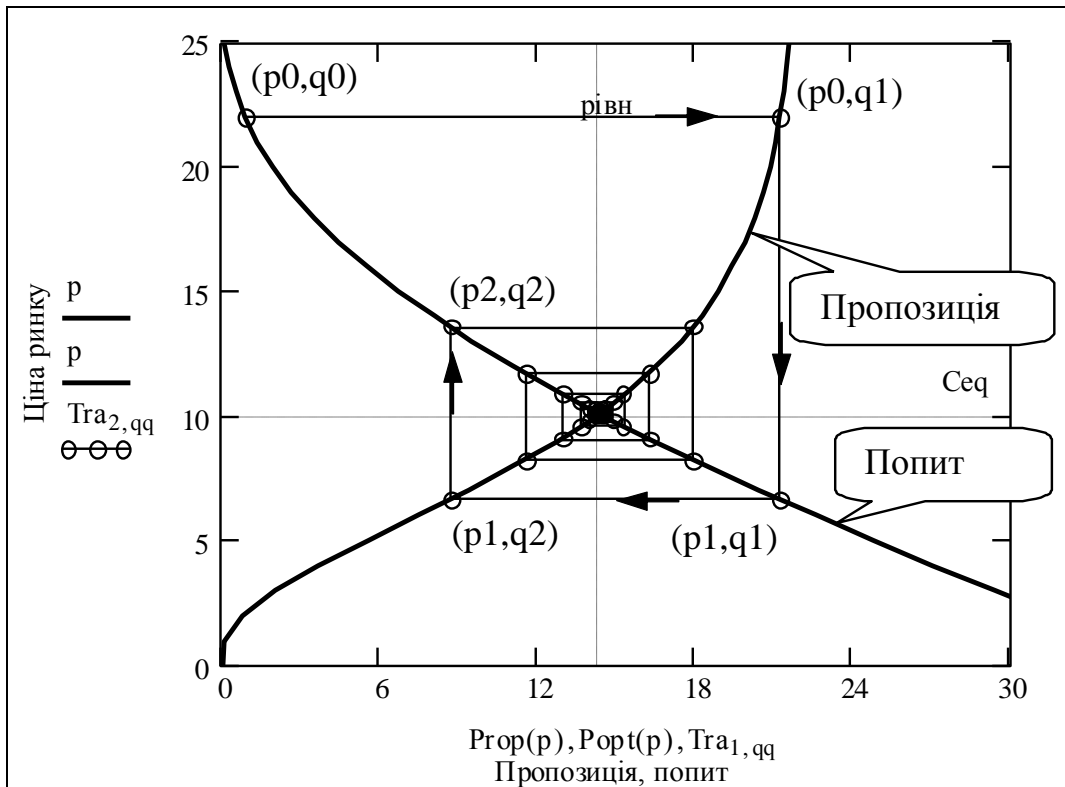


Рис. 1.11. "Павутинна" модель встановлення рівноваги на однотоварному ринку

У [18, 19, 60] розглядаються спрощені, лінійні моделі "виробництво–попит".

Підемо далі – поставимо задачу побудови узагальненої моделі "виробництво–попит":

- для довільних функцій попиту і виробництва;
- з урахуванням запізнь;
- з урахуванням випадкових збурень;
- з урахуванням ажіотажного попиту.

Після проведення досліджень ми зможемо обґрунтовано відмовитись від класичних моделей.

Визначення узагальнених функцій попиту і пропозиції. Виберемо функцію, яка б за рахунок зміни 2–3-х параметрів дозволяла подати будь-які можливі залежності попиту і пропозиції від ціни ринку. Відомо багато моделей функцій попиту і виробничих функцій – лінійні, нелінійні, стаціонарні, нестаціонарні, випуклі, увігнуті, обмежені, необмежені (за рівнем споживання). Введемо узагальнену функцію попиту – параметризовану логістичну залежність (далі використовуємо термін "S-функція" – в знак того, що графік функції подібний до розтягнутої літери "S"). Ця функція дає залежність обсягу споживання чи виробництва певного товару від ціни продажу [2, 3].

Перевага "S-функції" порівняно з іншими апроксимаціями реальної залежності в тому, що вона є результатом розв'язання певних диференціальних рівнянь – нелінійних, нечітких, що відображують реально діючі механізми виробництва і формування попиту (обмеження по ресурсах, обмеження споживання, насичення попиту). Логістична залежність в певних умовах дає опис механізму споживацького вибору. Згідно з логістичними залежностями проходить технічний прогрес на базі одного конкретного фундаментального принципу.

Наприклад, в електроніці згідно з цією залежністю змінювались характеристики елементів на базі вакуумних ламп, потім напівпровідників, тепер – мікросхем. Вибираємо функцію, яка при мінімальній кількості параметрів дозволяє отримати усі можливі види функцій пропозиції і попиту. Узагальнену функцію виробництва задаємо так:

$L_v(x, n, \omega, a) = \text{монотонна_зрост_функція}(\text{ціна}, \text{увігнутість}, \text{частота}, \text{амплітуда})$.

Вводимо діапазон зміни параметра p (price) – ціни продажу $p := 0..40$, будемо серії відповідних графіків.

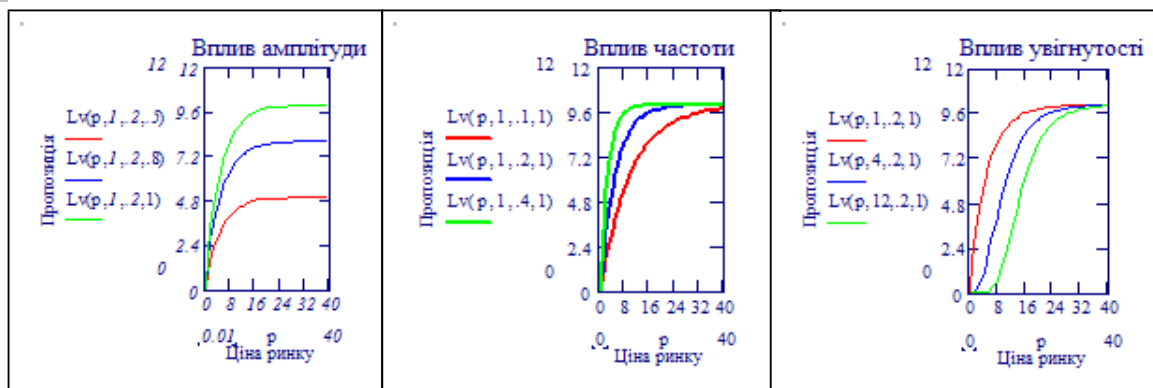


Рис. 1.12. Можливі залежності "пропозиція–ціна"

Аналогічно визначаємо і функцію попиту. Фундаментальна різниця між цими функціями в тому, що класична функція пропозиції (виробництва) починається з нульової ціни і монотонно зростає, функція попиту монотонно зменшується, починаючи з нульової ціни і при деякій ціні X_{\max} стає нульовою.

Вибором параметрів можна отримати усі відомі функції попиту. Ми не розглядаємо тут традиційні проблеми еластичності попиту для різних класів товарів – це окрема тема. Створюємо узагальнену функцію попиту (конкретна залежність тут не наводиться). Вибором параметрів цієї функції можна відобразити типові функції попиту.

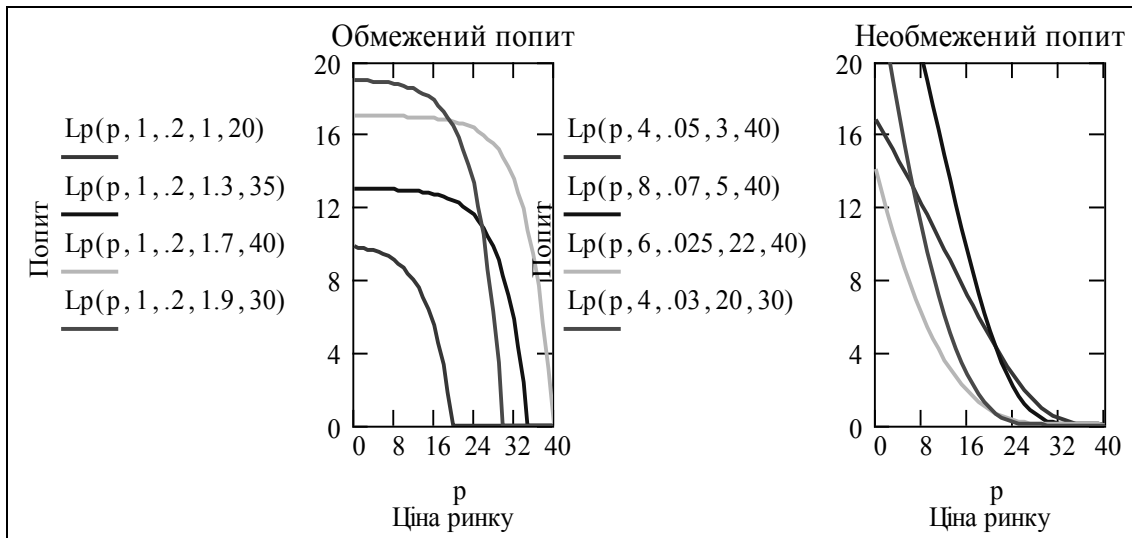


Рис. 1.13. Можливі залежності "попит–ціна"

Узагальнену функцію попиту задаємо так:

$L_v(p, n, \omega, a, s) = \text{монот_зменш_функція}(\text{ціна}, \text{увігн}, \text{частота}, \text{ампл}, \text{старт_ціна})$.

Зауваження 1. За традицією, в економічній літературі функції попиту і пропозиції подають як залежності ціни від обсягу. Для нас зручніше розглядати зворотну залежність – обсягів від ціни.

Зауваження 2. Для сучасних продуктів, таких як мікропроцесори, електронні годинники та ін., практично не існує виробничих обмежень (ресурси, фонди) – головне обмеження – ємність ринку. Але в концептуальному плані такі обмеження є і це враховано в моделі. Як можна бачити з графіків на рис. 1.13, при усіх наборах параметрів функція є обмеженою за обсягом виробництва. Ті ж самі міркування обумовили введення обмежень функції попиту.

Тепер подамо функції попиту (Demand) і пропозиції (Supply) сумісно. Точка перетину цих двох кривих дає ціну рівноваги. Для монотонних додатних функцій ціни, одна з яких зростає, інша зменшується при зростанні ціни, існує не більше однієї точки рівноваги "попит–виробництво". В певних випадках можна знайти аналітичні вирази для координат точки рівноваги. Для довільних функцій попиту і пропозиції завжди можна знайти точку рівноваги числовим методом.

Використовуємо вбудовану функцію пакета для знаходження нульового кореня – ціни рівноваги. Задаємо діапазон $Ц_{\min} := 0; Ц_{\max} := 40$, в якому шукаємо цей корінь. Записуємо:

$Ц_{\text{рівн}} := \text{root}[(L_v(\text{ціна}, 12, .2, 2.5) - L_p(\text{ціна}, 4, .05, 3, 40)), \text{ціна}, Ц_{\min}, Ц_{\max}]$

$Вип_{\text{рівн}} := L_v(Ц_{\text{рівн}}, 12, .2, 2.5); Ц_{\text{рівн}} = 12.7; Вип_{\text{рівн}} = 9.2$

Виводимо обчислені координати точки рівноваги: $С_{\text{рівн}}$ – ціна рівноваги, $Вип_{\text{рівн}}$ – випуск рівноваги у вигляді маркерів на графіку функ-

цій. Бачимо, що обчислена точка, це дійсно точка перетину функцій попиту і пропозиції.

Другий графік (рис. 1.14) подаємо в традиційному вигляді. При розрахунку процесів динаміки цін, попиту, пропозиції і рівноваги нам будуть потрібні зворотні функції – залежності цін від обсягів попиту і пропозицій. Визначаємо ці функції за допомогою вбудованої функції пакета $root(рівняння(x), x)$.

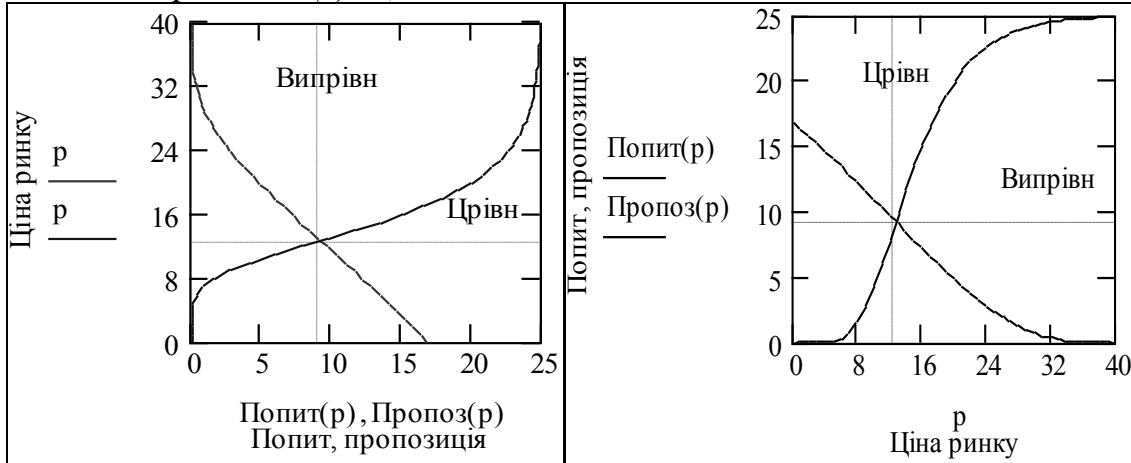


Рис.1.14. Альтернативні подання залежностей "попит–пропозиція"

Отримуємо обернену залежність "ціна – (попит, пропозиція)"

$$poP(vyb) := root(Lp(cn, 4, .05, 3, 40) - vyb, cn);$$

$$orP(vyb) := root(Lv(cn, 12, .2, 2.5) - vyb, cn).$$

Тестуємо отримані зворотні функції – будуємо їх разом з прямими, бачимо – зворотні функції є коректними (рис. 1.15).



Рис 1.15. Тестування зворотних функцій

Розробка програми для моделювання "cobweb"-процесу. Призначення програми – проведення обчислювальних експериментів з оперативною корекцією цієї ж програми з результатів експериментів. Записуємо функції попиту, пропозиції та відповідні їм зворотні:

$$\text{Pop}(C) := \text{Lp}(C, \text{увігну, часто, амплі, старт});$$

$$\text{Cro}(vy) := \text{root}(\text{Pop}(cn) - vy, cn);$$

$$\text{Prop}(C) := \text{Lv}(C, \text{увігнутість, частота, амплітуда});$$

$$\text{Cpr}(vy) := \text{root}(\text{Prop}(cn) - vy, cn).$$

Знаходимо ціну рівноваги за допомогою вбудованої функції пакета `root()`: $\text{Seq} := \text{root}[(\text{Prop}(\text{ціна}) - \text{Pop}(\text{ціна})), \text{ціна}, 0, 20]$.

На рис. 1.16 подано текст програми моделювання з коментарями – це інтерфейс для відлагодження і модифікації програми.

```

Pwt := C1 ← старт_ці
W<1> ← ( Pop(C1)
         Prop(C1)
         C1 )
for t ∈ 1,3..nh
  Qpop_t ← Pop(C_t)
  Qprq_t ← Prop(C_t)
  Qpop_{t+1} ← Qprq_t
  C_{t+1} ← Cro(Qprq_t)
  Qprq_{t+1} ← Prop(C_{t+1})
  Qpop_{t+2} ← Qprq_{t+1}
  C_{t+2} ← Cro(Qprq_{t+1})
  Qprq_{t+2} ← Prop(C_{t+2})

  W<t> ← ( Qpop_t
           Qprq_t
           C_t )
  W<t+1> ← ( Qpop_{t+1}
             Qprq_{t+1}
             C_{t+1} )
  W<t+2> ← ( Qpop_{t+2}
             Qprq_{t+2}
             C_{t+2} )
W

```

Програма моделювання процесу встановлення рівноваги в системі "попит – пропозиція".

- задаємо вектор стану на першому кроці.
- цикл по кроках процесу.



Як коментар до програми подаємо її видачу – графік "павутинного процесу". Кожному рядку програми у тілі циклу відповідає точка графіка одного циклу "павутини". Користувач може з'єднати лініями відповідні точки графіка і рядки програми.

Видача програми:

	1	2	3	4	5	6
Pwt =	29.4	0.8	19.8	6.4	16.1	9.2
	0.8	19.8	6.4	16.1	9.2	14.2
	2	21.4	6.3	14.3	8.2	12.2

Рис. 1.16. Текст і видача програми моделювання процесу

Узагальнення програми моделювання процесів в системі "попит–пропозиція". В цій програмі (рис. 1.17) розглянуто інший механізм встановлення цін – через поточний дефіцит. В програму можна підставляти різні ринкові механізми, імітувати випадкові фактори. Вважаємо, що ціна змінюється пропорційно дефіциту. Враховуємо також в спрощеному вигляді ажіотажний ефект. В підручниках постульовано: при зростанні цін попит падає. А в Європі, при зростанні цін на бензин – зростає і попит (створюються запаси), при падінні цін, спадає і попит – споживач чекає на подальше падіння цін. Програма використовує дві функції користувача – функції попиту і пропозиції.

$PP(dT) :=$ $Ce \leftarrow \begin{pmatrix} \text{поч_ціна} \\ \text{поч_ціна} \\ \text{поч_ціна} \end{pmatrix}$ $W^{(1)} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{Pop}(Ce_1) \\ \text{Pop}(Ce_1) - \text{Pro}(Ce_1) \\ Ce_1 \end{pmatrix}$ $W^{(2)} \leftarrow W^{(1)}$ $\text{Prod1} \leftarrow 0.9 \cdot \text{Pro}(Ce_1)$ $k \leftarrow 3$ $\text{while } k < Nkr + 1$ $\left \begin{array}{l} d1 \leftarrow (Ce_k - Ce_{k-1}) \cdot \frac{1}{Ce_k} \\ d2 \leftarrow (Ce_{k-1} - Ce_{k-2}) \cdot \frac{1}{Ce_{k-1}} \\ dd \leftarrow (1 + ag1 \cdot d1 - ag2 \cdot d2) \\ \text{popsu} \leftarrow \text{Pop}(Ce_k) \cdot dd \\ \text{def} \leftarrow \text{popsu} - \text{Prod1} \\ \text{defpr} \leftarrow \text{Pro}(Ce_k) - \text{Prod1} \\ \text{Prod2} \leftarrow \text{Prod1} + Kp \cdot \text{def} \cdot dT \\ \text{Prod2} \leftarrow \max(\text{Prod2}, 0) \\ Ce_{k+1} \leftarrow \max(Ce_k + Kc \cdot \text{def} \cdot dT, .1) \\ Ce_{k+1} \leftarrow \max(Ce_{k+1}, 0.1) \\ \text{Prod1} \leftarrow \text{Prod2} \\ qq \leftarrow (\text{popsu} \text{ def } Ce_k \text{ Prod1}) \\ W^{(k)} \leftarrow qq \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right.$ W	<p>Програма моделювання процесів в системі "попит – пропозиція"</p> <ul style="list-style-type: none"> – задається початкова ціна на перших трьох кроках – формується вихід програми для перших трьох кроків. Вектор стану складається з 1) попиту, 2) дефіциту, 3) ціни. – цикл починається з $k = 3$. – цикл "поки", де задаються потрібні умови закінчення процесу. В цьому випадку – кількість кроків – послідовне обчислення складових попиту – стаціонарної, та "ажіотажних", що залежать від темпу зміни ціни. – визначається попит сумарний – визначається дефіцит попиту і точної пропозиції – визначається ціна на наступний крок (пропорційно дефіциту) – формується вектор виходу для k-го кроку – після виходу з циклу програма повертає матрицю складену з послідовності векторів стану системи
--	--

Рисунок 1.17. Програма моделювання процесу встановлення цін з урахуванням ажіотажного попиту

На рис. 1.18 подано блок введення даних і графіки перехідного процесу встановлення рівноваги попиту і пропозиції. Ключові параметри системи – крок оновлення цін Dt та "коефіцієнт підсилення" Kc – величина корекції ціни на кожному кроці процесу.

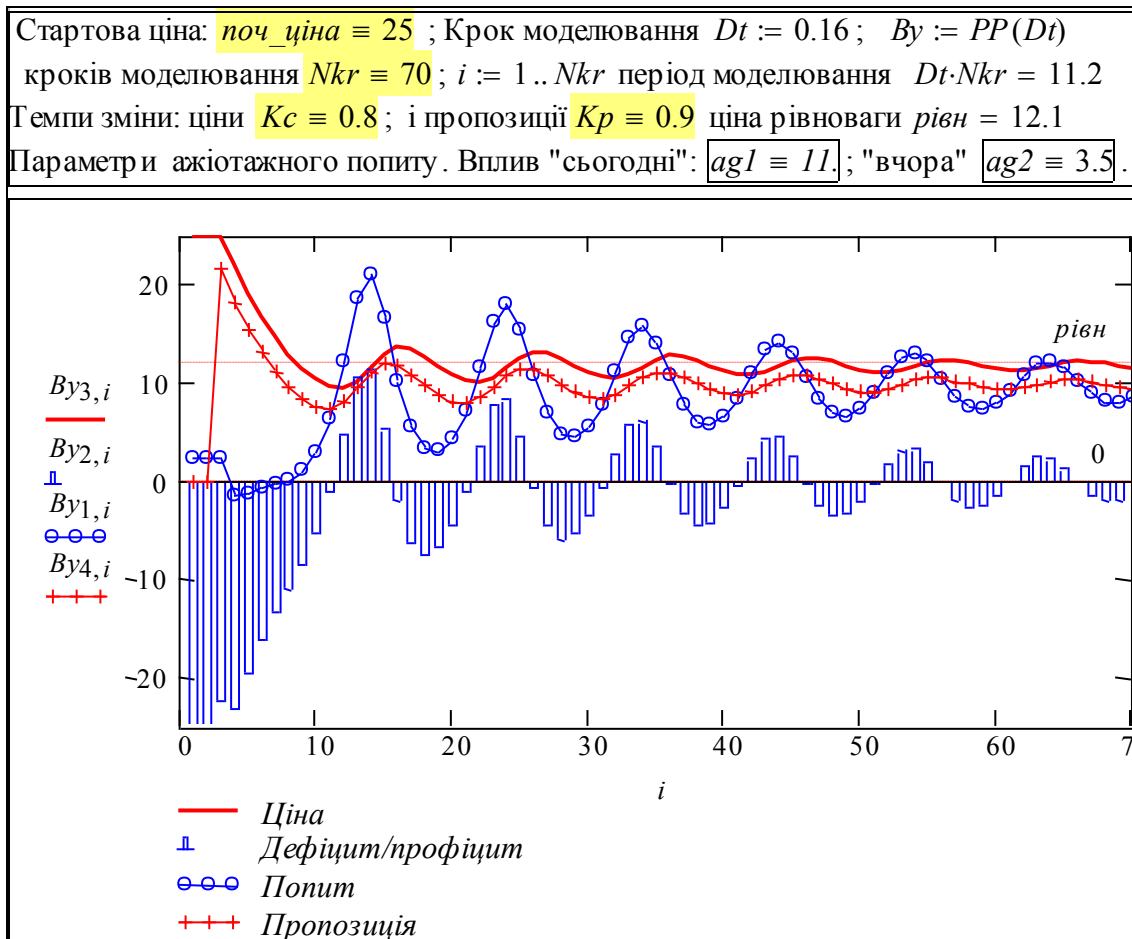


Рис. 1.18. Процеси встановлення рівноваги згідно з модифікованою "павутинною" моделлю "попит–пропозиція"

Неважко побачити, що ми маємо типову задачу аналізу і синтезу нелінійної динамічної системи методами теорії автоматичного управління. Для нелінійних систем такого класу звичайно використовують методи фазового простору. На рис. 1.19 подано ті ж самі перехідні процеси (рис. 1.18) на фазовій площині "ціна–попит".

Можемо бачити, що запізнення реакції та ефекти ажіотажу та раціональної поведінки споживачів дестабілізують ринок. Це давно відомо, але ми даємо інструмент для кількісної оцінки параметрів процесу встановлення цін. І не стільки інструмент, скільки "заготовку" – на базі якої користувач може конструювати свої моделі для своїх задач.

Не розглядаємо результати досліджень на цій моделі, оскільки вона не здатна адекватно відображувати механізми, що діють в сучасних

розподілених виробничих системах. Альтернативи цій моделі подані в розділах 4–6.

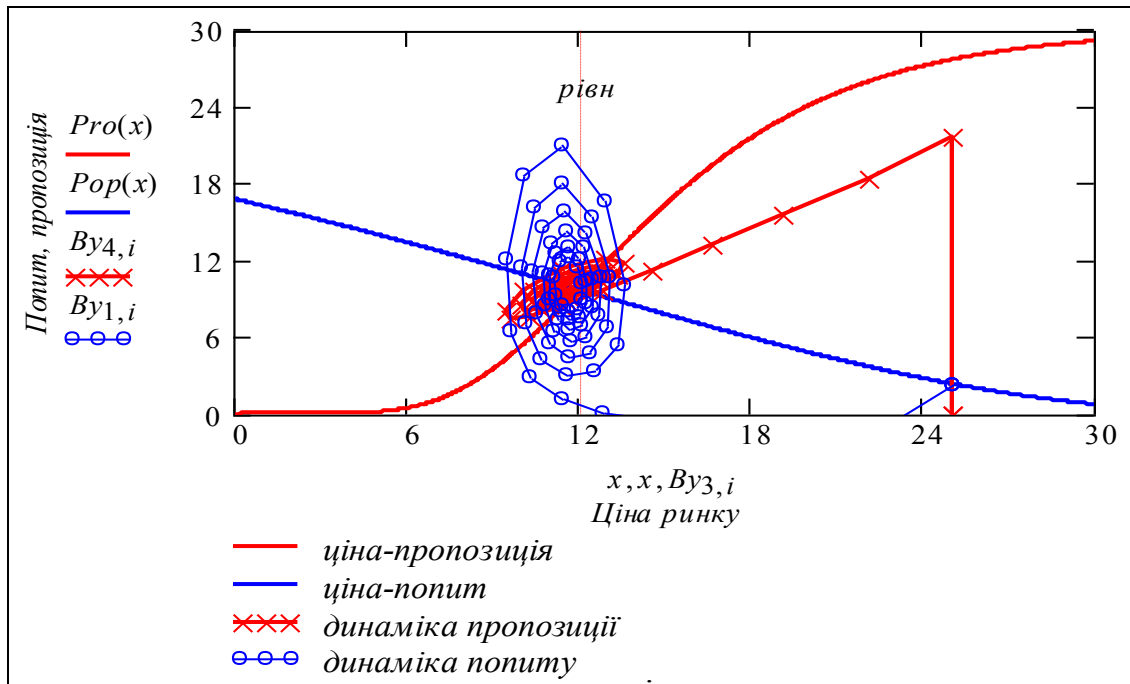


Рис. 1.19. Перехідні процеси на фазовій площині

Можемо бачити, що фазові траєкторії для попиту і пропозиції мають центром точку перетину функцій попиту і пропозиції. Вибором параметрів Dt , Kc можна зробити перехідні процеси неколивальними. Однак цей результат практично не може бути реалізованим тому, що механізми ринку є результатом досить незалежних дій великого числа індивідів і організацій – учасників ринку.

1.5. Моделі обміну ресурсами

В підрозділі 1.4 розглянуто моделі обміну між двома класами елементів – "виробників" і "споживачів". Нагадаємо, що економічна ("гроші–товар–гроші") інтерпретація задач обміну є тільки однією з багатьох, але загально зрозумілою. Спеціалісти з фізики, біології, екології, різних галузей техніки можуть знайти в своїй професійній області задачі, що досить адекватно відображуються моделями обміну узагальненими ресурсами. Тому "виробники", "споживачі", "продукти", "ресурси" – етикетки для абстрактних понять, що можуть мати різні інтерпретації.

Наприклад, обчислювальну мережу авіаносця можна побудувати за принципами децентралізованої системи з "ринком" задач, що потрібно виконувати в мережі. Елементи обчислювальної мережі "купають" і "продають" задачі, "обмінюються" задачами. Така структура використана для забезпечення відмовостійкості системи. В розділі 4 розглянуто

задачу моделювання відмовостійкої автоматизованої системи управління виробництвом на основі концепції обміну ресурсами між елементами обчислювальної мережі.

Для відображення реальних децентралізованих систем, елементи яких є одночасно "виробниками" і "споживачами" потрібен інший клас моделей – з одним класом елементів "виробник–споживач". Цю особливість елементів реальних розподілених – поліфункціональність – часто ігнорують, на практиці це веде до хибних стратегій. Для нас класичні моделі обміну важливі саме тим, що вони будуються з поліфункціональних елементів – єдиних в двох іпостасях "виробників–споживачів". В розділі 4 елементи розподілених систем є триєдиними "виробниками–споживачами–інвесторами". В США одними з першопричин "неочікуваних спадів і підйомів є настрої і наміри "середнього класу".

Ще раз підкреслимо, що задачі обміну – задачі математичного моделювання, що як і вся математика мають "незрозумілу ефективність застосування в зовсім різних галузях".

1.5.1. Моделі натурального обміну

Розглянемо приклад моделювання і дослідження системи "натурального обміну". Ця модель [98] може мати багато інтерпретацій. Нас цікавить математична структура і властивості розв'язання для системи з таким механізмом обміну. Для нас ця "давня" модель важлива як прототип для моделей "справедливого розподілу цінностей" різних продуктів між виробником і споживачем, що часто декларуються в сучасному маркетингу.

Словесна постановка задачі: елементи З і Ж на кожному періоді виробляють продукти А і Б в кількостях відповідно x_1 і x_2 . Вони обмінюються продуктами за правилом: кожний віддає іншому q -ту частку свого продукту ($0 < q < 1$). Після обміну вони матимуть набори продуктів: $(1-q) \cdot x$, $q \cdot y$ і $(1-q) \cdot x$, $q \cdot x$. У кожного виробника залишається частина $p=1-q$ свого продукту, тоді отримуємо такі вирази для часток продуктів що отримують перший і другий виробники частку

$$p \cdot x, q \cdot y \quad \text{і} \quad p \cdot y, q \cdot x.$$

Диференціальні рівняння темпів виробництва задані так [98]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= \frac{p}{p \cdot x_1 + q \cdot x_2 + 1} - \frac{p}{2} \\ \frac{d}{dt} x_2 &= \frac{p}{q \cdot x_1 + p \cdot x_2 + 1} - \frac{p}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Запишемо еквівалентні різниці рівняння згідно з (1.18). Зауважимо, що тут p – частка продукту, що обмінюється, а не ціна.

$$T_p := 200; \quad t := 1..T_p; \quad dT := 1; \quad p := 1 - q; \quad x^{(1)} := x_n; \quad \text{ORIGIN} := 1$$

$$x^{(t+1)} := x^{(t)} + \begin{pmatrix} \frac{p}{p \cdot x_{1,t} + q \cdot x_{2,t} + 1} - \frac{p}{2} \\ \frac{p}{q \cdot x_{1,t} + p \cdot x_{2,t} + 1} - \frac{p}{2} \end{pmatrix} \cdot dT. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.19) є робочою моделлю процесу обміну – воно виконується в середовищі математичного пакета. Будуємо графіки процесу (рис. 1.20).

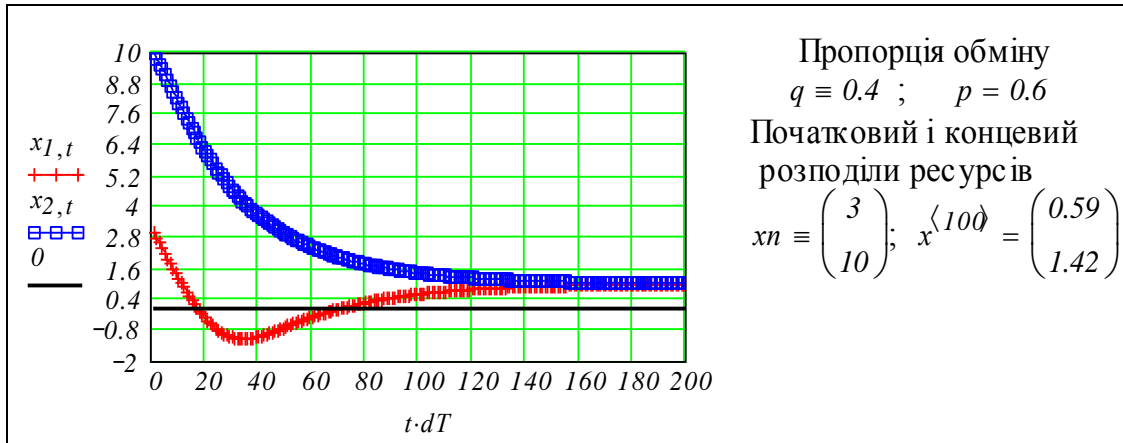


Рис. 1.20. Приклад стійкого перехідного процесу

Ми отримали робочу модель в формі, що відповідає стандартам мови математики. Для проведення досліджень і об'єднання робочих моделей в більш складні системи зробимо робочу модель в формі програмного модуля (рис. 1.21) або *функції користувача*, що бере певні вхідні параметри і повертає те, що обумовлено цільовим призначенням програми.

```

Obna(xo, p) :=
  q ← 1 - p
  x1_1 ← xo_1
  x2_1 ← xo_2
  for t ∈ 1..Tp
    |
    | x1_{t+1} ← x1_t + ( (p / (p * x1_t + q * x2_t + 1)) - (p / 2) )
    | x2_{t+1} ← x2_t + ( (p / (q * x1_t + p * x2_t + 1)) - (p / 2) )
    |
  ( x1
    x2 )

```

Рис. 1.21. Програма моделювання процесів обміну

Вихід програми – структура з двох векторів:

$$Obnd\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, p\right] = \begin{pmatrix} \{201, 1\} \\ \{201, 1\} \end{pmatrix}.$$

Проведемо мікродослідження системи натурального обміну – задаємо чотири набори вхідних даних.

Пропорції обміну $pn := 0.6; qn := 1 - p; pm := 0.14; qm := 1 - p.$

Початкові стани $xn_1 := 3.5; xn_2 := 3; xm_1 := 3; xm_2 := 10.$

Будуємо блок перехідних процесів для цих наборів вхідних даних.

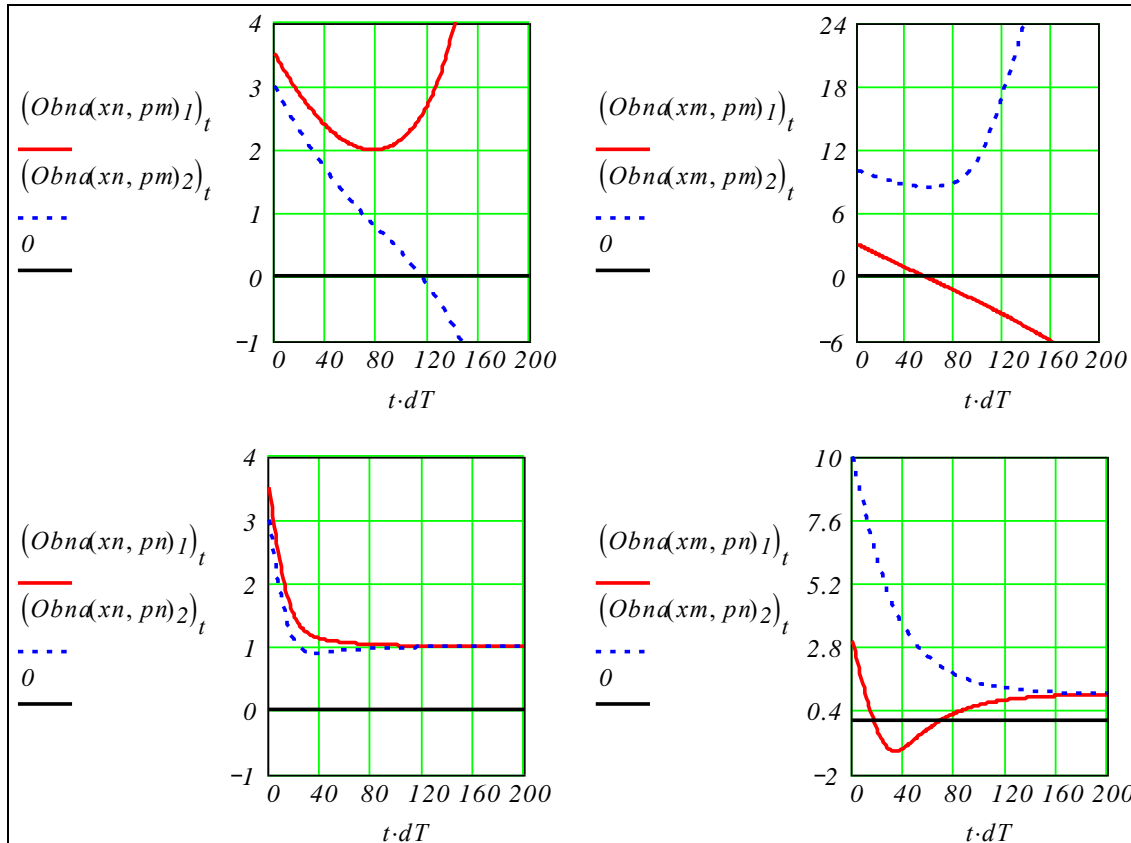


Рис. 1.22. Аналіз процесів в системі з обміном від початкових умов

Бачимо що ця найпростіша за механізмом розподілу і за складністю реалізації система має досить складну, іноді антиінтуїтивну поведінку:

– при певних початкових розмірах виробництва, один з елементів припиняє виробництво;

– тільки при певних пропорціях розподілу продукції система приходить до стану рівноваги.

Ця модель – основа для задач обміну, де поняття ціни не має інтерпретації, а вирішальними факторами можуть бути витрати, накопичення і трансформації ресурсів. Особливістю нелінійних динамічних систем з обміном ресурсами є те, що в них може бути декілька станів рівноваги і областей нестійкості в просторі параметрів і початкових умов.

1.5.2. Моделі ринкового обміну

В цьому пункті розглянемо задачі управління розподіленими, нелінійними дискретними системами класу "обмін ресурсами". Розподілені системи з обміном ресурсами – це певний клас задач теорії оптимізації і управління, що давно завоював право на існування як клас абстрактних математичних моделей і задач. Як і всякий фундаментальний напрямок, абстрактні задачі обміну ресурсами, згідно з принципом "незрозумілої ефективності математики в найрізноманітніших практичних задачах" має численні ефективні і ефектні практичні застосування.

В монографії як наскрізні інтерпретації, використовуються задачі економічного характеру – вони загальнозрозумілі і актуальні для кожного незалежно від освіти, фаху і рівня доходів. Нагадаємо, що в даному десятиріччі ми є свідками зсування економіки США в незрозумілий і для науки, і для практики стан "інфляційна депресія", "іпотечна криза". Усі зусилля і рецепти виправити стан поки що є мало ефективними.

Можна безпомилково вказати фундаментальну причину такої ситуації – існуючі математичні моделі динаміки і статички соціо-техніко-економічних систем не адекватні реальності. Візьмемо такий напрямок – лінійне програмування, як універсальний метод планування і оптимізації – сьогодні майже немає практичних задач, що вписуються в схему задачі лінійного програмування. Нелінійне програмування концентрується навколо випуклих задач. Ціль цього розділу розгляд класичної задачі обміну ресурсами в розподіленій системі, узагальнення цієї задачі для певних напрямків, розробка методів та програмних інструментів для роботи з узагальненими задачами, щоб нарешті отримати узагальнену модель обміну.

Ми предметно розглядаємо здобутки цього класу моделей, переглядаємо їх в деталях, робимо узагальнені робочі моделі, щоб обґрунтовано відмовитись на користь нових моделей.

Постановка базової задачі обміну ресурсами. Розглядається система з M елементів, що обмінюються за певними правилами деякими ресурсами N видів. Кожен елемент системи має початковий запас ресурсів $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, де y – N -вимірний вектор. На кожному кроці функціонування системи кожен елемент намагається поміняти вектор запасів y на x так, щоб максимізувати свою функцію корисності $uk(x)$ при умові, що ціна бажаного набору (вектора) ресурсів x в поточних цінах дорівнює ціні початкового набору y .

Формально, функція корисності $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ – монотонно зростаюча, додатна функція від усіх N аргументів – кількостей відповідних видів продуктів чи ресурсів x_i . Функції корисності є математичною моделлю для ситуації обміну продуктів: елемент має вектор ресурсів $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ і бажає поміняти на вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, такий що

максимізує функцію корисності $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ при обмеженні

$$p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2 + \dots + p_N \cdot y_N = Cap, \quad (1.20)$$

де (p_1, p_2, \dots, p_N) – вектор „цін” – змінних, що формуються за певними процедурами.

В математичному аспекті кожний елемент розв’язує задачу знаходження максимуму функції N змінних при ”бюджетному” обмеженні. В більшості наукових робіт функції корисності апроксимують випуклими (вгору) функціями, мультиплікативними, або адитивними:

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}; \quad u_2(x_1, x_2) = a_1 \cdot \ln(x_1) + a_2 \cdot \ln(x_2). \quad (1.21)$$

Слід відзначити, що функція корисності в обчислювальних задачах не має якихось інтерпретацій і вибирається з умови забезпечення задовільної процедури сходимості. В чисто ринкових задачах функція корисності взагалі є більш ніж невизначеною категорією – це результат суб’єктивних оцінок і намірів індивіда чи групи індивідів. Це було вагомим фактором для критики ринкових методів і ринку, як інструменту вимірювання вартостей продуктів. Але як не раз було показано, наприклад, В. Опойцевим, І. Екландом [116, 150], суттєвим для задач обміну є топологічний характер функції корисності, яка певним чином фіксує відношення переваги.

Ближче до топологічної суті задачі є використання „функцій байдужості”, що задають підмножину еквівалентних за корисністю векторів ресурсів, тобто знаходяться з умови: $u(x) = U$.

Вище ми використали антропоморфний термін „... елемент намагається поміняти...”. Деталізуємо тепер процедури, що виконуються в системі з обміном ресурсами після того, як усі елементи визначили бажані вектори ресурсу $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Назвемо їх „заявками”. Після цього визначаються сума наявних в системі ресурсів Y , та сума заявок X :

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N); \quad Y_j = \sum_{i=1}^M y_{i,j}; \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_N); \quad X_j = \sum_{i=1}^M x_{i,j}.$$

Основне положення для систем з обміном ресурсами в тому, що швидкість зміни вектора "цін" p на види ресурсів пропорційна різниці $Z = X - Y$. Ця різниця може бути і додатною і від’ємною. Назвемо її незалежно від знаку: "дефіцит". Класичне рівняння для задачі встановлення цін в системі обміну записується так:

$$dp/dt = Z(p), \quad (1.22)$$

де p – вектор цін; $Z(p)$ – вектор дефіцитів.

Неважко записати і еквівалентне різницеве рівняння процесу для дискретного випадку.

Таким чином результатом подання заявок є зміни у векторі цін згі-

дно (1.22). На кожному кроці процесу елементи коректують свої заявки з урахуванням зміни цін, а саме, зменшують кількість тих ресурсів, що подорожчали, і навпаки. Інтуїція підказує (і звичайно підводить нас), що дефіцит повинен зменшуватись і ціни прийдуть до стану рівноваги. Обсяг заявок стане рівним реальній кількості ресурсів – і по досягненню такого стану рівноваги виконується реальний перерозподіл ресурсів згідно з останніми заявками. В цьому стані усі елементи одночасно досягають максимуму своїх функцій корисності. Звичайно система в цілому має певний критерій оптимальності (цільову функцію) і при виконанні певних умов сумісності (що розглядаються далі) в стані рівноваги досягається також екстремум критерію оптимальності в цілому.

Розглянемо задачу обміну ресурсами, як процес пошуку екстремуму функції багатьох змінних: знайти значення екстремуму функції $N \times M$ змінних $Foo(MX)$, де MX – матриця з M -стовпців, кожний з яких вектор з N компонентів, що трактуються як ресурси, що виділені певному елементу системи, при певному початковому розподілі ресурсів.

Головна відмінність такого підходу до оптимізації від традиційних методів нелінійного програмування в тому, що ми паралельно розв'язуємо M задач оптимізації функцій корисності від N змінних. Зрозуміло, що знаходження екстремумів для M функцій від N змінних, набагато легша задача, ніж безпосереднє знаходження екстремуму функції $N \times M$ змінних.

– Перша головна перевага методу оптимізації на базі обміну ресурсами – узгодженість цього методу з логікою і структурою великої кількості важливих практичних задач.

– Друга головна перевага, що впливає з першої: для оптимізації реальної системи комп'ютер не обов'язковий. Реальні елементи реальної системи, якщо вони функціонують за певними правилами, рано чи пізно прийдуть у стан, що буде оптимальним для кожного елемента і системи в цілому.

– Остання перевага методу – ефективне використання багатопроекторних систем, можливість розподілу задачі по комп'ютерній мережі.

У зв'язку з важливістю інтерпретацій і можливостями "природної реалізації" методу, подамо словесний опис алгоритму функціонування системи обміну.

1. "Секретар ринку" визначає сумарну кількість кожного виду продуктів (ресурсів), що виставили на обмін учасники ринку (елементи системи).

2. Кожний учасник оцінює свій початковий набір продуктів (запаси) у поточних цінах. Ця сума – його "капітал" або "бюджет".

3. Кожний учасник розв'язує задачу максимізації своєї функції корисності при бюджетному обмеженні і знаходить оптимальний набір

продуктів (на практиці це може робитись методом пошуку, проб і помилок) і подає "заявку" на такий набір.

4. "Секретар ринку" збирає заявки, визначає сумарну потребу кожного продукту, а потім порівнює їх з наявними запасами – визначає дефіцит.

5. Ціни змінюються пропорційно дефіцитам згідно з рівнянням (1.22) і цикл (пункти 2–5) повторюється, поки дефіцити не стануть нульовими – це стан рівноваги ринку.

Математичні властивості базової моделі обміну ресурсами.

Перш, ніж розробляти узагальнені робочі моделі, розглянемо математичні властивості класичних систем обміну ресурсами. Використаємо можливості сучасних математичних пакетів – символні обчислення, вбудовані методи оптимізації. Будемо давати паралельно аналітичні та "експериментальні" докази відповідних теорем.

В рівнянні (1.22) згорнута система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, що описують процес зміни цін ресурсів в системі. В межах прийнятих припущень про функції корисності та раціональну поведінку користувача і на основі теорії диференціальних рівнянь – траєкторія зміни цін у фазовому просторі повністю визначається цінами у початковий момент. Через одну точку фазового простору проходить тільки одна фазова траєкторія. Розглянемо властивості цих траєкторій.

Теорема 1. Якщо вектор цін в початковий момент $p^{(1)} > 0$, то $p^{(t)} > 0$ для усіх $t > 0$ ($p^{(1)} > 0$ означає, що усі компоненти вектора цін більші від нуля).

Доведення експериментальне. Експериментальний матеріал у нас отримано в результаті розрахунку вектора цін p за рівнянням динаміки цін (див. табл. 1.1)

Таблиця 1.1

Вектор цін розрахований за рівняннями динаміки цін

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$p =$	1	10	9.68	9.47	9.34	9.25	9.2	9.16	9.13	9.12	9.11
	2	5	5.65	6	6.21	6.34	6.42	6.47	6.51	6.53	6.55

Для систем довільної розмірності можна зробити таку функцію

$$\text{Усі_складові_позитивні(Вектор)} := \prod_{i=1}^{\text{length(Вектор)}} (\text{Вектор} > 0)_i. \quad (1.23)$$

Очевидно, що ця функція дорівнює нулю, якщо хоч один елемент змінної "Вектор" не позитивний. Виводимо значення функції для цін у початковий та довільний моменти часу $t_{\text{дов}} := 13$:

$$\begin{aligned} \text{Усі_складові_позитивні}(p^{(1)}) &= 1; \\ \text{Усі_складові_позитивні}(p^{(t_{\text{ДОВ}})}) &= 1. \end{aligned}$$

Доведення аналітичне. Використовуємо припущення і обмеження, на яких базується класична модель ринку:

- 1) $dp/dt = z(p)$ – темп зміни цін продуктів пропорційний дефіцитам;
- 2) дефіцит z є неперервною функцією цін p ;
- 3) якщо деяка ціна $p_i = 0$, то $z_i > 0$ – дефіцит завжди позитивний.

Припустимо, що в якийсь момент часу t деяка ціна стала нульовою: $p^{(t)} = ps$; $ps_i = 0$; $i \in 1..K_{\text{товарів}}$. Згідно з умовою 2 повинна існувати неперервна траєкторія, що проходить через окіл точки ps . В цьому околі, згідно з умовою 3, дефіцит $z_i > 0$, і згідно з умовою 1 маємо: $dp_i/dt = z_i > 0$ – тобто ціна в околі точки ps зростає. Тобто така точка не може належати траєкторії. Протиріччя доводить теорему.

Теорема 2. (Закон Вальраса) Сума поточних дефіцитів в поточних цінах дорівнює нулю:

$$p^{(t)} \cdot z^{(t)} = 0. \quad (1.24)$$

Записуємо скалярний добуток, що для випадку двох видів ресурсів і трьох елементів системи в розгорнутому вигляді:

$$p_{1,t} \cdot z_{1,t} + p_{1,t} \cdot z_{2,t} + p_{1,t} \cdot z_{3,t} + p_{2,t} \cdot z_{1,t} + p_{2,t} \cdot z_{2,t} + p_{2,t} \cdot z_{3,t}.$$

Доведення експериментальне. Знову беремо дані, що розраховані програмою моделювання динаміки цін. Бачимо, що закон виконується для усіх $\lambda\lambda$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda\lambda := 12 & \quad p^{(\lambda\lambda)} \cdot \left(x_1^{(\lambda\lambda)} + x_2^{(\lambda\lambda)} + x_3^{(\lambda\lambda)} - \sum_j y^{(j)} \right) = 0 \\ \lambda\lambda := 21 & \quad p^{(\lambda\lambda)} \cdot \left(x_1^{(\lambda\lambda)} + x_2^{(\lambda\lambda)} + x_3^{(\lambda\lambda)} - \sum_j y^{(j)} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Доведення аналітичне. Використовуємо умову, на якій базується класична модель ринку – вартість поточної заявки учасника дорівнює вартості його запасів у поточних цінах:

$$\sum_{i=1}^N p_{i,t} \cdot (x_t)_{i,j} = \sum_{i=1}^N p_{i,t} \cdot y_{i,j}, \quad (1.26)$$

звідки маємо

$$\sum_{i=1}^N p_{i,t} \cdot (x_t)_{i,j} - \sum_{i=1}^N p_{i,t} \cdot y_{i,j} = 0. \quad (1.27)$$

Виносимо операцію підсумовування по всіх продуктах, а потім під-

Доведення аналітичне. Нам треба отримати рівняння, куди входять тільки ціни. Згідно з теоремою 2 маємо $p \cdot z = 0$, підставимо z з базового рівняння $dp/dt = z(p)$ і просумуємо по усіх видах продуктів:

$$\sum_{i=1}^N p_i \cdot \frac{d}{dt} p_i = 0.$$

Інтегруємо це рівняння за часом

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \cdot (p_i)^2 = 0.5Rk, \quad (1.31)$$

де $0.5 \cdot Rk$ – константа. Це рівняння сфери, в нашому випадку – дуги кола. Теорему доведено.

Подаємо наступні теореми без доведень.

Теорема 4. На кожній сфері (фазовій траєкторії цін) є, як мінімум одна точка рівноваги $p_0 > 0$.

Ринок не завжди стійкий. Для забезпечення стійкості необхідні додаткові обмеження, наприклад, умова А. Для довільного вектора цін рівноваги p_0 та довільного нерівноважного вектора p має місце умова: $p_0 \cdot z(p) > 0$ (нагадаємо, що згідно з законом Вальраса $p \cdot z(p) = 0$). Умова А виконується для деяких практично важливих ринкових ситуацій.

Теорема 5. Якщо усі елементи системи мають однакові цільові функції, то умова А виконується.

Важливою характеристикою ринку в аспекті стійкості є умова Б.

Умова Б (повної замінюваності). Якщо ціна одного товару збільшується, а всіх інших – фіксована, попит на усі ці продукти збільшується. Математично це означає, що окремі похідні будуть більші від нуля:

$$\left(\frac{d}{dp_j} z_i > 0 \right) \text{ при } j \neq i.$$

Теорема 6. При виконанні умови А множина векторів рівноваги є випуклою. Введемо $D(t) = (p(t) - p_0) \cdot (p(t) - p_0)$ – квадрат відстані між поточним вектором цін і вектором рівноваги.

Теорема 7. Якщо виконано умову А, то

1) для будь якого вектора рівноваги p_0 і нерівноважного вектора p має місце: $\frac{d}{dt} D(t) < 0$;

2) ринок є стійким.

Підведемо підсумки цього стислого математичного аналізу задачі встановлення цін в системі з обміном ресурсами. В гуманних цілях ми по можливості не вживали термін "ринок". За традицією ринок, на рівні

підсвідомості, вважається чимось непрогресивним, некерованим, хаотичним і навіть кримінальним.

Інша справа закони Кеплера для руху планет навколо Сонця – повна "небесна гармонія". Закони ринку не менш гармонічні (теорема 3, рис. 1.23, рівняння (1.31)), але мало хто їх вивчає.

Отримання аналітичних розв'язків для рівнянь динаміки цін. Розглянемо декілька розв'язків для динаміки систем обміну. Почнемо з рівняння динаміки цін (1.22).

Щоб знайти у явному вигляді залежність вектора дефіциту від ціни $z(p)$, слід визначити "заявки" кожного елемента системи. Для цього необхідно отримати для кожного елемента оптимальні розв'язки задачі обміну набору продуктів у вигляді функцій вектора цін. Потім необхідно отримати суму цих заявок, сформувати теж як функцію вектора цін. Відомо дуже мало розв'язків, де функція дефіциту отримана у явному вигляді. Розглянемо деякі з них. Використаємо можливості сучасних математичних пакетів – символні обчислення, вбудовані методи оптимізації.

Математичні моделі і методи стають все складнішими, а помилки в алгоритмах і програмах стають все дорожчими. Тому, сьогодні забороняється виконувати обчислення, символні перетворення вручну – для цього існують десятки математичних пакетів.

Динаміка системи з двома видами продуктів. Задаємо параметри системи: кількість елементів $M := 3$; кількість видів ресурсів $N := 2$; крок обчислень $dT = 0.05$; число кроків обчислень $Kk := 30$.

Вводимо відповідні ранжовані змінні: дискретний час $t := 1..Kk$; індекс ресурсу $i := 1..N$; індекс елемента $j := 1..M$. Функція корисності формально – яка завгодно позитивна, монотонно зростаюча функція від N змінних – кількостей продуктів. Візьмемо для прикладу таку однопараметричну:

$$u_k(x_1, x_2) = a_k \cdot \ln(x_1) + (1 - a_k) \cdot \ln(x_2). \quad (1.32)$$

Вважаємо сумарні запаси продуктів на ринку постійними, тобто розглядаємо тільки торги, без виробництва і споживання. Запишемо диференціальне або різницеве рівняння для цін на ринку

$$\left[\frac{d}{dt} c(t) = z(p) \right]; \quad \left[c^{(k+1)} = c^{(k)} + z^{(k)} \cdot \Delta t \right]. \quad (1.33)$$

Визначимо оптимальний розподіл ресурсів для елементів. Нагадаємо задачу визначення найбільш корисного, при даних поточних цінах і при даному обмеженні капіталу, вектора ресурсів – "заявки". Різниця між сумою заявок і сумою продуктів на ринку – це дефіцит.

Дано: цільова функція $u(x_1, x_2, a_j) := a_j \cdot \ln(x_1) + (1 - a_j) \cdot \ln(x_2)$;
 обмеження $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 - K = 0$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$;
 ціль оптимізації – максимум $u(x_1, x_2, a_j)$ по x_1, x_2 .

Метод оптимізації – з можливих альтернатив: – метод Лагранжа; – виключення змінних; вибираємо останній. Виключаємо x_2 (за допомогою символічного процесора):

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - K = 0 \text{ solve, } x_2 \rightarrow \frac{-(p_1 \cdot x_1 - K)}{p_2}. \quad (1.34)$$

Підставляємо вираз для x_2 у цільову функцію

$$u(x_1, x_2, a_j) \text{ substitut } x_2 = \frac{-(p_1 \cdot x_1 - K)}{p_2} \rightarrow a_j \cdot \ln(x_1) + (1 - a_j) \cdot \ln\left[\frac{(-p_1 \cdot x_1 + K)}{p_2}\right].$$

Визначаємо похідну по x_1 від отриманого виразу

$$\frac{d}{dx_1} \left[a_j \cdot \ln(x_1) + (1 - a_j) \cdot \ln\left[\frac{(-p_1 \cdot x_1 + K)}{p_2}\right] \right] \rightarrow \frac{a_j}{x_1} - (1 - a_j) \cdot \frac{p_1}{(-p_1 \cdot x_1 + K)}. \quad (1.35)$$

Прирівнюємо похідну до нуля, знаходимо оптимальні x_1 та x_2

$$\frac{a_j}{x_1} - (1 - a_j) \cdot \frac{p_1}{(-p_1 \cdot x_1 + K)} = 0 \text{ solve, } x_1 \rightarrow a_j \cdot \frac{K}{p_1}; \quad \boxed{x_{1op} = a_j \cdot \frac{K}{p_1}}. \quad (1.36)$$

$$x_2 = \frac{-(p_1 \cdot x_1 - K)}{p_2} \left| \begin{array}{l} \text{substitut } x_1 = a_j \cdot \frac{K}{p_1} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow x_2 = -K \cdot \frac{(-1 + a_j)}{p_2}; \quad \boxed{x_{2op} = (1 - a_j) \cdot \frac{K}{p_2}}.$$

Припустимо, що усі учасники ринку мають однакові функції корисності. Запишемо вираз для заявки – функції попиту учасника i , нарешті, вираз для дефіциту одного учасника. Це буде різниця між "заявкою" і початковими запасами учасника.

$$\text{хор}(p, a_j) = \begin{bmatrix} a_j \cdot \frac{K_j}{p_1} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{K_j}{p_2} \end{bmatrix}; \quad \boxed{z(p, a_j, y) = \text{хор}(p, a_j) - y};$$

де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – початкові запаси продуктів на ринку. Розкриваємо вираз для дефіциту

$$z(p, a_j, y) = \begin{bmatrix} a_j \cdot \frac{K_j}{p_1} - y_{1j} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{K_j}{p_2} - y_{2j} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

і підставляємо сюди вираз для K_j

$$\begin{bmatrix} a_j \cdot \frac{K_j}{p_1} - y_{j1} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{K_j}{p_2} - y_{j2} \end{bmatrix} \text{ substitute } K_j = p_1 \cdot y_{j1} + p_2 \cdot y_{j2} \rightarrow \begin{bmatrix} a_j \cdot \frac{(p_1 \cdot y_{j1} + p_2 \cdot y_{j2})}{p_1} - y_{j1} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{(p_1 \cdot y_{j1} + p_2 \cdot y_{j2})}{p_2} - y_{j2} \end{bmatrix}.$$

Виконуємо алгебраїчні перетворення – групуємо складові по змінних y_{j1} та y_{j2} .

$$\begin{bmatrix} a_j \cdot \frac{(p_1 \cdot y_{j1} + p_2 \cdot y_{j2})}{p_1} - y_{j1} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{(p_1 \cdot y_{j1} + p_2 \cdot y_{j2})}{p_2} - y_{j2} \end{bmatrix} \text{ collect, } y_{j1} \rightarrow \begin{bmatrix} (-1 + a_j) \cdot y_{j1} + a_j \cdot p_2 \cdot \frac{y_{j2}}{p_1} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot y_{j1} + (1 - a_j) \cdot y_{j2} - y_{j2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} (-1 + a_j) \cdot y_{j1} + a_j \cdot p_2 \cdot \frac{y_{j2}}{p_1} \\ (1 - a_j) \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot y_{j1} + (1 - a_j) \cdot y_{j2} - y_{j2} \end{bmatrix} \text{ collect, } y_{j2} \rightarrow \begin{bmatrix} (-1 + a_j) \cdot y_{j1} + a_j \cdot p_2 \cdot \frac{y_{j2}}{p_1} \\ -a_j \cdot y_{j2} + (1 - a_j) \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot y_{j1} \end{bmatrix}.$$

Нарешті отримуємо вираз для дефіциту – різниці між наявним набором продуктів і бажаним (оптимальним в межах наявного капіталу) для j -го учасника.

$$\begin{bmatrix} (-1 + a_j) \cdot y_{j1} + a_j \cdot p_2 \cdot \frac{y_{j2}}{p_1} \\ -a_j \cdot y_{j2} + (1 - a_j) \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot y_{j1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_1} \cdot a_j \cdot y_{j2} - (1 - a_j) \cdot y_{j1} \\ \frac{p_1}{p_2} \cdot (1 - a_j) \cdot y_{j1} - a_j \cdot y_{j2} \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Для отримання вектора дефіциту продуктів на ринку треба скласти дефіцити (1.38) усіх учасників. Зробимо це і подивимось на вираз в цілому і суми, що входять до нього. Суми – це константи, що залежать від параметрів функцій корисності учасників і початкових запасів продуктів. Вираз в цілому є функцією тільки відношення цін $r = p_1/p_2$. Вводимо позначення для сум і отримуємо остаточний вираз для дефіциту.

$$z(p, y) = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_1} \cdot \sum_j a_j \cdot y_{j2} - \sum_j (1 - a_j) \cdot y_{j1} \\ \frac{p_1}{p_2} \cdot \sum_j (1 - a_j) \cdot y_{j1} - \sum_j a_j \cdot y_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{p_1} \cdot A(a, y) - B(a, y) \\ \frac{p_1}{p_2} \cdot B(a, y) - A(a, y) \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Записуємо вирази для сум, задаємо вектор початкових цін $p(0)$

$$\boxed{A(a,y) := \sum_j a_j \cdot y_{2,j}}; \quad \boxed{B(a,y) := \sum_j (1-a_j) \cdot y_{1,j}}; \quad p^{(1)} := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

І тепер можемо записати нелінійне різницеве рівняння, що описує динаміку цін.

$$\begin{pmatrix} p_{1,t+1} \\ p_{2,t+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \left[A(a,y) \cdot \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right) - B(a,y) \right] \cdot dT \\ \left[B(a,y) \cdot \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right) - A(a,y) \right] \cdot dT \end{bmatrix}; \quad r(t) := \frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}. \quad (1.41)$$

Те, що отримано – головний результат – це базова програма моделювання ринків. Цю програму можна масштабувати в "довжину" – збільшувати число учасників, і в "ширину" – збільшувати число продуктів (розширювати асортимент). В наступних розділах розглянуто і трьохтоварні ринки.

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot x_1^{s1} - a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2) \cdot dT \\ (-a_{21} \cdot x_2^{s2} + a_{22} \cdot x_1 \cdot x_2) \cdot dT \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Запишемо також рівняння динаміки запасів продуктів у кожного учасника. Для цього спочатку визначимо вартості поточних запасів продуктів учасника.

$$K(p, x, i) := \sum_i p_i \cdot x_i; \quad x_1^{(1)} := y^{(1)}; \quad x_2^{(1)} := y^{(2)}; \quad x_3^{(1)} := y^{(3)};$$

$$y = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad x_{1,1,1} = 20.$$

Записуємо рівняння для визначення поточних векторів запасів продуктів учасників. Зауваження: це можуть бути як реально куплені чи обміняні продукти, а можуть бути тільки заявками – математична модель задачі від цього не змінюється

$$x_1^{(t+1)} := \begin{bmatrix} \frac{a_1 \cdot \left(\sum_i p_{i,t} \cdot y_{i,1} \right)}{p_{1,t}} \\ (1-a_1) \cdot \left(\sum_i p_{i,t} \cdot y_{i,1} \right) \\ p_{2,t} \end{bmatrix}; \quad x_2^{(t+1)} := \begin{bmatrix} \frac{a_2 \cdot \left(\sum_i p_{i,t} \cdot y_{i,2} \right)}{p_{1,t}} \\ (1-a_2) \cdot \left(\sum_i p_{i,t} \cdot y_{i,2} \right) \\ p_{2,t} \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Тепер можемо виконати моделювання процесів розподілу ресурсів у системі. Задаємо крок обчислень, початкові набори продуктів та параметри функцій корисності

$$dT \equiv .05; \quad y \equiv \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}; \quad a \equiv \begin{pmatrix} .2 \\ .5 \\ .8 \end{pmatrix}.$$

Будуємо тепер графіки для динаміки цін (рис. 1.24, 1.25). Для двох продуктів та логарифмічних функцій корисності процеси сходження цін до стану рівноваги стійкі, а усталені ціни визначаються запасами ресурсів та функціями корисності їх для елементів.

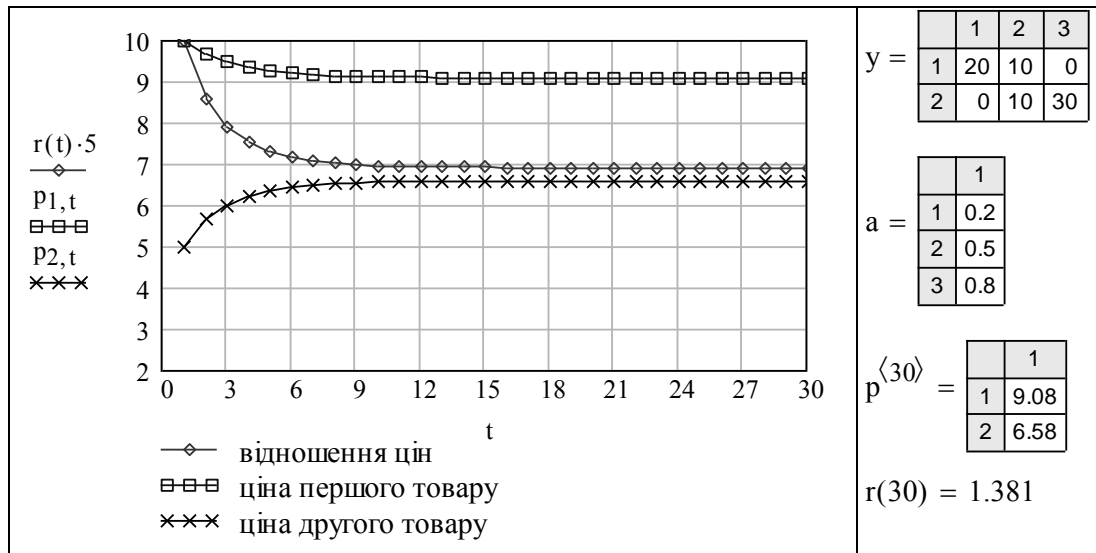


Рис. 1.24. Динаміка цін ресурсів

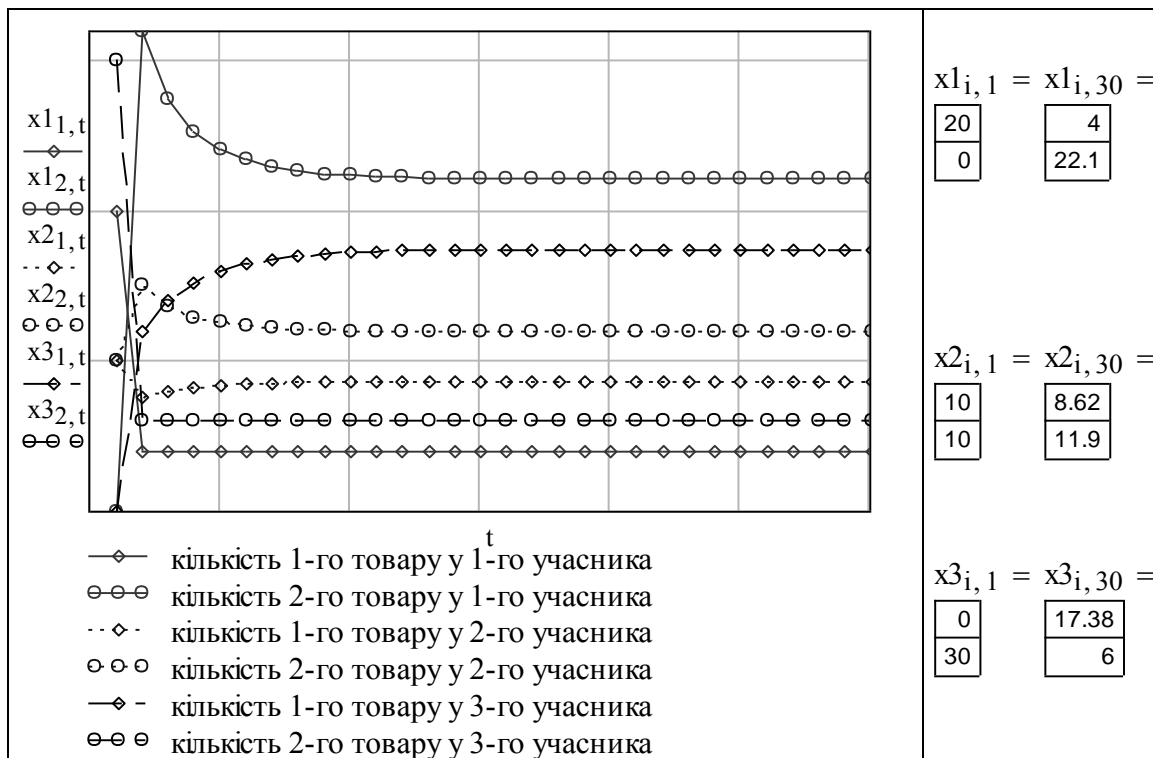


Рис. 1.25. Динаміка перерозподілу ресурсів в системі

Отримання розв'язку для системи обміну з трьома видами ресурсів. Розглянемо ще один приклад, зробимо робочу математичну модель для ринку з трьома і більше продуктами (ми просто переносимо в середовище математичного пакета модель з [86]). Для двопродуктового ринку доведено, що він завжди є стійким при виконанні вимог до монотонності та гладкості функцій корисності. Тривоварні і більше ринки не завжди стійкі, особливо для негладких (кусочнодиференційованих) функцій корисності.

Для контрольного прикладу беремо функцію корисності (ФК), що має дуже простий вид, чітку логіку – ресурси повинні бути в певній пропорції, надлишок якогось ресурсу дає нульову корисність.

Можна знайти приклади таких виробництв. Подаємо рівняння і графіки для такої ФК – для випадку двох ресурсів, але неважко узагальнити модель на більшу кількість, але вже не можна подати так наочно графічні результати (рис. 1.26).

$$u_0(y_1, y_2) \equiv \min\left(\left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)\right). \quad (1.44)$$

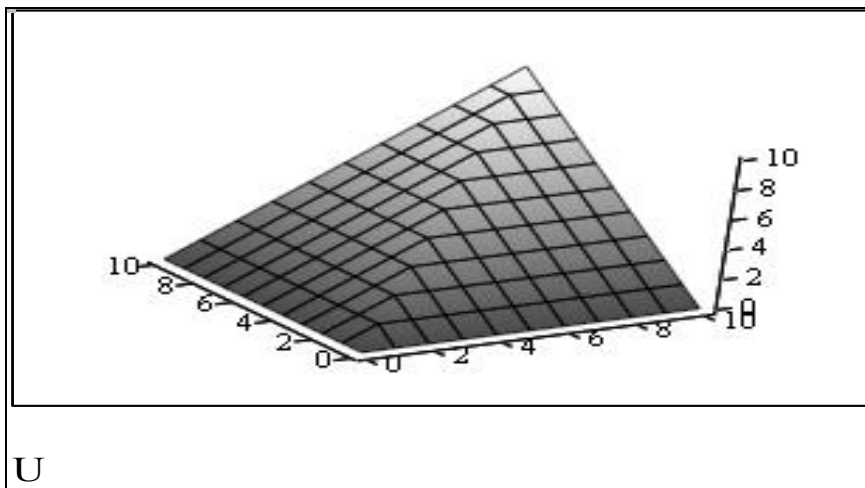


Рис. 1.26. Функція корисності для двох ресурсів. Приклад

Як можна бачити з графіка на рис. 1.26 функція оптимального розподілу ресурсів лінійна (це ребро на графіку). Елемент вибирає певне відношення між кількостями ресурсів різних видів.

Візьмемо тепер кількість елементів – 3. Нехай функція корисності кожного елемента залежить тільки від двох продуктів. Беремо загальний вираз такої ФК для трьох змінних і запишемо ФК для кожного елемента.

$$\left. \begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &\equiv \min((x_1 \ x_2 \ x_3)^T); & u_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv \min((x_1 \ x_2)^T); \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv \min((x_2 \ x_3)^T); & u_3(x_1, x_2, x_3) &\equiv \min((x_3 \ x_3)^T). \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Оптимальний розподіл в цьому випадку легко знайти чисто з логі-

чних міркувань: елемент не повинен замовляти ресурс, що не використовується, а інші два ресурси замовити в рівних кількостях. Незавжди записати вирази для заявок і дефіцитів. В результаті отримуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1 &= \frac{-p_2}{p_1 + p_2} + \frac{p_3}{p_1 + p_3}; \\ \frac{d}{dt} p_2 &= \frac{-p_3}{p_2 + p_3} + \frac{p_1}{p_1 + p_2}; \\ \frac{d}{dt} p_3 &= \frac{-p_1}{p_1 + p_3} + \frac{p_2}{p_2 + p_3}. \end{aligned} \right\} (1.46)$$

Отримання еквівалентної дискретної моделі для (1.46) – рутинна задача, тут не наводиться. Використовуємо саме дискретну модель, тому що вона відповідає реаліям зміни цін на багатьох ринках – раз на добу, раз на тиждень ... На рис. 1.27, 1.28 подано приклади перехідних процесів в системі "трьохтоварний ринок".

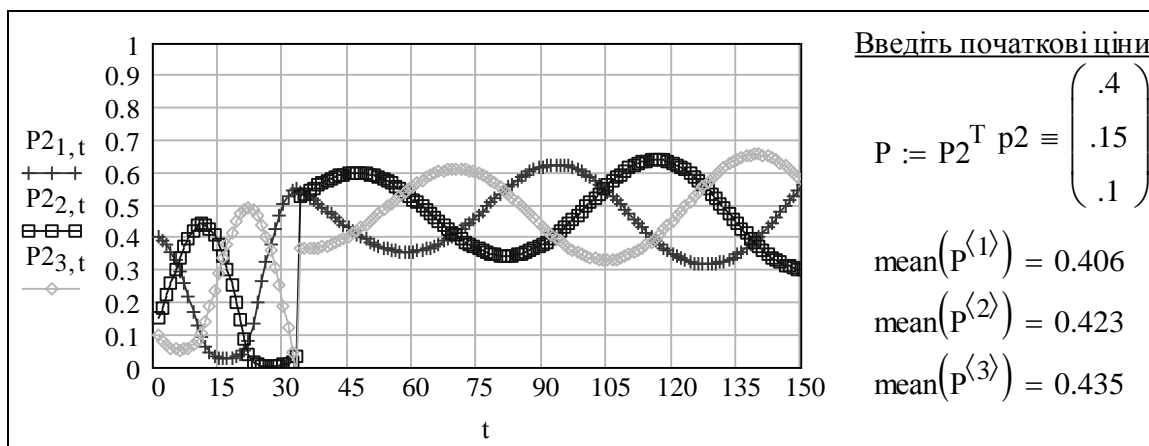


Рис. 1.27. Динаміка цін ресурсів. Розривний процес

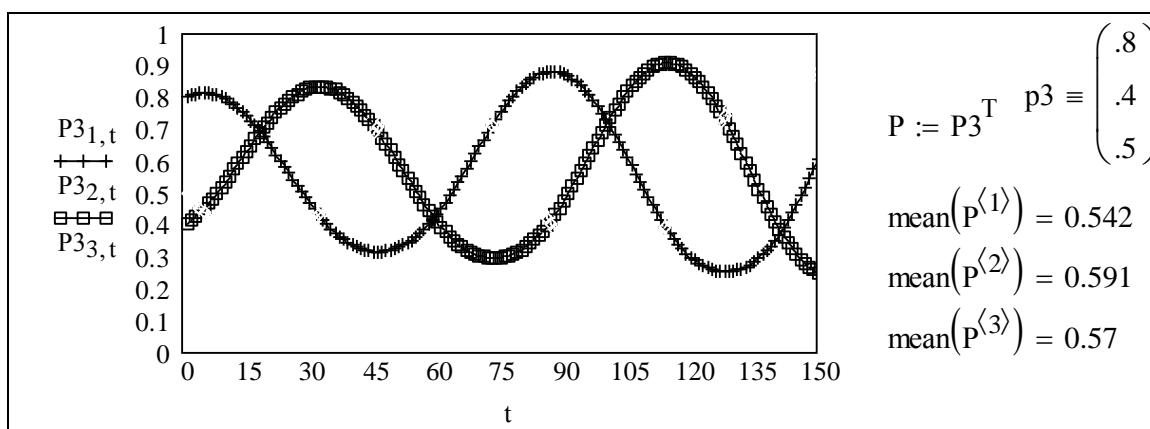


Рис. 1.28. Динаміка цін ресурсів. "Гладкий" процес

1.5.3. Розробка програми моделювання ринків з довільними функціями корисності елементів

Ми "розглянули", тобто реалізували певні відомі моделі в середовищах пакетів для моделювання, провели дослідження на цих робочих моделях. Ці відомі моделі – великі інтелектуальні досягнення, отримані зусиллями неозброєного комп'ютером розуму. На жаль, у багатьох випадках аналітичне розв'язання для задачі моделювання систем з обміном не існує.

Узагальнимо розглянуті моделі – зробимо їх незалежними від вигляду функцій корисності елементів, розширимо їх для урахування запізень, виробництва, невизначеностей та ін. Розробимо інтерфейси для проведення досліджень і проведемо дослідження, щоб потім свідомо відмовитись від моделей такого класу.

У світі зараз мають великий попит програми-порадники, програми-помічники для прогнозування в системах обслуговування. Сьогодні менеджерам потрібен персональний помічник. Відкритий текст програми на природній математичній мові дозволяє бачити діючі в системі "механізми" і свідомо їх змінювати. Процедура прогнозування в системі "що буде якщо" така:

- користувач постійно отримує статистику по ринках і продажах;
- користувач вибирає модель ринку, настроює її параметри згідно з статистичними даними – виконує ідентифікацію;
- програма розраховує номінальний процес зміни цін і продажів;
- програма розраховує варіації процесу при можливих розкидах вхідних даних.

Користувач отримує номінальний прогноз зміни цін і продажів і розкиду цього процесу, порівнює з поточними статистичними даними.

Для цього класу моделей інтерес для теорії і практики мають дослідження впливу на перехідні процеси та усталений стан:

- початкових цін;
- початкових сумарних запасів продуктів в системі;
- початкових розподілів запасів продуктів між учасниками;
- функцій корисності учасників;
- темпів виробництва продуктів.

Словесна модель функціонування ринку.

В 1.5.1 було подано словесний опис функціонування абстрактного "ринку". На базі цього опису там була отримана система нелінійних диференціальних рівнянь для цін і розподілу продуктів між елементами системи.

Тепер на базі словесного опису створюємо програму моделювання в "псевдокодах". Потім на основі цієї псевдопрограми створюється робоча програма, словесний опис алгоритму функціонування ринку і програма у псевдокодах. На рис. 1.29 подано порядок перші два кроки.

<p>1☞ "Секретар ринку" визначає сумарну кількість кожного виду товарів (ресурсів), що виставили на обмін учасники ринку (елементи системи)</p> <p>2☞ Кожний учасник оцінює свій початковий набір товарів (запаси) у поточних цінах. Ця сума - його "капітал" або "бюджет". Він може поміняти початковий набір на інший, але такої ж вартості.</p> <p>3☞ Кожний учасник розв'язує задачу максимізації своєї функції корисності при бюджетному обмеженні і знаходить оптимальний набір товарів (на практиці це може робитись методом пошуку, проб і помилок) і подає "заявку" на такий набір.</p> <p>4☞ "Секретар ринку" збирає ці заявки і визначає сумарну потребу по кожному виду товарів, а потім порівнює їх з наявними сумарними запасами - визначає дефіцит.</p> <p>5☞ Ціни змінюються пропорційно дефіцитам згідно з рівнянням (1.33) і цикл (пункти 2–5) повторюється, допоки дефіцити не стануть нульовими – це стан рівноваги ринку.</p>	<pre> BZ = "Задано стартові ціни товарів" "Задано початкові запаси товарів" "кожного учасника" for k ∈ 2.. Трив_моделювання for i ∈ 1.. Кількість_учасників for j ∈ 1.. Кількість_товарів "Секретар підсумовує запаси" "і поставки товарів" "для k-го моменту часу" for i ∈ 1.. Nky "Кожен учасник" for j ∈ 1.. Mkt "визначає сумарну вартість" "усіх своїх товарів = капітал" "Кожен учасник визначає" "оптимальний набір товарів" "при обмеженні сумарної" "вартості = капітал" for j ∈ 1.. Mkt "Для усіх товарів" for i ∈ 1.. Nky "по усіх учасниках" "підсумовуємо заявки та" "запаси товарів" "по кожному товару:" "а) визначаємо дефіцит" "б) визначаємо нову ціну" "виводимо масив цін усіх товарів" "для усіх кроків моделювання" </pre>
---	--

Рис. 1.29. Сценарій та програма функціонування системи обміну в псевдокодах

Технологію конструювання математичних моделей: "словесний опис" – "програма в псевдокодах" – "робоча програма моделювання" майже неможливо формалізувати і чітко виділити в ній границі етапів. Єдина перевага такої технології – майже гарантований результат – ство-

рення робочої моделі при кінцевих витратах часу і ресурсів. Необхідні умови результативності, точніше – раціональності, такої технології:

– вільне володіння мінімум двома природними мовами і двома мовами програмування;

– вільний перехід між природними і програмними мовами, організація трансляції модулів створених в різних програмних середовищах, паралельне використання.

Аналогії раціональної технології конструювання робочих моделей. Нечіткість, неповна формалізованість технології конструювання не може бути причиною відмови від застосування і вдосконалення цієї технології. Непрямим обґрунтуванням можуть бути аналогії.

Фізика. Процитуємо декілька фрагментів з книги "Філософія фізики" [53], в якій розглядається роль теорій, аналогій та аксіоматики в фізиці.

"Современный физик, сколь бы в технических вопросах искусственным и критически настроенным он ни был, обычно догматически придерживается так называемого "кредо" наивного физика".

Виділено десять таких догм, від:

"наблюдение – источник и предмет физического знания", "физические теории не создаются, а открываются ... Спекуляции и изобретательство едва ли играют какую либо роль в физике" до:

"символ получает некоторое физическое значение с помощью операционального определения. Всё, что не определено с помощью возможных эмпирических операций, не имеет физического значения и должно быть отброшено".

"Это не значит, что все те, кто клянётся этими десятью заповедями, фактически им следуют. На самом же деле ни один физик не получил бы принципиально новых результатов, если бы он действовал в строгом соответствии с этими десятью заповедями, ибо последние не отражают реального процесса научного исследования и не способствуют ему".

На прикладному рівні проблеми побудови моделей сигналів і систем розглянуті в [122].

Біологія. Процеси відтворення, розвитку і функціонування організмів можуть бути досить вичерпні в термінах трансляції кодів і фізичних механізмів – електро- і термодинаміка, дифузія, гравітація, квантова фізика. Саме за рахунок дії природних механізмів реалізуються копіювання і трансляції природних "програм".

Розробка модуля оптимізації функції корисності учасника тритоварного ринку. Згідно з сценарієм функціонування системи обміну (рис. 1.29) на кожному кроці процесу кожний учасник оптимізує "свій набір продуктів", точніше товарів, бо продукти отримують ціни обміну. Повторимо постановку задачі оптимізації вибору учасника

ринку – визначення *максимально корисного набору товарів при:*

- наявних поточних цінах;
- наявних обмеженні капіталу і функції корисності учасника.

Це те, що називають "заявка" учасника ринку. Ця оптимальна заявка може бути

– абстракцією, коли учасник ринку і близько не підозрює, що у нього є якісь там функції корисності, і діє майже безпомилково, виходячи з поточної та очікуваної вигоди;

– явною заявкою, коли учасник має університетську освіту і розраховує оптимум на базі неіснуючої функції корисності з підручника. І теж виграє, через невизначеності дій учасників.

В цьому прикладі використовуємо простішу альтернативу побудови модуля оптимізації – метод прямого перебору. Головна перевага методу – нечутливість до виду цільових функцій і функцій обмежень: негладких, невипуклих, розривних. Такий підхід на фоні надлишку класичних витончених пошукових та нових – на базі "штучного інтелекту" методів оптимізації виглядає капітулянтським. виправдання такому вибору – в наступному, другому розділі, де розглянуто метод оптимального агрегування.

Поданий модуль оптимізації це приклад застосування одного з елементів *раціональної технології конструювання робочих моделей* (РТКРМ) – використання в пошукових, мало розмірних версіях нової робочої програми тільки відлагоджених, прозорих і універсальних модулів (підпрограм). Одна з причин – в практичних задачах функцію корисності звичайно неможливо визначити.

Далі подано документ математичного пакета.

Блок постановки задачі і введення даних. Дано: функції корисності $y_1(x_1)$, $y_2(x_2)$, $y_3(x_3)$ деяких товарів для деякого учасника ринку; "капітал" учасника ринку – K ; поточні ціни на товари c_1 , c_2 , c_3 . Знайти: розподіл "капіталу" K між товарами, що дає максимум критерію корисності

$$F(x_1, x_2) = y_1(x_1) \cdot \alpha_1 + y_2(x_2) \cdot \alpha_2 + y_3(x_3) \cdot (1 - \alpha_1 - \alpha_2),$$
 при обмеженнях:

$0 \leq \alpha_1 \leq 1$; $0 \leq \alpha_2 \leq 1$; $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$; $K_1 + K_2 + K_3 = K$, де K_1, K_2 – розподіл "капіталу" між відповідними продуктами

Модуль введення. Вводимо функції корисності та їх параметри:

$$y_1(x_1, vp_1) := 100 \cdot vp_1 \cdot \left(1 - e^{-vp_1 \cdot x_1}\right)^{vp_1};$$

$$y_2(x_2, vp_2) := 100 \cdot vp_2 \cdot \left(1 - e^{-vp_2 \cdot x_2}\right)^{vp_2};$$

$$y_3(x_3, vp_3) := 100 \cdot vp_3 \cdot \left(1 - e^{-vp_3 \cdot x_3}\right)^{vp_3}.$$

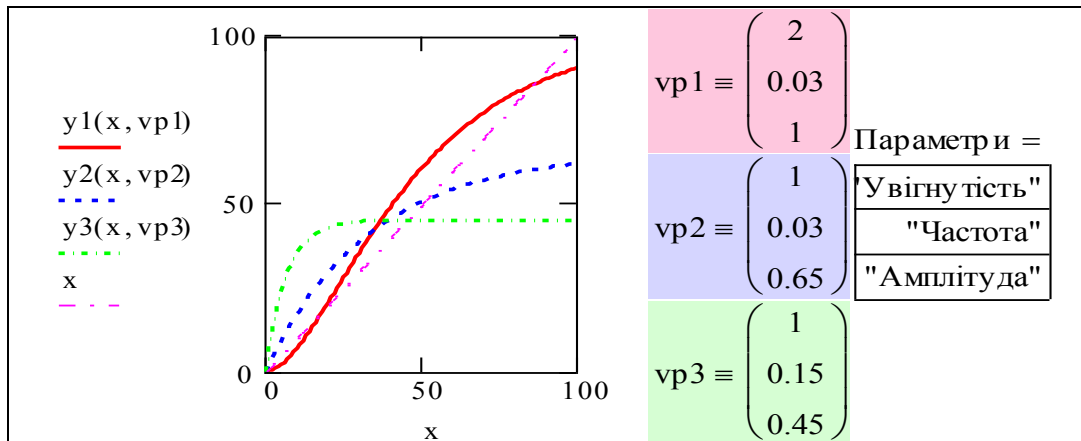


Рис. 1.30. Типові функції корисності
 На рис. 1.31 подано текст модуля оптимізації.

```

QQ(K, F, C) :=
  maks ← 0
  hk ← K ÷ Nk
  kupl1 ← hk ÷ C1
  kupl2 ← hk ÷ C2
  kupl3 ← hk ÷ C3
  for j ∈ 1..Nk
    x2 ← kupl1 · j
    for i ∈ 1..Nk - (j - 1)
      x1 ← kupl1 · i
      x3 ← (K - x1 · C1 - x2 · C2) ÷ C3
      obme ← K - x1 · C1 - x2 · C2
      vv ← F(x1, x2, x3) · if(obme > 0, 1, 0)
      if vv > maks
        maks ← vv
        x1mak ← x1
        x2mak ← x2
        x3mak ← x3
  tyty ← (x1mak, x2mak, x3mak)
  
```

Рис. 1.31. Модуль оптимізації "заявки" елемента системи

На рис. 1.32 подано текст програми моделювання системи обміну і поряд з ним – сліди контролю і відлагодження програми. Більшість програм цієї монографії не мали прямих прототипів, тому вимушено конструювались майже "з нуля" і обов'язково проходили контроль на кожному кроці створення.

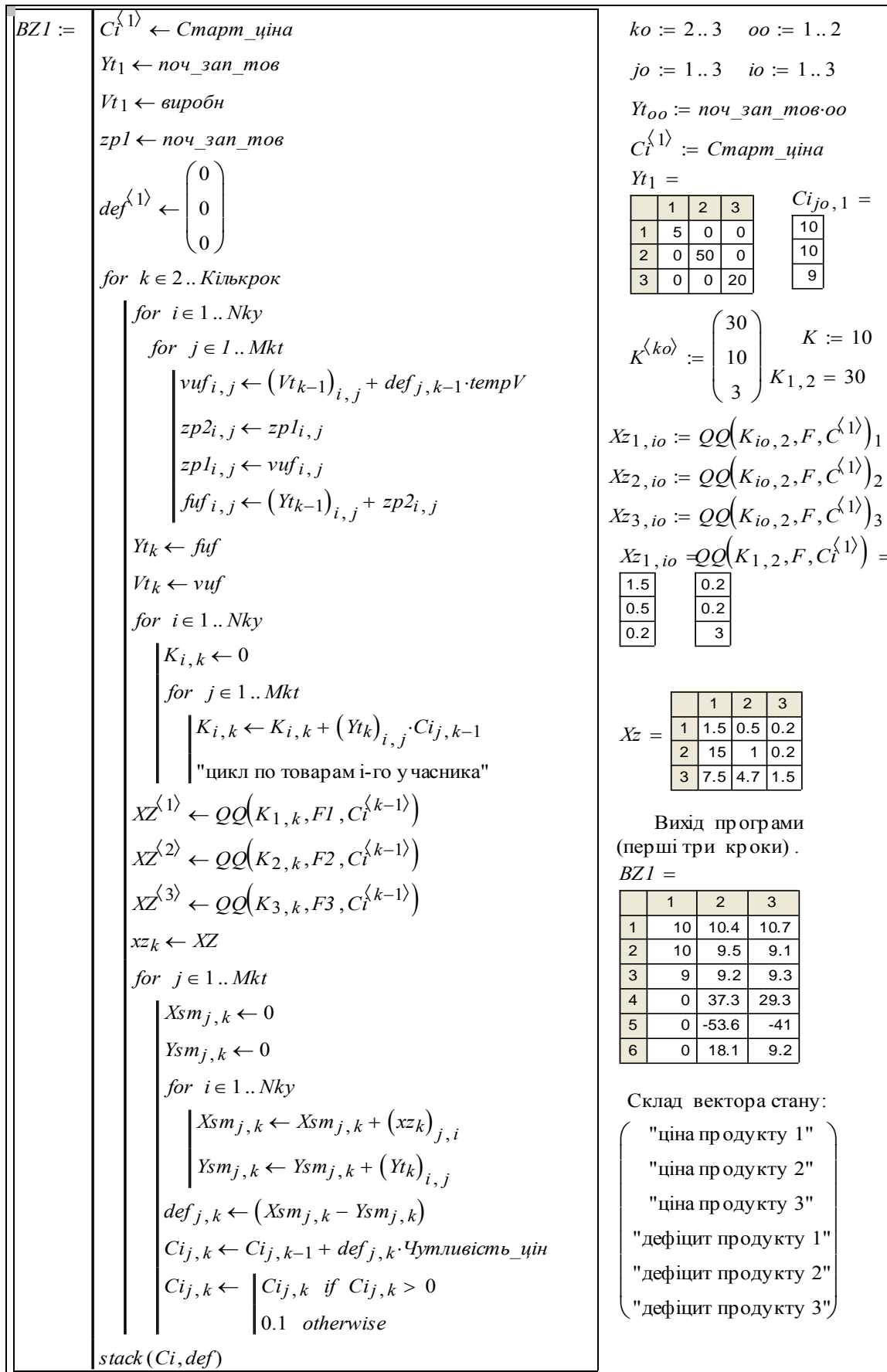


Рис. 1.32. Текст програми моделювання системи з обміном

Розробка стенда для дослідження динаміки системи обміну. Компонуємо на одній сторінці документа входи – зони введення параметрів задачі, і виходи – графіки, числові дані. Пам'ятаємо, що це тільки ескіз стенда для проведення простіших досліджень. Для більш серйозних досліджень слід розширити функції програми – обчислення залежностей вихідних даних від вхідних параметрів, більш повна графіка, запис результатів досліджень у файли та бази даних та ін. На рис. 1.33 подано "стенд" – графіки залежності цін від часу та фазова траєкторія цін (для класичного ринку сума квадратів цін – постійна), стартові і кінцеві ціни.

$Ціна := BZ1$; $k := 1..Кількрок$; $Xx := (Ціна^T)^{\langle 1 \rangle}$; $Yx := (Ціна^T)^{\langle 2 \rangle}$; $Zx := (Ціна^T)^{\langle 3 \rangle}$.
Формуємо вихідні дані:

$$Рівноваги_ціна := \begin{pmatrix} Ціна1, Кількрок \\ Ціна2, Кількрок \\ Ціна3, Кількрок \end{pmatrix} \quad відн_цін := \frac{Ціна1, Кількрок}{Ціна2, Кількрок}$$

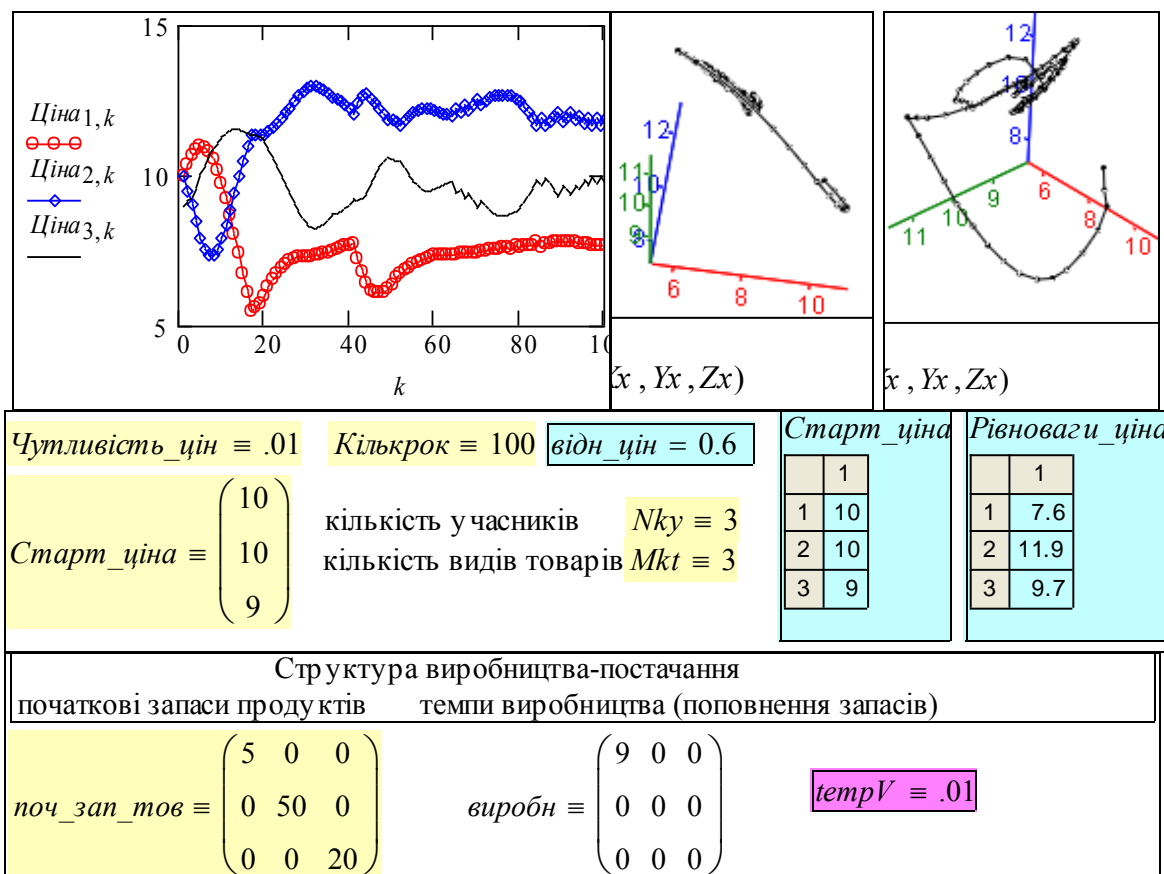


Рис. 1.33. Інтерфейс програми моделювання системи з обміном

Що спільного між результатами моделювання за класичною моделлю (рис. 1.27, 1.28) з лінійними функціями корисності і моделлю з увігнуто-випуклими функціями корисності (рис. 1.33). Спільним є виконан-

ня властивості "сума квадратів цін в перехідному процесі – постійна величина" (теорема 3) – точно для класичної моделі, наближене для узагальненої моделі. На рис. 1.33 подано дві проекції тривимірної фазової траєкторії – в одній проекції бачимо негладку, незакономірну, заплутану траєкторію, а на другій проекції – приблизно дугу кола. Тобто модель дозволяє побачити нові теоретичні і практичні проблеми, невідомі раніше властивості.

Характер процесів в системі з обміном визначається в першу чергу характером функцій корисності продуктів (товарів), що є об'єктами обміну, тому введення функцій корисності виділено в окремий блок (рис.1.34). На рис. 1.34 подано приклад типової структури цих функцій: маємо трьох учасників обміну і три продукти. Кожен учасник є виробником одного з продуктів, тому цінність цього продукту, як об'єкта купівлі є нульовою. Для кожного з учасників одна з функцій корисності є увігнуто-випуклою. Це має таку інтерпретацію: малі кількості продукту мають нульову або несуттєву цінність, при певній великій кількості продукту прирощення цінності при збільшенні кількості нульове або несуттєве. На мові теорії управління можна сказати, що функція перетворення капіталу в цінність має "порог нечутливості" і "обмеження по рівню виходу".

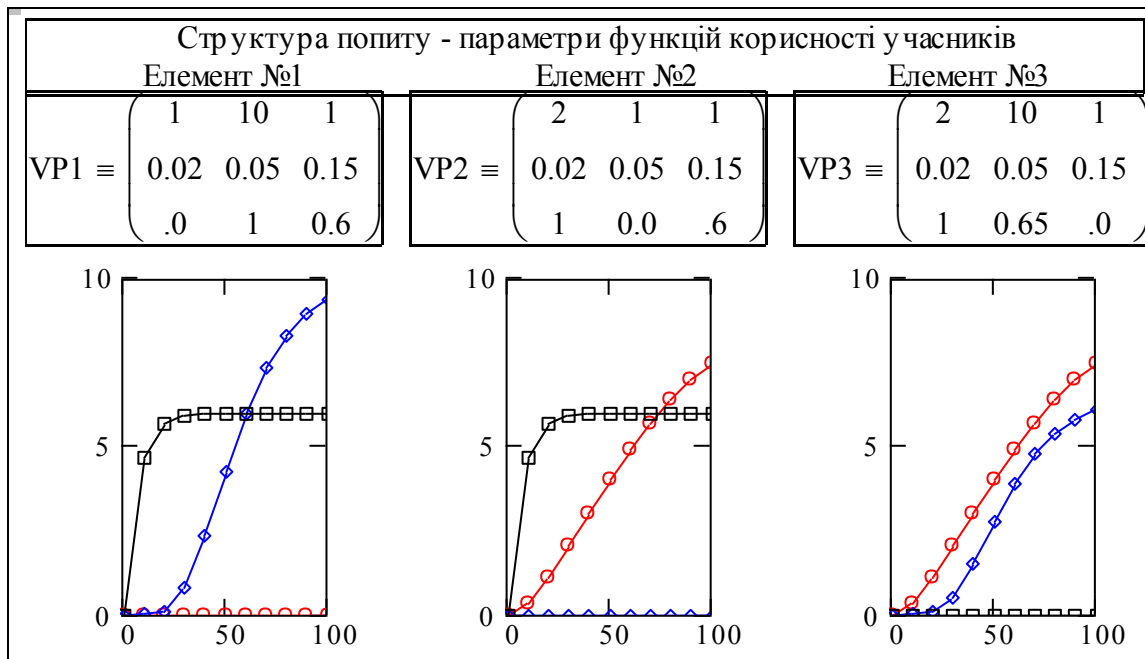


Рис. 1.34. Інтерфейс програми. Модуль введення функцій корисності

Як можна бачити з наведеного прикладу (рис. 1.33), перехідні процеси мають складний характер без якихсь видимих закономірностей. Процес схожий на реакцію динамічної системи на випадкові збурення, але в цій версії програми випадкові збурення не введені.

В цілому отримана робоча модель є генератором нових результатів відносно властивостей процесів обміну. Без моделювання, логіко-аналітичними методами вивести подібні результати занадто складно, якщо взагалі можливо.

1.5.4. Дворівнева модель обміну

Реальні ринки звичайно мають складну структуру, що частково є відображенням регіональної та глобальної структури виробництва – вертикальну та горизонтальну інтеграцію/декомпозицію. Розглянемо простий приклад побудови моделі дворівневого ринку [102].

Система складається з постачальника ресурсу (в першоджерелі [102] інтерпретація "ресурсу" – риба), двох підприємств, що виробляють два види продуктів для кінцевих споживачів, що розподіляють свій "капітал" так, щоб максимізувати власні функції корисності (рис. 1.35). Обмін ведеться через посередника – "аукціоніста".

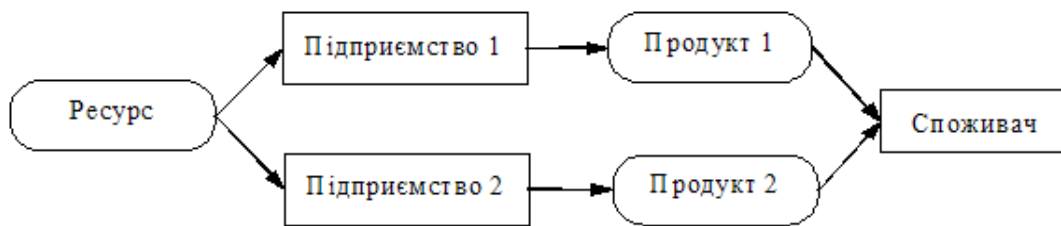


Рис. 1.35. Схема матеріальних потоків в системі

Сформулюємо проблему оптимального розподілу ресурсу для такої системи.

Умова для відношення попиту і пропозиції продукції має вигляд

$$Y_{si} = F_i(L_{di}) \geq Y_{di}; \quad i = 1..2.$$

Умова попиту і пропозиції продукції ресурсів

$$L_{d1} + L_{d2} \leq L_s.$$

Функція корисності, яку максимізує споживач (покупець)

$$f_{ko}(Y_{d1}, Y_{d2}) \Rightarrow \max.$$

Тут Y_{si} – обсяг пропозиції (виробництва) по i -му продукту (що виробляється i -м підприємством); Y_{di} – обсяг попиту (з боку споживача) на i -й продукт; L_s – пропозиція ресурсу, яку поки вважаємо постійною; L_{di} – обсяг попиту на ресурс з боку i -го виробництва (підприємства, фірми...); $F_i(L_{di})$ – виробнича функція i -го підприємства; $f_{ko}(Y_{d1}, Y_{d2})$ – функція корисності споживача.

Неформально задача формулюється так – управляти системою так, щоб була рівновага і всі були задоволені.

Опис процесу функціонування системи. Вважаємо що процеси торгів (обміну) виконуються постійно у певні дискретні моменти часу (раз на рік, місяць, тиждень, день..). Програму моделювання будуємо як цикл із певного набору операцій. Ці операції є відображенням процедур реальних торгів та аукціонів. Опишемо їх.

1. *Аукціоніст* повідомляє підприємствам і споживачу ціни на продукцію $p_{i,t}$, ціну ресурсу w_t , а також "ціну попиту" (інша назва "гранична корисність" – мовою економістів, або похідна від функції корисності за обсягом споживання відповідного продукту, – мовою математики):

$$\frac{d}{dY_{d_i,t-1}} f_{ko}(Y_{d1}, Y_{d2}); \quad i = 1..2. \quad (1.47)$$

2. Кожний *виробник* на підставі заданих цін продукції та ресурсу вибирає такий обсяг ресурсу $L_{d_i,t}$ (а значить і випуску продукції $Y_{s_i,t} = F_i(L_{d_i,t})$), який максимізує його прибуток

$$P_{ry_{i,t}} = p_{i,t} \cdot F_i(L_{d_i,t}) - w_t \cdot L_{d_i,t} \quad (1.48)$$

повідомляє значення $L_{d_i,t}$ та $Y_{s_i,t}$ аукціоністу.

3. *Споживач* коректує заявку на продукт $Y_{d_i,t}$ пропорційно різниці між прирощенням корисності і прирощенням ціни. Якщо ця різниця від'ємна, заявка не змінюється.

4. *Аукціоніст*, виходячи із закону попиту–пропозиції, змінює ціни пропорційно дефіцитам: якщо продукт чи ресурс в надлишку – ціна зменшується, якщо в дефіциті – ціна зростає (мінімальна ціна – нульова).

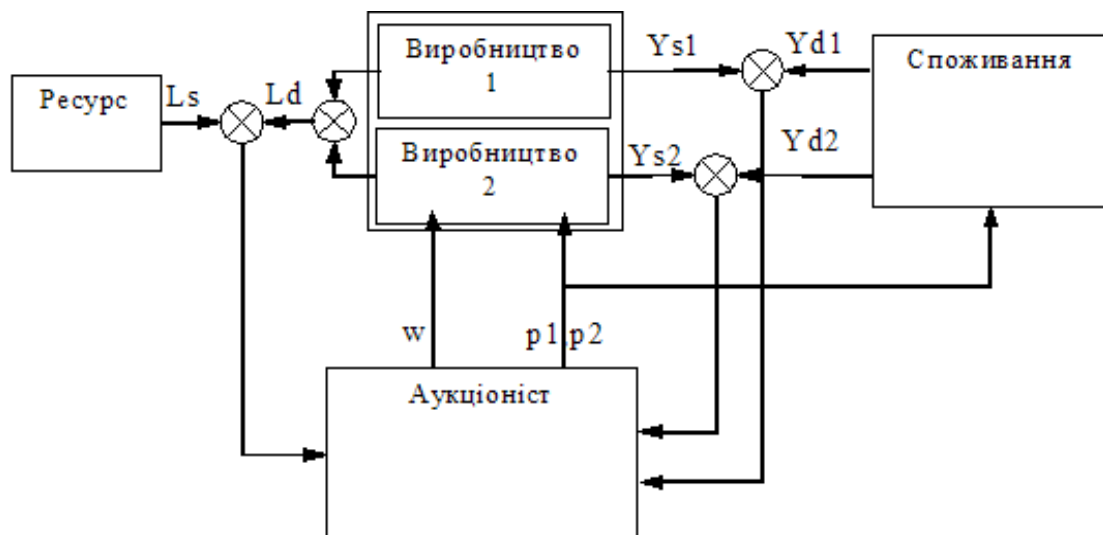


Рис. 1.36. Структурна схема ринкової системи "виробництво–споживання"

Ці чотири пункти повторюються на кожному кроці процесу і при певних умовах система буде приходити до стану рівноваги попиту і пропозиції. Зауважимо, що кожен крок процесу може завершуватись реальною купівлею-продажем, а може бути тільки кроком торгів. Схеми для обох видів процесів є майже ідентичними (рис. 1.36).

Розглянемо схему системи, подану на рис. 1.36 з точки зору теорії автоматичного управління. Опишемо входи, виходи і цілі усіх блоків.

Блок "споживання". Входи цього блоку – ціни товарів p_1 та p_2 , виходи – заявки (попит, demand) Y_{d1} , Y_{d2} на продукти. Входи і виходи пов'язує цільова функція споживача. Ціль споживача – максимізація цієї функції. Засіб досягнення цілі – вибір обсягів Y_{d1} , Y_{d2} .

Блок "виробництво". Входи цього блоку – ціни товарів p_1 та p_2 , і ціна ресурсу w , виходи – заявка на ресурс L_d і пропозиції Y_{s1} , Y_{s2} продукції. Виробництва розглядаємо як незалежні. Вхід і виходи кожного виробництва пов'язує цільова функція виробника – прибуток = різниця між доходом від продажу продукції і витратами ресурсу. Ціль виробника – максимізація прибутку. Засіб досягнення цілі – вибір обсягів виробництва Y_{s1} , Y_{s2} .

Блок "ресурси". Вихід цього блока – обсяг ресурсу Y_s . В нашому випадку це зовнішній вхід всієї системи. Наприклад, це вільні ресурси робочої сили, сировини. В макроекономічних моделях виробники одночасно є і споживачами, і цей блок стає внутрішнім для системи.

Блок "аукціоніст". Входи цього блоку – пропозиція L_s і сумарна потреба в ресурсах L_d , пропозиції Y_{s1} , Y_{s2} та потреби Y_{d1} , Y_{d2} в продуктах, виходи – ціни на ресурс w і продукти p_1 , p_2 . Входи і виходи пов'язують певні алгоритми зміни цін у функції дефіцитів. Ціль "аукціоніста" – максимізація сумарного виробництва при заданому обсязі ресурсів. Засіб досягнення цілі – вибір цін.

Зауважимо, що робоча ціль аукціоніста – зведення до нуля усіх дефіцитів і надлишків – і по ресурсах і по товарах. Максимізація сумарного виробництва в системі не є явною ціллю "аукціоніста", але досягається за рахунок "розумної" структури системи. Для цієї системи стан рівноваги є одночасно оптимальним і для системи в цілому і для усіх учасників ринку але "в цінах стану рівноваги" [58, 102, 116]. Ціни ж рівноваги можуть бути, в силу ситуації на ринку, збитковими.

Блок "аукціоніст" є центральним – саме він пов'язує усі інші блоки. Формально це не керівник, а тільки "секретар ринку". В деяких випадках це може бути комп'ютерна програма – "робот". Досить багато ринків є повністю децентралізованими, ціни і темпи продаж там встановлюються за рахунок "перетікання" потоку споживачів між виробниками і продуктами.

Отримання робочих залежностей для програми моделювання.
Робимо програму оптимізації та моделювання.

Задаємо таку виробничу функцію для кожного продукту

$$Y_{Si,t} = F_i(L_{di,t}) = c_i \cdot (L_{di,t})^{a_i} \quad (1.49)$$

і таку функцію корисності

$$U = b_1 \cdot \ln(Y_{d1,t}) + b_2 \cdot \ln(Y_{d2,t}), \quad (1.50)$$

де c_i , a_i – параметри виробничої функції; b_1 , b_2 – параметри функції корисності. Конкретизуємо робочі залежності відповідно пунктам 1-4.

Для знаходження необхідної умови максимізації прибутку беремо похідну від (1.48) і прирівнюємо її до нуля

$$\frac{d}{dL_{di,t}} (p_{i,t} \cdot F_i(L_{di,t}) - w_t \cdot L_{di,t}) = p_{i,t} \cdot \frac{d}{dL_{di,t}} F_i(L_{di,t}) - w_t = 0,$$

підставляємо у цей вираз (1.49) і отримуємо

$$p_{i,t} \cdot \frac{d}{dL_{di,t}} (c_i \cdot (L_{di,t})^{a_i}) - w_t = p_{i,t} \cdot c_i a_i \cdot (L_{di,t})^{a_i-1} - w_t = 0,$$

звідки маємо оптимальний розмір потрібних ресурсів

$$L_{di,t} = \left(\frac{c_i \cdot a_i \cdot p_{i,t}}{w_t} \right)^{\frac{1}{1-a_i}}. \quad (1.51)$$

Поведінка споживача визначається з формули

$$Y_{di,t} = \max \left[\beta \cdot \left(\frac{d}{dY_{di,t-1}} U - p_{i,t} \right) + Y_{di,t-1}, 0 \right], \quad i = 1..2.$$

Підставляємо (1.50) і отримуємо

$$Y_{di,t} = \max \left[\beta \cdot \left(\frac{b_i}{Y_{di,t-1}} - p_{i,t} \right) + Y_{di,t-1}, 0 \right], \quad (1.52)$$

де β – параметр, що задає інтенсивність корекції заявки користувача. Словесно це передається так: заявка поточна дорівнює попередній плюс дещо пропорційне прирощенню "прибутку" (цей "прибуток" може бути і від'ємним).

Процеси регулювання цін описуються такими рівняннями

$$\left. \begin{aligned} p_{i,t+1} &= \max [\alpha \cdot (Y_{di,t} - Y_{Si,t}) + p_{i,t}, 0]; \\ w_{t+1} &= \max [\gamma \cdot (L_{d1,t} + L_{d2,t} - L_s) + w_t, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Характерний індикатор стану ринку – загальний обсяг надлишкового попиту розраховується з формули

$$ED_t = w_t \cdot (L_{d1,t} + L_{d2,t} - L_s) + p_{1,t} \cdot (Y_{d1,t} - Y_{s1,t}) + p_{2,t} \cdot (Y_{d2,t} - Y_{s2,t}).$$

Згідно з законом Вальраса "сума дефіцитів на ринку в поточних ці-

нах дорівнює нулю" (теорема 2). Наслідком цього закону певні продукти будуть у надлишку, а певні – в дефіциті.

Зауваження. Алгоритм обміну і відповідна програма має дві інтерпретації – це одночасно: а) модель поведінки учасників аукціону і б) "градієнтний метод пошуку рівноваги Ерроу-Гурвіця". І в програмі і в реальному аукціоні треба знаходити компроміс між стійкістю процесу і швидкістю збіжності ("сходимости"). Це робиться підбором коефіцієнтів α, β, γ .

Доведено, що у випадку випуклих виробничих функцій та функцій корисності процес встановлення рівноваги має такі властивості:

- процес має стан рівноваги, що відповідає оптимальному розподілу ресурсів;
- з довільних початкових умов процес сходиться до стану рівноваги;
- в стані рівноваги сумарна продукція виробництв (в цінах рівноваги) є максимальною.

Аналіз оптимізаційних задач. При бажанні цей розділ можна пропустити і перейти до розділу "Отримання робочих залежностей", але, завжди, якщо тільки є можливість візуалізації даних і функцій, – слід подивитись на них. При цьому ви одразу побачите найдурніші помилки, особливості своєї задачі. Ви зробите багато відкриттів і "закриттів".

Побудуємо графіки виробничих функцій та прибутків виробництва. Записуємо відповідні функції в тому ж вигляді, що й у програмі. Задаємо вхідні дані: виробнича функція $F(L, c, a) := c \cdot (L)^a$ її параметри $aa := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.3 \end{pmatrix}$; ціни продуктів $p := \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$; ціна ресурсу $w := 3$. Задаємо індексовані змінні $tt := 1..26$; $i := 1..2$; $Lc_{i,tt} := 4 \cdot (tt - 1)$. Записуємо нарешті вирази для обсягу виробництва $Yc_{i,tt} := F(Lc_{i,tt}, c_i, aa_i)$ і прибутків $Prb_{i,tt} := p_i \cdot Yc_{i,tt} - w \cdot Lc_{i,tt}$. Знайдемо точки максимального прибутку числовим методом – тоді ми можемо підставляти довільні виробничі функції.

Записуємо функцію $D(L) := p_1 \cdot (c_1 \cdot L^{aa_1}) - w \cdot L$, екстремум якої шукаємо. Записуємо початкові значення шуканих змінних: $L := 33$. Після слова *Given* записуємо систему обмежень (рівностей, нерівностей) *Given* $L > 0$ і отримуємо (не завжди) розв'язок (аргумент екстремуму): $Lo1 := Maximize(D, L)$. Виводимо результати $Lo1 = 36$. Знаходимо значення екстремуму

$$Pro1 := p_1 \cdot F(Lo1, c_1, aa_1) - w \cdot (Lo1). \cdot Pro1 = 108 .$$

Записуємо функцію $D(Y) := Uu(Y, bb) - V(Y, pp)$, екстремум якої шукаємо. Записуємо початкові значення шуканих змінних: $Y := \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Після слова Given записуємо систему обмежень $Given Y > 0$ і отримуємо (звичайно) розв'язок (аргумент екстремуму): $Yopa := Maximize(D, Y)$.

Виводимо результати $Yopa = \begin{pmatrix} 15 \\ 12.5 \end{pmatrix}$. Знаходимо значення екстремуму

$$CFop := D(Yopa). \cdot CFop = 665 .$$

Формуємо дані для побудови тривимірного графіка. За допомогою параметричного графіка (scatter plot) подаємо координати точки максимуму. Цільову функцію CF бажано подати в дискретному виді – як матрицю.

$$Xm := \begin{pmatrix} 0 \\ Yopa_1 \\ Yopa_1 \\ Yopa_1 \\ Yopa_1 \end{pmatrix} \quad Ym := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Yopa_2 \\ Yopa_2 \end{pmatrix} \quad Zm := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ CFop \end{pmatrix} \quad Nh := 30 \quad i := 1..Nh \quad j := 1..Nh$$

$$CF_{i,j} := \max \left[D \left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \right), 0 \right]$$

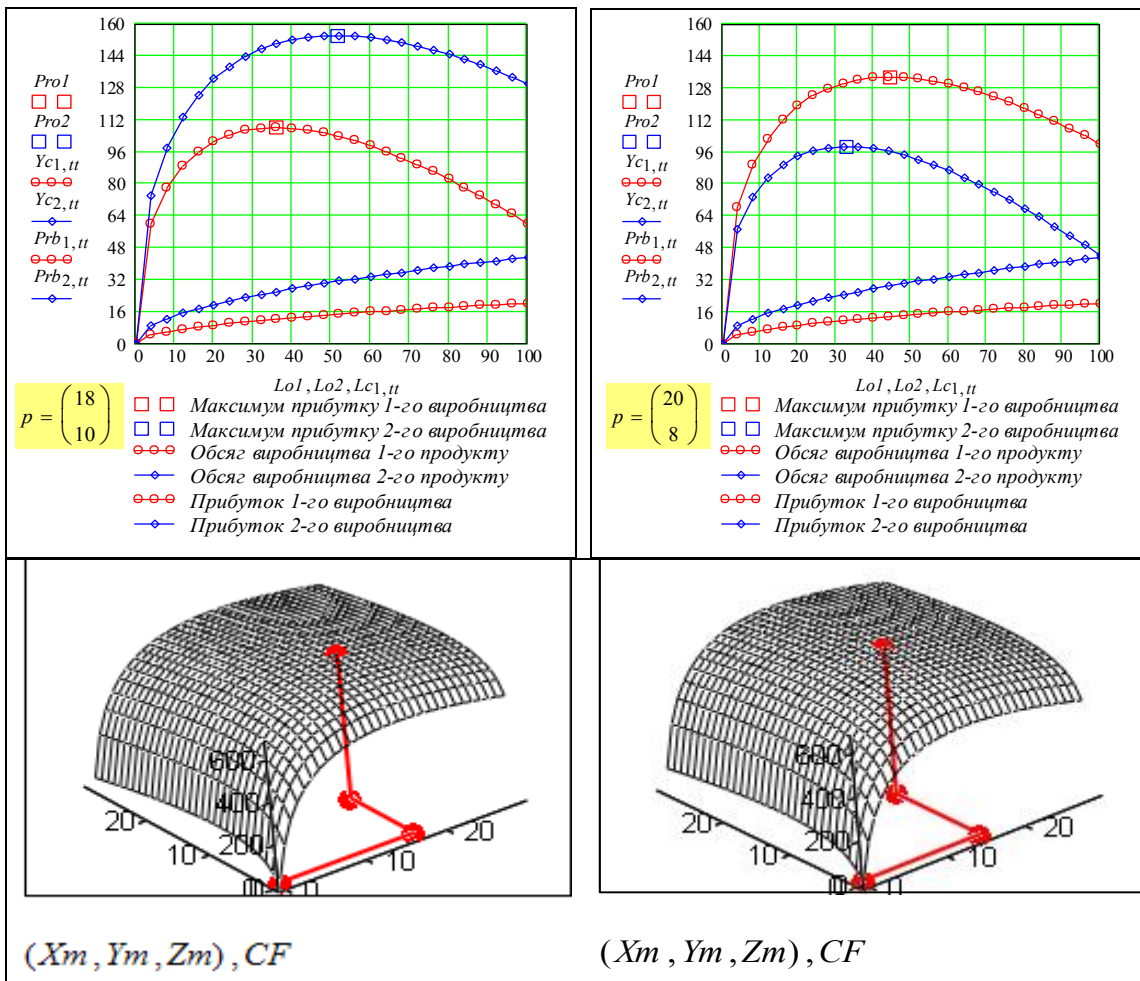


Рис. 1.37. Оптимізація функції корисності споживача

Бачимо, екстремум один (для випуклих функцій корисності) і він досить розмитий. Споживач орієнтується тільки на прирощення корисності (1.52), при такій формі цільової функції у нього є шанс дістатися до "вершини". Збираємо (1.49)–(1.53) в програму, текст якої подано на рис. 1.38.

```

VB := "Ориджн = 1"
p<sup>1</sup> ← p1
w1 ← ww1
Yd<sup>1</sup> ← Yd1
for t ∈ 1..Tmod
  for i ∈ 1..Ntov
    Ldi,t ←  $\left( \frac{c_i \cdot a_i \cdot p_{i,t}}{w_t} \right)^{\frac{1}{1-a_1}}$ 
    Ysi,t ← ci · (Ldi,t)ai
    Ydi,t+1 ← max  $\left[ \beta \cdot \left( \frac{b_i}{Yd_{i,t}} - p_{i,t} \right) + Yd_{i,t}, 0.01 \right]$ 
    pi,t+1 ← max  $\left[ \alpha \cdot (Yd_{i,t} - Ys_{i,t}) + p_{i,t}, 0 \right]$ 
    Prbi,t ← pi,t  $\left[ c_i \cdot (Ld_{i,t})^{a_i} \right] - w_t \cdot Ld_{i,t}$ 
    EDt ← wt · (Ld1,t + Ld2,t - Ls) + p1,t · (Yd1,t - Ys1,t) + p2,t · (Yd2,t - Ys2,t)
    Ut ← b1 · ln(Yd1,t) + b2 · ln(Yd2,t)
    wt+1 ← max  $\left[ \gamma \cdot (Ld_{1,t} + Ld_{2,t} - Ls) + w_t, 0 \right]$ 
    Vyx<t> ← stack (Ut, EDt, wt, p<t>, Ld<t>, Ys<t>, Yd<t>, Prb<t>)
  end for
end for
Vyx

```

Рис. 1.38. Текст програми моделювання дворівневого ринку

На рис. 1.39 подано блок введення і графіки перехідних процесів. При вибраних значеннях параметрів α , β , γ маємо стійкі процеси встановлення цін, баланси попиту і пропозиції, розподіл ресурсів між виробництвами. Фактично ми маємо *нелінійну імпульсну екстремальну двоконтурну* систему автоматичного регулювання цін сировини і продуктів із умови балансу попиту і пропозиції по всіх продуктах в системі: сировині, продукту 1, продукту 2 (рис. 1.39). Вибір параметрів системи регулювання – це окрема задача синтезу регулятора.

Робимо ригуальне присвоєння: $Bu := VB$. Задаємо вхідні дані. $ORIGIN := 1$; ліміт ресурсу: $Ls \equiv 100$; параметри виробничих ф-цій $a \equiv \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $c \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 4.3 \end{pmatrix}$; параметри ф-ції корисності $b \equiv \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$; стартовий попит $Yd1 \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ параметри регулювання: ціни ресурсу $\gamma \equiv 0.012$, цін продукції $\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.27 \end{pmatrix}$; температу споживача $\beta \equiv \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$; стартові ціни ресурсу $ww1 \equiv 3$, продуктів $p1 \equiv \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix}$. $Ntov \equiv 2$, число кроків моделювання $Tmod \equiv 65$, $t := 1..Tmod$. (VB - ім'я програми (Виробництво-Ринок), а не Visual Basic)

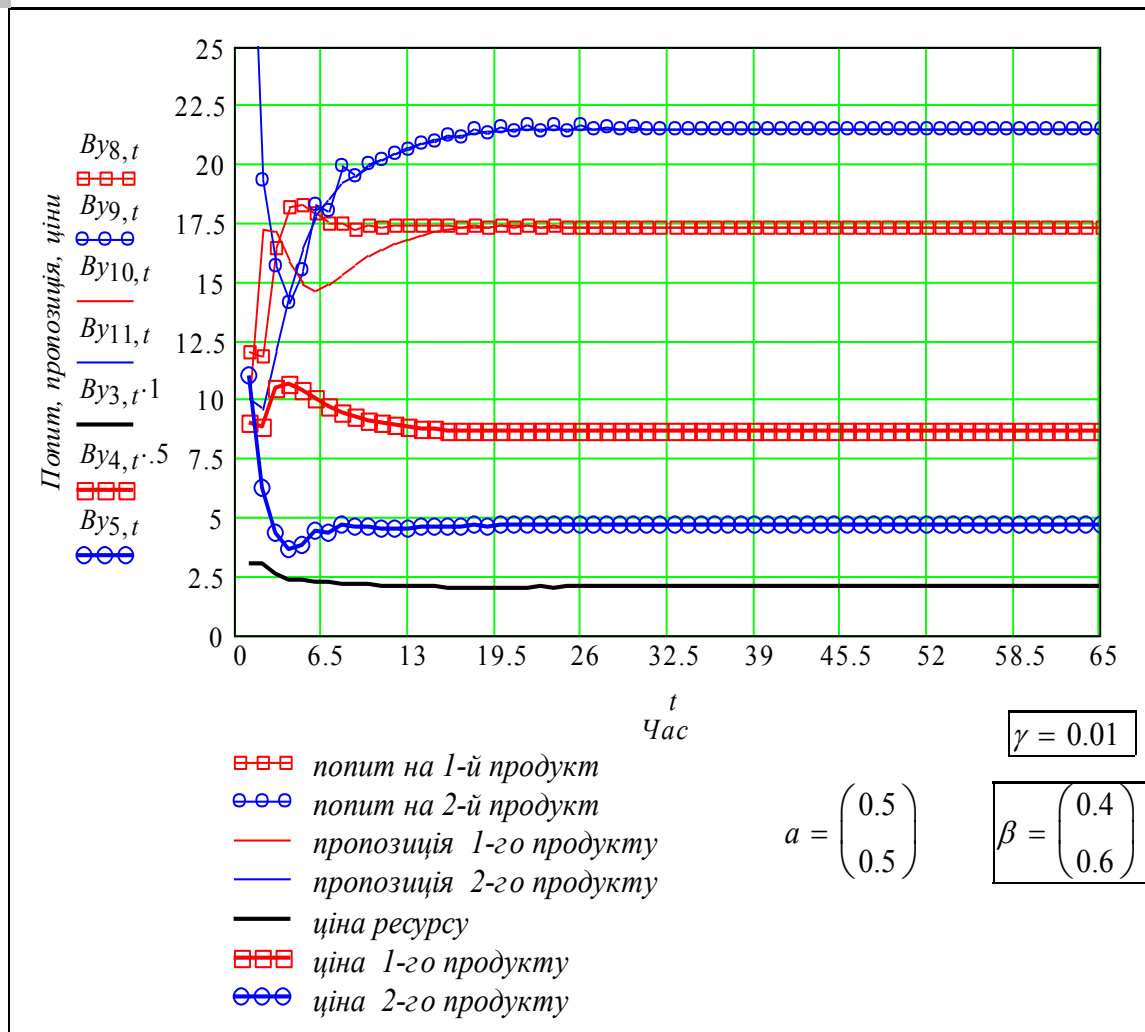


Рис. 1.39. Інтерфейс програми моделювання. Приклад стійких процесів

"Ідилія", що подана на рис. 1.39 суттєво змінюється при незначній зміні параметрів регулятора (рис. 1.40). В системі виникає складний режим з ділянками відносної стабільності і розділеними нелінійними коливаннями великої амплітуди.

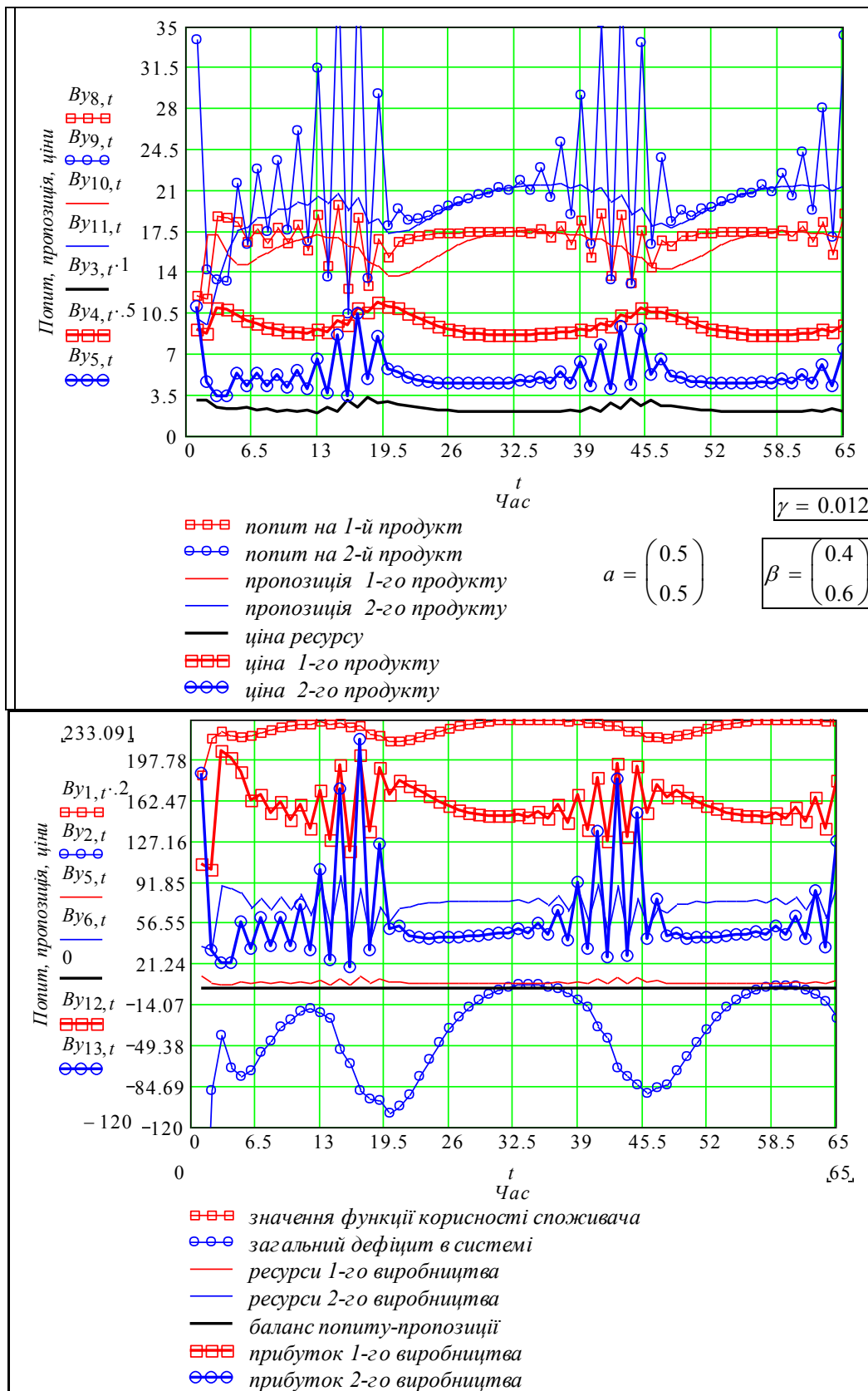


Рис. 1.40. Приклад періодично нестійких процесів

Знову модель зроблена для "розгляду" (нагадуємо, тут цей термін слід розуміти буквально) стає генератором нових результатів, задач і

понять, про які ми не мали поняття – нових знань. Зокрема бачимо певну подібність форми коливань загального дефіциту в системі до "довгих хвиль Кондратьєва", особливості яких – довгий період стабільності певної змінної і короткий період її суттєвого падіння. Це може бути і випадковий збіг, а може бути результатом дій подібних механізмів.

1.6. Моделі систем з відкритим управлінням

Поки що кращим методом оптимізації розподілу ресурсів і обміну ресурсів в умовах складних комплексів невизначеностей була біржова гра і спекуляція. Одночасно поки кращий метод розв'язання оптимізаційних задач з недовизначеними, нечіткими параметрами це *певним чином* структурований ринковий механізм: пропозиція–попит–дефіцит–ціни.

Подамо приклад реалізації пункту "певним чином". Нобелівська премія з економіки 1997 року дана за роботу, що обґрунтувала нову систему аукціонів з приватизації. Ця система "перший сплачує ціну другого" значно підвищила ефект від приватизації в Англії. Суть системи проста: той, хто дав вищу (першу за рангом) ціну, платить ціну другого за рангом учасника аукціону. Система прозора, чітка, ефективна, тому непридатна ні для науки, ні для практики в "молодих демократіях". Математична модель такої системи є досить складною для аналізу.

Подамо також приклад реалізації пункту "поки що". Нобелівська премія з економіки 2001 року дана за "Аналіз ринків з асиметричною інформацією". Суть проблеми в тому, що сьогодні біржі, як інструмент оптимізації економіки, втрачають довіру через банальний обман на базі рекламного бомбування і приховування інформації сторонами обміну. Це і є "інформаційною асиметрією".

Відкрите управління – неадекватний переклад з англійської, дослівно це "чесна гра". Відкрите управління в теоретичному аспекті – ігровий метод розв'язання задач нелінійного програмування високої розмірності. В практичному аспекті відкрите управління – механізм проведення аукціонів, торгів, розподілу ресурсів між підрозділами, продуктами або напрямками діяльності виробничої організації.

Розглянемо застосування такого методу відкритого управління для задачі оптимізації розподілу ресурсів при частково відомих виробничих функціях. Головним результатом цього підходу є висновок, щодо вибору оптимального методу управління системою з елементів, що працюють паралельно: "Системою все одно як управляти" – оптимізувати цільові функції "центра", чи оптимізувати цільові функції елементів. Необхідно лише, щоб механізму розподілу ресурсу відповідали певні умови – МРУ (мінімально розумного управління) [116]. Далі розглядається

задача, що є прикладом такого управління. Особливість системи, що є об'єктом дослідження є те, що в ній є глобальна ціль і відповідний центральний елемент, але елементи системи (комп'ютери мережі, підприємства, індивіди, виробничі колективи) оптимізують тільки свої власні цілі, але при цьому і система в цілому досягає оптимуму – максимального сумарного виробництва. Для цього потрібно лише, щоб механізми розподілу ресурсів в системі відповідали певним вимогам.

Постановка задачі. Розглядається система з N виробничих елементів (рис. 1.41), що переробляють деякий ресурс r_i у продукцію y_i згідно з "виробничими функціями": $y_i = F_i(r_i)$; $i = 1 \dots N$.

Цільові функції елементів: $K_i = F_i(r_i) - \lambda \cdot r_i$, де r_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу; λ – ціна ресурсу. Таким чином K_i можна інтерпретувати як прибуток i -го елемента. Ціль елемента – максимізація свого критерію K_i .

ЦО (центральний орган) виконує розподіл обмеженого ресурсу R між елементами так, щоб $R = \sum r_i$, та назначає ціну ресурсу λ . Цільова функція ЦО: $K_0 = \sum F_i(r_i)$. Ціль ЦО (і системи в цілому) – максимізація сумарного виробництва K_0 .

Головна складність, яка робить задачу нетривіальною, в тому, що виробничі функції $F_i(r_i)$ невідомі для ЦО, а можливо і для самих елементів. Припускаємо, що клас цих функцій відомий і невідомими є тільки параметри цих функцій.

Використаємо метаігровий метод оптимізації розподілу [116]. Суть цього методу в тому, що періодично – щодня, щомісяця, щорічно повторюється одна й та ж ігрова процедура розподілу ресурсу, в якій кожен елемент намагається збільшити свій "виграш". При певних умовах ця процедура сходиться до бажаного оптимуму. Процедура розподілу може бути реальною, або комп'ютерною імітацією.

Алгоритм методу (словесна модель):

– *Елементи* на кожному періоді подають "заявки" x_j . Стратегія елемента у цій "грі", що повторюється (метагра = гра з серії ігор), така: якщо значення K зросло на цьому кроці – продовжити зміну заявки x_i в попередньому напрямі, якщо ні, то змінити напрям зміни заявки. Така стратегія називається індикаторною поведінкою. Для повного визначення процедури треба ще задати, на скільки змінювати заявку кожен раз. В реальних процесах це вирішується за допомогою "інтуїції", "темпераменту", натурального і штучного інтелекту.

– *ЦО* використовує метод відкритого управління, тобто приймає x_j за a_j , знаходить розподіл ресурсу, що максимізує цільові функції елементів K_i при умові повного розподілу ресурсу R та повідомляє еле-

ментам, за якими правилами він ділить ресурс – тому і назва методу: відкрите управління.

Якщо всі a_i відомі, неважко обчислити x_i , за яких досягається максимум глобального критерію K_0 та критеріїв усіх K_i на кожному кроці розподілу. Таким чином оптимальний розподіл не може бути визначеним за один крок. На рис. 1.41 подана схема системи.

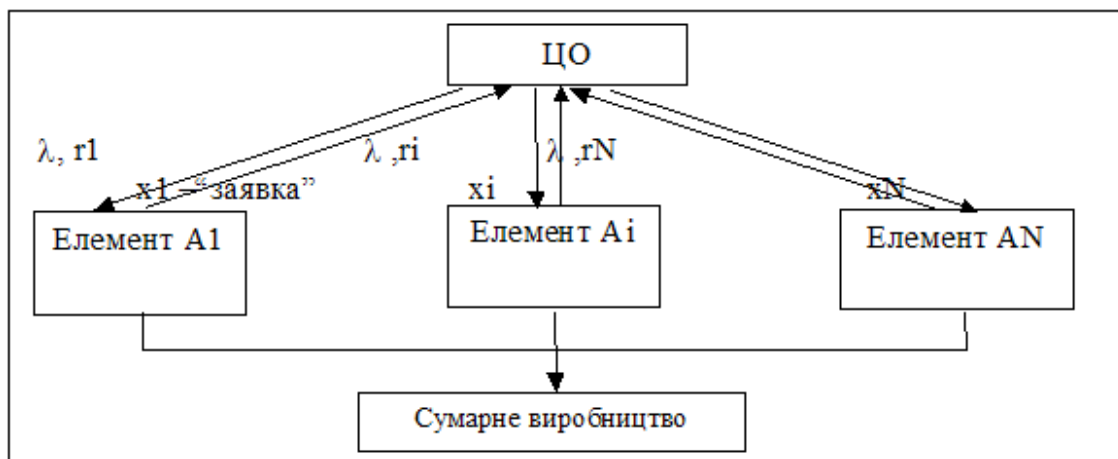


Рис. 1.41. Схема розподілу ресурсу при відкритому управлінні

Подібні процедури знаходження екстремуму під назвами "метаігровий синтез", "автоматна оптимізація" широко використовуються в практичних і чисто математичних задачах. Суть такого підходу: *замість аналітичного знаходження екстремуму будуємо систему зі зворотним зв'язком, усталений стан якої є бажаним екстремумом.*

Введення зворотного зв'язку за змінними стану кожного елемента обумовлює необхідність аналізу альтернатив закону управління, вибору структури та оптимізації параметрів закону управління.

В узагальненому вигляді динаміка системи з відкритим управлінням описується таким матрично-векторним різницеvim рівнянням:

$$x^{<k+1>} = x^{<k>} + \Gamma_k \cdot (F(x^{<k>}) - x^k),$$

де $F(x^{<k>})$ – оператор міжелементних зв'язків; $\Gamma_k = \text{diag}(\gamma_{1,k}, \dots, \gamma_{n,k})$ – матриця коефіцієнтів підсилення зворотних зв'язків, що вибираються з діапазону $\gamma_{l,k} \in [0,1]$.

Ці коефіцієнти вибираються з умови забезпечення швидких і одночасно стійких перехідних процесів до стану оптимальності і рівноваги. Звичайно ці коефіцієнти зменшуються з часом.

На рис. 1.42 наведено текст програми з коментарями. Закони локального управління, що визначають заявки елементів, в цій програмі взяті згідно з першоджерелом [116].

<pre> RS := xx ← xo D1 ← (0 0 0 0 0) D1 ← (D1)^T Ny ← rows(xx) ooo ← $\frac{Ry}{Ny}$ r ← (ooo ooo ooo ooo ooo) r ← r^T for k ∈ 1..Kk sumzaj ← 0 smprd ← 0 for i ∈ 1..Ny sumzaj ← sumzaj + (xx_i)² smprd ← smprd + a_i·(r_i)^{0.5} λ_k ← 0.5·$\sqrt{\left(\frac{\text{sumzaj}}{Ry}\right)}$ for i ∈ 1..Ny r_i ← $Ry \cdot \frac{(xx_i)^2}{\text{sumzaj}}$ перенос ← "перенос" D2_i ← a_i·(r_i)^{0.5} - λ_k·r_i ΔD_i ← D2_i - D1_i dd_i ← $\frac{\Delta D_i + .2 \cdot D1_i \cdot (D1_i < 0)}{ D2_i + D1_i } \cdot \Delta_i$ kkk ← stack(r, xx, D1) D1_i ← D2_i xx_i ← xx_i + dd_i + (md(v_i) - .5·v_i) S^{<k>} ← kkk S </pre>	<ul style="list-style-type: none"> – вводимо початковий розподіл (xo – задається далі внизу); – вводимо значення початкових доходів елементів; – визначаємо кількість елементів; – вводимо початковий розподіл ресурсу (усім по три кружечки?) – цикл по кроках моделювання; – обнуління суми заявок і сумарного випуску продукції; – цикл по усіх елементах; – обчислення суми заявок; – обчислення сумарного випуску; – обчислення ціни за умови повного розподілу ресурсу; – цикл по усіх елементах; – обчислення кількості ресурсу для кожного елемента з умови оптимізації його уявної цільової функції; – обчислення поточного доходу; – обчислення приросту доходу; – обчислення приросту заявки елемента; – обчислення заявки елемента; – поточне стає попереднім; – формуємо видачу програми - вектор S з поточних значень ресурсів – r, заявок – xx, доходів – D1 по кожному учаснику. S – те, що повертається
--	--

Рис. 1.42. Програма моделювання системи розподілу ресурсу

Аналітичне розв'язання задачі $N := \text{rows}(a)$; $j := 1..N$; $i := 1..N$;

$$rop_i := \frac{(a_i)^2}{\sum (a_j)^2} \cdot Ry; \quad paf_i := \frac{rop_i - RS_{i,Kk}}{rop_i}; \quad f(a, r) := a \cdot \sqrt{r};$$

$$r := 0,025..10; Y_{m_i} := f(a_i, RS_i, Kk); Y_{t_i} := f(a_i, rop_i); Y_{o_i} := f(a_i, xo_i).$$

Розробляємо *стенд* для дослідження процесів розподілу ресурсу – в межах екранної сторінки розташовуємо введення вхідних даних, графіки процесу розподілу ресурсу (рис. 1.43).

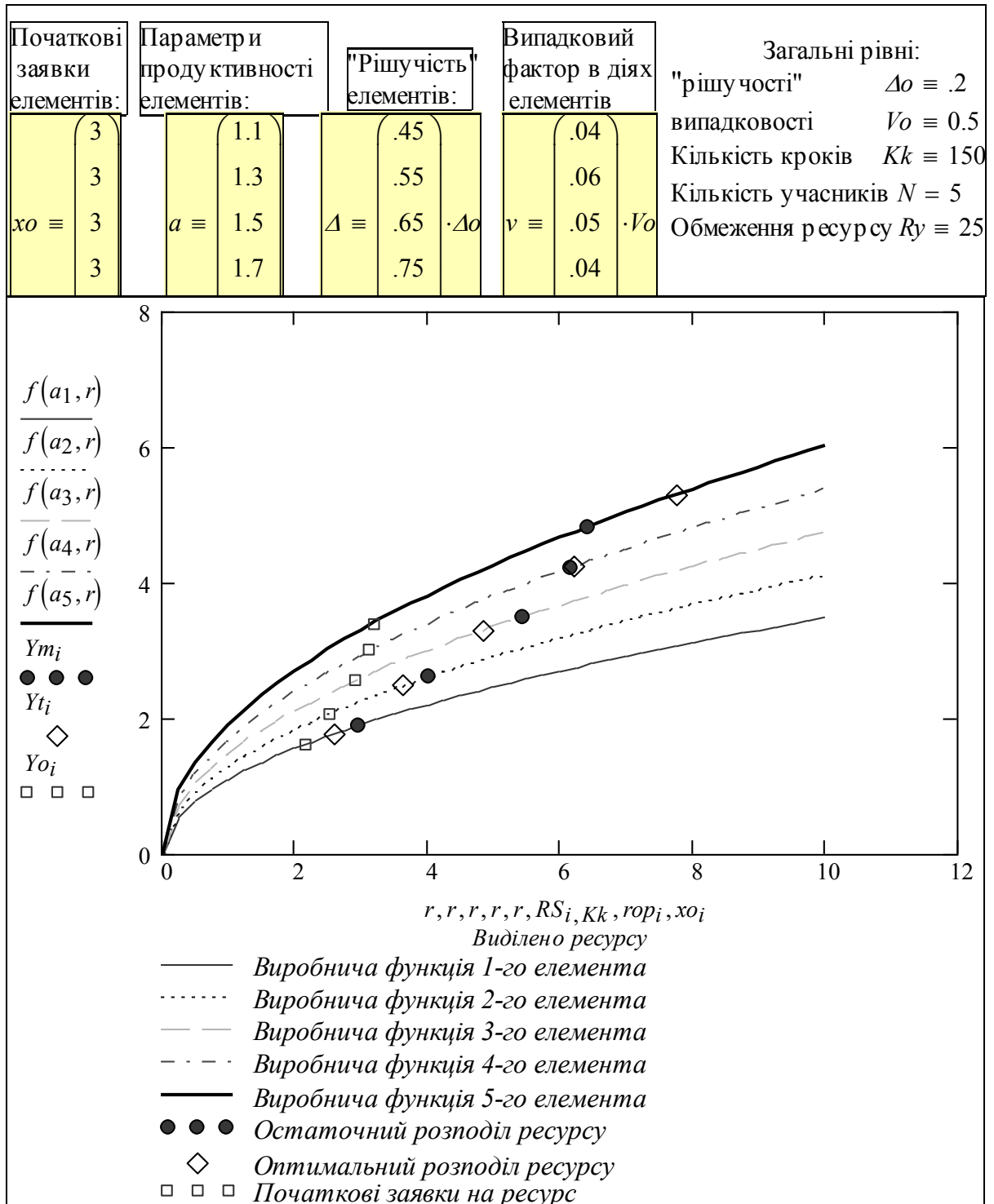


Рис. 1.43. Виробничі функції елементів, стани рівноваги і оптимуму

На рис. 1.44–1.47 подано перехідні процеси для змінних стану системи.

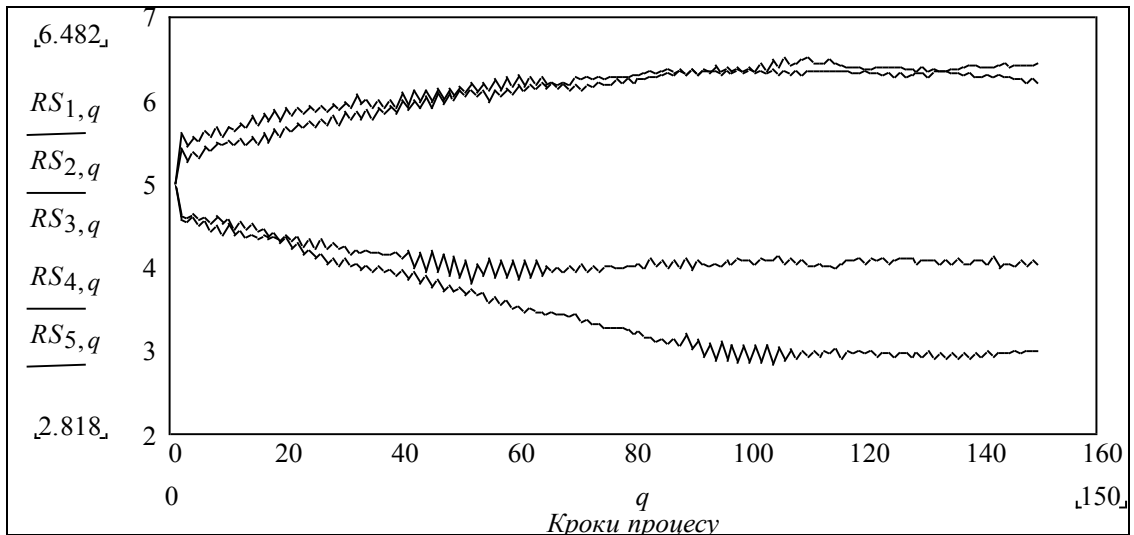


Рис. 1.44. Темпи виробництва елементів

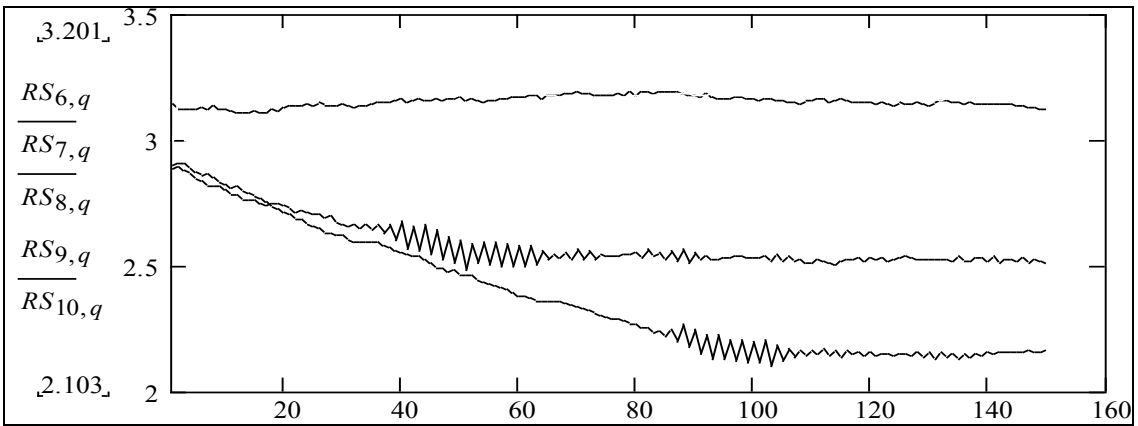


Рис. 1.45. "Заявки" елементів системи

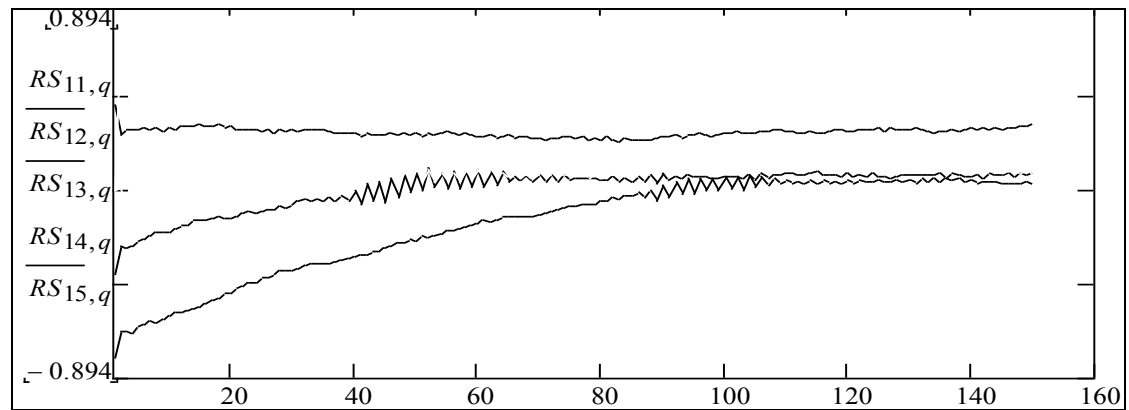


Рис. 1.46. Доходи елементів

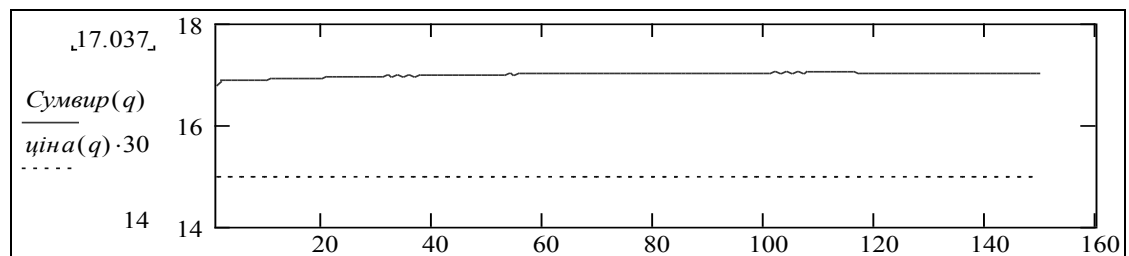


Рис. 1.47. Сумарне виробництво і ціна

При пошукових дослідженнях на робочих моделях важливе значення мають форми подання результатів моделювання – комплексні і тривимірні графіки, годографи характерних точок – положення максимумів та ін. На рис. 1.43 на фоні виробничих функцій елементів подано три стани:

- "ідеальний" – точки, що відповідають оптимальному стану за глобальним критерієм;
- усталений – точки усталеного стану;
- початковий – точки початкового стану.

На рис. 1.44–1.47 подано процеси: темпів виробництва, зміни заявок на ресурс, доходів (значень критеріїв) елементів, ціни ресурсів та значення глобального критерію. Можна бачити виникнення специфічних коливань на певних ділянках перехідних процесів. Ці коливання обумовлені використанням законом управління. Неважко усунути ці режими застосуванням законів управління з усередненням і фільтрацією вхідних даних. Відзначимо таку особливість процесів: на початку процесу ресурс поділений рівно між елементами, елементи з малою продуктивністю зменшують заявки та темпи виробництва, елементи з високою продуктивністю збільшують заявки, а доходи усіх елементів не зменшуються, або зростають. Розподілення ресурсу встановлюється близьким до оптимального.

Ціна і сумарне виробництво обчислені з виразу:

$$\text{ціна}(q) := 0.5 \sqrt{\left[\frac{\sum_j (RS_{j+5, q})^2}{Ry} \right]} ; \text{Сумвир}(q) := \sum_j a_j \cdot \sqrt{RS_{j, q}} ; Ry = 25 .$$

Бачимо (див. рис. 1.47) високу стабільність системи в цілому. Тобто відкрите управління – надійний і ефективний метод управління великими розподіленими системами в умовах різноманітних невизначеностей.

Однак всі позитивні властивості методу відкритого управління перетворюються на руйні якщо:

- виробничі функції елементів – невивуклі;
- елементи можуть "навчатись" пропорційно досягнутому рівню виробництва.

Робоча модель зроблена для "розгляду" методу відкритого управління була модифікована для роботи з невивуклими виробничими функціями і узагальненими законами управління. За результатами досліджень на цих моделях підтверджено обмежену придатність класичної моделі відкритого управління для систем з суттєвими ефектами навчання.

Висновки

Цей розділ не є пасивним коментуванням відомих математичних моделей виробничих систем, а їх розглядом на базі створення виконуваних в середовищі математичного пакета – *робочих моделей* і проведення обчислювальних експериментів. Відображення класичних моделей в робочу модель («жива математика») дозволяє побачити більше ніж могли бачити творці моделей створених в докомп'ютерну епоху. На конструктивному рівні розглянута низка конструктивних моделей оптимізації процесів розвитку виробничих систем:

- задача моделювання процесів розподілу ресурсу в багатокрокових процесах;

- задача Марковіца–Беллмана моделювання і оптимізації розвитку виробничої системи;

- задача балансу попиту і пропозиції;

- задачі моделювання процесів обміну ресурсами, а саме:

- моделі натурального обміну,

- моделі ринкового обміну,

- моделі ринків з довільними функціями корисності елементів,

- дворівнева модель обміну;

- моделі децентралізованих систем з відкритим управлінням.

Результат розробки комплексу робочих моделей – рімейків класичних моделей – напрацювання технологій конструювання нових моделей для нових задач.

Аналіз моделей функціонування і розвитку розподілених виробничих систем показав, що, не дивлячись на велику кількість робіт і його зростаючу актуальність в цьому напрямку, не існує цілісного підходу.

Головні причини цього: швидкі темпи появи нових форм і структур виробничих систем, інтеграція в узагальнений виробничий процес усіх фаз життєвого циклу продуктів – від проектування до споживання та утилізації. Прогнозування розвитку і оптимальне управління функціонуванням і розвитком вимагає швидкого створення нових математичних моделей для нових структур і нових задач виробничих систем.

Тому є необхідність у розвитку *теорії і практики конструювання математичних моделей процесів інноваційного розвитку виробничих систем.*

2. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧОЇ СИСТЕМИ

В цьому розділі ставимо за мету створення теоретичних основ і комплексу робочих моделей, які охоплювали б усі актуальні для практики задачі оптимального розвитку багатопродуктових виробничих систем розподілу ресурсу в децентралізованих системах. Суть багатокрокових задач в тому, що оптимізується сумарний ефект системи за декілька кроків функціонування системи. Управління в таких задачах називається стратегічним, на відміну від тактичного управління в однокрокових задачах.

В цьому розділі розглядаємо такі напрямки узагальнення математичної моделі процесу оптимального розвитку:

- зняття обмежень на вигляд функцій розвитку (ФР), робота з не-випуклими і негладкими ФР;
- розробка ефективних обчислювальних методів для моделювання систем високої розмірності;
- розробка моделей для випадку використання зовнішніх ресурсів (кредитів);
- розробка наближень функції Гамільтона.

Суть останньої проблеми: спряжені функції, що входять до функції Гамільтона є результатом розв'язання системи диференціальних рівнянь. Останній етап процедури розв'язання – визначення сталих інтегрування через граничні умови є досить складним. Урахування властивостей функцій Гамільтона і оптимальних стратегій дозволяє використати обчислювально прості наближення.

2.1. Узагальнення задачі моделювання розвитку розподіленої системи

Розглянутий в розділі 1.3 метод розв'язання задачі оптимізації розвитку базується на заміні порядку інтегрування у виразі для критерію – інтегрального функціонала. Такий прийом можливий тільки у випадку лінійної моделі динаміки росту виробничої системи. Потрібен універсальний метод для випадку довільних нелінійних моделей динаміки. Детальний розгляд процесу одержання розв'язань, отриманих Беллманом, мав конкретну мету – проаналізувати структуру оптимального розв'язання. Зокрема у розв'язаннях присутній множник $(T - t)$ – це ключова складова наближеного розв'язання варіаційної задачі.

Узагальнимо задачу – будемо розглядати довільні залежності між темпом витрат ресурсу в розширення виробництва і прирощенням тем-

пу виробництва (див підрозділ 1.1 визначення понять). Можна знайти безліч прикладів нелінійних залежностей такого плану на будь-яких рівнях виробництва – від окремого виробництва до регіональної чи корпоративної системи виробництв. Для побудови загальних методів оптимізації і моделювання є принциповим те, що залежності такого виду теж відносяться до виробничих функцій. Різниця тільки в тому, що результатом витрат ресурсу є не темп випуску продукту, а зміна темпу виробництва продукту. В математичному плані виробничі функції і залежності прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу відносяться до одного класу математичних об'єктів. Однак на рівні конкретних прикладних задач це різні функції. Щоб відрізнити їх називаємо виробничі функції "другого порядку" функціями розвитку (ФР). Розмірність виробничих функцій (ВФ) – "(одиниці вимірювання продукту)/(одиниці вимірювання ресурсу)", розмірність функцій розвитку (ФР) – "(одиниці вимірювання продукції за одиницю часу)/(одиниці вимірювання ресурсу за одиницю часу)".

Виробничий елемент є технологічним перетворювачем ресурсу у продукт. Найпростішим способом зміни темпу виробництва є кількісна зміна в технологічному перетворювачі – збільшення кількості окремих агрегатів, збільшення об'єму чи поверхні реактора та ін. Можливі і якісні зміни технологічного перетворювача, що ведуть до прирощення темпу випуску продукції: підвищення температури і тиску, використання високих технологій.

Залежність прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу звичайно є результатом дії багатьох імовірнісних і детермінованих "механізмів". Однак, саме наявність багатьох причин і факторів певним чином уніфікує і згладжує ці залежності – вони сходяться до функцій S-класу [101]. Тому, ми будемо шукати метод розв'язання узагальненої задачі для довільних ФР, в тому числі і "негладких" – таких, що не мають неперервної першої похідної.

Сформулюємо узагальнену задачу. Маємо децентралізовану систему, де виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ (одиниці вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt} x(t)_i = \text{fin}(y(t)_i, i) = \text{fin}(x(t) \cdot u_i, i), \quad (2.1)$$

де $\text{fin}(y(t)_i, i)$ – функція розвитку для i -го виробництва, що належить до класу нестрого монотонно зростаючих функцій; $x(t) = \sum_{j=1}^N x(t)_j$ – сумарне виробництво в момент t ; $0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управління – частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення

виробничих потужностей по i -му продукту. Для управління виконується умова нормування:

$$\sum_{j=1}^N u(t)_j + unak(t) = 1, \quad (2.2)$$

де $unak(t)$ – частка ресурсів, що йде в накопичення.

Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку, що максимізує сумарний накопичений випуск за певний плановий період T

$$NJ = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N x(t)_j \right) \cdot unak(t) dt. \quad (2.3)$$

Типова інтерпретація планового періоду T – момент зміни технології і конструкції виробу i , відповідно, засобів виробництва. Розглянемо спочатку одновимірну задачу з одним виробництвом.

2.2. Наближене розв’язання узагальненої варіаційної задачі розподілу

Ми будемо шукати розв’язання для довільних функцій розвитку з позицій практика, якому потрібно на кожному кроці процесу приймати рішення про розподіл поточного ресурсу між накопиченням і розвитком виробництва так, щоб максимізувати прирощення критерію (2.3) на момент закінчення процесу T . На рис. 2.1 подано схему розподілу ресурсу на поточному кроці на фоні графіка зміни виробничих потужностей.

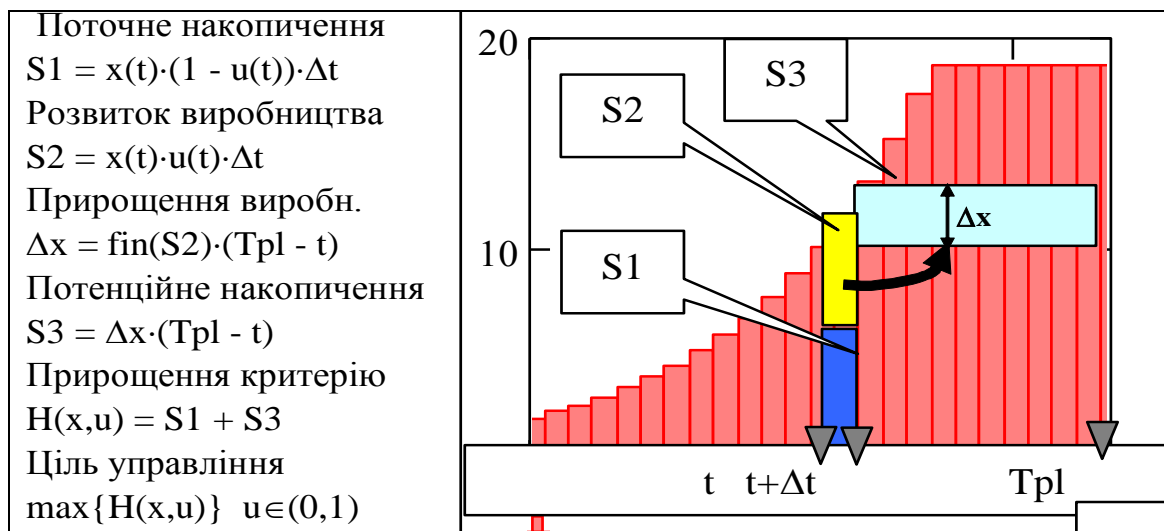


Рис. 2.1. Схема розподілу ресурсу на поточному кроці

На цій схемі $S1 = x(t) \cdot (1 - u(t))$ – це та частка поточного ресурсу, що йде в накопичення, $S2$ – те, що йде в інвестиції. Згідно з рівнянням

динаміки виробничих потужностей частка $S2 = x(t) \cdot u(t)$ створює прирощення $\Delta x = fin(x(t) \cdot u(t))$ виробничих потужностей.

Оцінімо прирощення продукції, що можна отримати до кінця процесу: $S3 = \Delta x \cdot (T - t) = fin(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t)$. Це додатковий ресурс, який можна на наступних кроках використати для накопичення і розвитку. Розподіл ресурсу повинен бути теж оптимальним. Якщо продовжити ці міркування ми прийдемо до методу динамічного програмування. Однак, параметри сучасних виробничих систем є суттєво невизначеними, метаморфозними (такими, що залежать від наших дій та ін.).

Точність моделі повинна відповідати точності даних, тому обмежимося досить грубою оцінкою майбутнього прирощення критерію. Далі ми отримаємо точний розв'язок задачі і порівняємо його з наближенням. Будемо вибирати управління $u(t)$ так, щоб отримати максимум функції $H(x,t) = S1+S3$, яка є оцінкою (індикатором) прирощення значення критерію

$$H(x,u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + fin(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t) \rightarrow \max(H(x,u))_{u \in (0..1)}. \quad (2.4)$$

Наше припущення про конвертованість ресурсів, з одного боку робить задачу більш реалістичною, з іншого боку – суттєво спрощує її. Дійсно, кожна функція інвестицій тепер явно залежить тільки від одного управління. Спрощується також підінтегральна функція критерію оптимальності. Слід пам'ятати, що в реальних системах виділений ресурс сам по собі ще не гарантує певного прирощення виробничої потужності. Для реального розширення виробництва часто бувають необхідні десятки ресурсів і робіт, і все це повинно бути оптимізоване і скоординоване. Однак, відносно стратегічної задачі розвитку, – це задачі субоптимізації.

2.3. Точне розв'язання узагальненої задачі розподілу

На підставі тільки логічних міркувань ми сконструювали деяку функцію-індикатор $Hi(x,u)$, яка є оцінкою залежності прирощення критерію $J1$ від поточного управління $u(t)$ та поточного стану $x(t)$.

Отримаємо точний розв'язок. В нашій задачі управління має місце обмеження, тому вибираємо метод принципу максимуму.

Задано:

$$J1 \int_0^{T_p} x(t) \cdot (1 - u(t)) dt \text{ – критерій оптимальності;}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = fin(x(t) \cdot u(t)) \text{ – диференціальне рівняння динаміки темпу виробництва;}$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \text{ – обмеження на управління.}$$

Подаємо задачу в канонічному вигляді – додаємо ще одну змінну стану – критерій і записуємо відповідне дифрівняння:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) = fx; \quad \frac{d}{dt}J1(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) = fJ. \quad (2.5)$$

Запишемо вираз для функції Гамільтона [36, 68]

$$H(x, u) = \sum_{i=0}^N \Psi_i \cdot f_i = \Psi J \cdot fJ + \Psi x \cdot fx, \quad (2.6)$$

де fJ , fx – праві частини рівнянь (2.5). Підставимо їх у (2.6):

$$H(x, u) = \Psi J \cdot [x(t) \cdot (1 - u(t))] + \Psi x \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (2.7)$$

Записуємо рівняння для визначення спряжених функцій [20, 86, 112]

$$\frac{d}{dt}\Psi J(t) = -\frac{\partial}{\partial J}H(x, u); \quad \frac{d}{dt}\Psi x(t) = -\frac{\partial}{\partial x}H(x, u). \quad (2.8)$$

Знаходимо окремі похідні від $H(x, u)$ (2.6) і підставляємо їх в (2.8)

$$\frac{\partial}{\partial J}H(x, u) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x}H(x, u) = \Psi J \cdot (1 - u) + \Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\text{fin}(u \cdot x).$$

Розв'язуємо отримані дифрівняння. Перше елементарне:

$$\frac{d}{dt}\Psi J(t) = 0; \quad \Psi J(t) = \text{const} = 1.$$

Друге теж елементарне, для числових методів, але безнадійне для отримання аналітичних розв'язків:

$$\frac{d}{dt}\Psi x(t) = -\Psi J \cdot (1 - u) - \Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\text{fin}(x) = -\Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\text{fin}(u \cdot x) - (1 - u).$$

Неважко знайти розв'язок цього дифрівняння числовими методами і оформити як функцію користувача:

- $\Psi n(u(t), x(t), dFr(x), t)$ – для неперервної моделі процесу;
- $\Psi n(u_k, x_k, dFr(x_k), k)$ – для еквівалентної дискретної моделі.

Підкреслимо, що ці функції "існують" тільки в конкретному процесі розвитку, тобто для отримання поточного оптимального управління ми повинні підставити поточні значення часу і координати стану. "Фізичний зміст" цієї спряженої функції – "ціна" виробничих потужностей (фондів) відносно критерію оптимальності в кінцевий момент процесу. Ми включили в критерій тільки накопичення, тому "ціна" фондів з часом спадає до нуля.

Підставимо розв'язок диференціальних рівнянь для спряжених функцій у (2.6) і отримаємо остаточний вираз для функції Гамільтона

$$H(x, u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + \Psi n(u, x, dFr, k) \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (2.9)$$

Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язку

Головні наукові результати роботи отримані на основі послідовного і, по можливості, розумного використання методології Р. Беллмана, що дозволяє описати широкий клас процесів управління в точних математичних термінах. Між іншим, Беллман називав динамічне програмування не методом, а "станом розуму". Саме керуючись методологією Беллмана, ми використали для розв'язку узагальненої задачі розвитку метод принципу максимуму, а не динамічне програмування. Однак, на базі аналізу аналітичних результатів Беллмана (розділ 1) для випадку лінійних функцій розвитку ми отримали наближений розв'язок. Природно проаналізувати точність наближеного методу порівняно з точним методом. На першому етапі таке порівняння було виконано просто засобами обчислювальних експериментів – порівнянням точних і наближених процесів. Для типових задач розвитку отримана точність

- по значенню критерію – сумарного накопичення – в межах 3–5%;
- по середньому відхиленню наближеної функції управління від точної (оптимальної стратегії) – в межах 2–5%.

На другому етапі виконано аналітичне дослідження питань точності і збіжності за методологією Беллмана [32, 35, 37]. Класичний метод послідовних наближень заснований на ідеї розв'язання послідовності рівнянь чи задач, які збігаються до бажаного рівняння чи задачі. Однак, у багатьох випадках легко встановити якщо не збіжність наближення, то його монотонність. Беллман пропонує при постановці варіаційних задач розглядати дві різних задачі. Одна з них – задача визначення оптимального управління, інша – задача одержання квазіоптимального управління, що приводить до кращих результатів, ніж при використанні деякого відомого управління (наприклад, лінійних регуляторів по вектору стану).

Дискретизуємо точну функцію Гамільтона (2.9) і порівняємо її з наближеною (2.4).

$$\text{Точна: } H(x_k, u_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot \Psi n(u_k, x_k, dFr, t).$$

$$\text{Наближена: } Hi(u_k, x_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot (T - t).$$

Можна бачити, що вирази відрізняються тільки останнім множником – тобто вирази структурно ідентичні. Це дає нам право назвати вираз наближенням функції Гамільтона. Можна було прийти до цього наближення і канонічним формалізованим шляхом – отримати точний вираз для $\varphi x(t)$, розкласти цю функцію в ряд і взяти перше, лінійне наближення.

На рис. 2.2 подано для кожного кроку процесу залежності функції Гамільтона від управління – розподілу поточного ресурсу між розвитком і накопиченням. Серія таких графіків утворює тривимірну поверхню.

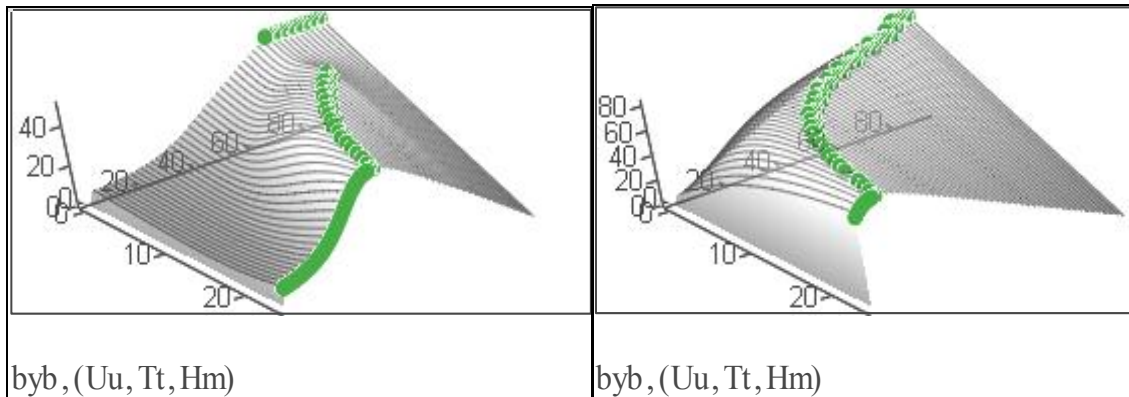


Рис. 2.2. Еволюція функції Гамільтона для невикпуклої і викпуклої функцій розвитку

На цю поверхню накладені траєкторії максимумів поточних функцій Гамільтона. Можемо бачити ділянки "все в розвиток", "ейлерова ділянка", "все в накопичення". Маємо корисний інструмент візуального аналізу, але такі графіки можна побудувати тільки для однопродуктових систем. Однак метод оптимального агрегування дає можливість замінити багатопродуктову систему однопродуктовою (підрозділ 2.5). В підрозділі 2.5 подано аналогічні графіки еволюції функції Гамільтона для агрегованих багатовимірних виробничих систем.

2.4. Розв'язання узагальненої задачі розподілу для випадку використання зовнішніх ресурсів

Сучасне виробництво – це ланцюг виробів, технологій, ринкових вікон. Високі технології, глобалізація економіки вимагають високих темпів розвитку виробничих систем. Для потенційно ефективного виробництва критичне значення має швидкість його розвитку – від лабораторного експерименту до масового виробництва. В сучасних організаціях паралельно виконуються десятки проектів. Ці проекти звичайно знаходяться на різних стадіях розвитку життєвого циклу. В таких умовах є можливість залучати тимчасово ресурси одного виробництва для розвитку іншого. Такі процеси тимчасового залучення зовнішніх ресурсів приведуть до тривіальних обчислювальних і нереалістичних техніко-економічних результатів, якщо не ввести правила повернення тимчасово залучених ресурсів. Нарешті, для ефективного проекту вигідно залучати фінансові зовнішні ресурси – кредити.

Задача такого типу має безліч інтерпретацій – від обміну ресурсами між енергосистемами, до перерозподілу ресурсів розробників, який застосовувався при розробці мікропроцесорів в корпорації Intel. Парадоксально, але найменш природною є фінансова інтерпретація зовнішніх ресурсів. Дійсно, в рамках фінансово-кредитної інтерпретації безпроцентний кредит – щось сумнівне, а кредит з від'ємною ставкою протиприродний. Сьогодні реальною є ситуація надлишкових, відмерлих ресурсів. Природно платити проценти тому, хто візьме ці ресурси і перетворить їх в дещо екологічно і соціально корисне.

Особливістю розвитку сучасних технічних систем є необхідність прецизійного розрахунку оптимальних управлінь. Малі помилки на початкових етапах через певний час приводять до провалу процесу розвитку нового виробництва.

Для сучасних динамічних, нестационарних і нелінійних виробничих систем оптимальна стратегія розвитку не може бути визначена на базі досвіду та інтуїції. Модифікуємо задачу оптимізації розвитку поставлену і розв'язану в розділі 2.2. Введемо можливість тимчасово використовувати зовнішні ресурси. Додаємо ще одну змінну управління – темп зовнішніх ресурсів $xkr(t)$ – обсяг ресурсів за одиницю часу. Тоді наявні поточні ресурси в системі будуть

$$xv(t) = xs(t) + xkr(t).$$

Математичні моделі тимчасового використання зовнішніх ресурсів. На перший погляд поставлена задача є дуже подібною до задач фінансово-кредитної діяльності. Але це набагато складніші задачі системного аналізу розвитку технічних систем, більше подібні до задач математичної екології. Фінансово-кредитні аспекти діяльності виробничої системи є важливими, однак вторинними, такими що обслуговують технічні і технологічні інновації. Тимчасове використання зовнішніх ресурсів настільки поширене в технічних системах, що ми його не помічаємо, наприклад: двигун автомобіля "бере в кредит енергоресурс акумулятора", а потім "повертає його акумулятору", звичайно "з процентами".

Задачі моделювання і оптимізації процесів розвитку можуть виявитись високоефективними для планування і прогнозування в фінансово-кредитних установах, але за умови серйозної професійної доробки і адаптації під закони і стандарти цієї діяльності. Згадаємо метод декомпозиції Данціґа–Вулфа [50] для задач лінійного програмування високої розмірності. В цьому методі використовується агрегування і координація розв'язання підзадач за допомогою системи цін. Однак ціни там – просто назва певних параметрів обчислювального алгоритму. Використання ж цього методу як моделі макроекономічного регулювання буде скоріш за все спекулятивним.

На першому етапі побудови моделі процесу розвитку з урахуванням використання зовнішніх ресурсів розглядаємо такі прості моделі використання зовнішніх ресурсів:

– "онлайнове повернення ресурсу": взятий в момент t ресурс $xkr(t)$ повертається рівними частками до кінця планового періоду Tpl в розмірі $xkr(t)[1 + pr \cdot (Tpl - t)]$, починаючи з моменту t ;

– "відкладене повернення ресурсу": взятий в момент t ресурс $xkr(t)$ повертається рівними частками до кінця планового періоду Tpl в розмірі $xkr(t)[1 + pr \cdot (Tpl - t)]$, починаючи з моменту $Tpl/2$;

– оптимальне за критерієм накопиченого прибутку повернення ресурсу, що можна описати такою формулою: "спочатку все в розвиток, потім всі залишки витрат на розвиток – в повернення боргів, потім вже все в накопичення.

Зауважимо, що в цих моделях не використовуються складні проценти, в епоху "безпроцентних кредитів" все можливе, наприклад, штраф за дострокове повернення боргу, тому ми принципово дистанціюємось від економіки і фінансів. Запропонований метод оптимізації дозволяє включати довільні моделі повернення і оплати ресурсів. В математичному аспекті, схема повернення ресурсу трансформує функцію темпу залучення зовнішніх ресурсів у відповідну функцію темпу їх повернення. Цей темп зі знаком мінус додаємо в підінтегральний вираз для критерію і отримуємо критерій оптимальності процесу розвитку з використанням зовнішніх ресурсів

$$J = \int_0^{Tpl} [xv(t) \cdot (1 - u(t)) - xkr(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)]] dt. \quad (2.10)$$

Отримання наближеного розв'язку. Розглянемо як і в розділі 2.2 наближене і точне розв'язання задачі. На рис. 2.3 подана схема розподілу ресурсу, подібна схемі на рис. 2.1.

Дотримуємось тієї ж, що і в підрозділі 2.2 логіки спрощення: додатковий продукт, отриманий від розширення виробництва на поточному кроці процесу, на наступних кроках повинен розподілятися оптимально, щоб протягом часу $(Tpl - t)$ дати максимальне прирощення критерію. Логічна основа спрощення – припущення про постійну цінність продукції протягом процесу. Згідно зі схемою на рис. 2.3 записуємо вираз для оцінки прирощення критерію в результаті поточного управління. Для порівняння подаємо вираз (2.4)

$$Hp(xv, u, xkr) = xv(t) \cdot (1 - u(t)) + fin(xv(t) \cdot u(t)) \cdot (Tpl - t) - xkr(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)],$$

$$Hp(x, u) = S1 + S2 = x(t) \cdot (1 - u(t)) + fin(x(t) \cdot u(t)) \cdot (Tpl - t),$$

де $xv(t) = x(t) + xkr(t)$.

Система оптимального управління повинна на кожному кроці процесу вибирати: розподіл ресурсу $u(t)$ та розмір зовнішнього ресурсу $xkr(t)$ так, щоб отримати максимум функції $H_p(x, u, xkr)$.

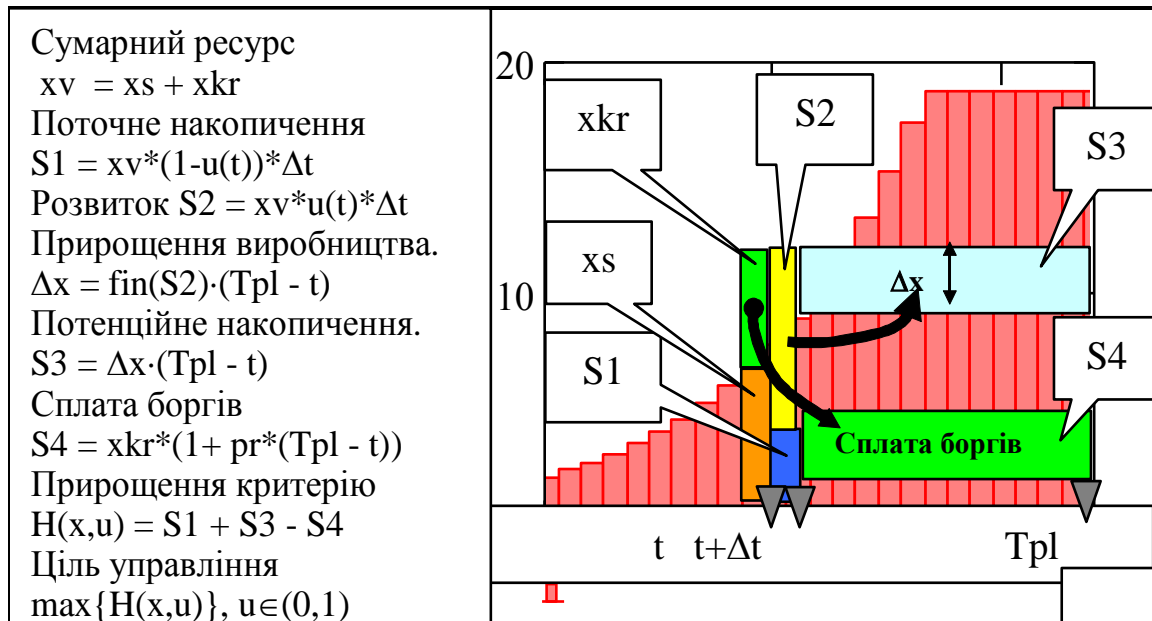


Рис. 2.3. Схема розподілу ресурсу на поточному кроці при використанні зовнішніх ресурсів

Отримання точного розв'язку. Порядок отримання точного розв'язку є подібним наведеному в підрозділі 2.2, тому подаємо тільки постановку задачі і кінцевий результат. Запишемо розширену систему рівнянь динаміки системи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= fin[(xv(t)) \cdot u(t)] = fx(.); \\ \frac{d}{dt} J(t) &= (xv(t)) \cdot (1 - u(t)) - xkr(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)] = fJ, \end{aligned} \right\} (2.11)$$

де $xv(t) = x(t) + xkr(t)$. *Зауваження.* Далі, для скорочення формул будемо писати відповідні функції часу без аргументу: x , xv , xkr замість $x(t)$, $xv(t)$, $xkr(t)$. Для спряженої функції $\psi x(t)$ отримуємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dt} \psi x(t) = -\psi x(t) \cdot u \cdot \frac{d}{dx} fin(x + xkr) - xv \cdot (1 - u) + xkr \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)].$$

Його розв'язок виконати неважко числовими методами і оформити як функцію поточних значень змінних: $\psi x(u_k, xkr_k, x_k)$. Порівняємо наближене і точне розв'язання. Запишемо дискретні – робочі вирази

для точної і наближеної функцій Гамільтона, що використовуються в програмах моделювання та оптимізації:

$$\begin{aligned}H_k(x_k, xkr_k, u_k) &= xv_k \cdot (1 - u_k) + \text{fin}(x_k \cdot u_k) \cdot \Psi x(t) - xkr_k \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)]; \\H_p(x_k, xkr_k, u_k) &= xv_k \cdot (1 - u_k) + \text{fin}(x_k \cdot u_k) \cdot (Tpl - t) - xkr_k \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)].\end{aligned}$$

Точна і наближена функції Гамільтона відрізняються тільки одним (лінійною функцією часу) множником: $(Tpl - t)$ в наближеному виразі замість $\psi x(t)$ в точному. Порівняльний аналіз точних і наближених розв'язків показує задовільний збіг. Відносно типових розкидів характеристик виробничих елементів відхилення від оптимальності є несуттєвими.

2.5. Аналіз результатів моделювання оптимальних процесів розвитку

Отримані результати розв'язання оптимізаційної задачі багатокрокового розподілу ресурсу були використані для розробки комплексу програм оптимізації і моделювання. Ці програми виявились досить новим і зручним засобом розв'язання актуальних задач розвитку і були включені в електронні книги – посібники [44, 45]. Створений комплекс може бути основою персональної системи підтримки рішень на базі відкритих моделей. Тому крім розробки власне програм моделювання і оптимізації розроблялись інтерфейси, орієнтовані на відповідні категорії користувачів. Для довільних функцій розвитку ми можемо отримати результати тільки числовими методами. Проаналізуємо результати обчислювальних експериментів, а потім порівняємо їх з теоретичними результатами Беллмана відносно існування і структури оптимального розв'язання для цього класу задач.

Дослідження моделі однопродуктової системи. На рис. 2.4 подано текст базової програми для оптимізації і моделювання процесу розвитку однопродуктової системи з урахуванням використання зовнішніх ресурсів. Термін "однопродуктова" означає, що розглядається виробнича система, що випускає монопродукт, або система з агрегованою узагальненою виробничою функцією. Наприклад, теплоенергетична система витрачає паливо і виробляє та постачає електроенергію і тепло (гаряче водопостачання). Продукти такої системи можна агрегувати в один умовний продукт. Термін "базова" в цьому випадку означає, що програму легко модифікувати для задач більшої розмірності, задач з урахуванням нових факторів та ін. Власне, програма є елементарною і може бути реалізована в будь-якому середовищі програмування (Mathcad, Matlab, VisSim). Головна особливість програми – вона працездатна при будь-яких довільних функціях розвитку (ФР).

<pre> PM(Fi) := Δt ← T ÷ Kh x1_1 ← X0 u1 ← 1 z1_1 ← 0 sdox ← 0 for k ∈ 1..Kh + 1 t ← Δt·(k - 1) максимумН ← 0 for i ∈ 1..Sit Δuu ← 1 ÷ Sit uu ← Δuu·(i - 1) Н ← x1_k·(1 - uu) + Fi(x1_k·uu)·(T - t) if Н > максимумН максимумН ← Н uор ← uu ц_{k+1} ← uор x1_{k+1} ← x1_k + Fi(x1_k·ц_{k+1})·Δt z1_{k+1} ← x1_{k+1}·(1 - ц_{k+1}) sdox ← sdox + z1_{k+1} состояние^{k} ← (ц_k x1_k z1_k) Выход_программы ← (состояние sdox) </pre>	<p>Програма зроблена функцією від функції віддачі інвестицій $F_i(y)$. Програма повертає структуру з масиву 3×91 чисел та числа.</p> <p>Розпаковуємо вихід програми:</p> $PM(Fi) = \begin{pmatrix} \{3,91\} \\ 1349 \end{pmatrix}$ <p>Виділяємо масив - послідовність векторів стану:</p> $VS := PM(Fi)_1,$ <p>і виводимо його (для контролю)</p> $VS =$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0.99</td> <td>0.99</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.5</td> <td>0.63</td> <td>0.78</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>0.01</td> <td>0.01</td> </tr> </table> <p>Виділяємо сумарний прибуток:</p> $SP := PM(Fi)_2;$ <p>виводимо його значення $SP = 1348.52$.</p> <p>Задаємо ранжовані змінні для побудови графіків: число кроків моделювання:</p> $k := 1..Kh;$ <p>число точок для функції віддачі інвестицій</p> $y := 0..50.$		1	2	3	1	1	0.99	0.99	2	0.5	0.63	0.78	3	0	0.01	0.01
	1	2	3														
1	1	0.99	0.99														
2	0.5	0.63	0.78														
3	0	0.01	0.01														

Рис. 2.4. Текст базової програми оптимізації і моделювання процесу розвитку однопродуктової системи

На рис. 2.5 подано інтерфейс програми оптимізації і моделювання: на екранній сторінці зібрані "входи": параметри класу (F4(.) – увігнуто-випукла) функції інвестицій (розвитку), початкові умови, ставка кредиту (= ресурсу), і "виходи": показники і графіки процесу розвитку.

Параметри функції інвестицій: ампл. $AM \equiv 0.8$;
 частота $al \equiv 0.2$; увігнутість $sl \equiv 10$; коефіцієнт
 остаточної вартості фондів $prcv \equiv 0.9$; функція
 інвестицій $FU(y) \equiv F4(y, AM, al, sl)$.
 Стартовий темп виробництва $Xlo \equiv 0.5$.
 Точність оптимізації (сітка) $Sit \equiv 80$; $sitkr \equiv 40$
 Ліміт кредиту $Ymx \equiv 20$; ставка $pro \equiv 0.15$
 Критерій (накопичений випуск) $Sp = 180$ уґо
 Кредити взяли: $Skr = 63$ повернули: $vikr = 157$
 Моменти перек. управл. $Vkl \equiv 6.1$; $Vикл \equiv 10.2$

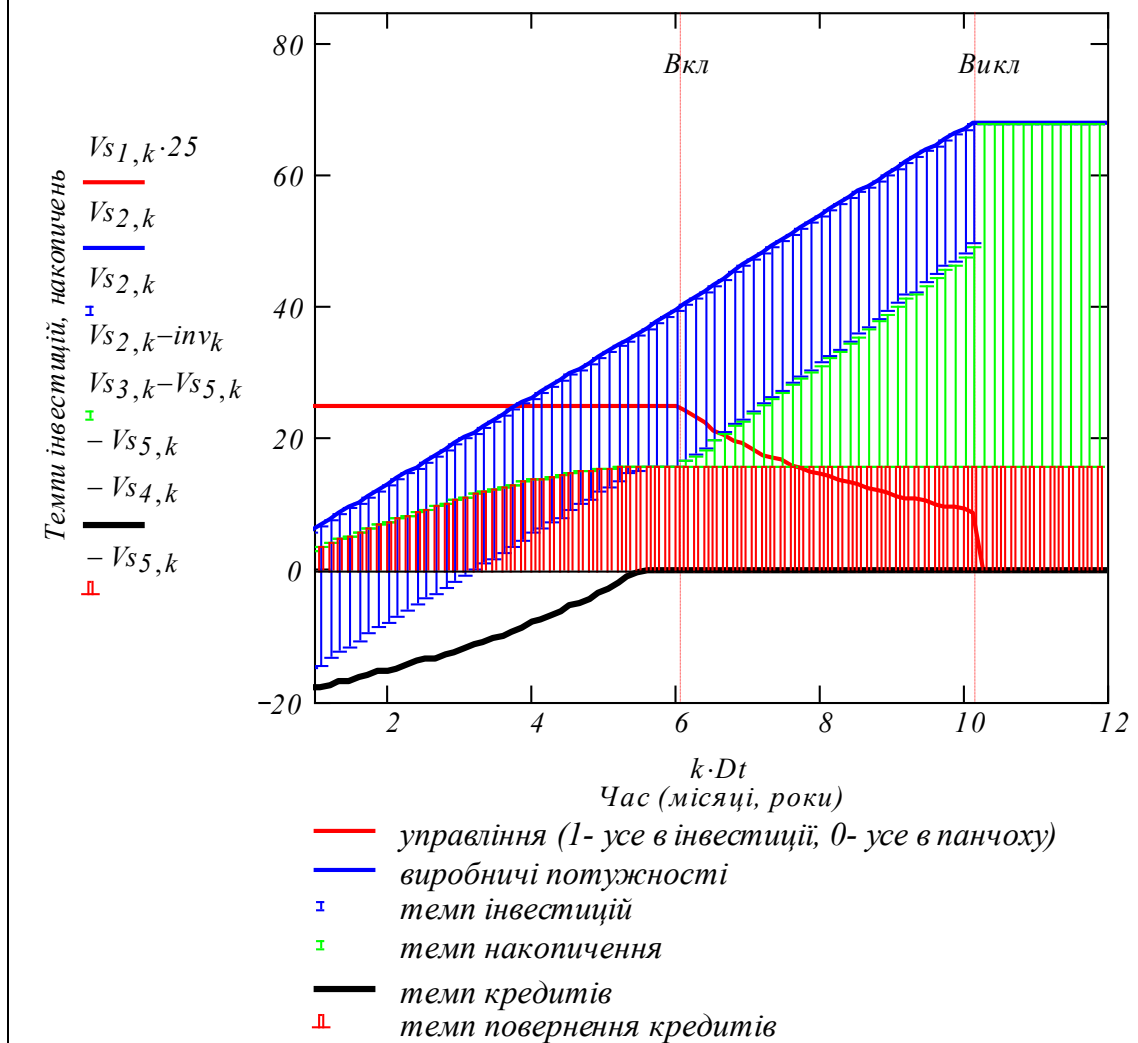
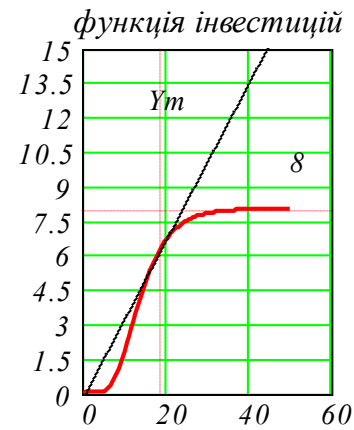


Рис. 2.5. Версія інтерфейсу базової програми

На рис. 2.6 подано оптимальний процес для випадку малої ціни зовнішнього ресурсу. Можемо порівняти його з процесом для дорогих кредитів (див. рис. 2.5).

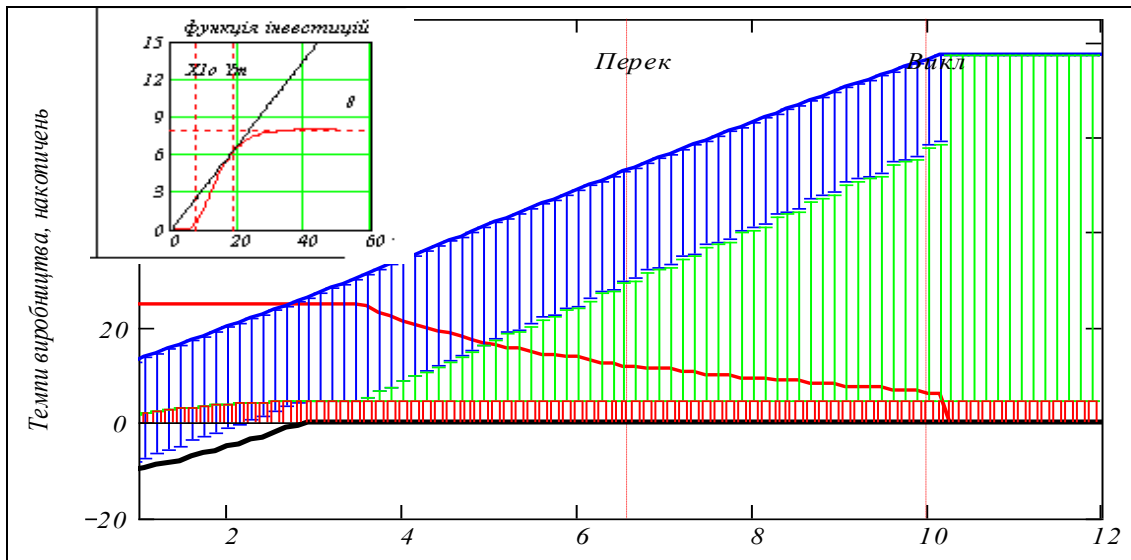


Рис. 2.6. Оптимальний процес розвитку при малій ставці кредиту

На рис. 2.7 подано процес розвитку без кредитів і дві проекції поверхні "зміна в часі функції Гамільтона".

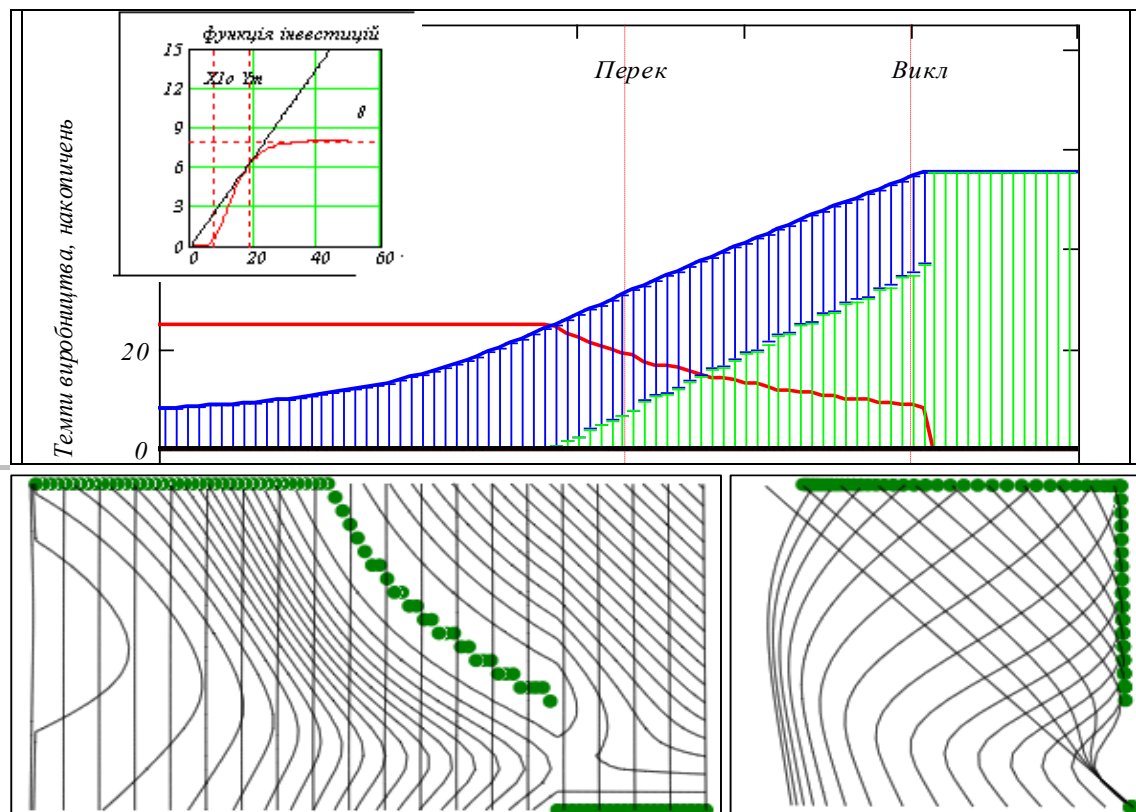


Рис. 2.7. Оптимальний процес розвитку за рахунок власних ресурсів

Рис. 2.7 – відповідь на питання "що буде, якщо не брати зовнішні ресурси?". Під графіком процесу подано дві проекції системи функцій Гамільтона. Процес розвитку на початковому інтервалі має експоненці-

альний характер. Можна чітко бачити не тільки оптимальне управління, але і структуру функцій Гамільтона, на яких воно визначається і три інтервали оптимальної стратегії – "все в розвиток", "ейлерова ділянка" і "все в накопичення". Для системи з випуклою ФР (див. рис. 2.8) оптимальний процес простий для числових методів пошуку екстремуму і більш складний для практичної реалізації. Оптимальне управління не має інтервалу "все в накопичення" – виробничі потужності до кінця періоду нарощуються у все меншому обсязі. Практична реалізація такого процесу породжує низку проблем.

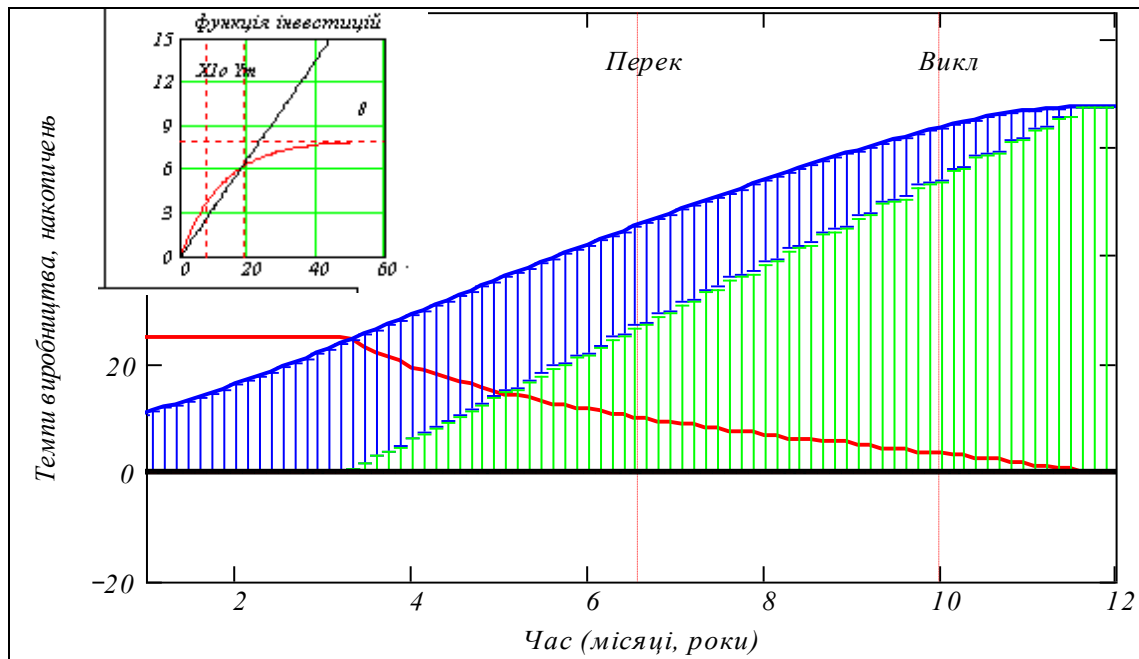


Рис. 2.8. Оптимальний процес розвитку за рахунок власних ресурсів для випадку випуклої ФР

2.6. Розробка системи для аналізу оптимальних процесів розвитку при урахуванні еластичності цін продажу продукції

В підрозділі 2.5 розглянуто досить ідеалістичну задачу оптимізації процесу розвитку, що є базою для задачі цього підрозділу. Метою цієї роботи є не тільки створення конкретних моделей для конкретних задач, але і напрацювання технологій конструювання нових моделей для нових задач. Звичайна практика конструювання технічних систем використання в якості основи попередньої вдалої моделі виробу. Так конструюють автомобілі, літаки, мобільні телефони. Така технологія може бути раціональною і при виробництві інформаційної продукції. Головний компонент раціональності в тому, що для розв'язання наступної нової задачі ми використовуємо 85–95% ресурсів від розв'язання попередньої задачі. Оновлення моделей і програм складає лише 5–15%. Така

статистика справедлива для літаків, автомобілів, комп'ютерів і прикладних програм.

Аналогічна ситуація склалася в галузі моделювання – виробництва інтелектуальної продукції, тобто знань. Зрозуміло, що нову модель для нової задачі простіше зробити не "з нуля", а як модифікацію базової моделі. В цьому підрозділі подано розробку моделі оптимального процесу розвитку з урахуванням залежності ціни і попиту від обсягу випуску. Для відображення реалій ринку використовуємо класичну модель попиту. Потім неважко буде використати інші моделі попиту і навчання.

Аналіз моделей цін продукції та витрат виробництва. Проаналізуємо залежності ціни продукції від обсягу її випуску. В природній економіці ціни визначаються відношенням попиту і пропозиції, конкуренцією. В цьому випадку ми розглядаємо досить складні механізми утворення цін ринку. Звичайно ціни зменшуються з ростом обсягу виробництва. Це можна подати такою класичною моделлю

$$p = b \cdot Q^{el},$$

де p – ціна одиниці вимірювання; Q – обсяг виробництва; b – параметр; el – теж параметр; $1/el$ називають "еластичність попиту". Доход від продажу продукції буде

$$\text{дохід} = p \cdot Q = b \cdot Q^{el} \cdot Q = b \cdot Q^{el+1}.$$

Відзначимо важливі окремі випадки:

– $el = 0$ – ціна постійна, що повинно виконуватись при досконалій конкуренції. Простіше – попит стабільний, постійний, виробник відносно невеликий – є можливість продати всю вироблену продукцію за постійною ціною. Саме цей випадок і розглядався у попередніх розділах.

– $el = -1$ – сукупний дохід постійний, і не залежить від p і Q .

Дійсно: $\text{ціна} = p = b \cdot Q^{-1}$,

тоді: $\text{дохід} = p \cdot Q = b \cdot Q^{-1} \cdot Q = b = \text{постійний}$.

Застрявання на "красивих" і математично продуктивних моделях – характерне явище, об'єкт для дослідників науки. Згадаємо змістовну суть моделі еластичності. Що краще у випадку $el \leq -1$, виробляти 10 одиниць продукції, чи 100? Правильна відповідь знаходиться за межами класичної моделі:

– краще виробляти 1000 тому, що зможемо контролювати більшу частку ринку;

– ще краще розробити конструкцію і технології, орієнтовані на масове виробництво, і випускати 100.000, тоді сумарні витрати можуть бути меншими, ніж на випуск 1000 одиниць вимірювання продукції [58]. Тут діють ефекти навчання і масштабів виробництва.

Таким чином, ми апіорно визначаємо обмеженість розширеної і уточненої робочої математичної моделі цього підрозділу.

Побудуємо робочу модель з урахуванням еластичності попиту для діапазону значень $-1 < n < 0$. Припускаємо, що випускається продукція нетривалого користування і вважаємо, що виробнича організація контролює певну частку деякого регіонального ринку, а Q – це річний випуск продукції. Зробимо наступний крок в деталізації моделі виробничої системи – виділимо *витрати* $= cv \cdot Q$, які в попередній моделі вважалися лінійною функцією обсягу виробництва. Запишемо вираз для прибутку:

$$\text{прибуток} = \text{дохід} - \text{витрати} = b \cdot Q^{el+1} - cv \cdot Q.$$

Побудуємо графіки залежностей ціни, доходу і прибутку від обсягу виробництва. Вводимо значення параметрів: крок зміни виробництва $dQ := 1$, параметр ціни $be := 10$, собівартість $cv := 4$. Задаємо ряд значень еластичності $el1 := 0$, $el2 := -0.2$, $el3 := -1$. Записуємо в цих позначеннях вирази для ціни, доходу і прибутку

$$pr(i, el, b) := b \cdot (dQ \cdot i + .001)^{el}; \quad (2.12)$$

$$Dox(i, el, b) := b \cdot (dQ \cdot i)^{el+1}; \quad (2.13)$$

$$Rev(i, el, b, c) := b \cdot (dQ \cdot i)^{el+1} - c \cdot (dQ \cdot i). \quad (2.14)$$

Розглянемо ці залежності – будуємо графіки для різних значень параметрів (рис. 2.9-2.11)

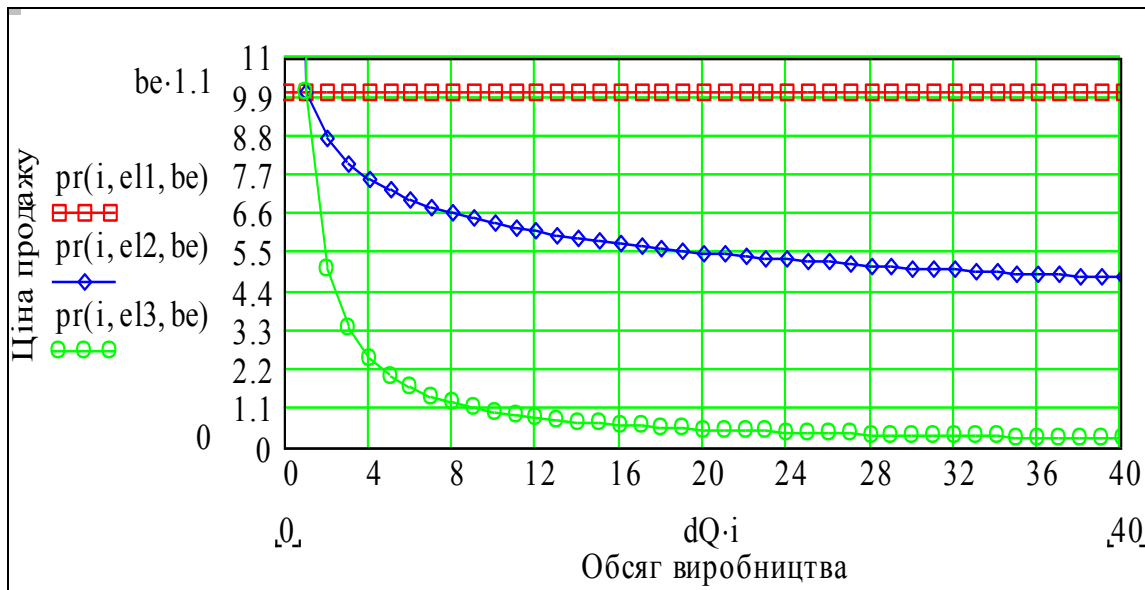


Рис. 2.9. Вплив еластичності на ціну продажу

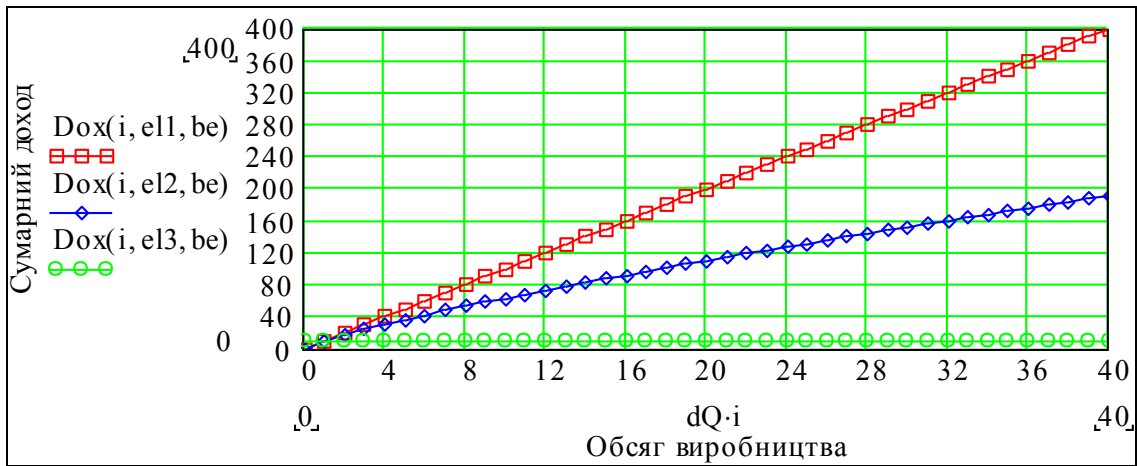


Рис. 2.10. Вплив еластичності на дохід

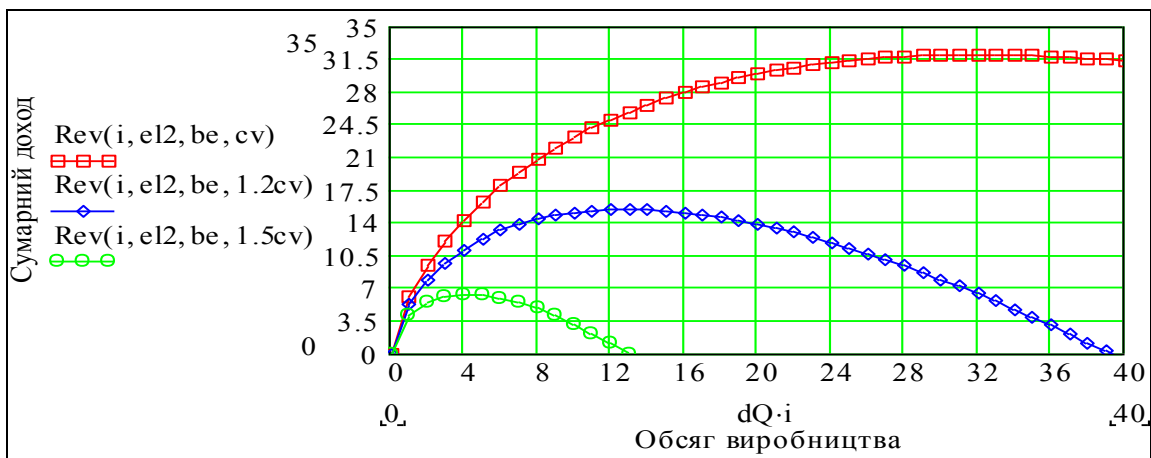


Рис. 2.11. Вплив еластичності на дохід

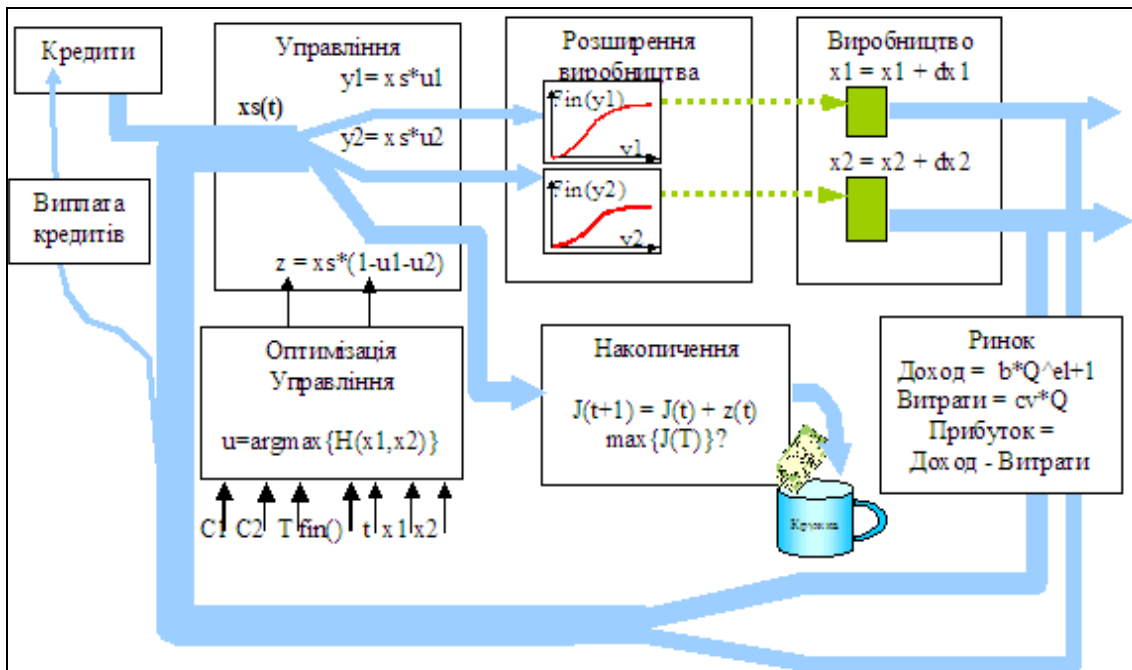


Рис. 2.12. Схема функціонування виробничої системи з урахуванням залежностей „пропозиція–ціна”

Вносимо відповідні зміни в математичну модель задачі і програму оптимізації та моделювання.

Постановка задачі з урахуванням обмежень ринку. Розглядаємо модифіковану задачу Марковіца. Маємо економічну систему, в якій виробляються N видів продукції, що випускаються з темпами $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t)$ (одиниці вимірювання продукції за одиницю часу). Залежності прирощення темпів випуску від інвестицій у розширення виробництв задаємо нелінійними функціями певного класу – увігнуто-випуклими. Вибором параметрів, як окремі випадки, можуть бути отримані лінійні та випуклі функції, що монотонно зростають. Замість посилок на вже розглянуті моделі, стисло повторимо постановку задачі з попередніх розділів, вносимо в неї зміни і доповнення.

Дано: рівняння для виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = Fin(y(t)_i) = Fin(Rvs(t) \cdot u_i),$$

де $Rvs(t)$ – сумарний прибуток від продажу продуктів виробництва на ринку в момент t :

$$Rvs(t) = \sum_{j=1}^N Rv(x(t)_j, el_j, b_j, c_j).$$

Прибуток від продукту i -го виду визначається як різниця доходу і витрат. В першому наближенні витрати вважатимемо лінійною функцією від обсягу виробництва, хоч це не зовсім так – мають місце ефекти освоєння та ін.

$$(Rv(x(t)_i, el_i, b_i, c_i) = D_i - Vt_i = D(x(t)_i, el_i, b_i) - c_i \cdot x(t)_i); \quad (2.15)$$

$$b \cdot (x(t)_i)^{el+1} - c_i \cdot x(t)_i = [b \cdot (x(t)_i)^{el} - c_i] \cdot x(t)_i, \quad (2.16)$$

де $x(t)_i$ – поточний обсяг i -го виробництва; el_i – еластичність ціни; b_i – параметр функції еластичності (умовно можна вважати ціною продажу одиниці вимірювання i -ої продукції); c_i – собівартість виробництва одиниці i -ої продукції; $0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управління, змістовно, це частка сумарних поточних власних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей по i -му продукту. Для управління виконується умова нормування:

$$\sum_{j=1}^N u(t)_j + unak(t) = 1,$$

де $unak(t)$ – частка ресурсів, що йде в накопичення.

Потрібно визначити *оптимальну стратегію* інвестицій у виробничі потужності, що максимізує сумарний прибуток за певний період:

$$\max_u \{JN\}; \quad JN = \int_0^T Rv_s(t) \cdot unak(t) dt. \quad (2.17)$$

Таким чином ми маємо оптимізаційну задачу того самого класу, але з більш складним виразом для поточного прибутку. Модифікуємо програму моделювання та оптимізації з розділу 2.5 – замінимо в ній вирази для поточних доходів та сумарного прибутку. В програмі у виразі для функції $H(x,u)$ замість обумовлених інвестиціями прирощень виробничих потужностей (= випуску продуктів) нам необхідно розглянути прирощення прибутків від продажу цих додаткових продуктів. Для цього визначимо похідну від функції прибутку $Rv(\cdot)$ (2.15):

$$\frac{d}{dx} (b \cdot x^{el} - ce) \cdot x \rightarrow b \cdot x^{el} \cdot el + b \cdot x^{el} - ce \quad (2.18)$$

і запишемо вирази для прирощень (диференціалів) прибутків по 1-му і 2-му продуктах

$$\left. \begin{aligned} dRr1 &= [b1 \cdot x1^{el1} \cdot (el1 + 1) - ce1] \cdot dx1; \\ dRr2 &= [b2 \cdot x2^{el2} \cdot (el2 + 1) - ce2] \cdot dx2. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Для того, щоб "розвести" входи двох версій програми для випадку урахування дисконтування і тієї, що враховує еластичність попиту, змінюємо імена вхідних змінних. Це вимога побудови документів в середовищі пакетів для моделювання, що відрізняється від норм "безкомп'ютерних" математичних документів. Зокрема, вираз для похідної від прибутку по темпу виробництва в означеннях програми буде:

$$\frac{d}{dx1} (ba \cdot x1^{ela} - ca1) \cdot x1 \rightarrow ba \cdot x1^{ela} \cdot ela + ba \cdot x1^{ela} - ca1.$$

Порівняємо цей вираз і вираз (2.18) – там для отримання результату диференціювання застосовано символічний процесор. Сьогодні, коли формули використовуються в програмах управління банком, біржею, літаком, аеропортом, *забороняється виконувати будь-які алгебраїчні перетворення вручну.*

Тоді прирощення прибутку $dRr1$ від прирощення темпу виробництва $dx1$ буде: $dRr1 = [b1 \cdot x1^{el1} \cdot (el1 + 1) - c1] \cdot dx1.$

Збираємо вирази (2.13)–(2.19) в програму моделювання, текст якої подано на рис. 2.13 (перша частина) і рис. 2.14 (друга частина). Єдина перевага програми – вона працює. Згідно з традицією тексти програм подаються в "додатках", "додатком" називають прикладні програми. У нас текст програми – це "формула" та інтерфейс.

```

(SPR)
(СПр) :=
 $\Delta t \leftarrow T \div Kh$ 
 $x1_1 \leftarrow Ц1$ 
 $x2_1 \leftarrow Ц2$ 
 $borg_1 \leftarrow 0$ 
 $u1op \leftarrow 0.5$ 
 $u2op \leftarrow 0.5$ 
 $xkop \leftarrow 0$ 
 $sdox \leftarrow 0$ 
 $\Delta u \leftarrow 1 \div sitin$ 
 $\Delta kr \leftarrow 1 \cdot \frac{Ymk}{sitkre}$ 
for  $k \in 1..Kh + 1$ 
     $t \leftarrow \Delta t \cdot (k - 1)$ 
     $maHm \leftarrow 0$ 
     $Rv1_k \leftarrow [b1 \cdot (x1_k + .0001)^{El1} - ce1] \cdot x1_k$ 
     $Rv2_k \leftarrow [b2 \cdot (x2_k + .0001)^{El2} - ce2] \cdot x2_k$ 
     $Rvs \leftarrow Rv1_k + Rv2_k - borg_k$ 
    for  $q \in 1..sitkre$ 
         $xk \leftarrow \Delta kr \cdot (q - 1)$ 
         $Ka \leftarrow Rvs + xk$ 
        for  $i \in 1..sitin + 1$ 
             $u1 \leftarrow (i - 1) \cdot \Delta u$ 
            for  $j \in 1..(sitin - i + 2)$ 
                 $u2 \leftarrow (j - 1) \cdot \Delta u$ 
                 $накоп \leftarrow (1 - u1 - u2) \cdot Ka$ 

```

Рис. 2.13. Програма оптимізації і моделювання. Частина 1

			<pre> for j ∈ 1..(sitin - i + 2) u2 ← (j - 1)·Δu накоп ← (1 - u1 - u2)·Ka dx1 ← finv(u1·Ka, n1, w1, am1) dx2 ← finv(u2·Ka, n2, w2, am2) dR1 ← [b1·(x1k + .0001)^{El1}·(El1 + 1) - ce1]·dx1 dR2 ← [b2·(x2k + .0001)^{El2}·(El2 + 1) - ce2]·dx2 dRs ← dR1 + dR2 борзS ← xk·[1 + pkr·(T - t)] fHm ← накоп + dRs·(T - t) - борзS ym ← maHm < fHm maHm ← maHm·(1 - ym) + fHm·ym u1op ← u1op·(1 - ym) + u1·ym u2op ← u2op·(1 - ym) + u2·ym xkop ← xkop·(1 - ym) + xk·ym u1k ← u1op u2k ← u2op xkk ← xkop Nal ← Rvs + xkk x1k+1 ← x1k + finv(u1k·Nal, n1, w1, am1)·Δt x2k+1 ← x2k + finv(u2k·Nal, n2, w2, am2)·Δt borgk+1 ← borgk + $\frac{xkk[1 + pkr·(T - t)]}{T - t}·Δt$ zk ← Nal·(1 - u1k - u2k) sdox ← sdox + zk qq ← (u1k u2k zk x1k x2k xkk -borgk) vyx^{<k>} ← qq^T </pre>
			$\begin{pmatrix} v_{yx} \\ sdox \end{pmatrix}$

Рис. 2.14. Програма оптимізації і моделювання. Частина 2

На рис. 2.15 подано стенд для аналізу процесів оптимального розвитку системи виробництв з урахуванням еластичності попиту. Принципова відміна цього стенда від попереднього (див. рис. 2.5, 2.6) – в тому, що крім графіків функцій віддачі інвестицій (залежність прирощення темпу виробництва від темпу інвестицій) додано графіки залежності темпу прибутку від темпу виробництва. Додані зони введення нових параметрів функцій еластичності продуктів виробництва.

Користувач може змінювати положення двох маркерів на головному графіку – їх можна встановити на певні характерні моменти. Відповідно до положення цих маркерів обчислюються точки на графіках функцій інвестицій та функцій прибутку. Положення цих точок подаються відповідними маркерами (верхні графіки стенда). Таке подання важливе для аналізу процесів – можна у графічному вигляді бачити ефективності інвестицій і ринкову ефективність поточного випуску продукції. Базова програма зроблена для випадку двох виробництв, але може бути легко модифікована для трьох і більше виробництв. Однак задача оптимізації при цьому ускладнюється – ми повинні на кожному кроці знаходити екстремум функції $N+1$ змінної, або застосувати метод оптимального агрегування [49, 89].

"Розпаковуємо" вихід програми і формуємо потрібні для "стенда" вихідні дані:

Номер кроку процесу $k := 1..Kh + 1$; ранжовані змінні "витрати ресурсу": $y := 0,5..qq$; $q := 0,5..25$; записуємо вихід програми в масив $by := SPR$; темп сумарного виробництва: $Xs_k := by_{4,k} + by_{5,k}$; координата і значення характерної точки $k1 := trunc(T1 \div \Delta t)$, виділеної користувачем; темпи виробництв $x1 := by_{4,k1}$; $x2 := by_{5,k1}$; темпи інвестицій в розвиток виробництв №1 та №2 в характерній точці: $Y1 := Xs_{k1} \cdot by_{1,k1}$; $Y2 := Xs_{k1} \cdot by_{2,k1}$; діапазон $qq := ceil(max(Y1, Y2) \cdot 1.5)$ для побудови графіків; темп накопичення $nak_k := by_{3,k}$; темп інвестицій $inv1_k := by_{1,k} \cdot Xs_k$; сумарні витрати по кредитах

$$Виплата_кредитів := \sum_{k=1}^{Kh+1} by_{7,k}.$$

Діапазон для графіків $DP := max[max[(by^T)^{\langle 4 \rangle}], max[(by^T)^{\langle 5 \rangle}]]$; крок $ha := DP \div 20$; ранжована змінна $xx := 0, ha.. DP \cdot 2$.

Інтерфейс (див. рис. 2.15) зроблено для користувача, а не для глядача. Зокрема користувач може виділити на графіках функцій розвитку та еластичності характерні для нього точки $Y1$, $Y2$, $x1$, $x2$ і для цих точок будуть виведені значення компонентів вектора стану.

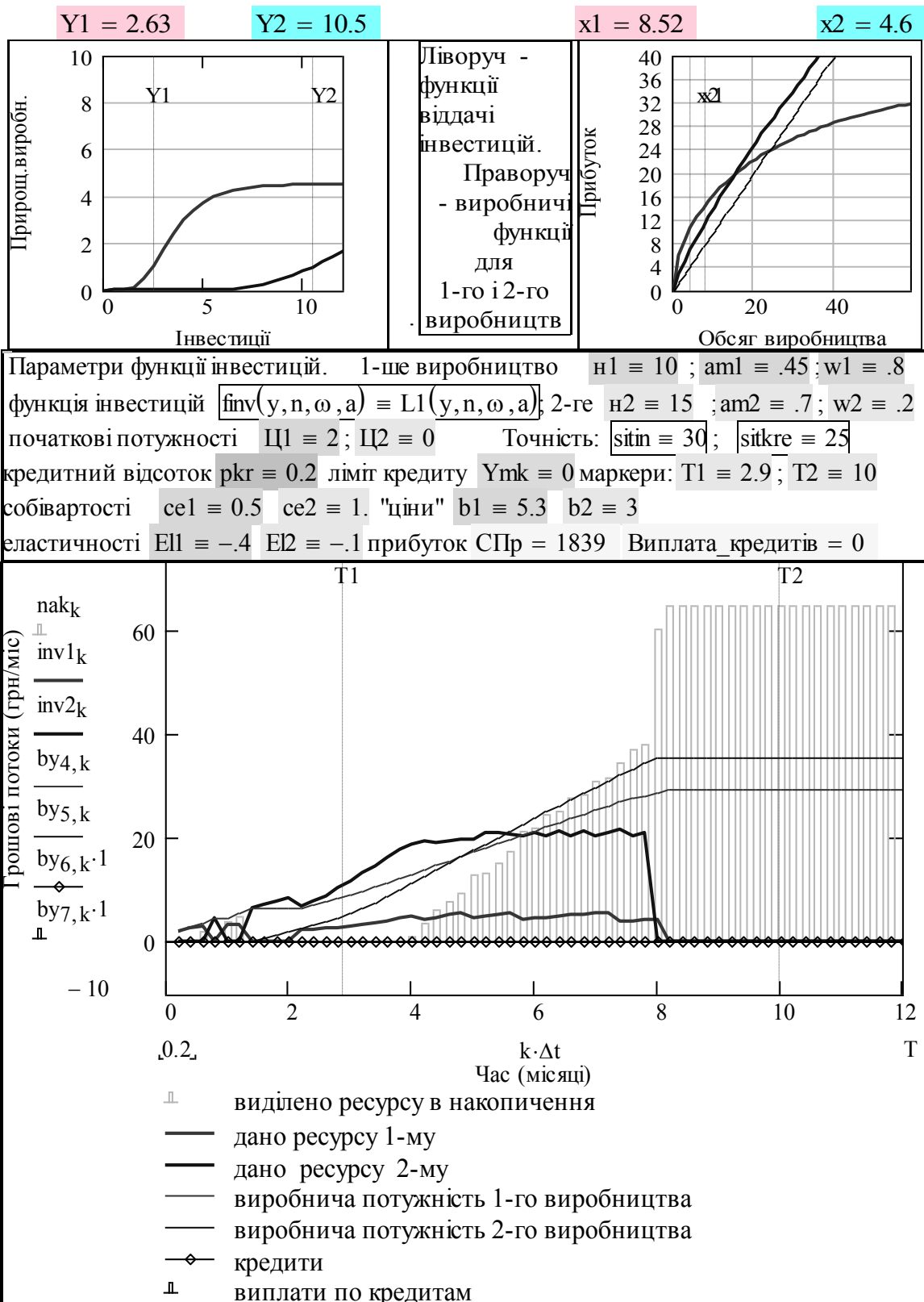


Рис. 2.15. Стенд для дослідження впливу еластичності попиту

На рис. 2.16 подано процес для інших цін: $b1 = 7$, $b2 = 2$ замість $b1 = 5.3$, $b2 = 3$. Бачимо суттєву різницю стратегій оптимального розвитку. Ця проблема дуже важлива для розподілених виробничих систем.

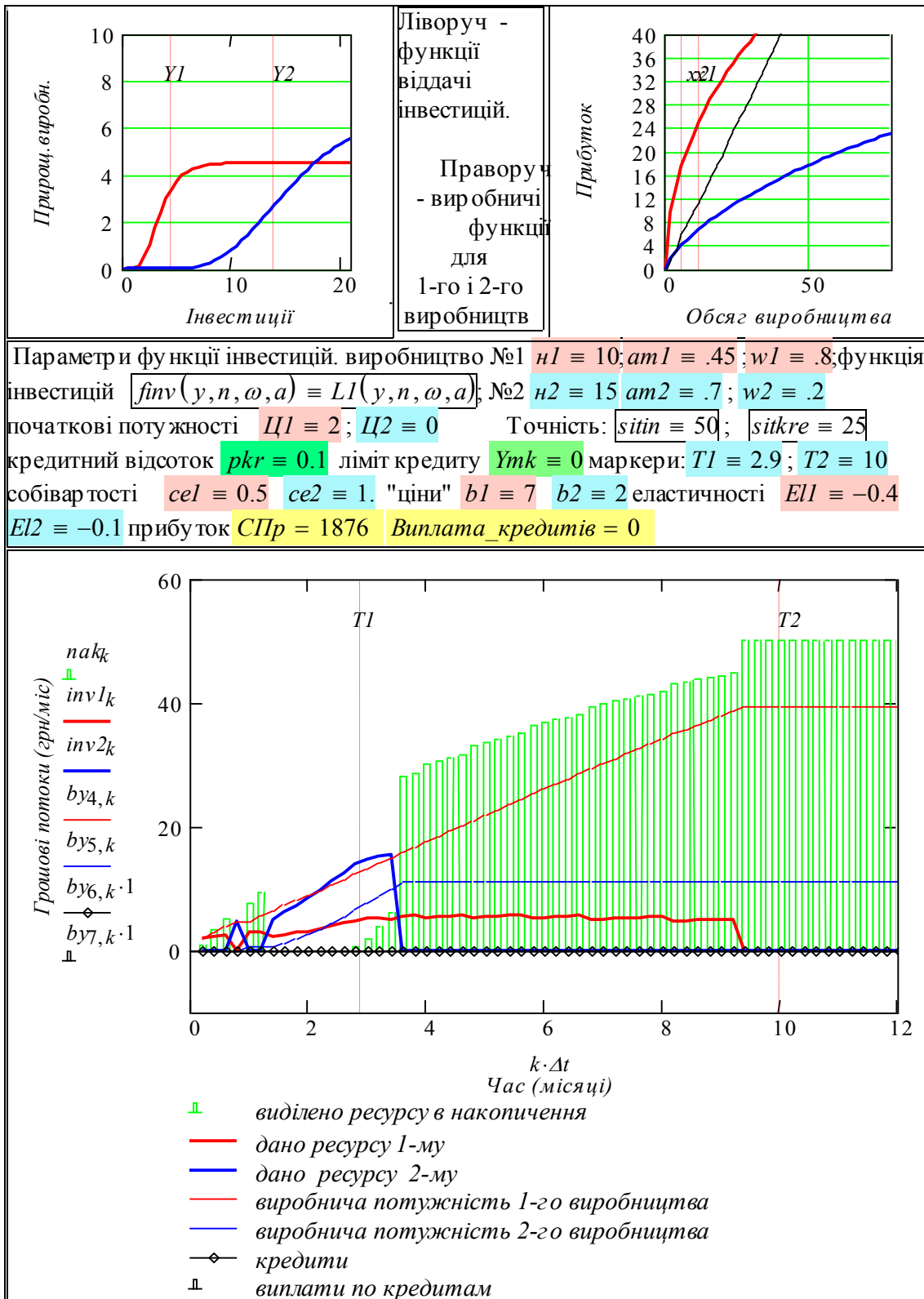


Рис. 2.16. Вплив "цін" продуктів на оптимальну стратегію

Порівнюючи графіки процесів (див. рис. 2.15, 2.16) бачимо, що програма оптимізації дає пріоритет розвитку більш ринково вигідній продукції. В першому випадку обидва продукти мають приблизно од-

накову ринкову цінність, в другому випадку цінність першого продукту збільшена, а другого – зменшена. З точки зору ефективності інвестицій перевагу має другий продукт. На рис. 2.17 подано процес розвитку для випадку лінійних функцій розвитку. Цікаво порівняти цей процес з поданим на рис. 1.10.

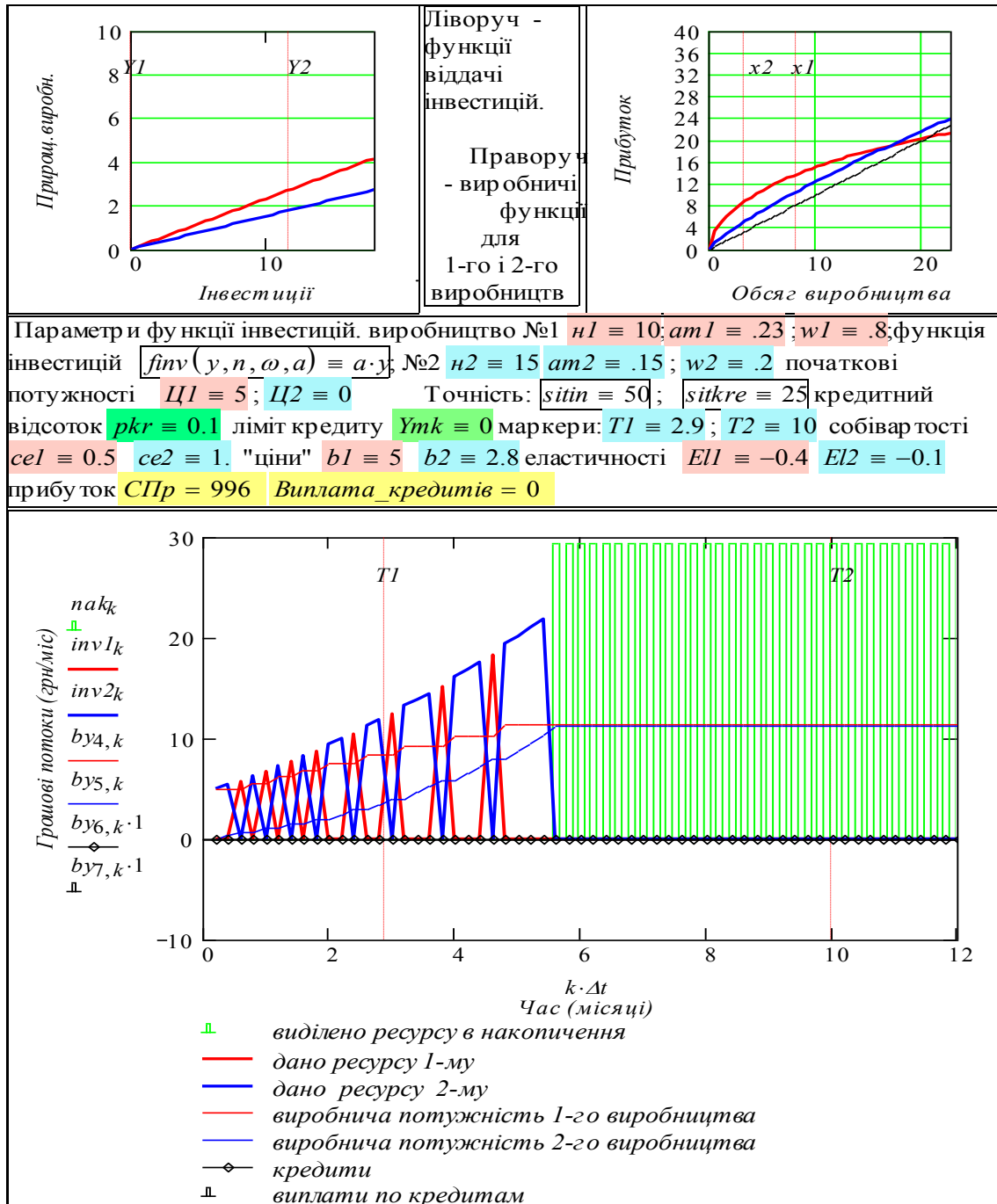
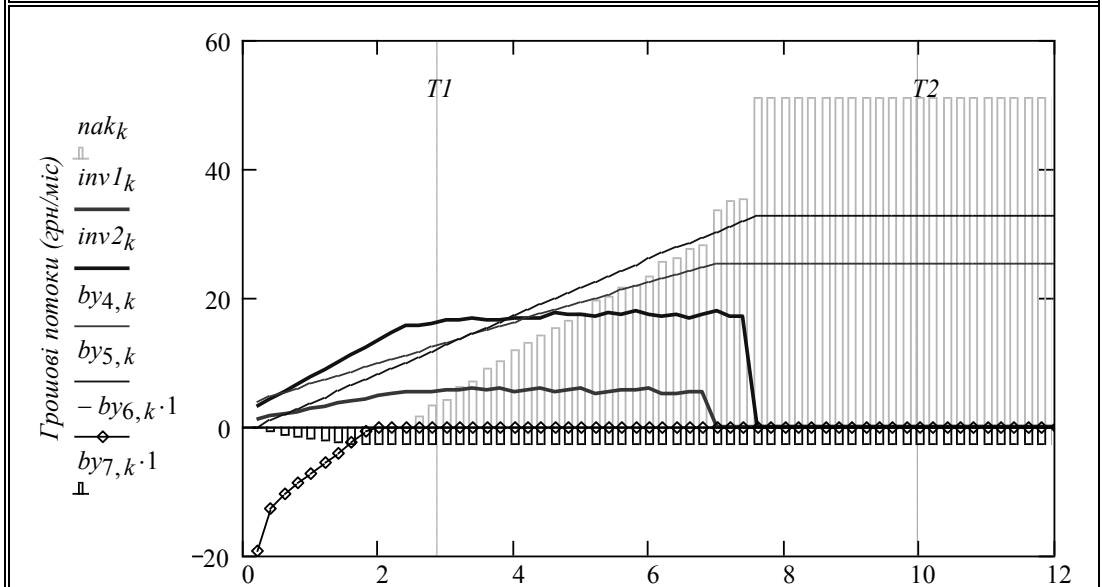


Рис. 2.17. Оптимальний процес розвитку для випадку лінійних функцій розвитку

Процес на рис. 2.17 – "контрольний" обчислювальний експеримент. Для випадку лінійних функцій віддачі інвестицій Р. Беллманом отримана оптимальна стратегія: спочатку все у інвестиції, потім все у

накопичення [32]. Урахування еластичності попиту ускладнює оптимальні стратегії розвитку – вони можуть бути суттєво розривними. Такі режими відомі в теорії управління для релейних систем. На рис. 2.18 подано оптимальні процеси при використанні кредитів.

Параметри функції інвестицій. Виробництво №1 $n1 \equiv 10$; $am1 \equiv .35$; $w1 \equiv .8$; функція інвестицій $f_{inv}(y, n, \omega, a) \equiv LI(y, n, \omega, a)$; №2 $n2 \equiv 19$ $am2 \equiv .5$; $w2 \equiv .3$ початкові потужності $\zeta1 \equiv 4$; $\zeta2 \equiv 0$. Точність: $sitin \equiv 50$; $sitkre \equiv 25$ ставка кредиту $pkr \equiv 0.11$; ліміт кредиту $Ymk \equiv 20$; маркери: $T1 \equiv 2.9$; $T2 \equiv 10$; собівартості $ce1 \equiv 0.5$; $ce2 \equiv 1$; "ціни" $b1 \equiv 5$; $b2 \equiv 2.8$; еластичності $E11 \equiv -0.4$ $E12 \equiv -0.1$ прибуток $СПр = 1674$ Виплата кредитів = -162



Параметри функції інвестицій. Виробництво №1 $n1 \equiv 10$; $am1 \equiv .35$; $w1 \equiv .8$; функція інвестицій $f_{inv}(y, n, \omega, a) \equiv LI(y, n, \omega, a)$; №2 $n2 \equiv 19$ $am2 \equiv .5$; $w2 \equiv .3$ початкові потужності $\zeta1 \equiv 0$; $\zeta2 \equiv 0$. Точність: $sitin \equiv 50$; $sitkre \equiv 25$ ставка кредиту $pkr \equiv 0.33$; ліміт кредиту $Ymk \equiv 20$; маркери: $T1 \equiv 2.9$; $T2 \equiv 10$; собівартості $ce1 \equiv 0.5$; $ce2 \equiv 1$; "ціни" $b1 \equiv 5$; $b2 \equiv 2.8$; еластичності $E11 \equiv -0.4$ $E12 \equiv -0.1$ прибуток $СПр = 1051$ Виплата кредитів = -493

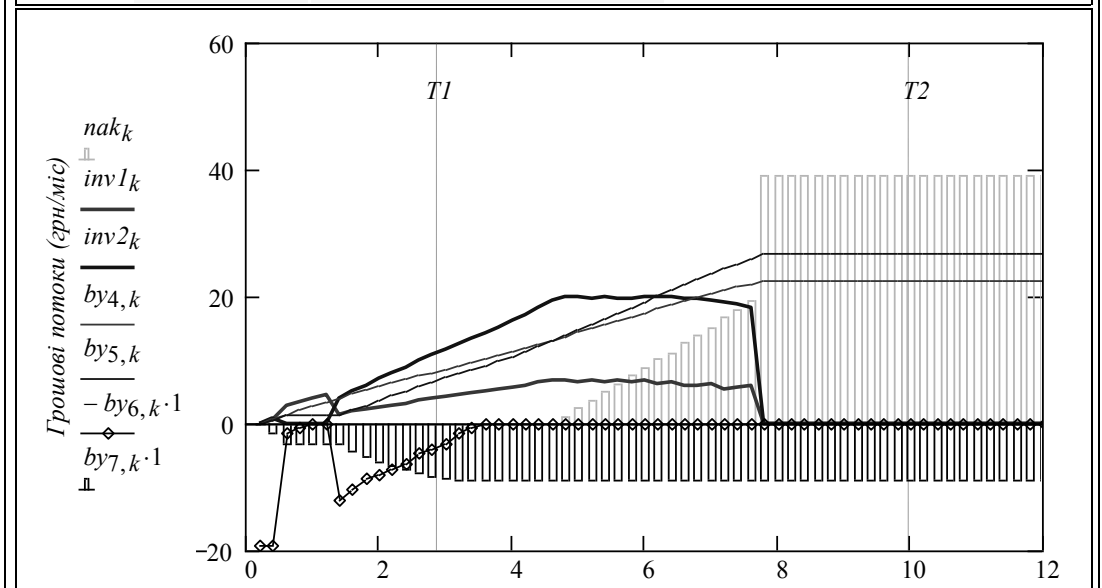


Рис. 2.18. Процеси розвитку при використанні зовнішніх ресурсів

Висновки

Необхідність розгляду сучасних виробничих систем як складних процесів неперервного вдосконалення конструкцій, технологій і процесів паралельного випуску продуктів одного класу обумовила необхідність розгляду задачі оптимального розподілу ресурсів як багатокрокової, варіаційної.

Застосування оптимального агрегування дозволило розбити варіаційну задачу оптимального розвитку на дві задачі:

- задачу оптимального агрегування, що ставить у відповідність багатомірній – розподіленій виробничій системі еквівалентну одновимірну оптимальну систему;

- задачу визначення оптимальної стратегії розвитку.

Управліннями в цих задачах є розподіл ресурсів "в часі" – між інвестуванням і накопиченням і "в просторі" – між окремими виробничими елементами.

На конструктивному рівні розглянуто низку конструктивних моделей оптимізації процесів розвитку виробничих систем:

- наближена модель узагальненої варіаційної задачі розподілу ресурсів;

- точне розв'язання узагальненої варіаційної задачі розподілу методом принципу максимуму;

- розв'язання узагальненої варіаційної задачі розподілу для випадку використання зовнішніх ресурсів;

- нова модель процесу оптимального розвитку при урахуванні еластичності цін продажу продукції.

Результат розробки комплексу робочих моделей – напрацювання технологій конструювання робочих математичних моделей в комплексі з інтерфейсами для проведення обчислювальних експериментів і створення перехідної моделі з урахуванням моделей попиту на продукти виробництва.

3. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТІВ ОСВОЄННЯ

Для сучасних розподілених систем суттєвими є ефекти, які можна трактувати як освоєння виробництва або навчання виробничих елементів. Ці ефекти є досить новими і в літературі не знайдено математичних моделей для процесів розвитку з урахуванням ефектів освоєння. Однак бажано мати конкретні методи для розрахунку розподілу узагальнених ресурсів в часі – по кроках процесу, і в просторі – між елементами розподіленої системи.

В розділі 2 отримано розширену модель оптимального розвитку з урахуванням обмежень попиту. В базовій моделі розвитку ціна продукту вважалася постійною, а попит необмеженим. Розширена модель дозволяє урахувати зв'язок між ціною, попитом, але не враховує зв'язки між процесом виробництва і реалізації продукту з його собівартістю.

Класичні моделі "ціна–попит", "ціна–валовий прибуток" є неадекватними відносно реалій сучасних високотехнологічних, високодинамічних і глобалізованих виробництв. В монографії [49] подані результати досліджень механізмів породження функцій попиту в різних процесах розвитку. Згідно з цими моделями функції попиту можуть бути не монотонними, а ступінчастими.

Тому замість модифікації відпрацьованої і продуктивної моделі розвитку будуємо нову модель розвитку, орієнтовану саме на урахування породжуючих механізмів, навчання і освоєння.

Процес створення системи моделей розбиваємо в послідовність кроків, кожний з яких піддається верифікації. Згідно з методологією побудови моделей складних систем [28, 29, 41, 68-70, 80, 109, 117, 119, 122, 143]:

- використовуємо альтернативні моделі для взаємоперевірки і створюємо бібліотеки функціональних субмоделей;
- досліджуємо статику системи, будуємо модель процесу і досліджуємо на ній емпіричні управління і порівнюємо результати з статистичними даними;
- шукаємо точний розв'язок варіаційної задачі розвитку і досліджуємо властивості процесів розвитку та оцінюємо достовірність і точність моделі.

3.1. Визначення понять для моделей розвитку розподілених технологічних систем

В розділі 1 вже було виконане визначення понять. Однак новизна і комплексний характер задачі моделювання розвитку розподілених технологічних систем обумовлює відсутність стабільної і однозначної тер-

мінології. Тому в цьому розділі конкретизуємо визначення вживаних термінів стосовно моделі розвитку з урахуванням навчання. Зробимо це шляхом усереднення і узагальнення термінології з джерел [12, 25, 58, 66, 76, 77, 100, 101, 105-107, 127].

Узагальнена функція розвитку (ФР) – залежність темпу прирощення виробничих потужностей від темпу витрат ресурсів [86, 83, 122].

Ціни. В розроблюваній моделі "ціни" – це спряжені функції варіаційної задачі Лагранжа. Наприклад, у варіаційній задачі розвитку спряжена функція для змінної "витрати ресурсу для розвитку виробництва" характеризує величину прирощення інтегрального критерію на одиницю прирощення витрат.

Цінності. Сучасні теорія і практика далеко пішли від класичних визначень типу "ціна = собівартість + прибуток" [54-56, 114, 115]. Сьогодні домінуючим є підхід, що базується на поняттях встановлення "цінності" – корисності певного продукту, а на цій основі "справедливого розподілу цінності" між виробником і користувачем [115]. Такий підхід на верхньому ієрархічному рівні (табл. 1.1) приводить до задачі оптимального розподілу узагальнених ресурсів в просторі і часі між виробником і користувачами. Тому і для задачі розвитку "ціна продукту" – формальне поняття – змінна управління варіаційної задачі. Для практичного використання математичних моделей розвитку необхідно виконувати процедуру інтерпретації результатів стосовно конкретного виробництва конкретних моделей.

Узагальнена функція "попиту" (ФП) – залежність обсягу потреб або використання певного "продукту" від його "цінності", або "ціни". ФП залежить від "навчання". Функція попиту в "чистому" вигляді існує тільки для стабільних безконкурентних продуктів і виробників. Однак, в цілому, ФП – корисна наближена модель відповідної функціональної підсистеми [122]. Слід чітко розділяти використання цього терміна в техніці, зокрема, в моделюванні і обчислювальних методах. Зокрема обчислювальні системи великих підприємств, транспортних літаків будуються на процесах перерозподілу задач між обчислювальними елементами мережі на основі "цін" і "попиту". Ці терміни дуже далекі від термінів економіки – це просто параметри обчислювального алгоритму. Поняття "цін" і "попиту" широко використовуються спеціалістами з моделювання технічних систем [52–54, 67, 78, 80, 83, 109, 113, 116, 142, 143]. Особливо слід виділити роботи В. Опойцева, де саме на базі цих понять і математичного апарату гомотопічної топології будуються моделі колективної поведінки, що мають широке коло практичних застосувань, зокрема моделі розподілу узагальнених ресурсів у виробничих та обчислювальних системах [116]. Найбільш непродуктивним є намагання дати єдине остаточне означення цього розмитого поняття.

Процес розвитку системи – сукупність скоординованих в просторі і часі дій: по змінах конструкції та технології виробництва певного продукту; по розширенню виробничої системи. Інноваційні проекти – форма планової реалізації процесів розвитку – завжди пов’язані з невизначеністю і певним очікуваним позитивним балансом витрат і випуску продукції на кінець певного планового періоду [115, 135].

Модель однокрокової задачі оптимального управління з адитивним критерієм і обмеженнями. Задано систему з N елементів, що використовують деякий ресурс у кількості x_i і виробляють деякі продукти у кількості $y_i(x_i)$ згідно з ВФ з класу нестрого монотонно зростаючих невід’ємних функцій: $y_i = f_i(x_i)$, $i = 1..N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу. Задано: критерій (сумарне виробництво) $F(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$; обмеження $G(x) = R - \sum_{i=1}^N x_i = 0$. Ціль оптимізації: максимізація критерію. Змінні управління: розподіл ресурсу (x_1, x_2, \dots, x_N) .

Модель багатокрокової задачі оптимального управління. Терміни "однокрокова", "багатокрокова" задача введені Р. Беллманом, суть робіт якого можна охарактеризувати як гібрид математичних моделей оптимальних процесів і обчислювальних методів [10, 15, 18–23]. З багатокрокових розглянемо так звану "задачу розподілу" [15]. Задачі такого класу досліджуються в цій роботі. Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу $J(y) = \int_0^T F(x, y) dt$, де $x(t)$ – темп випуску продукту; $y(t)$ – темп вкладення ресурсів у розвиток, це змінна управління. Функції $x(t), y(t)$ пов’язані диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} x(t) = G(x(t), y(t)),$$

$x(0) = c > 0$ – початкове значення випуску. На функцію управління $y(t)$ накладено обмеження $0 \leq y \leq x$. Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими. В цілому ця задача є окремим випадком задачі Больца.

Стратегія управління – функція, що подає залежність від часу змінної управління протягом життєвого циклу виробничої системи. Оптимальна стратегія управління – результат розв’язку варіаційної задачі звичайно з інтегральними критерієм [142]. Сучасні технічні системи (програми, мікроконтролери) розробляються з урахуванням певного планового періоду [155–157].

Робоча математична модель. Текст, що відповідає стандартам для наукових публікацій (формули, рівняння, графіки, тексти, програмні модулі), що виконується в середовищі математичного пакета. Маються на увазі не тільки отримання числових результатів, але і складні символічні обчислення. Згідно зі світовою практикою забороняється виконувати

ти алгебраїчні перетворення вручну – помилки в програмах коштують занадто дорого.

3.2. Розробка моделей для задач розвитку

Розробка поданих далі математичних моделей розвитку була досить довгим процесом пошуку [2–4, 18, 22–27, 54–56, 61, 62, 65–69, 74–88, 102, 123–127, 139], власних розробок [8, 28, 89] та випробування в обчислювальних експериментах структурних (згідно з тривимірною декомпозицією, що подана в розділі 1) альтернатив для загальної моделі процесу та її складових – функціональних субмоделей.

В [89] доведено, що у варіаційній задачі розвитку з адитивним критерієм і обмеженнями можна замінити елементи з певними функціями розвитку (ФР), що працюють паралельно, еквівалентним елементом, функція розвитку якого для кожного значення витрат ресурсу дає максимальне значення прирощення сумарного темпу виробництва. Відповідно виконується також агрегування функцій попиту на окремі продукти [30, 31]. На цій підставі в розділі розглядаємо еквівалентну однопродуктову задачу розвитку. Якщо знайдено оптимальний процес розвитку еквівалентної системи, то можливо виконати дезагрегування – визначення управління для кожного елемента розподіленої системи [89].

3.2.1. Розробка графових моделей розвитку з освоєнням

Будемо дотримуватись методології розробки математичних моделей [122,143,149]: лінгвістична модель, графова модель, схема процесу.

Лінгвістична модель процесу. Опишемо логічну структуру задачі: після проектування певного продукту, в тому числі – інформаційного: створюються стартові виробничі потужності і стартова технологія. Стартовий попит на виріб залежить від ціни продукту і ще дуже багатьох факторів, якщо попит більший від темпу випуску, виробництво розширюється за рахунок власних ресурсів чи зовнішніх ресурсів. Звичайно, чим нижча ціна, тим більший попит і темп виробництва, але тим менший прибуток на одиницю виробу. Чим більший темп виробництва, тим менша частка постійних витрат у собівартості виробу, тим більш ефективне обладнання і технології застосовуються. Чим більший час випуску, тим більше навчається персонал, "випалюються" дефекти в обладнанні і техпроцесах, що веде до зменшення собівартості і зростання прибутку на одиницю вимірювання продукту (при постійній ціні).

Графова модель процесу. Подаємо описану логічну структуру – лінгвістичну модель, – графом зв'язків (рис 3.1). Графова модель дозволяє виділити функціональні підсистеми. Конкретизуємо зв'язки в системі – визначаємо змінні стану, змінні управління, у відповідність зв'язкам між змінними вводимо функції, що будуть визначені далі.

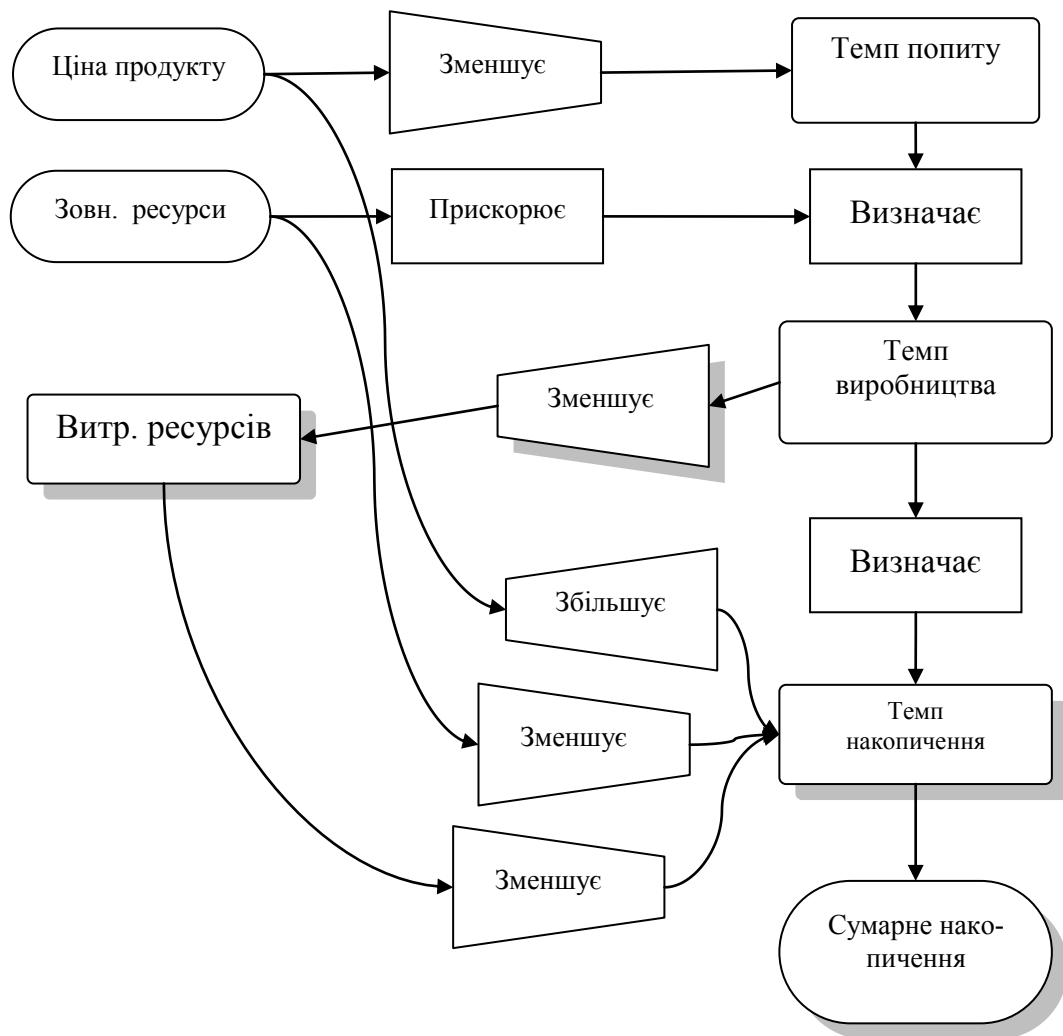


Рис. 3.1. Граф зв'язків між змінними

В пакетах VisSim і Simulink [32] програма моделювання в реальному часі оформлюється саме як блок-схема. В кожному блоці розміщується відповідна робоча математична модель, а всі блоки поєднуються потрібними зв'язками. Блок-схема доповнюється засобами введення вхідних даних та відображення результатів.

На рис. 3.2 подано наступний крок конкретизації моделі – побудовано структурну схему в стандартах теорії автоматичного управління – з детальним описом входів і виходів виділених функціональних блоків, з використанням суматорів та блока "множення".

В структурній схемі можемо виділити дві лінії, що починаються з "причин" – функцій попиту і освоєння. Третя лінія – підсистема оптимізації і управління, не деталізована.

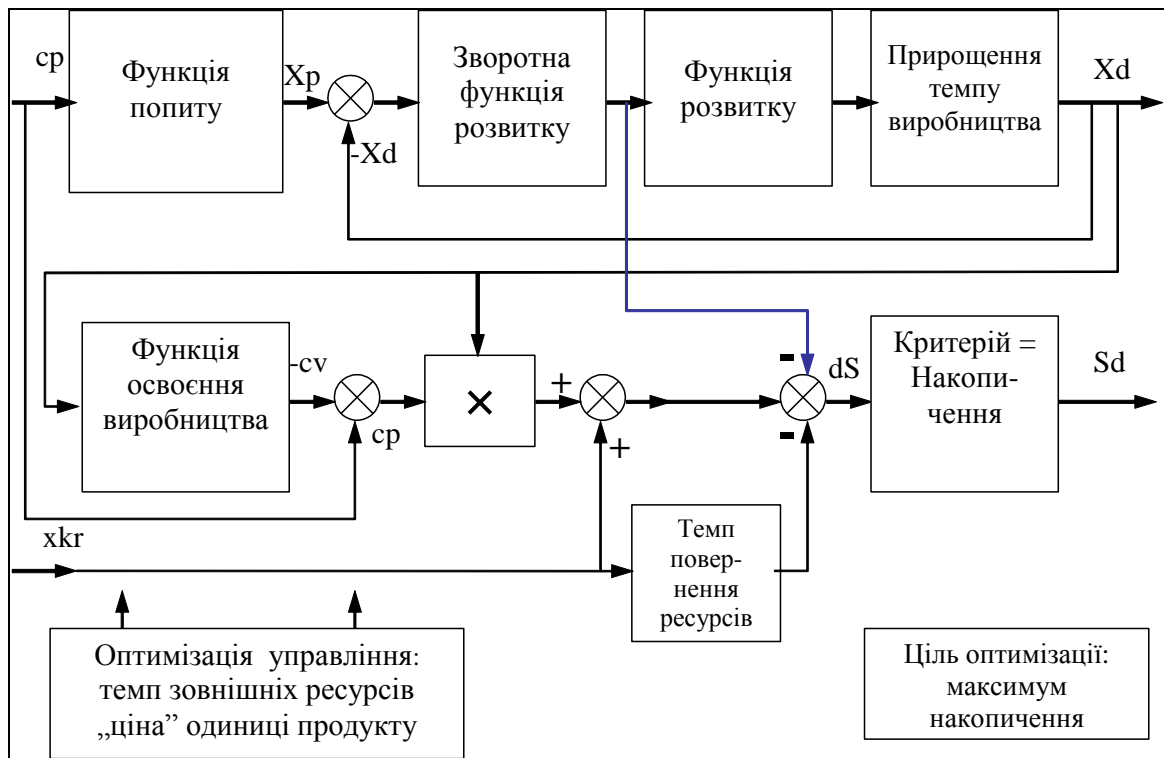


Рис. 3.2. Схема процесу розвитку з урахуванням "навчання"

В схемі, поданій на рис. 3.2 прийняті такі позначення:

Xp – потрібний темп випуску продукції;

Xd – дійсний темп випуску продукції;

Xkr – потрібний темп зовнішніх ресурсів;

Sd – поточне значення критерію;

dS – прирощення критерію;

cp – "ціна" одиниці вимірювання продукту;

cv – "собівартість" (виробничі витрати) одиниці вимірювання продукту.

Наступний етап – визначення конкретних математичних моделей відповідно з виділеними на рис. 3.2 функціональними блоками.

3.2.2. Розробка функціональних моделей для процесу розвитку

Виконаємо специфікацію функціональних елементів системи – "функції розвитку", "функції виробництва", "функції попиту", "функції навчання". Термін "функція" ми трактуємо ширше, ніж функцію математичну – як функцію в програмуванні. В програмуванні функція – це програмний модуль, що бере певний набір вхідних даних і повертає певний набір вихідних даних. В формально-математичному плані це можуть бути не тільки функції, але й функціонали і оператори, наприклад, диференціальні рівняння, складні системи рівнянь.

Модель розвитку виробництва. Функція розвитку характеризує залежність прирощення виробничих потужностей від темпу витрат на

розвиток. В загальному випадку віддача витрат на розвиток настає з певним запізненням, і не одразу, а протягом декількох періодів. Математична модель процесу – різницеве рівняння із запізненням. В цьому розділі використаємо таку модель:

$$\frac{d}{dt}x(t) = fin(y(t - \tau)), \quad (3.1)$$

де $x(t)$ – швидкість зміни (темп) виробничих потужностей, одиниць вимірювання продукції за одиницю часу; $y(t)$ – темп зовнішніх ресурсів; τ – запізнення віддачі зовнішніх ресурсів; $fin(y)$ – монотонна позитивна функція, що може бути випуклою, увігнутою, кусочно-лінійною; $fin(0) = 0$; $y > 0$; $fin(y) \geq 0$. Обґрунтування можливих типів функцій розвитку (рис. 3.3) дано у [18–20]. На рис. 3.3 подано випуклу, увігнуто-випуклу, лінійну та кусочно-лінійну функції розвитку. Цю "бібліотеку" можна розширювати, наприклад, добавляючи багатоступінчасту функцію.

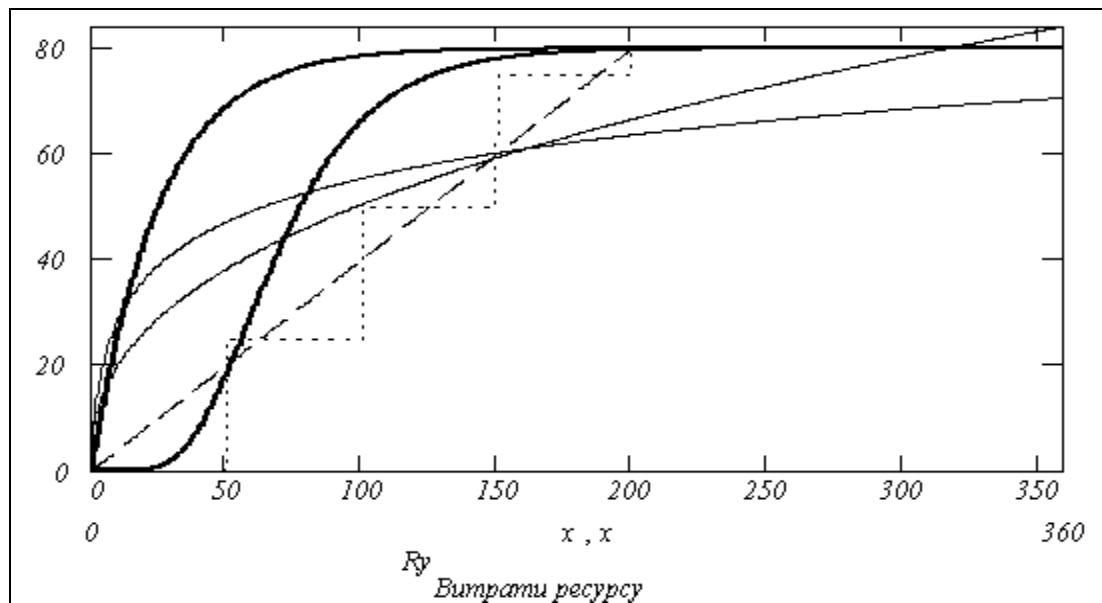


Рис. 3.3. Можливі види функції віддачі ресурсів витрачених на розширення виробництва

Модель попиту на новий продукт. Відбираємо і узагальнюємо те, що визнається достовірним і коректним. Залежність "попит-цінність" для продуктів певного класу є результатом взаємодії таких факторів: частотне розподілення потенційних користувачів продукту по доходах, оцінка користувачем цінності, корисності та престижності продукту. Перший фактор визначає кількість користувачів, що мають можливість придбати цей продукт за певною ціною. Другий фактор визначає частку множини потенційних користувачів, що мають не тільки можливість, але й бажання придбати продукт.

Другий фактор визначається як об'єктивною корисністю – зручністю, надійністю, економічністю продукту, так і пропагандою цінності продукту, підвищенням рівня сервісу, "преміями" стабільним і активним користувачам.

Згідно з принципом редукційної декомпозиції [28, 29], будуємо функціональну модель "попит", як послідовність наближень. В якості першого, простішого, наближення розглядаємо усереднену модель [122, 150]. Вона є лінійною у подвійному логарифмічному масштабі – це зручно для аналітичних методів, в певних ситуаціях добре наближує реальну залежність. Підставою для останнього припущення є те, що ця залежність є результатом усереднення функцій можливостей і бажань великої кількості споживачів, а такі залежності повинні бути стабільними і досить простими. Візьмемо за основу цю модель, але видалимо нереалістичні "хвости" для нульової: $p = 0$, та нескінченної $p = \infty$ цін. В останньому випадку граничною ціною є ціна конкурентів. Зрозуміла обмеженість попиту при нульовій ціні – це фізична обмеженість потенційного ринку. Як приклад структурної декомпозиції розглянемо дві альтернативні моделі:

– класичну модель, "обрізану" обмеженнями при малих і великих "цінах" (3.2);

– модель на базі логнормального розподілення (3.3).

Ці моделі є тільки апроксимаціями експериментальних даних. На рівні відтворення статистичних залежностей не менш природною може бути модель на базі логнормального розподілу. "Попит" інтерпретується як імовірність того, що певний відсоток користувачів вибере продукт при певній "ціні". Подаємо робочі моделі – програмні модулі для першої і другої альтернативних моделей "попиту".

$D1(p, n, Dm, pma) :=$	$fuz1 \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } p < pma \\ \max\left[\left[1 - \left[\frac{p - pma}{pma}\right]^4\right], 0\right] & \text{otherwise} \end{cases}$ $fppt \leftarrow Dm \cdot 3 \cdot (p + .00001)^{-n}$ $fpopr \leftarrow \min(fppt \cdot fuz1, Dm)$ $fpopr$	(3.2)
------------------------	--	-------

$D2(p, n, Dm, pma) :=$	$fuz1 \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } p < pma \\ \max\left[\left[1 - \left[\frac{p - pma}{pma}\right]^4\right], 0\right] & \text{otherwise} \end{cases}$ $fppt \leftarrow Dm \cdot (1 - plnorm(0.1 p, n, .6))$ $fpopr \leftarrow fppt \cdot fuz1$ $fpopr$	(3.3)
------------------------	---	-------

На рис. 3.4 подано в подвійних логарифмічних масштабах альтернативні графіки "цінність продукту". Подано дві пари графіків – з однаковими параметрами. Запропоновані моделі є елементами певного класу функціональних моделей "цінність–попит" – статичних, детермінованих. Цей клас можливо розширювати. Задаємо специфікацію моделей цього класу $D1(p, n, Dm, pma)$, що розшифровується наступним чином: Попит_номер_моделі (p – цінність; n – параметр функції попиту; Dm – максимальний попит; pma – максимальна цінність). Ця модель відноситься до класу моделей-апроксимацій [122, 149]. Для різних видів продукції існують різні класи моделей "попиту". Розглядаємо два параметричних класи [57–59] цих моделей. Згідно з концепціями моделювання складних виробничих систем [122, 149] розвитку залежність оптимальних стратегій від класу "узагальнених функцій попиту". Моделі усталених станів є елементом декомпозиційної системи моделей, а саме, це структурна декомпозиція на дві альтернативні моделі різних параметричних класів, але одного топологічного класу [116]: позитивних, монотонно спадних, обмежених.

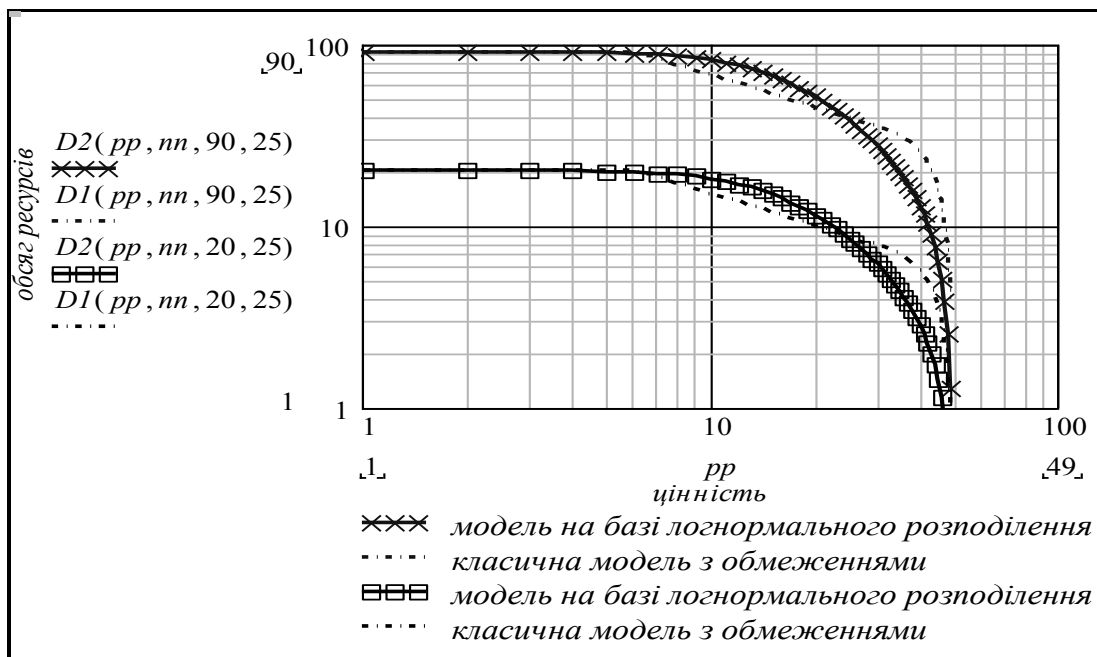


Рис. 3.4. Порівняння альтернативних моделей попиту

Модель процесу освоєння виробництва. Ця модель характеризує залежність собівартості від темпу випуску і сумарного випуску продукції. Розглянемо спочатку стисло можливі шляхи зменшення собівартості виробництва, це:

– ефект навчання, тобто навчання персоналу, наладки обладнання, постійне покращення конструкції і технологій, наладка каналів збуту продукту, встановлення відносин "спорідненості" з посередниками і

користувачами;

– ефект масового виробництва – постійні витрати, що не залежать від темпу (обсягу) випуску, розподіляються на велику кількість продукції. Сьогодні діє ще один фактор масового виробництва – дуже великі обсяги виробництва дозволяють створити і використати наукоємні "високі технології", що значно зменшують змінні витрати на одиницю продукції. Витрати на одиницю продукції зменшуються пропорційно накопиченому обсягу випущеної продукції. Розглянемо моделі першого наближення для собівартості. Витрати на одиницю продукції можна відобразити такою моделлю "освоєння виробництва", що зібрана з моделі освоєння [80] та моделі "постійних витрат" [103] (моделі отримані за допомогою символного процесора):

$$sv(Xs, X, p, vv, vp) = vv \cdot p^{\frac{\ln(Xs)}{\ln(2)}} + vp \cdot X^{-1}, \quad (3.4)$$

де vv – коефіцієнт "змінних" витрат; vp – коефіцієнт "постійних" витрат; $0 < p < 1$ – коефіцієнт освоєння виробництва; X – поточний темп випуску; Xs – накопичений випуск за плановий період виробництва продукту.

Записуємо дискретну модель витрат на поточний випуск. Виробничі витрати (i -го елемента в момент t) $Vytr_{i,t}$ пропорційні темпу випуску. Записуємо робочий вираз для виробничих витрат (собівартості) на виріб

$$Vytr_{i,t} = sv \left(\sum_{\tau=1}^t X_{i,\tau}, X_{i,t}, p, vv, vp \right) \cdot X_{i,t},$$

де $X_{i,t}$ – дискретизований темп випуску i -го продукту в момент t .

Можна бачити, що навіть спрощені моделі виробничих витрат є складними – витрати залежать і від темпу випуску і від накопиченого випуску.

3.2.3. Аналіз усталених станів процесів розвитку

Усі моделі навчання виробничої системи при умові незмінної технології є асимптотичними – тобто з часом собівартість стабілізується. Це дає можливість перш, ніж переходити до моделей динаміки, розробити математичну модель для аналізу усталених станів процесів розвитку. Модель розвитку з урахуванням навчання створювалась без прототипів, на основі словесних описів, тому декомпозиція процесу розвитку необхідна умова створення працездатної базової моделі, на базі якої і створюється "віяло модифікацій" ("веер" – калька з американського терміна). Конкретні призначення моделі статички – контроль коректності

моделі динаміки: усталені стани процесу, розрахованого за моделлю динаміки, повинні якісно (кількість і положення екстремумів, наявність точок перегину та ін.) і кількісно (значення усталених змінних) співпадати з моделлю статички. Простіша цінова стратегія – постійна протягом процесу розвитку ціна. Саме для такої стратегії існують емпіричні дані, що були опорними для контролю коректності моделі для дослідження усталених станів [8].

Проведене дослідження моделей та властивостей процесів розвитку. На рис. 3.5 подано залежність накопиченого випуску (критерію оптимальності для процесів розвитку) від ціни та "потенціалу навчання" – величини стартових витрат на одиницю продукту, що можуть бути усунені в процесі розвитку. Цей параметр – об'єкт "технологічного прогнозування" [78].

Задача оптимізації цінових стратегій з урахуванням навчання є саме задачею моделювання технічних систем і технологій, а не задачею статистики і економіки. Головна властивість процесів розвитку при змінній собівартості – наявність двох екстремумів критерію накопичення. Ця властивість відповідає тому, що спостерігається в реальності: в багатьох виробничих галузях виробники концентруються біля станів "дорогий продукт для вузького кола споживачів" і "дешевий продукт для більшості потенційних споживачів". При відсутності ефекту навчання отримуємо класичну моноекстремальну залежність. Це є підтвердженням адекватності нашої моделі реальним процесам в усталених станах.

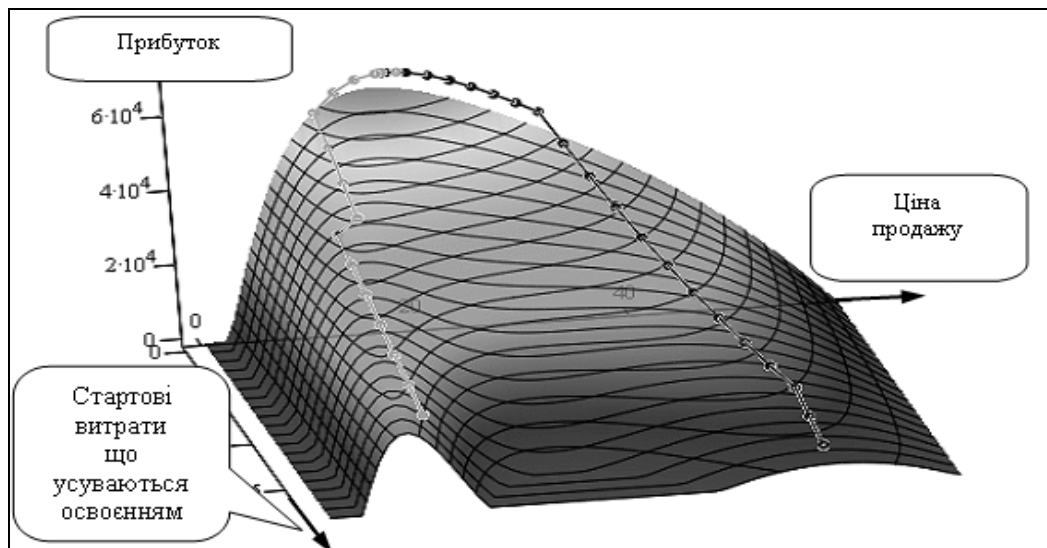


Рис. 3.5. Залежність накопиченого випуску від цінності продукту і стартових змінних витрат

На рис. 3.6 подано залежності "ціна–накопичення", що розраховані за альтернативними моделями попиту. Стосовно величин сумарно-

го накопичення, слід відзначити, що це дуже невизначена величина, що чутлива до багатьох факторів. Функція попиту є досить невизначеною. Тому ми використовуємо і досліджуємо альтернативні моделі. Особливістю розподілених систем з великим числом елементів є наявність механізмів утворення стійкості і оптимальності великої системи через випадкові і невизначені дії окремих елементів. Тут виникають два типи систем, обумовлені двома типами випадкових дій елементів:

- розподілені системи, що є результатом некорельованих випадкових дій елементів;
- розподілені системи, що є результатом корельованих випадкових дій елементів.

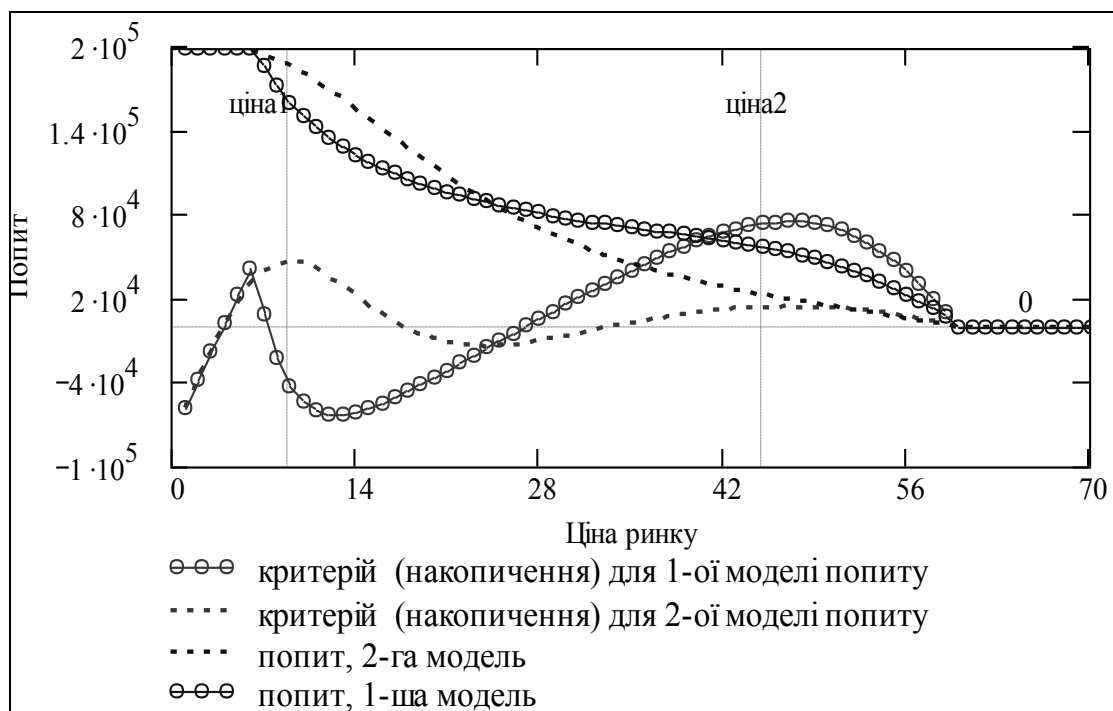


Рис. 3.6. Порівняння результатів моделювання за альтернативними моделями попиту

Перший тип систем є досить дослідженим [54, 116]. При умові відсутності монопольних ефектів в таких системах стани рівноваги є одночасно стійкими і оптимальними. Для таких систем характерна нечутливість станів рівноваги до конкретного виду функцій виробництва, розвитку та обміну. В [116] сформульовано і обґрунтовано принцип "мінімально розумного управління", суть якого в тому, що "механізми" стійкої і оптимальної системи повинні задовольняти обмеження топологічного характеру. Наприклад, вимога випуклості функції виробництва. В другому типі систем рівновага досягається через періодичні "безпричинні катастрофи". Статистика систем першого типу – гаусова, а статистика систем другого типу – негаусова. Частотні розподіли в системах

другого типу – мають гіперболічні асимптоти і нескінчену дисперсію. Зокрема, відносно задачі вибору "більш адекватної" моделі (рис. 3.6) можна сказати, що в системі можуть бути елементи різних класів, що діють згідно з альтернативними моделями попиту. Тобто, при моделюванні процесів розвитку реальних розподілених систем ми повинні враховувати не тільки параметричні невизначеності, але і структурні – невизначеності класу моделей функціонування елементів.

3.3. Розробка моделі динаміки процесу розвитку розподіленої системи

На базі результатів підрозділів 3.1, 3.2 збираємо дискретизовану модель динаміки процесу розвитку. Головним елементом новизни моделі є інший вибір змінних управління. У відомій літературі не знайдено аналогів запропонованої моделі. При пошуку, як побічний результат, отримана статистика використання варіаційних задач в моделюванні: 80% – задачі мінімізації узагальненого інтегрального квадратичного критерію, 15% – задачі максимізації інтегрального критерію першого роду (накопиченого випуску), 5% – інші задачі.

У задачі розподілу, дослідженій Беллманом [21–23] змінними управління є частки поточного ресурсу системи, що йде у розширення виробничих потужностей та темп залучення зовнішніх ресурсів. Ми вибираємо як змінну управління "ціну" продукту і темп зовнішніх ресурсів [10, 32].

Постановка оптимізаційної задачі. Нам необхідно знайти дві функції – залежності "ціни" продукту оптимальної $cpo(t)$ і розміру зовнішніх ресурсів $xkro(t)$ від часу, такі що дають максимум сумарного прибутку. Сумарний прибуток – це інтеграл (сума для дискретної задачі) від потоку прибутків dS .

"Прибуток" у нас, як і "ціна" є чисто технічним поняттям, далеким від фінансового визначення прибутку, де враховуються податки, дивіденди та ін. Наша задача є варіаційною – треба знайти саме функцію часу $cpo(t)$ таку, що максимізує сумарний прибуток.

Природно і зручно розглядати систему як дискретну – це відповідає дискретності змінних реального виробництва, а дискретні – різниці рівняння – просто реалізуються в ЦОМ. Запишемо дискретні рівняння динаміки системи в термінах введених в пункті 3.2.2 функцій. Конкретні версії цих функцій вибираються з відповідних бібліотек і так збирається орієнтована на певний підклас задач (наприклад: комп'ютери, мобільні телефони, тепловози, біогазові установки) реалізація модульної математичної моделі процесу розвитку з урахуванням освоєння.

$$\left. \begin{aligned}
cp_{t+1} &= Ops(t); \\
xd_{t+1} &= Fdm(cp_t); \\
Dxp &= Fin(y_t); \\
xp_{t+1} &= xp_t + Dxp \cdot Dt; \\
cv_{t+1} &= cv_t - (K1 \cdot xp_t + K2 \cdot Dxp) \cdot Dt; \\
dox_{t+1} &= (cp_t - cv_t) \cdot xp_{t+1}; \\
y_{t+1} &= FinO(xd_{t+1} - xp_{t+1}); \\
prb_{t+1} &= dox_{t+1} - y_{t+1}; \\
Sd_{t+1} &= Sd_t + prb_{t+1} \cdot Dt; \\
Sxp_{t+1} &= Sxp_t + xp_{t+1} \cdot Dt,
\end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

де $x(t)$ – швидкість зміни (темп) виробничих потужностей, одиниць вимірювання продукції за одиницю часу; $y(t)$ – темп витрат на розвиток; τ – запізнення віддачі витрат на розвиток; $Fin(y)$ – монотонна додатна функція, що може бути випуклою, увігнутою, не мати неперервних похідних ($fin(0) = 0$, $y > 0$, $fin(y) \geq 0$); $Fdm(cp)$ – залежність попиту від ціни, звичайно монотонно зменшується; $FinO(dxp)$ – функція зворотна до функції $Fin(y)$.

Визначимо вектор управління:
$$u(t) = \begin{pmatrix} cp(t) \\ xkr(t) \end{pmatrix},$$

де $cp(t)$ – "ціна" одиниці вимірювання продукту; $xkr(t)$ – темп зовнішніх ресурсів.

Зробимо потрібну нам дискретну модель виробничих витрат в прирощеннях. Продиференціюємо (символьним процесором) вираз (3.4). і отримуємо:

$$\begin{aligned}
dfcv(t) &= \frac{d}{dt} \left(vV \cdot pO \frac{\ln \left(\int_0^t xP(\tau) d\tau \right)}{\ln(2)} + vP \cdot xP(t)^{-1} \right) \rightarrow \\
&\rightarrow vV \cdot pO \frac{\ln \left(\int_0^t xP(\tau) d\tau \right)}{\ln(2)} \cdot \frac{xP(t)}{\int_0^t xP(\tau) d\tau \cdot \ln(2)} \cdot \ln(pO) - \frac{vP}{xP(t)^2} \cdot \frac{d}{dt} xP(t)
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Зауваження. Необхідна умова отримання символічних результатів символічним процесором: усі змінні і коефіцієнти у виразі, який обробляється, повинні не мати значень ("змінна без значення" – елемент мови C++). Оригінальний текст цієї роботи – фактично низка модулів об'єктної програми (цей текст – трансляція (опція "зберегти як документ ... ") документів пакета в середовищі Word).

Замінімо у (3.6) інтеграл сумою Sxp_t , а похідну – першою різницею Dxp і отримуємо робочий вираз для

$$cv_{t+1} = cv_t + \left(vv \cdot \frac{xp(t) \cdot \ln(po)}{\ln(2) \cdot Sxp_t} \cdot po^{\frac{\ln(Sxp_t)}{\ln(2)}} - \frac{vp}{xp(t)^2} \cdot Dxp \right) \cdot Dt, \quad (3.7)$$

де vv , vp – коефіцієнти змінних і постійних витрат виробництва; po – коефіцієнт освоєння; xp – темп випуску продукції (одиниць вимірювання продукції за одиницю часу); Dxp – похідна (або оцінка похідної); Sxp – інтеграл (або сума) від темпу випуску продукції.

У виразі (3.7) cv_t , xp_t – відповідні змінні еквівалентної дискретної моделі,

$$\int_0^t xp(\tau) d\tau \Rightarrow Sxp_t = \sum_{\tau=1}^t xp_{\tau}, \quad \frac{d}{dt} xp(t) \Rightarrow Dxp_t = \frac{xp_t - xp_{t-1}}{Dt} -$$

дискретні еквіваленти інтегралу і похідної.

Крім основної моделі виробничих витрат (3.7) подаємо її апроксимацію лінійним виразом

$$cv_{t+1} = cv_t + (K1 \cdot xp_t + K2 \cdot Dxp) \cdot Dt. \quad (3.8)$$

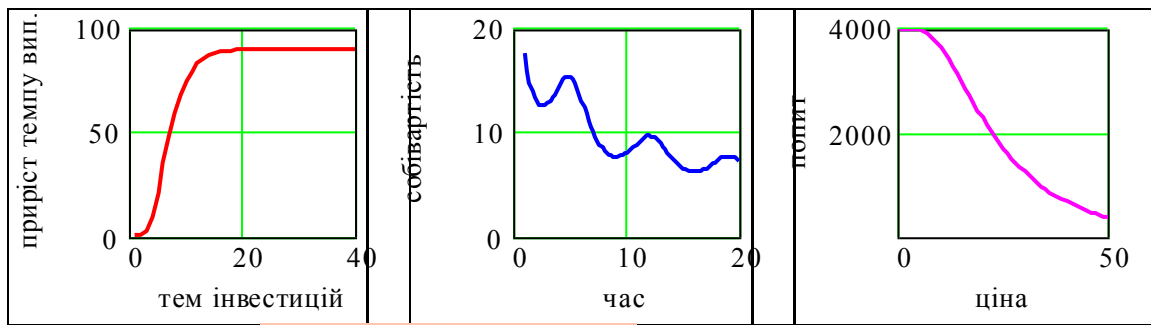
Неважко знайти значення коефіцієнтів $K1$ та $K2$, що оптимально наближають наближену модель (3.8) до "точної". Однак і (3.7) теж наближення до дуже складної, розмитої, ситуативної залежності виробничих витрат від часу – функції освоєння.

Складаємо на базі рівнянь (3.5) програму моделювання процесів розвитку при використанні емпіричних стратегій управління процесом розвитку.

Перше призначення програми – контроль коректності програми моделювання і оптимізації, що розглядається в наступному розділі.

Друге призначення – дослідження та параметрична оптимізація емпіричних стратегій розвитку з урахуванням освоєння.

На рис. 3.7 подано базовий інтерфейс програми моделювання.



Функція інвестицій $Fin(y, A, \alpha, s) = F4$ (вище!). параметри:

"амплітуда" $Am \equiv 9$; "частота" $\alpha 1 \equiv 0.4$; "увігнутість" $es \equiv 10$

Функція собівартості: $Fcv(vv, vp, po, Dxp, xp, Sxp) = cv$ (вище!); параметри:

мінімальна собівартість $sv0 \equiv 30$; стартові витрати: "змінні" $vv \equiv 45$; "постійні" $vp \equiv 250$;

коефіцієнт освоєння $po1 \equiv 0.89$

Функція попиту $Fdm(p, n, Dm, pma) = D2$ (вище!); параметри: еластичність $pr \equiv 0.6$;

максимальний попит $Dm1 \equiv 4000$; максим. ціна $pma1 \equiv 70$. Плановий період $Tm \equiv 12$; крок

обч. $Dt \equiv 0.05$; число кроків $Nt \equiv \text{ceil}(Tm \div Dt)$, $Nt = 240$; ефект.інвестицій $Kin \equiv 5.5$;

старт. темп виробництва $xp0 \equiv 5$. **Функція ціни**(цінова стратегія) $op(t, so) \equiv 62$;

Сум. прибуток $SPrb = 26625$ Сум. інвестиції .. Чистий прибуток .. Фінальні виробн. потужн..

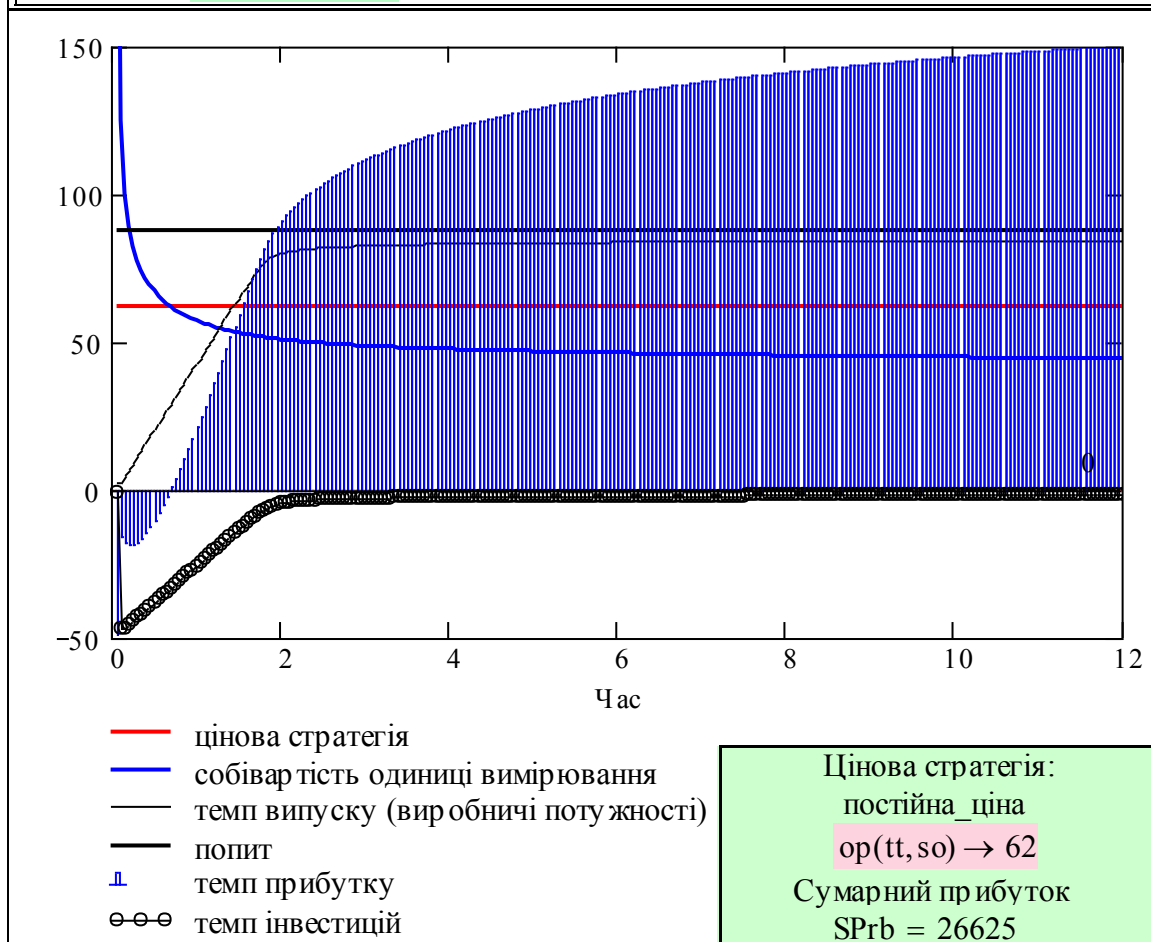


Рис. 3.7. Інтерфейс програми моделювання процесів розвитку

3.4. Отримання точного розв'язку задачі розвитку з урахуванням ефекту освоєння виробництва

Поставимо і розв'яжемо варіаційну задачу знаходження оптимальної стратегії розвитку. Терміни "стратегія управління", "стратегія прийняття рішень" часто зустрічаються в літературі. В нашій роботі згідно з [21–23] "стратегія розвитку з урахуванням освоєння" ("цінова стратегія") – функція $cp(t)$ – залежність ціни продукту від часу, така що максимізує інтегральний критерій накопичення.

Згідно з методологією Р. Беллмана вже в постановці вкажемо на недолік прийнятої постановки задачі: "ціна продукту" сама по собі односторонньо не визначає попит на нього [21–23]. Тобто будемо йти по хибному шляху, але свідомо, це убезпечить нас від "застрягання" на тимчасовій моделі.

"Ціна продукту" – розмите системне поняття, що враховує усі компоненти витрат користувача. Не враховуємо в цьому розділі специфічні ефекти динаміки попиту – ажіотажний попит, відкладений попит та ін. Зміна ціни в будь-якому напрямі повинна базуватись на складній інформаційній діяльності з освоєння і донесення до користувачів цінності продукту.

3.4.1. Постановка варіаційної задачі оптимізації

Як базову розглядаємо "одновимірну" – однопродуктову оптимально агреговану систему. Метод оптимального агрегування для задач з адитивними критеріями і обмеженнями дає можливість замінити систему паралельно працюючих елементів одним еквівалентним елементом і розглядати еквівалентну одновимірну систему [89, 95]. Формалізуємо задачу, записуємо диференціальні рівняння виробничої системи в стандартному для варіаційних задач [21–23] вигляді.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} cv &= fcv(cv, cp); \\ \frac{d}{dt} xd &= fd(cp); \\ \frac{d}{dt} xv &= fin(xv); \\ J &= \int_0^{T_p} fj(cv, cp) dt, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

де cp – ціна одиниці вимірювання продукту; cv – виробничі витрати на одиницю вимірювання продукту; xd , xv – темпи попиту і випуску відпо-

відно; $fcv(\cdot)$, $fd(\cdot)$, $fin(\cdot)$, $fj(\cdot)$ – функції освоєння, попиту, розвитку та критерію, що були визначені в розділі 3.1.

В (3.9) подані: рівняння динаміки собівартості продукту (виробу); рівняння динаміки попиту на продукт; рівняння динаміки темпу виробництва (виробничих потужностей); критерій – прибуток накопичений за період T_p .

Ціль оптимізації: $\max\{J\}$, змінна управління: – ціна cp .

Це варіаційна задача Ейлера–Лагранжа з інтегральним критерієм і обмеженнями, що задані диференціальними рівняннями. Ми записали задачу в термінах *змінної стану процесу* – собівартості cv , і *змінної управління* – ціни продукту cp . Однак, собівартість залежить безпосередньо від обсягу випуску продукції та накопиченого обсягу випуску. Крім того, обсяг випуску є більш вимірюваною категорією, ніж прибуток і собівартість.

Вибираємо для розв’язання варіаційної задачі метод принципу максимуму Л.С. Понтрягіна, тому що він дає можливість гнучкого поєднання аналітичних і числових методів розв’язання, а задача максимізації функції Гамільтона легко "вбудовується" в програми моделювання процесів розвитку.

Розширимо набір змінних (вектора стану) процесу розвитку виробничої системи. Будемо розглядати такі змінні: J – сумарний прибуток, xv – темп випуску продукції, xs – накопичений обсяг випуску, xd – темп попиту, cv – собівартість продукції. Змінні управління – ціна продукту та темп витрат на розвиток.

Приведемо задачу до канонічної форми.

1. Беремо похідну від критерію і додаємо це рівняння до рівнянь процесу:

темп зміни критерію	$\frac{d}{dt} J = fj(cv, x, cp);$
темп зміни темпу випуску	$\frac{d}{dt} xv = fin(xv);$
темп зміни накопиченого випуску	$\frac{d}{dt} xs = xv;$
темп зміни темпу попиту	$\frac{d}{dt} xd = fd(cp);$
темп зміни собівартості	$\frac{d}{dt} cv = fcv(x, xs).$

В першому наближенні можна вважати, що темп виробництва точно дорівнює темпу попиту, тобто, темп виробництва $x(t)$ дорівнює:

$$x = xd = D2(cp, n, Dm, pta) \quad \text{або} \quad D1(cp, n, Dm, pta).$$

2. Складаємо функцію Гамільтона:

$$H(cv, cp) = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i = \psi_j \cdot f_j + \psi_{cv} \cdot f_{cv} + \psi_x \cdot x. \quad (3.10)$$

Згідно з методикою розв'язання задачі методом принципу максимуму, не включаємо в функцію Гамільтона обмеження на управління.

3. Записуємо умову оптимальності управління

$$H_m(.) = \max_{cp} \{H(cv, cp)\}.$$

4. Складаємо рівняння для визначення спряжених функцій (згідно з властивостями функції Гамільтона [63]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_j(t) &= -\frac{\partial}{\partial J} H(cv, x, cp); \\ \frac{d}{dt} \psi_{cv}(t) &= -\frac{\partial}{\partial cv} H(cv, x, cp); \\ \frac{d}{dt} \psi_x(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} H(cv, x, cp). \end{aligned} \right\}$$

Через ці функції виражається оптимальне управління. Особливість принципу максимуму в тому, що варіаційна задача знаходження функції, яка дає екстремум функціоналу замінюється задачею математичного аналізу з визначення параметрів оптимального управління $cp(t)$. Структура оптимального управління, внаслідок обмежень, може бути простою. В загальному випадку задача визначення оптимального управління методом принципу максимуму зводиться до розв'язання системи з $(n + n + m)$ рівнянь (n дифрівнянь процесу, n дифрівнянь для спряжених функцій, m рівнянь для оптимальних управлінь). В нашому випадку потрібно знаходити на кожному кроці процесу розв'язання диференціальних рівнянь.

За своєю суттю метод принципу максимуму, як обчислювальний метод є декомпозиційним: задачу знаходження екстремуму функції K (число кроків процесу) змінних розбиваємо в послідовність задач знаходження екстремуму функції Гамільтона тільки по поточних змінних управління – поточній ціні продукту та темпу залучення зовнішніх ресурсів. Щоб уникнути чергового "застрявання", пам'ятаємо, про суттєвий недолік методу – знаходження спряжених функцій і функції Гамільтона в загальному випадку – складна задача.

3.4.2. Визначення спряжених функцій

Виберемо деякі правдоподібні моделі для функцій $f_j(.)$ та $f_{cv}(.)$ і запишемо вираз для функції Гамільтона.

Визначимо функцію $fj(\cdot)$, що є похідною від критерію:

$$J = \int_0^{Tp} fj(cv, cp) dt = \int_0^{Tp} (\text{потік}_{\text{прибутку}} - \text{потік}_{\text{зовнішніх ресурсів}}) dt = \\ = \int_0^{Tp} \left[x(t) \cdot (cp(t) - cv(t)) - \text{fino} \left(\frac{d}{dx} x(t) \right) \right] dt.$$

Це фактично підінтегральний вираз критерію:

$$fj(cv, x, cp) = x(t) \cdot (cp(t) - cv(t)) - \text{fino} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right). \quad (3.11)$$

Перша складова функції це "прибуток" від випущеної продукції, друга складова (від'ємна) – витрати ресурсу на розширення виробництва.

Ми припустили, що обсяг виробництва дорівнює потребам. Тоді ми можемо виключити змінну $x(t)$ з рівнянь динаміки:

$$x(t) = D(cp(t), n, Dm, pma).$$

В процесі роботи програми оптимізації і моделювання параметри "функції попиту", що характеризує потребу в продукті: n, Dm, pma – еластичність, максимальний попит, максимальна ціна, вводяться один раз, на початку процесу. Наша робота має електронну версію, де формули в тексті є елементами main-програми. Програмні модулі моделювання і оптимізації є підпрограмами main-програми. Змінні визначені в підпрограмах є локальними і є "невидимими" в main-програмі. Далі розглядаються саме локальні змінні. Зокрема, вважаємо темп випуску функцією тільки ціни продажу $cp(t)$:

$$x(t) = D(cp(t), n, Dm, pma) = Fd(cp). \quad (3.12)$$

Підставляємо (3.12) в (3.11)

$$fj(cv, cp) = Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - \text{fino} \left(\frac{d}{dt} Fd(cp(t)) \right). \quad (3.13)$$

Згадаємо, що дані для задачі оптимізації цінової стратегії є невідзначеними і нечіткими. Тому можливо виконати ще одне спрощення – вважати функцію віддачі зовнішніх ресурсів лінійною. Лінійною буде і зворотна функція

$$\text{fino}(dx) = Kinv \cdot dx.$$

З урахуванням цього отримуємо вираз для правої частини:

$$fj(cv, cp) = Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - Kinv \cdot \left(\frac{d}{dt} Fd(cp(t)) \right). \quad (3.14)$$

Визначимо функцію $fcv(x, t)$. Записуємо спрощену функцію собі-

вартості:

$$cv(x,t) = vv \cdot p^{Ko \cdot \ln(t)} + vp \cdot x(t)^{-1};$$

Беремо похідну від цієї функції (за допомогою символного процесора)

$$\frac{d}{dt}(vv \cdot p^{Ko \cdot \ln(t)} + vp \cdot x(t)^{-1}).$$

Таким чином, отримуємо:

$$fcv(x,t) = vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{x(t)^2} \cdot \frac{d}{dt}x(t). \quad (3.15)$$

Бачимо, що функція має дві складові – функцію часу і функцію темпу випуску $x(t)$. Підставимо (3.12) в (3.15) і отримаємо такий вираз:

$$fcv(cv, cp) = vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{Fd(cp)^2} \cdot \frac{d}{dt}Fd(cp). \quad (3.16)$$

3.4.3. Визначення функції Гамільтона

Підставимо (3.14) та (3.16) у вираз для функції Гамільтона (3.10) і спряжених функцій. Враховуємо, що змінна x , за рахунок припущення про рівність попиту і виробництва, виключена.

$$\begin{aligned} H(cv, cp) &= \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i = \psi_j \cdot fj + \psi cv \cdot fcv; \\ H(cv, cp) &= \psi_j \cdot \left[Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - Kin v \cdot \left(\frac{d}{dt} Fd(cp(t)) \right) \right] \dots \\ &+ \psi cv \cdot \left[vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{Fd(cp)^2} \cdot \frac{d}{dt} (Fd(cp)) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Навіть для значно спрощеної задачі отриманий вираз для функції Гамільтона є досить складним.

3.4.4. Знаходження спряжених функцій

Підставляємо тепер вираз для функції Гамільтона (3.17) у дифрівняння спряжених функцій

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi J(t) &= - \frac{\partial}{\partial J} H(cv, cp, \psi J, \psi cv); \\ \frac{d}{dt} \psi cv(t) &= - \frac{\partial}{\partial cv} H(cv, cp, \psi J, \psi cv). \end{aligned} \right\}$$

Знаходимо відповідні частинні похідні від функції Гамільтона

$$\frac{\partial}{\partial J} H(cv, cp, \psi J, \psi cv) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial cv} H(cv, cp, \psi J, \psi cv) = -\psi J \cdot Fd(cp)$$

і підставляємо їх у диференціальні рівняння для спряжених функцій

$$\frac{d}{dt}\psi J(t) = 0; \quad \frac{d}{dt}\psi cv(t) = \psi J \cdot Fd(cp).$$

Розв'язуємо ці диференціальні рівняння

$$\psi J(t) = Co1; \quad \psi cv(t) = Co1 \cdot \int_0^t Fd(cp(t))dt.$$

Підставляємо отримані вирази у вираз для функції Гамільтона.

$$\begin{aligned} H(cv, cp) &= \psi j \cdot fj + \psi cv \cdot fcv = \\ &= Co1 \cdot fj(cv, cp) + \left(Co1 \cdot \int_0^t Fd(cp(t))dt \right) \cdot fcv(cp, t). \end{aligned}$$

Згідно з методом принципу максимуму нам потрібно на кожному кроці процесу знаходити максимум цієї функції. Положення максимуму не залежить від множника-константи, тому остаточно маємо:

$$H(cv, cp, t) = fj(cv, cp) + fcv(cp, t) \cdot \int_0^t Fd(cp(t))dt. \quad (3.18)$$

Для значно спрощеної одновимірної задачі маємо досить складний вираз, в який входять функція попиту, функція освоєння (залежна від функції попиту). Функція освоєння входить і як похідна, і як зворотна величина від квадрату. Загальна характеристика того, що ми отримали – складний вираз, який залежить від нечітких і невизначених залежностей. На кожному кроці моделювання оптимального процесу розвитку системи ми повинні підставити у цей вираз поточні значення собівартості $cv(t)$, моменту часу t , і шукати значення ціни продукту $cp(t)$, що дає максимум функції $H(cv, cp, t)$.

Для розв'язаної задачі моделювання оптимальних процесів розвитку з урахуванням ефектів освоєння не знайдено близьких аналогів. Тому для перевірки математичної коректності і адекватності реальним процесам проведено:

- дослідження властивостей функції Гамільтона для задач розвитку;
- аналіз оптимальних та емпіричних стратегій розвитку;
- дослідження чутливості цінових стратегій до варіацій параметрів функцій розвитку, освоєння та попиту.

На рис. 3.8 подано приклад еволюції функції Гамільтона для типового процесу розвитку. В межах побудованої моделі можна довести таке *твердження*:

- оптимальна стратегія розвитку – монотонно спадна функція часу;
- залежність значення максимуму функції Гамільтона – монотонно зростаюча функція часу (при виконанні додаткових умов).

На рис. 3.8 подано траєкторію максимумів функції Гамільтона. В

нашому прикладі можемо бачити особливість процесі розвитку: існує інтервал часу процесу $(0, T_z)$, $T_z < T_p$, де оптимальна ціна продукту є меншою собівартості. Згадаємо, що функція Гамільтона є "проекцією" поточних управлінь (рішень) на майбутнє накопичення, і звернемо увагу на те, що ця функція на ранніх стадіях процесу є від'ємною, а на пізніх стадіях вона є додатною. Це інтерпретується так: на ранніх стадіях мова йде про вибір ціни, що дає мінімальні втрати майбутнього сумарного прибутку, в середині процесу вибирається "ціна", що дає максимум прирощення майбутнього накопиченого прибутку. В кінці процесу темп росту прибутку стабілізується вичерпанням можливостей ринку та освоєнням виробництва (рис. 3.8).

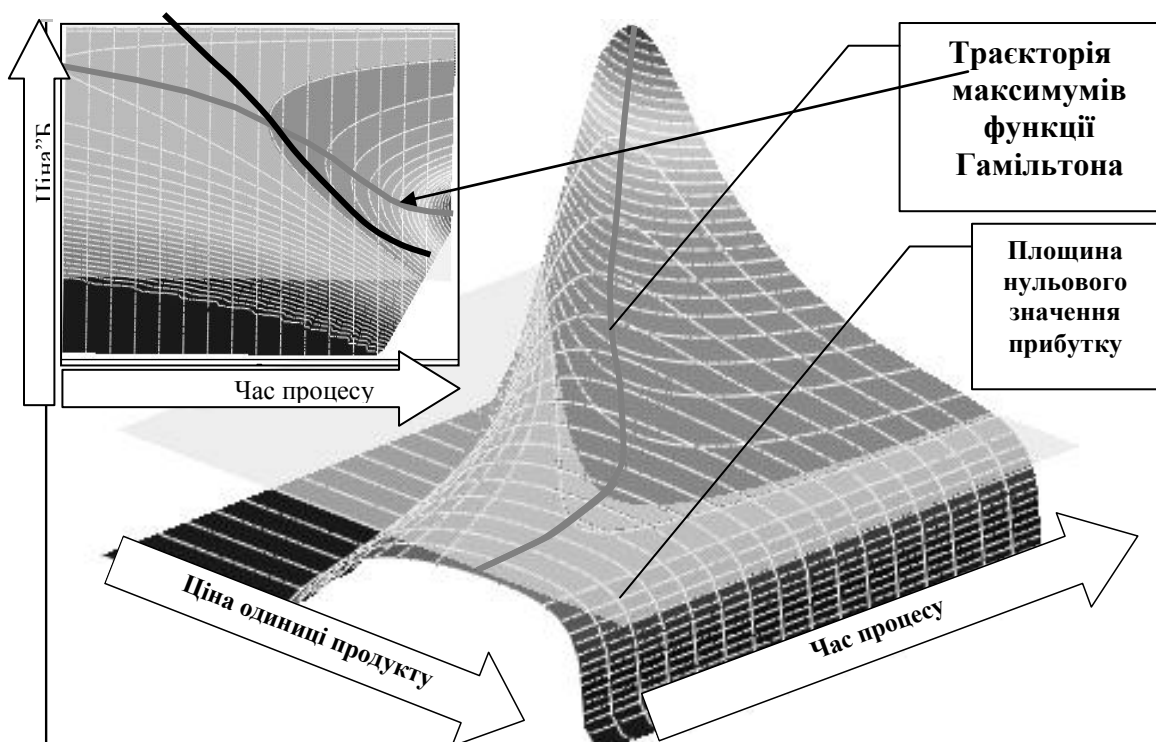


Рис. 3.8. Еволюція функції Гамільтона. Приклад

3.5. Дослідження стратегій розвитку розподілених систем

В цьому підрозділі виконуємо верифікацію розроблених моделей, а також досліджуємо властивості процесів розвитку з урахуванням освоєння. Розглядаємо можливості використання розроблених моделей для прогнозування та управління. Для застосування в реальних задачах управління повинно задовольняти певні вимоги і обмеження. Тому після визначення "точного" оптимального управління, пошуком на моделі процесу вибираються близькі до оптимальної стратегії, що є менш чутливими до збурень і невизначеностей, та легко реалізуються. В розділі подана частина проведених досліджень стратегій розвитку [32, 33, 72].

3.5.1. Аналіз оптимальних та емпіричних стратегій розвитку

Отриманий розв'язок для оптимальної стратегії розвитку з різних причин може бути незручним для практичної реалізації. Задачі вибору оптимальних стратегій давно актуальні, практиками напрацьовані емпіричні правила, в тому числі емпіричні стратегії розвитку. Емпіричні стратегії розвитку мають певні переваги в практичній реалізації. Наявність точного розв'язку задачі моделювання процесу розвитку дозволяє порівняти емпіричні стратегії розвитку між собою та з еталонною оптимальною стратегією.

Перший етап в аналізі емпіричних стратегій розвитку – порівняння процесів і аналіз властивостей цих процесів. На базі статистики і точних розв'язків формуються емпіричні стратегії розвитку – функції певних класів з двома параметрами, які інтерпретуються як стартова ціна та темп зменшення ціни.

На основі аналізу відомих стратегій розвитку та правил ціноутворення сформовано бібліотеку емпіричних стратегій розвитку. Інтерфейс програми моделювання дозволяє вибирати і підставляти у програму одну із стратегій.

Проведено дослідження для таких емпіричних стратегій розвитку:

– постійна ціна: $c(t) = c_0$,

де c_0 – постійна ціна;

– лінійний спад: $c(t) = c_0 - \alpha$,

де c_0 – стартова ціна, α – темп спаду ціни;

– експонента: $c(t) = c_0 \cdot (1 - e^{-\alpha t})$,

де c_0 – стартова ціна, α – темп спаду ціни;

– постійна норма прибутку: $c(cv) = np \cdot cv(t)$,

де $cv(t)$ – поточна собівартість;

– постійний прибуток: $c(cv) = cv(t) + pp$,

де $cv(t)$ – поточна собівартість, pp – постійний прибуток;

– змінна норма прибутку: $c(cv) = np(t) \cdot cv(t)$,

де $np(t)$ може бути:

а) монотонною змінною: $np(t)$ = функція, що монотонно спадає;

б) змінною з одним екстремумом: $np(t)$ = функція, що має один

максимум, починається з нуля і закінчується нульовим значенням.

Ці класи стратегій розвитку з урахуванням ефекту освоєння прості для реалізації, "інтуїтивно зрозумілі". Відомо, що розв'язання певних класів варіаційних задач дуже важко отримати, але вони мають дуже просту структуру управління, наприклад, постійні, кусочно-постійні, лінійні функції часу.

Розроблена програма моделювання дозволяє дослідити емпіричні класи стратегій і знайти оптимальні в цих класах управління і порівняти їх. На рис. 3.9 подано два процеси розвитку для двох емпіричних стратегій "постійна ціна" та "експонента". Процеси оптимізовані за критерієм накопиченого прибутку. Змінні оптимізації: a_0 – ціна для стратегії "постійна ціна", a – ціна, α – параметр експоненти (темپ спадання ціни) для стратегії "експонента".

Процеси розраховані для однакових вхідних даних. Значення критерію складає 74078 для стратегії "експонента" та 70528 умовних одиниць для стратегії "постійна ціна". Зауважимо, що задача оптимального розвитку характеризується інтенсивними нелінійними і нестационарними зв'язками між змінними (див. рис. 3.1). Зокрема, розглянемо стратегії використання зовнішніх ресурсів. Вони суттєво відрізняються для різних стратегій розвитку. Для стратегії "постійна ціна" маємо лінійну спадну залежність, для стратегії "експонента" темп зовнішніх ресурсів починається з нуля, зростає і потім спадає.

"Ціна" продукту є ключовою змінною: ціна визначає попит, попит визначає потрібні витрати на розширення виробництва. Зовнішні ресурси беруться на початку процесу для доповнення власних ресурсів до рівня, що забезпечує задоволення попиту. Для тестування програм використовуємо дві емпіричні цінові стратегії

$$\text{"увігнуто"}: \quad ES1(t, Vp) := (Vp_1 - Vp_2 t^{0.5}); \quad (3.19)$$

$$\text{"увігнуто-випуклу"}: \quad ES2(t, Vp) := Vp_1 \cdot \left[(1 + \alpha) - (1 - e^{-Vp_2 \cdot t})^{ss} \right]. \quad (3.20)$$

На рис. 3.9 подано два процеси оптимізовані за двома різними емпіричними стратегіями (див. (3.19), (3.20)). Кращою виявилася простіша стратегія – постійна ціна, однак при інших значеннях параметрів виробничої системи результат порівняння може бути іншим.

Детальні дослідження показують, що перевага певної стратегії залежить від параметрів процесу, в першу чергу – від коефіцієнта освоєння. Зокрема, інші результати будуть отримані для випадку виробництв, що інвестуються, а саме – збитковість оптимального процесу розвитку. В таких випадках наша модель мінімізує збитки. Приклади таких виробництв – кораблебудування, екологічно чисті виробництва. Очевидний висновок – в таких задачах треба розширювати границі системи – в просторі (інтегрувати спряжені виробництва в одну систему) і часі (розширення тривалості планового періоду). Раніше це називалося "системний підхід", перше правило якого було "максимально розширити границі системи". Це означає, що конструювання моделей звичайно переходить в конструювання реальних систем.

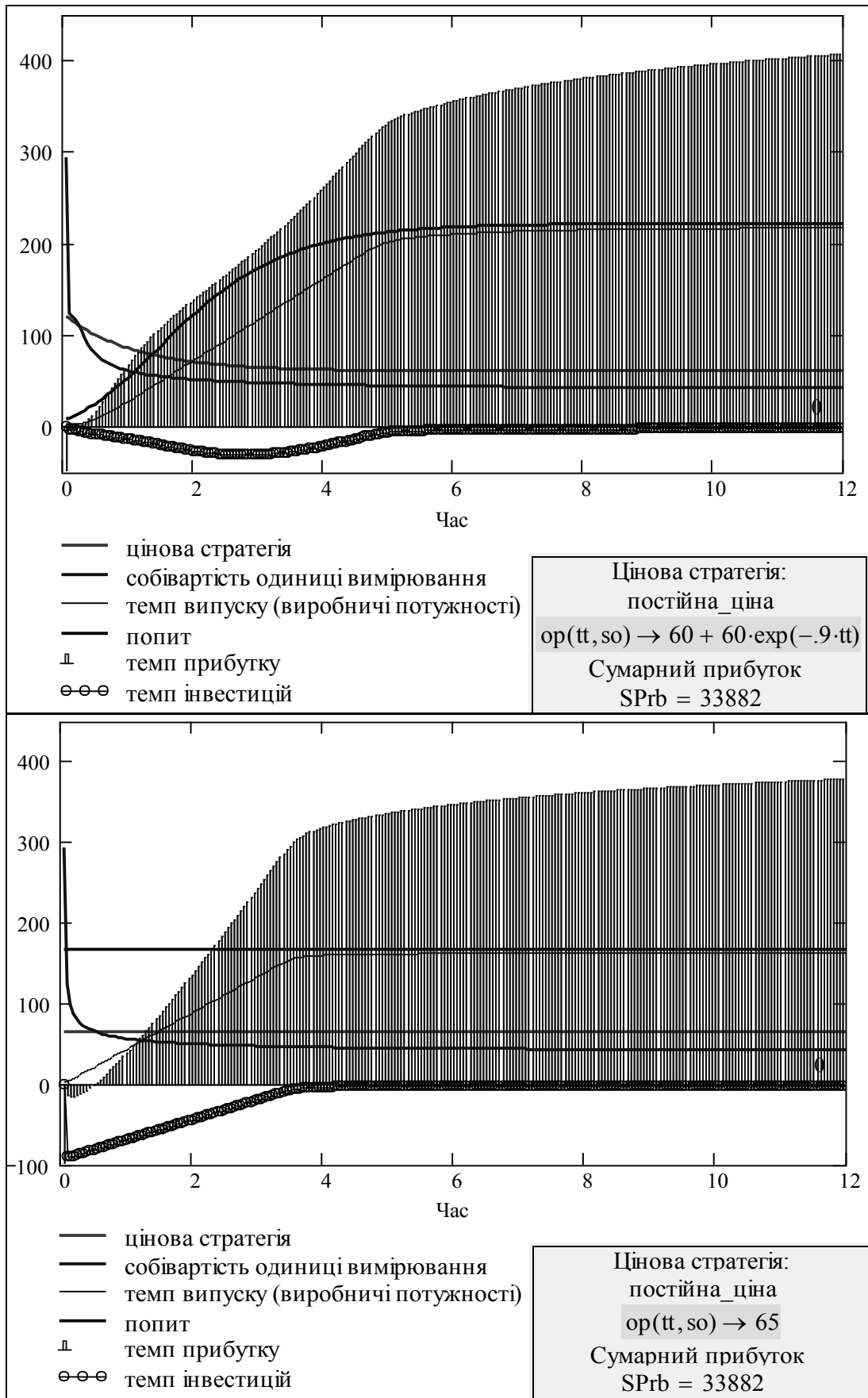


Рис. 3.9. Результати моделювання процесів розвитку

3.5.2. Дослідження чутливості стратегій розвитку до варіацій параметрів математичної моделі

Для практичного використання недостатньо знати положення екстремуму критерію в просторі змінних оптимізації. Необхідно мати дані про характер околу екстремуму. Для аналізу чутливості базова програма моделювання процесів розвитку була в черговий раз модифікована, так щоб будувати поверхню цільової функції.

На рис. 3.10 для двох стратегій розвитку подано тривимірні графіки залежності критерію – накопиченого прибутку від параметрів "стартова ціна" та "темپ зменшення ціни". Саме така візуальна інформація важлива для аналізу ризиків. Стратегія на графіку ліворуч більш чутлива до помилок вибору параметрів стратегії.

Можемо бачити, таку властивість стратегій розвитку. Підмножина близьких до оптимальної стратегії розвитку в просторі параметрів має приблизно лінійну структуру (структура „гірський хребет” (див. рис. 3.10)). По осях X та Y графіків відкладені параметри стратегій розвитку – „стартова ціна” та „темп зменшення ціни”. По осі Z відкладені значення критерію (накопиченого прибутку). Точками позначені екстремуми. Практична інтерпретація отриманих результатів: існує підмножина майже рівноцінних стратегій з певним відношенням стартової „ціни” до темпу її зниження.

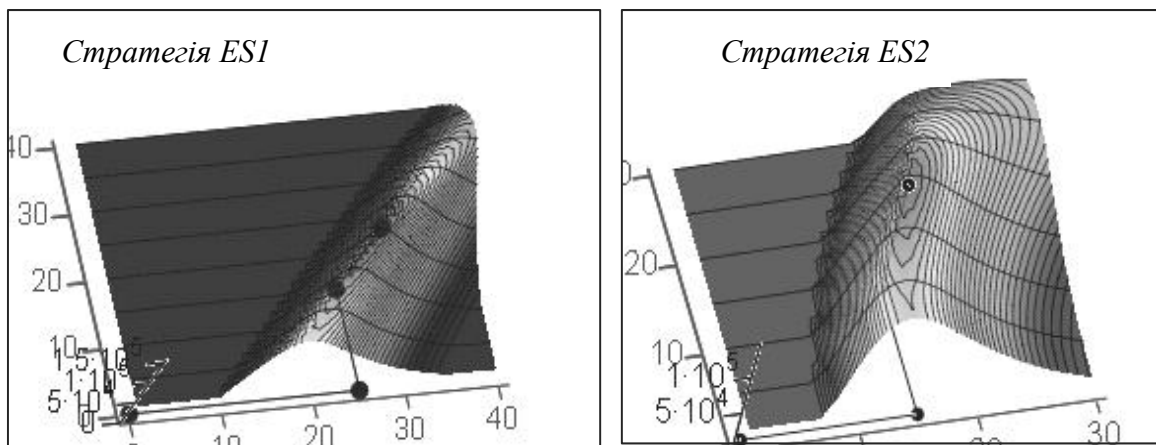


Рис. 3.10. Залежності сумарного накопичення від параметрів для двох альтернативних емпіричних стратегій ES1 (3.19), та ES2 (3.20)

На рис. 3.11 подано приклад графіків оптимальної стратегії розвитку та собівартості. Бачимо, що на початковому етапі програма рекомендує збиткові "ціни", що стимулюють розгортання попиту.

Для користувача-аналітика важливо порівняти різні альтернативні стратегії не тільки за сумарним прибутком але і за динамікою зміни "ціни". На рис. 3.12 подано оптимізовані альтернативні емпіричні стратегії розвитку $ES1(t)$ (3.19), $ES2(t)$ (3.20), а також "точна" стратегія, яка

отримана на базі розв'язання варіаційної задачі методом принципу максимуму (3.18). Можна бачити, що основна частина прибутку отримується в другій половині процесу, коли виробництво досягає високого рівня. *Можемо сформулювати ще одну властивість оптимальних стратегій розвитку: оптимальні двопараметричні емпіричні "цінові" стратегії збігаються при наближенні до кінця процесу.*

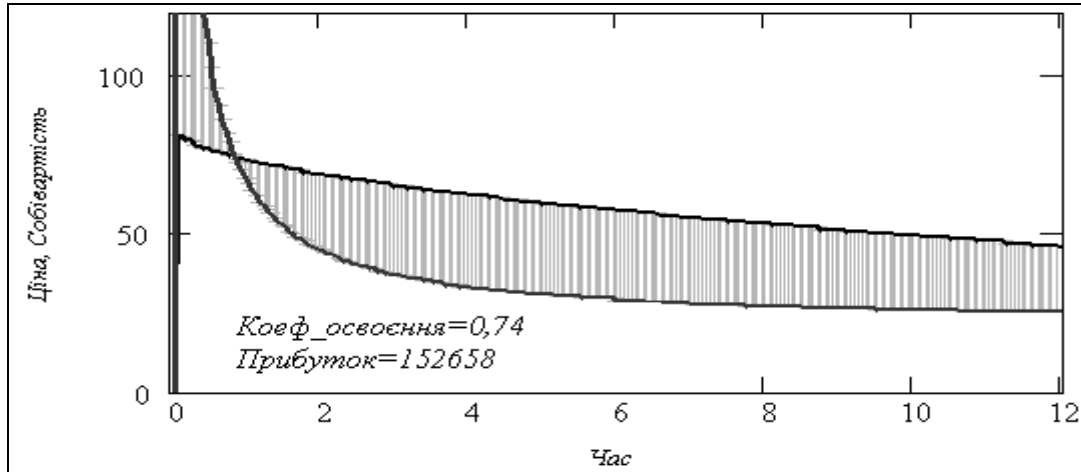


Рис. 3.11. Приклад оптимального процесу розвитку. Залежність "ціни" і "собівартості" від часу

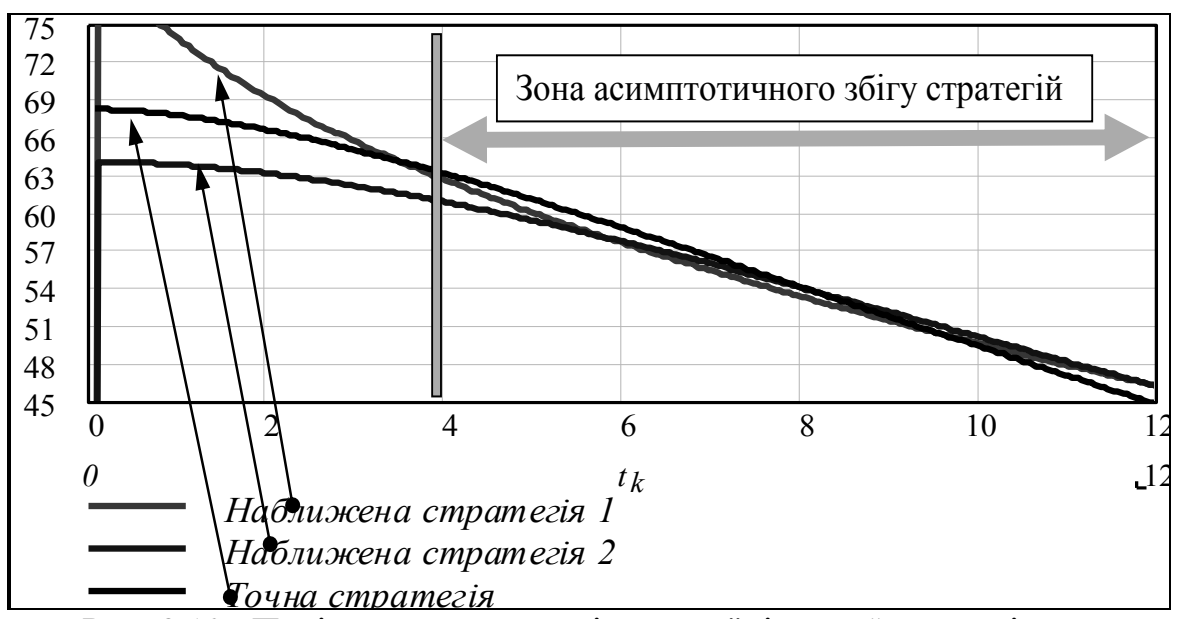


Рис. 3.12. Порівняння двох емпіричних "цінових" стратегій з точною

В умовах інноваційного розвитку керівникам і аналітикам потрібні в першу чергу високоінформативні комплексні графічні форми подання результатів моделювання. Одна з таких комплексних форм – залежність оптимального прибутку від коефіцієнта освоєння виробництва (стратегії класу ES1), подана на рис. 3.13.

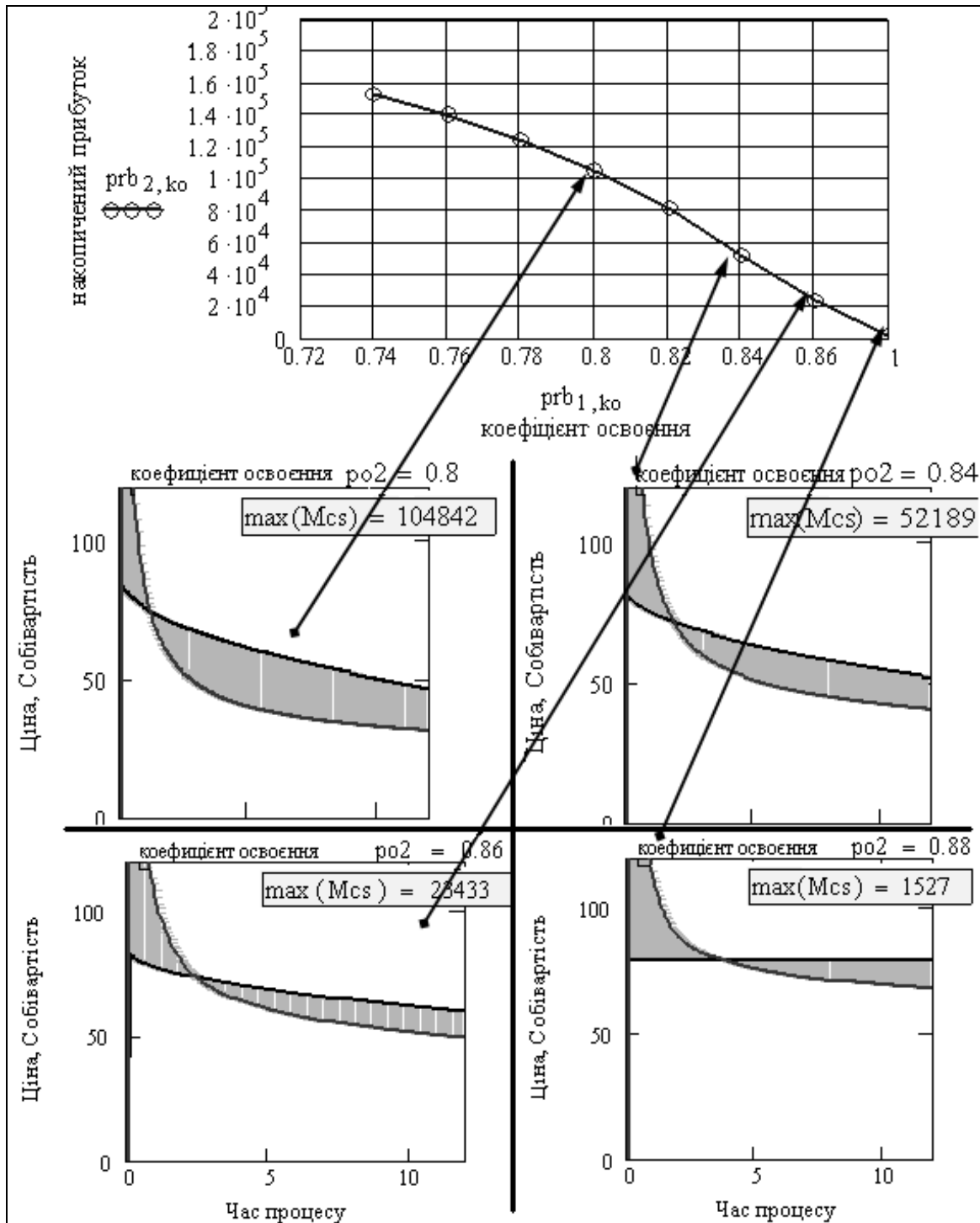


Рис. 3.13. Залежність оптимального прибутку від коефіцієнта освоєння виробництва (стратегії класу ES1)

Особливість комплексного графіка в тому, що для кожного значення коефіцієнта освоєння розраховується саме оптимальний процес розвитку. Аналогічний комплексний графік може бути побудований для іншого важливого параметра – обсягу потенційного ринку. Вибір процесів, що відповідають певним точкам верхнього графіка, виконує користувач. Можемо бачити, що для всього діапазону значень коефіцієнта

ента освоєння зберігається третя властивість оптимальних стратегій: процес розвитку має інтервал збитковості, коли "ціна" є меншою собівартості. При збільшенні значення коефіцієнта освоєння (погіршенні освоєння) стартова ціна не змінюється, а тільки зменшується темп її падіння. Практики вважають інноваційні шляхи розвитку занадто ризиковими. Наші дослідження підтверджують це: при зміні коефіцієнта освоєння з 0.74 до 0.88 накопичений прибуток зменшується приблизно в сто разів.

Зведемо результати розробки і дослідження математичної моделі оптимального розвитку технологічної системи в підсумкові порівняльні таблиці (таблиці 3.1 та 3.2).

Таблиця 3.1

Порівняння розробленої моделі оптимального розвитку з прототипом

Існуючі моделі розвитку	Модульна модель з урахуванням освоєння
<p><i>Задача розподілу (Р. Беллман)</i> Модель системи. Розвиток: $\frac{d}{dt} x(t) = G(x(t), y(t));$ $J(y) = \int_0^t F(x, y) dt$ Критерій: накопичений випуск $x(t)$ – темп виробництва; $y(t)$ – темп ресурсів у розвиток Управління: $0 \leq y \leq x$ <i>Агрегована модель розвитку (І. Колесник)</i> Модель системи. Розвиток: $\frac{d}{dt} x(t) = fin(x(t) \cdot u(t))$ Критерій: накопичений випуск; Управління $0 \leq u(t) \leq 1$ – частина ресурсу у розвиток виробництва</p>	<p>Модель системи (модулі): Освоєння: $\frac{d}{dt} cv = fcv(x, xs)$ Розвиток виробництва: $\frac{d}{dt} x = fin[kx \cdot (xd - x)]$ „Попит” $\frac{d}{dt} xd = fd(cp)$ Критерій – накопичений випуск Управління – „ціна” – cp Змінні стану: cv – собівартість; x – темп випуску; xd – темп попиту; kx – параметр, $fcv(\cdot)$, $fd(\cdot)$, $fin(\cdot)$ – функції освоєння, розвитку, „попиту” – функціональні модулі Для кожного функціонального модуля створюється бібліотека альтернативних - структурних моделей</p>

В таблиці 3.1 подано порівняння існуючої моделі розвитку і розробленої. Беллман аналітичними методами дослідив узагальнену модель, названу ним "моделлю розподілу". Обмеження моделі – випуклість підінтегральних функцій та неврахування ефектів освоєння. Запропонова-

на модель не має обмежень по вигляду функцій виробництва, розвитку і освоєння. Це досягнуто застосуванням комплексних аналітичних і числових методів, та декомпозицією задачі моделювання і оптимізації. Для цієї моделі не знайдено прямих аналогів.

Таблиця 3.2

Порівняння розв'язання задачі оптимального розвитку з аналогом

Існуюче розв'язку задачі розвитку (І.С. Колесник)
<p>Критерій: $J1 = \int_0^{Tp} x(t) \cdot (1 - u(t)) dt$. Розширена система рівнянь:</p> $\frac{d}{dt} x(t) = fin(x(t) \cdot u(t)) = fx, \quad 0 \leq u(t) \leq 1; \quad \frac{d}{dt} J1(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) = fJ$ <p>Функція Гамільтона: $H(x, u) = \sum_{i=1}^N \psi_i \cdot f_i = \psi J \cdot fJ + \psi x \cdot fx$</p> <p>Рівняння для спряжених функцій:</p> $\frac{d}{dt} \psi x(t) = -\psi J \cdot (1 - u) - \psi x(t) \cdot u \cdot \frac{d}{dx} fin(u \cdot x) = -\psi x(t) \cdot u \cdot \frac{d}{dx} fin(u \cdot x) - (1 - u)$ <p>Розв'язання для функції Гамільтона:</p> $H(x, u) = x \cdot (1 - u) + fin(x \cdot u) \cdot \psi x(u, x, t)$
<p>Запропоноване розв'язання задачі розвитку з урахуванням освоєння</p> <p>Критерій:</p> $J = \int_0^{Tp} fj(cv, cp) dt = \int_0^{Tp} \left[x(t) \cdot (cp(t) - cv(t)) - find\left(\frac{d}{dx} x(t)\right) \right] dt.$ <p>Функція освоєння</p> $fcv(cv, cp) = vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{Fd(cp)^2} \cdot \frac{d}{dt} Fd(cp)$ <p>Функція Гамільтона: $H(cv, cp) = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i = \psi j \cdot fj + \psi cv \cdot fcv + \psi x \cdot x.$</p> <p>Рівняння для спряжених функцій:</p> $\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi J(t) &= -\frac{\partial}{\partial J} H(cv, x, cp); \quad \frac{d}{dt} \psi cv(t) = -\frac{\partial}{\partial cv} H(cv, x, cp); \quad \frac{d}{dt} \psi x(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(cv, x, cp) \end{aligned} \right\}$ <p>Розв'язання для функції Гамільтона (робочий вираз отримано з використанням вбудованих методів розв'язку дифрівнянь та символічних обчислень)</p> $H(cv, cp) = \psi j \cdot \left[Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - Kin v \cdot \left(\frac{d}{dt} Fd(cp(t)) \right) \right] \dots$ $+ \psi cv \cdot \left[vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{Fd(cp)^2} \cdot \frac{d}{dt} (Fd(cp)) \right]$

В таблиці 3.2 подано порівняння розв'язання задачі оптимального розвитку з найближчим аналогом [8, 89]. Можемо бачити, що урахування освоєння ускладнило і структурно змінило задачу – вибрана інша змінна управління. Оскільки не знайдено близьких аналогів постановки задачі з урахуванням розвитку, то і для розв'язання не знайдено аналогів. Відсутність прямих прототипів моделі, складність задачі розвитку з урахуванням освоєння обумовили організацію комплексної перевірки адекватності, точності та збіжності моделі, що складалася з таких кроків: – порівняння властивостей розв'язань з властивостями, що визначив аналітично Беллман; – розробка альтернативної моделі для оптимізації двохпараметричних емпіричних цінових стратегій і порівняння точного розв'язання з наближеними в просторі емпіричних стратегій а також порівняння отриманих на моделі розв'язань з статистичними даними по процесах розвитку.

Збіг розв'язань з задовільною точністю до 5% (див. рис. 3.12) дав доведення коректності точної і наближеної моделей. Ідентичність властивостей точного розв'язання і емпіричних даних (наявність інтервалів від'ємної і додатної прибутковості, зміна нахилу при зміні коефіцієнта освоєння) дозволив зробити висновок про адекватність розробленої моделі реальним об'єктам.

Висновки

Відомі математичні моделі процесів розвитку звичайно вимагають стаціонарності, наявності похідних, лінійності, випуклості. Невід'ємна частина процесів розвитку – процеси використання продукту і "освоєння" як виробників так і користувачів, що особливо характерне для програмних продуктів і обчислювальних систем.

Вперше розроблено математичну модель процесів розвитку розподілених систем з урахуванням ефектів освоєння, функціональні субмоделі якої – функції виробництва, розвитку, освоєння, на відміну від існуючих моделей можуть бути довільними.

Сформульовано варіаційну задачу розвитку, обґрунтовано вибір методу принципу максимуму, що дозволяє виконати декомпозицію багатокрокової задачі в послідовність задач малої розмірності по знаходженню максимуму функції Гамільтона, що дозволило побудувати ефективні обчислювальні методи. Вперше отримано точне розв'язання варіаційної задачі розвитку з урахуванням ефектів освоєння.

Розроблено комплекс робочих моделей для дослідження процесів розвитку. Підтверджено моделюванням можливість наближення оптимальної стратегії розвитку двопараметричною функцією часу, що дозволяє суттєво спростити розрахунок процесів розвитку. Отримані результати дозволяють побудувати систему для прогнозування розвитку.

4. АЛЬТЕРНАТИВНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ: ДЕЦЕНТРАЛІЗОВАНІ СИСТЕМИ

Сучасні розподілені системи звичайно є також і децентралізованими – кожний елемент технологічної системи самостійно вибирає напрямки розвитку і розподіляє власні ресурси виходячи тільки з власного критерію ефективності. Управлінські рішення елемент приймає на базі неповної і неточної інформації про стан системи, неточних математичних моделей, що використовуються для прогнозування і планування. Все це обумовлює *систему невизначеностей* процесів розвитку системи в цілому. Банальна модель невизначеностей в розподіленій системі – незалежні випадкові події з гаусовою статистикою. В реальних децентралізованих системах локальні випадкові події розповсюджуються по всій системі за рахунок міжелементних зв'язків.

Математичні моделі, що розробляються і досліджуються в цьому розділі мають дуальну інтерпретацію моделі системи багатопродуктових виробництв; моделі розподіленої багатозадачної обчислювальної системи. Ціль розділу – розробка математичних моделей і методів прогнозування та планування виробничих систем в умовах невизначеності.

4.1. Постановка задачі

В розділах 2 і 3 вибрано концепцію централізованого розподілу узагальнених ресурсів і оптимального агрегування, а саме – заміни багатоелементної системи оптимально агрегованою еквівалентною одноеlementною, однопродуктовою системою. Після оптимізації еквівалентної агрегованої системи, локальні оптимальні управління отримуються дезагрегуванням глобального оптимального управління. В цьому розділі ми виходимо з концепції локального управління: розподілу кожним елементом розподіленої системи власного ресурсу між виробництвами окремих продуктів. Централізоване управління зводиться до визначення певних однакових для всіх елементів параметрів. Коротко називаємо моделі такого класу як „ N елементів, M продуктів (задач)”. Для моделей такого класу, не знайдено прямих прототипів з узагальненим розглядом математичної моделі розвитку розподілених систем як декомпозиційної структури. Вибираємо таку декомпозицію математичних моделей цього класу:

- 1) модель "1 елемент, 1 задача" ();
 - 2) модель " N елементів, 1 задача";
 - 3) модель "1 елемент, M задач";
 - 4) модель " N елементів, M задач" детермінована;
 - 5) модель " N елементів, M задач" з урахуванням невизначеностей.
- Система моделей 1–4 упорядковується операцією агрегування:

модель 3 є результатом агрегування системи виробників, модель 2 – результат агрегування системи продуктів в один еквівалентний продукт і, нарешті, модель 1 – результат агрегування по виробниках і продуктах. В роботах [8–17] розглянуті моделі і результати моделювання для розподілених систем класів " N елементів, 1 задача" та "1 елемент, M задач". В рамках монографії неможливо подати вичерпне дослідження усієї системи моделей. Далі подано розробку моделей для розподілених виробничих систем класу " N елементів, M задач" з урахуванням невизначеностей. На рис 4.1 подано схему системи математичних моделей.

Формально моделі " $1 \times M$ " та " $N \times 1$ " є окремими випадками моделі " $N \times M$ ", однак з точки зору конструювання (розробки) та реалізації – це елементи комплексної моделі, що охоплює більше класів реальних об'єктів і точніше відображує їх суттєві властивості. Нарешті, така комплексна модель є стійкішою до невизначеностей, в першу чергу, невизначеностей незнання. Наприклад, в програмній реалізації деталізованої моделі є невиявлений дефект – при певних наборах даних вона видає незадовільні результати. В спрощеній версії моделі цього дефекту немає, але вона видає менш точні, але задовільні відносно реального об'єкту вихідні дані. Тобто, модель, як комплекс моделей різного рівня точності, що працюють паралельно, стає сьогодні необхідною умовою придатності для теоретичних досліджень і практичних застосувань.

Математичні моделі для використання в реальних системах управління повинні задовольняти ряд вимог, суть яких – відмовостійкість, яка забезпечується декомпозицією моделі у відмовостійку систему моделей на базі структурної, функціональної і редуційної декомпозицій. Технічні засоби сьогодні практично є безвідмовними, а програми для забезпечення стійкості до невиявлених помилок і особливостей роблять багатoversійними – кожна програма будується на базі певної реалізації математичної моделі.

Редуційні моделі використовуються для контролю більш точних моделей. Вимоги розробки нових математичних моделей для нових об'єктів приводять до таких самих структур. Більше того, як буде показано далі, розподілені системи, якщо їх функціонування визначається певними природними механізмами, теж сходяться до структури з оптимальним розподілом узагальнених ресурсів, таким, що забезпечує оптимальність і стійкість розподіленої системи.

Тому моделі розподілених систем реалізуємо як комплекси, що складаються з специфікації складових базової програми моделювання, , сервісних модулів (для підготовки вихідних даних) та інтерфейсів (модулів введення параметрів задачі і виведення результатів). Кожна наступна робоча модель робиться на базі попередньої при внесенні мінімуму змін. В цілому користувач крім базових програм, отримує

прикладі модифікації цих програм для наближення їх до реальності. Схема такого комплексу подана на рис. 4.1.

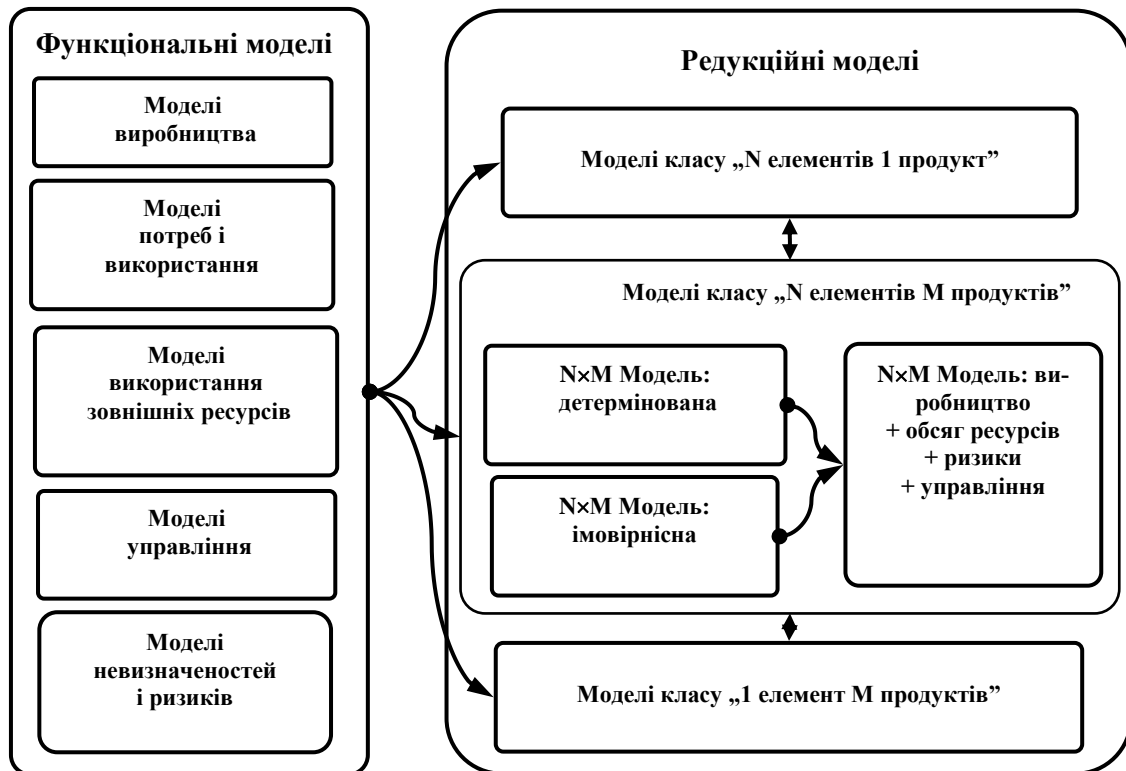


Рис. 4.1. Схема системи моделей

Будуємо систему за модульним принципом так, щоб її легко було оновлювати і вдосконалювати заміною функціональних модулів. Виділимо такі функціональні модулі: "ринок", "виробництво", "витрати на розвиток", "прийняття рішень", "ризики" (див. рис. 4.1). Беремо відповідні терміни в лапки – це назви аспектів функціонування і розвитку технічних систем, а не економічні категорії.

Крім теоретичного і утилітарного призначення наша модель дає можливість тому, хто приймає рішення, просто осмислити, зрозуміти суть діючих в реальних системах механізмів саме з позицій теорій систем і управління. В розподіленій виробничій системі обсягом виробництва "керують" усі елементи через витрати на розвиток, а обсягом ринку "керує" триєдина особа – "користувач–виробник–інвестор", згідно з власними ресурсами, що залежать від обсягу виробництва.

Головна проблема розділу – розмірність задачі моделювання: ми розраховуємо програми на моделювання систем з 20–200 виробників і 20–100 видів продукції.

Головні задачі в розробці програм – пошук ефективних програмних засобів і розробка інтерфейсів інваріантних до розмірності задачі. Головне призначення програм – бути інструментом системного аналітика

- експерта і радника керівника організації. Призначення другого плану
- освоєння і тестування.

4.2. Побудова математичної моделі і програми

В цьому розділі ми розглядаємо розподілену систему як сукупність автономних елементів, що діють в умовах обмеженого попиту. Це викликає перехід від критерію накопиченого прибутку до критерію сумарного темпу виробництва в усталеному стані – при насиченні попиту по усіх видах продукції. Сумарний випуск продукції визначається виробничими фондами. Таким чином, критерій рівня виробничих потужностей в кінці перехідних процесів – це оцінка потенціалу: ресурсів + ефективності освоєння для нових видів продукції. Слід підкреслити один аспект проблеми використання зовнішніх ресурсів: успішні організації "притягують" зовнішні ресурси і проблемою стає їх ефективно використання.

4.2.1. Аналіз емпіричних стратегій розвитку системи

Базова інтерпретація математичної моделі цього розділу: система з N виробничих елементів постачає M продуктів певного класу. Планово або стихійно ринок розподіляється між елементами системи (фірмами). Природно для системи в цілому розподілити попит по різних продуктах так, щоб:

- система мала стабільний позитивний розвиток;
- розподіл попиту на різні продукти був би стійким і оптимальним як для системи в цілому, так і для кожного елемента.

В розділі 4 розглядається інша інтерпретація моделі – обчислювальна мережа. Розглянемо емпіричні розв'язання задачі оптимального розподілу M видів ресурсів між N елементами системи:

- жорстка спеціалізація: кожний елемент виконує тільки свою задачу (випускає один продукт), постійно підвищує ефективність свого продукту в своїй справі. Система розпадається на незалежні функціональні підсистеми;

- повна універсальність: кожен елемент виконує усі задачі в однакових обсягах. Можна сказати, що спеціалізація елементів відсутня, кожен елемент виробляє повний спектр продуктів. Система теж розпадається на досить автономні системи;

- пропорційний розподіл. Природно припустити, що оптимальний розподіл буде компромісом між жорсткою спеціалізацією і повною диверсифікацією (рис. 4.2) Для певних класів задач доведено [149, 153, 154], що оптимальний ранговий розподіл задач для кожного елемента буде гіперболічним, тобто значну частину зусиль і ресурсів елемент виділить одній-двом задачам (продуктам) але не буде повністю ігнорувати

інші. В системі в цілому по кожному вигляду діяльності (продукції) буде один лідер [11].

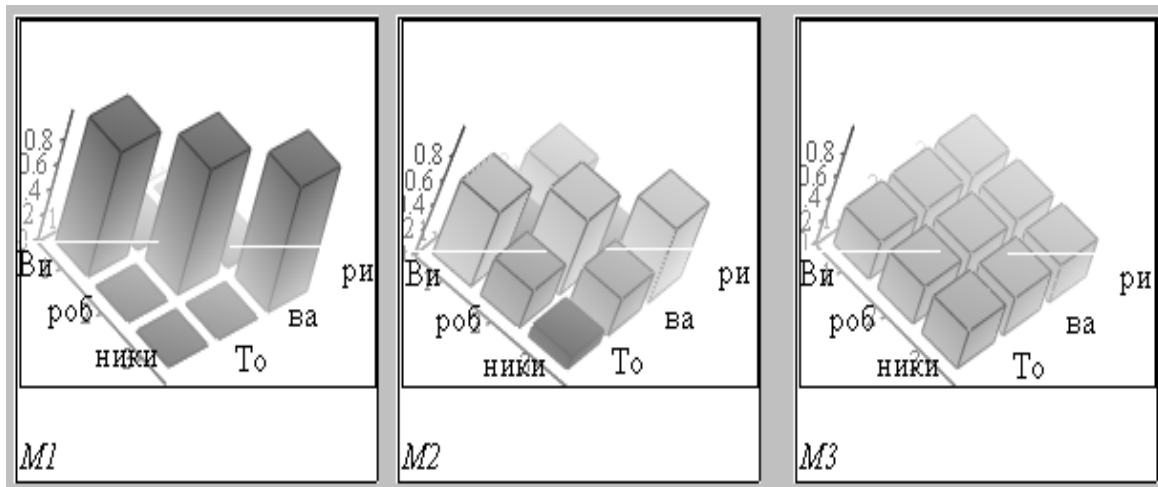


Рис. 4.2. Задача розподілу M задач між N елементами. Евристичні стратегії розподілу

4.2.2. Аналіз і вибір функціональних субмоделей для детермінованої моделі

Діяльність елемента виробничої системи складається з виконання таких функцій: 1) виробництво продукту, 2) доведення продукту до користувачів, 3) розподіл ресурсу (сумарного доходу) між виробництвами. Послідовність цих функцій складає повний виробничий цикл – від вкладення до повернення ресурсів і повторюється з певною регулярністю.

В цьому розділі вважаємо виробництво детермінованим. Не враховуємо у явному вигляді: витрати виробництва, запізнення виробництва, запізнення віддачі витрат на розвиток. Не враховуємо залежність витрат виробництва від часу і обсягів виробництва.

Процеси розширення виробництва подаємо моделлю росту з обмеженням: приріст виробництва пропорційний досягнутому рівню і незаповненості ринку, і обсягу витрат на розвиток. Вважаємо також, що для розвитку виробництв в поточний період використовуються ресурси попереднього періоду.

Перекладемо подані вище лінгвістичні моделі на мову математичного пакета, з урахуванням його особливостей. Основними об'єктами робочої моделі робимо тривимірні масиви. Подаємо на прикладі системи "3 виробника, 3 продукти" конструкції, що закладаємо у робочу модель.

Модель попиту. Загальну модель попиту, подаємо як ряд моделей, що поступово ускладнюються. Це є редуційна декомпозиція. Починаємо з простішої моделі – фіксована ціна, фіксований попит для кожного продукту. Тобто, задано вектор ємності ринку по кожному продукту.

Також вважаємо, в першому наближенні, що усі виробники певного j -го продукту виробляють його з однаковим рівнем корисності і якості, "ціна" продуктів різних виробників єдина. Тому вважаємо, що "ринок" розподіляється пропорційно обсягам випуску (виробничим потужностям виробників).

Модель виробництва. Загальну модель виробництва теж подаємо як ряд ускладнюючихся моделей і починаємо цей ряд з лінійної моделі виробництва.

Модель розширення виробництва. За основу беремо узагальнену модель зростання з обмеженням. Подаємо цю модель в дискретній, робочій формі.

$$\Delta X_{i,j} = \left[ef_i \cdot [(X_t)_{i,j}] \cdot \left(\frac{Run_j - Sus_{j,t}}{Run_j} \right) \cdot Inv_{i,j} \right] \cdot krok; \quad (4.1)$$

$$(X_{t+1})_{i,j} = (X_t)_{i,j} + \Delta X_{i,j}.$$

Цьому виразу відповідає така словесна модель:

*поточне прирощення випуску i -им учасником j -го продукту =
ефективність \times обсяг поточний \times відносний обсяг попиту \times
 \times зовнішні ресурси \times крок.*

Перші три множники – це коефіцієнти, що характеризують поточну ефективність перетворення витрат на розвиток $Inv_{i,j}$ у прирощення виробничих потужностей $\Delta X_{i,j}$. Відносний обсяг ринку може бути і від'ємним у випадку перевиробництва.

Моделі локального управління. Елементи системи самостійно розподіляють ресурси між виробництвами різних продуктів. Нагадаємо, що "ринковий" принцип регулювання однаково ефективно працює і в обчислювальних системах і у системах матеріального виробництва.

Розглядаємо таку детерміновану модель розподілу ресурсів елемента по розвитку виробництв окремих продуктів [54, 55]: виробник оцінює перспективність розширення виробництва. Тут можуть бути такі альтернативи:

– згідно з усередненим за певний період обсягом продажів кожного продукту;

– згідно з сумою усереднених успіху та темпу успіху (темп = похідна);

– згідно з сумою усереднених успіху і темпу успіху.

В загальному випадку словесна модель оцінки перспективності продукту має вигляд:

$$\begin{aligned} \text{оцінка} &= a1 \times \text{середня_віддача_зовнішніх_ресурсів} + \\ &+ a2 \times \text{середній_темп_зміни_віддачі} + a3 \times \text{темп_темпу_зміни}. \end{aligned}$$

Виберемо альтернативу 2. Робимо модуль "ковзне середнє". Задаємо перше значення середнього: $xs_{i,j} = (X_1)_{i,j}$; параметр оновлення середнього: $0 \leq \alpha \leq 1$. Маємо: ковзний середній темп виробництва. Параметр α – темп оновлення середнього (або швидкість "забування" минулих значень). Вибирається цей параметр в залежності від швидкості змін процесу і рівня шумів

$$xs_{i,j} = xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_{t+1})_{i,j} \cdot (1 - \alpha). \quad (4.2)$$

Аналогічно робимо ковзне середнє для прирощення темпу випуску – ковзний середній темп прирощення темпу виробництва

$$dxs_{i,j} = dxs_{i,j} \cdot \beta + \Delta xs_{i,j} \cdot (1 - \beta). \quad (4.3)$$

Параметри $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ – об'єкти настроювання в залежності від швидкості змін і рівня шумів [8]. Оцінка перспективності продукту

$$efp_{i,j} = a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}. \quad (4.4)$$

Можливі дві альтернативи прийняття рішення на базі цих даних. Вибираємо і комбінуємо обидві альтернативи як зважену суму.

Збираємо робочі функціональні моделі виробництва, попиту, локального управління в базову програму моделювання (рис. 4.3).

Як коментарі до тексту подаємо відповідні функціональні моделі. Поданий текст базової програми виконує також функцію інтерфейсу при відлагодженні, модифікації програми.

Зауважимо, що програма має дві позитивні властивості:

- програма працездатна;
- програма (як можна бачити з коментарів до тексту програми на рис. 4.3) майже однозначно відповідає звичайним рівнянням для функціональних підсистем;
- по ширині і довжині текст програми не виходить за межі стандартної сторінки.

Щодо останнього пункту, то слід згадати історію:

"формула довше двох дюймів не для інженера" (США, епоха логарифмічних лінійок);

"програмний модуль більше семи рядків не відлагоджується" (ранній період епохи програмування).

Програми такого типу корисні на самих початкових етапах конструювання математичних моделей при відсутності близьких прототипів. Після відлагодження моделі може бути створена обчислювально ефективна робоча програма-робот.

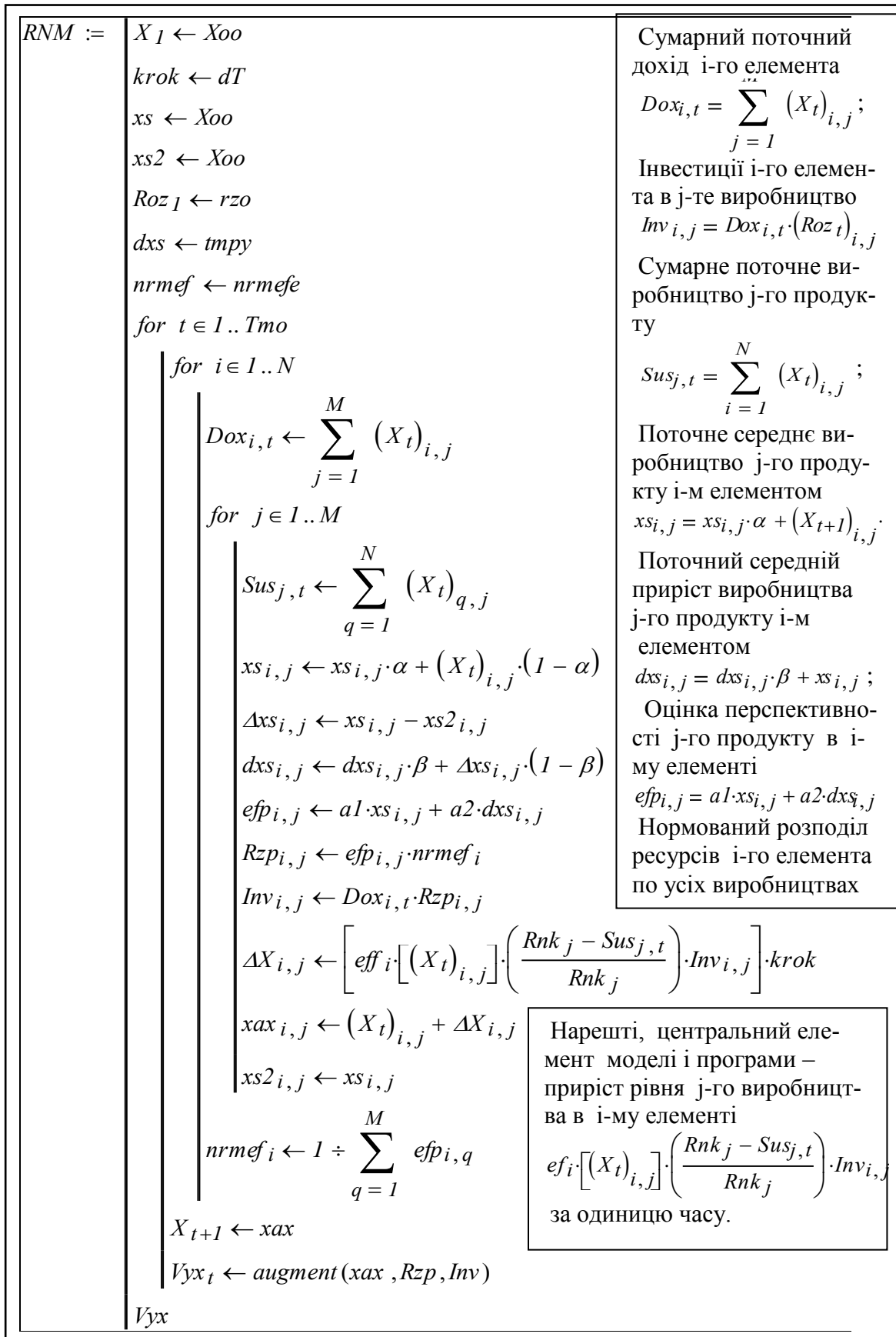


Рис. 4.3. Програма моделювання розподілених систем
4.2.3. Розробка інтерфейсу програми моделювання

Згідно з вибраною концепцією повністю відкритою для користувача програмної системи інтерфейс має три рівні:

- введення і виведення параметрів задачі, початкових значень змінних і параметрів експерименту;

- введення функціональних модулів програми з бібліотеки;

- внесення змін безпосередньо в текст програми.

Інтерфейс третього рівня фактично подано на рис. 4.3 – це текст програми з розгорнутими коментарями. Відкритий текст для більшості користувачів – це важливий фактор впевненості і довіри до програми і математичної моделі. Розроблена програмна система придатна для моделювання систем розмірністю 100×100 (і більше, якщо це потрібне). Базова версія може бути радикально перероблена з використанням векторизації обчислень і час обчислень навіть при великій розмірності буде задовільним. Однак, введення вхідних даних безпосередньо в матриці з тисяч елементів неефективний. Для досліджень слід вибрати якісь методи упорядкування і агрегування вхідних і вихідних даних.

Інтерфейс введення. Будуємо інтерфейс на базі ранжування елементів системи за певними показниками – узагальненим "розміром" елемента, що може мати такі інтерпретації: "капітал", "дохід", "виробнича потужність" та ін. Усі вхідні дані продуктивності виробників, обсяги ринків та ін., подаємо у ранжованому вигляді. Рангові розподіли широко використовуються для опису так званих "активних систем".

На рис. 4.4 подано блок введення параметрів розроблений на основі рангового подання параметрів системи: ми задаємо тільки залежності для рангових розподілів ефективності виробників, стартових виробничих потужностей та ін., а в сервісному модулі обчислюються конкретні значення параметрів для кожного елемента системи.

Параметри розподілів сукупності продуктів, ефективності, стартових темпів виробництва: Число виробників $N=30$, число продуктів $M=10$, $ORIGIN=1$, $i=1 \dots N$, $j=1 \dots M$

Параметри системи: середні об'єми продуктів на одного виробника $R_{ys}=6$; ефективність інвестицій $efs=1.1$; стартовий темп виробництва $X_{os}=0.2$; Домінування в стартовому рівні (відносно) $Dom=0.0$. Мінімальна сукупність продуктів $R_{mi}=2$; мінімальна ефективність $ef_{mi}=1.1$; мінімальний стартовий темп $X_{om}=0.1$

Параметри моделювання. Період моделювання кроків $T_{to} = 150$; час $tt=1 \dots T_{to}$; крок моделювання $dT=0.07$; стартові значення для змінних програми: темп росту $tmr_{yi,j}=0$; перспективності продуктів $nr_{mefj}=10$; стартові значення множн. $Nmr_{fei}=0.8$; пропорції розподілу $r_{zoi,j}=1 \div N$.

Параметри моделі прийняття рішень. Усереднення: темпу виробництва $\alpha=0.8$; темпу прирощення $\beta=0.7$. Цінності: темпу $a1=1$; прирощення $a2=30$.

Рис. 4.4. Інтерфейс введення даних для програми

Інтерфейс виведення. Інтерфейс виведення повинен дати в комплексному одночасно компактному і вичерпному вигляді характеристики як системи в цілому, так і окремих елементів. В спеціальному сервісному модулі формуються дані для комплексних таблиць і графіків. Сервісний модуль також має відкритий текст і може змінюватись і настрюватись.

Інтерфейс виведення складається з функціональних підсистем:

- порівняльний аналіз процесів розвитку для вибраних елементів;
- аналіз рангових розподілів загальних і по окремих продуктах та виробниках;
- аналіз динаміки розподілів виробництва в системі $N \times M$;
- аналіз впливу початкових умов;
- аналіз впливу стартових розподілів параметрів елементів.

4.3. Аналіз результатів моделювання детермінованої системи

Цілі проведених досліджень – перевірка адекватності результатів моделювання відомим статистичним даним, пошук нових результатів. На рис. 4.5 подано тривимірні графіки процесів розвитку двох вибраних користувачем елементів.

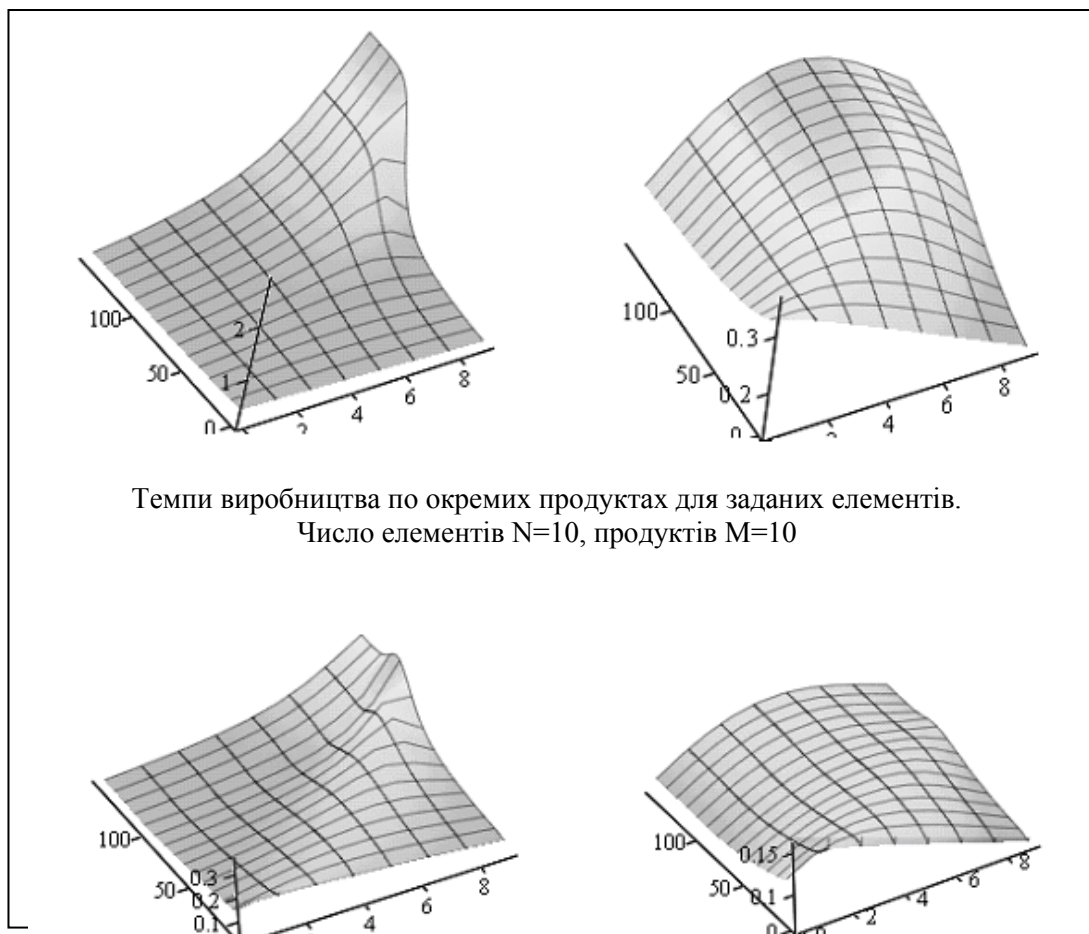


рис. 4.5. процеси розвитку елементів в системі

На верхній парі графіків подано темпи виробництва по кожному з продуктів (по осях: X – продукти, Y – час моделювання, Z – темп виробництва), на нижній парі графіків – темпи витрат на розвиток (по осях: X – продукти, Y – час моделювання, Z – темп зовнішніх ресурсів). Підкреслимо, що в цьому обчислювальному експерименті усі елементи діють за однаковими алгоритмами прийняття рішень по розподілу ресурсів. Тут ми приходимо до відмінності моделювання і оптимізації в цій роботі від типових прототипів – оптимізація розвитку елемента в конкурентному середовищі.

Отримані результати можна пояснити тільки з таких позицій: якщо, лідер переходить до переважного розвитку найбільш перспективного виробництва, то аутсайдер за ефективністю витрат на розвиток максимізує витрати на розвиток в середні за рангами виробництва і в кінці процесу починає зменшувати інвестиції в найкращий продукт. Причина проста: весь обсяг попиту на цей продукт вже розібрали лідери.

Аналіз динаміки розподілів виробництва в системі "N×M". Для розподілених систем класу "N×M" при певних значеннях параметрів виникають "ступінчасті" режими розвитку. На рис. 4.6 подано процеси розвитку системи з трьох елементів – залежності сумарного випуску продукції від часу.

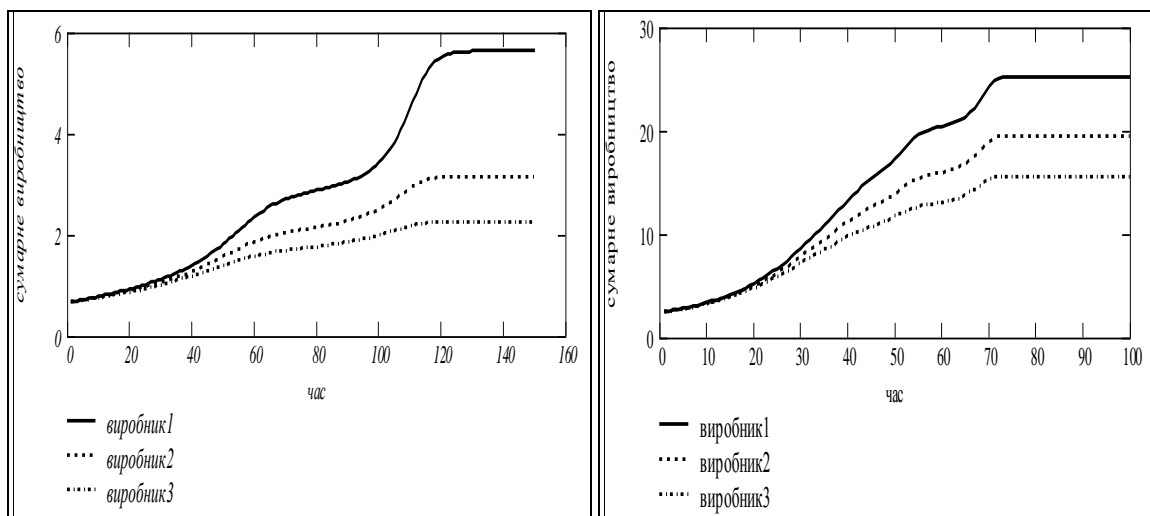


Рис. 4.6. Процеси розвитку системи з трьох елементів. Приклад

На рис. 4.7 подано динаміку випуску по кожному продукту для кожного виробника. Можна бачити, що ступінчастий характер залежності сумарного випуску – результат підсумовування залежностей темпів випуску по окремих продуктах. Звертаємо увагу на те, що графіки для різних виробників побудовані в різних масштабах: максимальні темпи виробництва для елементів 1, 2, 3 дорівнюють 5, 1.2, 0.8 відповідно.

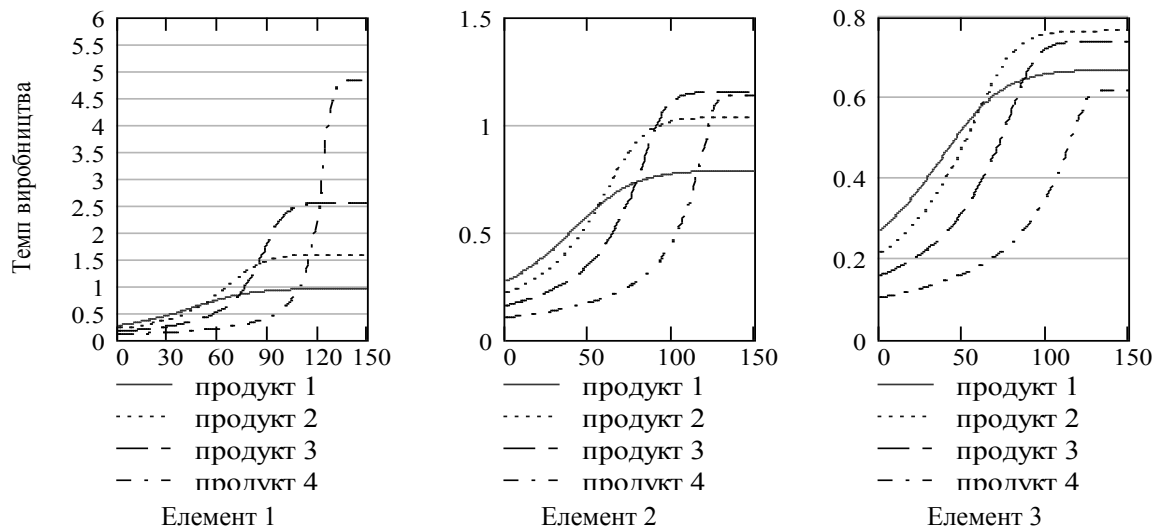


Рис. 4.7. Процеси розвитку окремих елементів. Приклад

Сумарний випуск продукції складається з випусків кожного з чотирьох продуктів. Елементи ранжовані за ефективністю. Бачимо структуру оптимальної стратегії у лідера (ліворуч) – спочатку майже всі ресурси направляються у виробництво з швидкою віддачею, потім з насиченням попиту – у наступне і, нарешті, – у найбільш витратне, але з найбільшим обсягом попиту. Зміни домінуючих продуктів і є причиною ступінчатого характеру залежності, яку можна назвати узагальненою логістичною залежністю. Процеси розвитку у аутсайдера мають дещо інший характер.

Аналіз рангових розподілів для темпу сумарного виробництва. Важливим індикатором оптимальності та стійкості так званих активних систем [54, 73, 116, 135, 144, 149, 153, 154], до яких відносяться і розподілені виробничі системи, вважаються певні значення нахилів асимптот. Такими оптимальними нахилами є нахили $\alpha_2 = -1$ та $\alpha_1 = -0.5$. Наші базові моделі і програми можуть відтворити все, що спостерігається для реальних розподілів ресурсів у розподілених системах. На рис. 4.8 подані у подвійних логарифмічних масштабах рангові розподіли елементів по ефективності витрат на розвиток і доходах.

Бачимо, що ці розподіли при певних умовах є досить близькими до асимптот з нахилами $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = -0.5$. У відомій літературі розглядаються переважно імовірнісні математичні моделі, що породжують рангові розподіли в активних системах [120, 149, 153, 154]. Ми отримали детерміновану модель, що при певних умовах породжує гіперболічні розподіли. Можна також бачити, що гіперболічні рангові розподіли малочутливі до зміни кількості елементів в системі, тобто гіперболічні розподіли є не артефактом, а системною властивістю.

Умовою виникнення гіперболічних рангових розподілів в детермінованій системі є стартова різниця efi_i в ефективності елементів. Невелика різниця ефективностей елементів в 3–5% породжує велику – гіперболічну різницю в усталених темпах сумарного виробництва елементів.

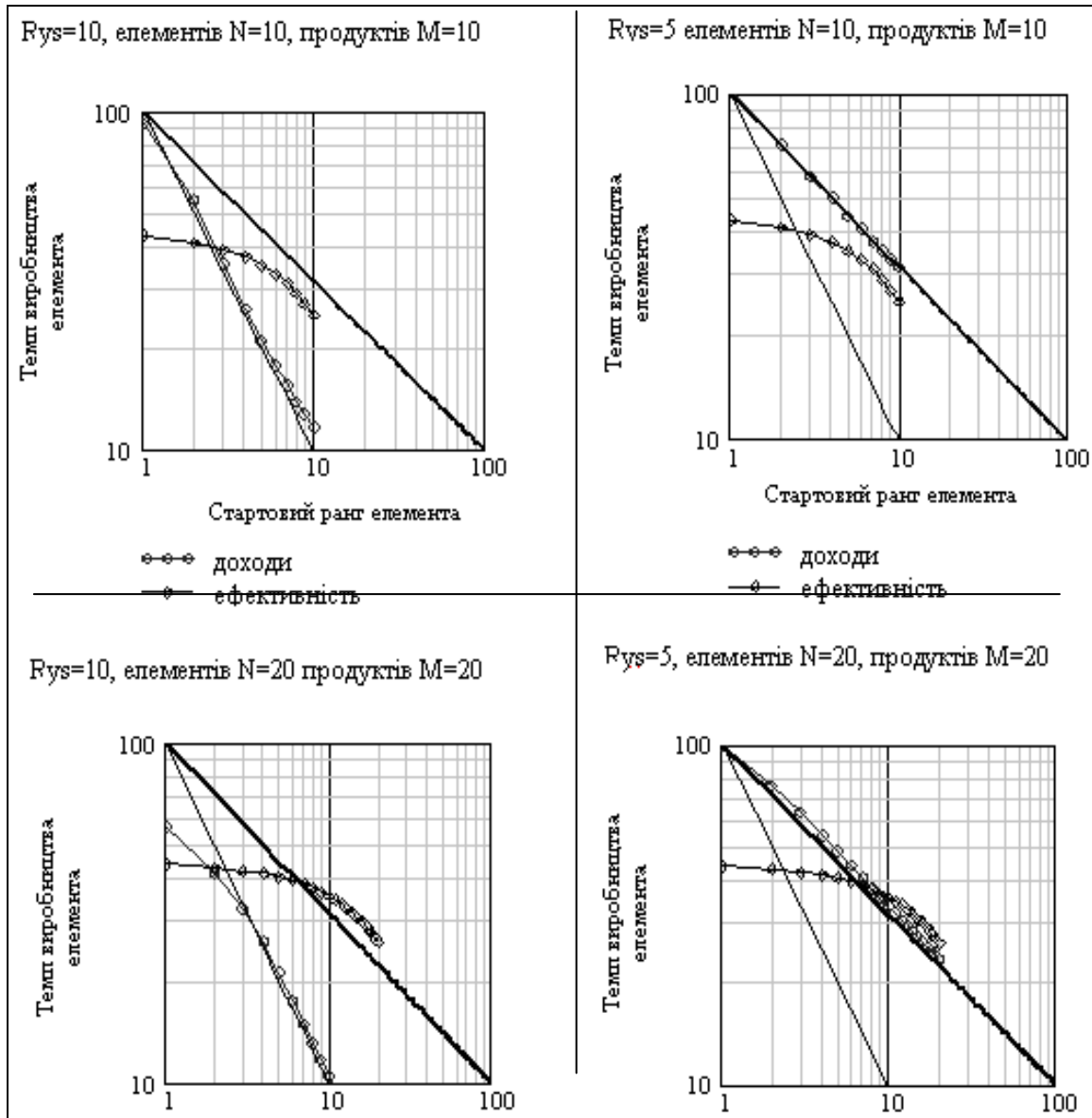


Рис. 4.8. Рангові розподіли елементів за сумарним обсягом виробництва

Аналіз рангових розподілів по окремих продуктах і виробниках. Структура усталеного розподілу ринків різних продуктів між елементами є теж нерівномірною. На рис. 4.9 подано графіки рангових розподілів елементів за ефективністю витрати на розвиток (причина) та темпами сумарних випусків (наслідки).

На цьому ж графіку подано також серію рангових розподілів темпів виробництва продуктів різних рангів. Бачимо, що для лідера цей

розподіл є суттєво нерівномірним, а для аутсайдера – майже рівномірним.

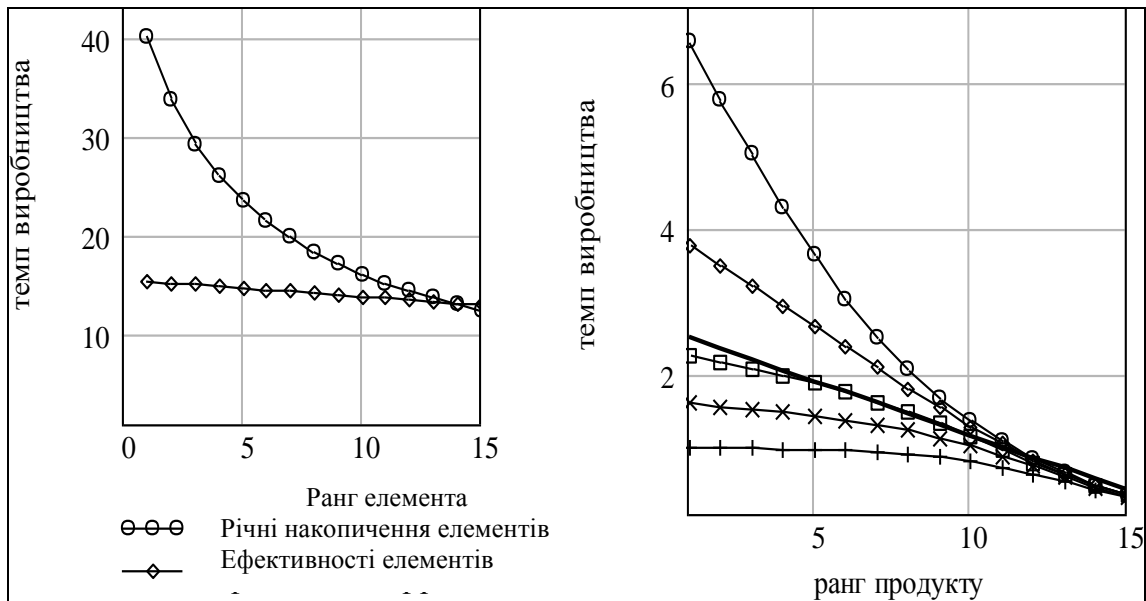


Рис. 4.9. Розподіли продуктів між виробниками

Нерівномірність розподілу обсягів виробництва продуктів між елементами має два рівні – кількісний: за сумарним виробництвом; та структурний (якісний): за часткою виробництва певного продукту. Можна бачити, що кращі виробники мають більші частки по кращих продуктах, аутсайдери мають збільшені частки по гірших продуктах. Це властивість оптимальних за критерієм сумарного виробництва розподілених систем.

Аналіз впливу стартових розподілів параметрів елементів. Процеси розвитку і кінцевий стан розподіленої системи суттєво залежать від початкових умов.

На рис. 4.10 подано усталений ранговий розподіл сумарного виробництва по кожному елементу, та його деталізація – графік розподілу темпів випусків продуктів для кожного елемента. Стартові темпи виробництва є однаковими для усіх елементів, а ефективність елементів відрізняється на 5%.

На рис. 4.11 подано такі ж графіки для випадку невеликого (10%) домінування кожного елемента у стартовому рівні виробництва по одному з продуктів. Виникає спеціалізація кожного елемента у "своєму" продукті. Стартове домінування вибране так: елемент з найбільшою ефективністю домінує у виробництві найгіршого продукту, елемент з найменшою ефективністю – у виробництві найкращого продукту. Тобто вибрана "антиприродна" ситуація, яка при детальному аналізі виявляється скоріше правилом, ніж винятком.

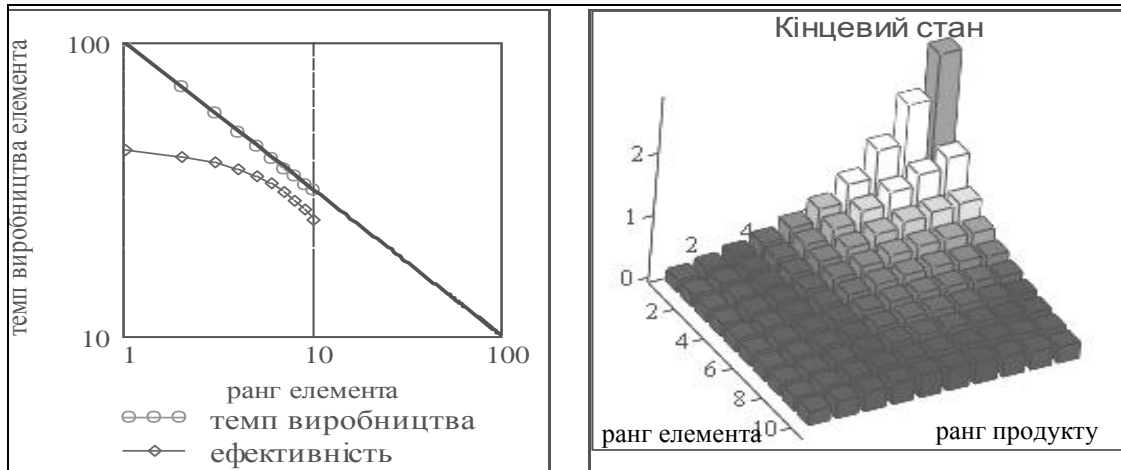


Рис. 4.10. Розподіл продуктів між елементами. Повне домінування

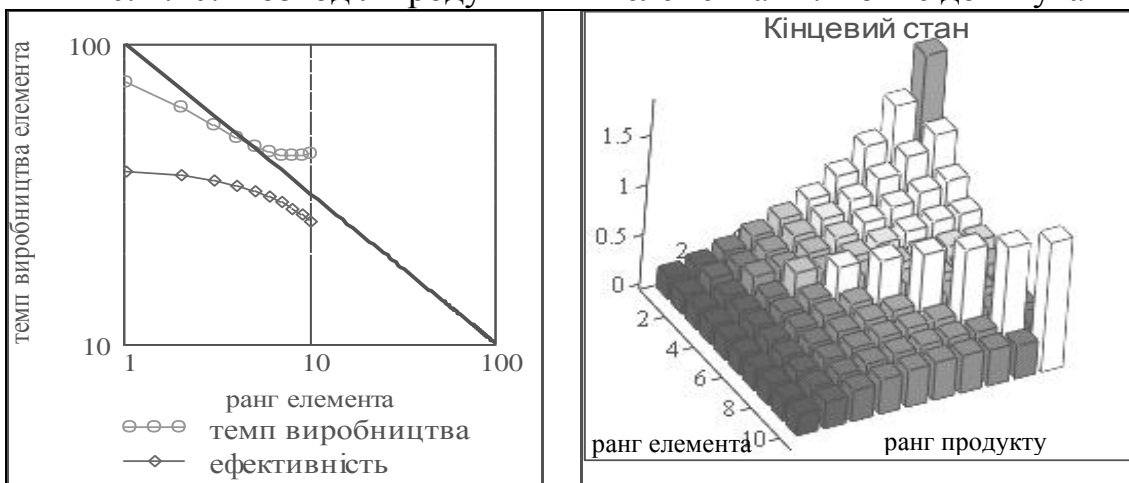


Рис. 4.11. Розподіл продуктів між елементами. Мале домінування елементів по одному з продуктів

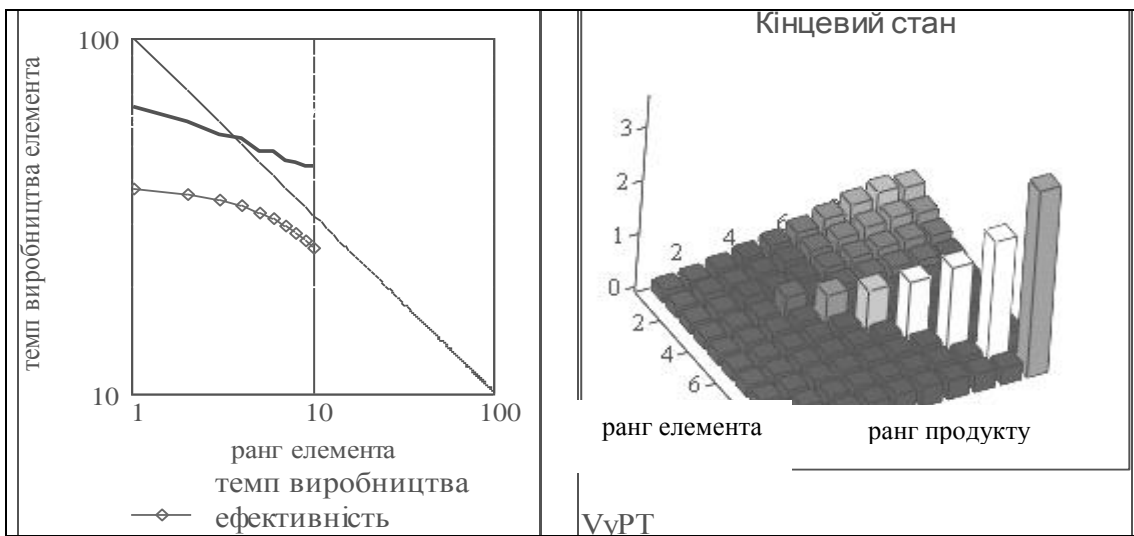


Рис. 4.12. Розподіл продуктів. Суттєве домінування кожного елемента по одному з продуктів

У випадку суттєвого (20%) домінування у стартовому рівні виробництва кожного елемента по одному з продуктів (рис. 4.12) виникає повна спеціалізація – кожен елемент повністю домінує у "своєму" продукті. Звернемо увагу на неможливу для лінійних і стаціонарних систем особливість: гірший за продуктивністю елемент є лідером, тільки тому, що він мав стартове домінування по кращому продукту. Цей результат суперечить постулатам "вільного ринку" про домінування кращого продукту [1, 2]. Такий ефект "застрявання" характерний для інформаційних продуктів, зокрема, пакетів прикладних програм. Наведені результати моделювання є малою часткою проведених тестувань моделі і досліджень.

Аналіз відмовостійкості розподіленої системи. Як приклад придатності математичної моделі для модифікації розглянемо задачу моделювання розподіленої системи з урахуванням випадкових відмов певних елементів. При відповідному виборі параметрів законів управління, критеріїв і параметрів система може бути стійкою, а стан рівноваги буде глобально і локально (для розподіленої системи і для кожного елемента) оптимальним [8, 133]. Простіша модель відмов: відмови елементів випадкові, раптові, повні і остаточні. Імовірності безвідмовної роботи елементів для наближення до реальності зроблено пропорційними їх ефективностям.

Базова модель була модифікована для дослідження поведінки системи при відмовах елементів. На рис. 4.13 подано приклад результатів моделювання – дві реалізації процесу функціонування системи.

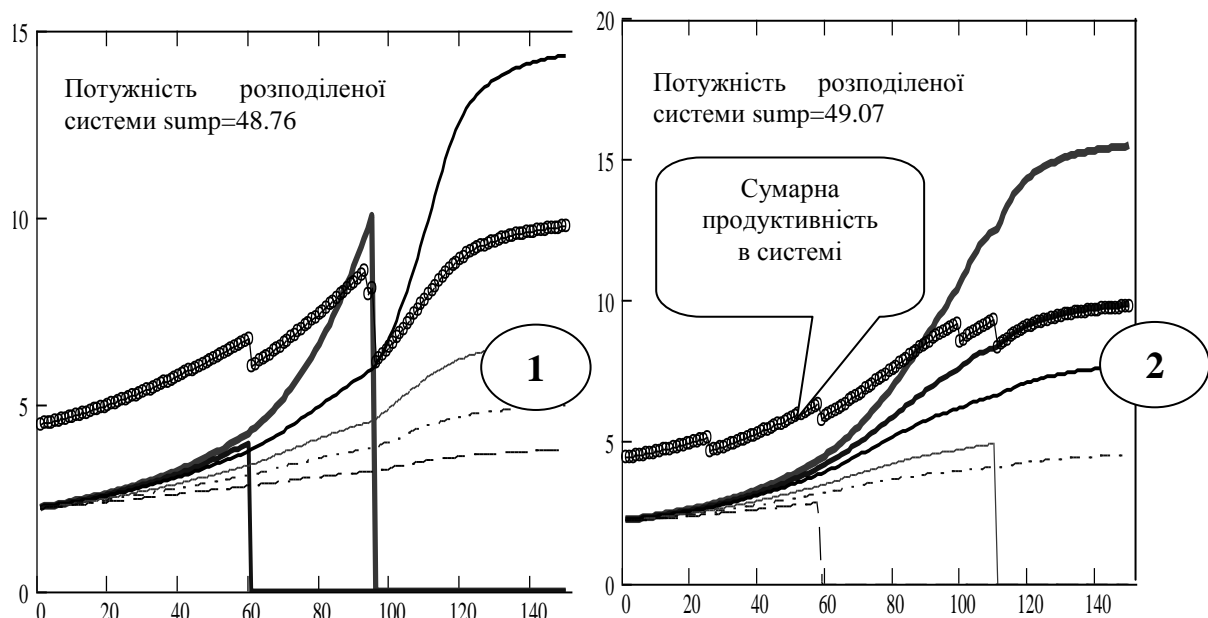


Рис. 4.13. Приклади процесів функціонування системи при відмовах

В першому випадку моделюється процес розвитку для ситуації "рання" відмова елемента – лідера, в другому – відмова 4–х з 10 елементів протягом процесу. Можемо бачити, що у всіх випадках навантаження перерозподіляється між працюючими елементами і сумарний темп виробництва в усталеному стані близький до максимуму. Цю модель відмов, в свою чергу легко розширити для урахування відмов з відновленням, поступових, часткових та ін.

4.4. Розробка програми для моделювання розподіленої системи з урахуванням невизначеностей

В цьому підрозділі робимо наступний крок – модифікуємо детерміновану модель розподіленої системи для урахування невизначеностей. В цьому розділі, як і в попередніх, текст програми є також інтерфейсом – середовищем для розробки нових моделей для нових задач.

Використовуємо принцип базової моделі і програми, що дозволяють за стандартними інформаційними технологіями і з мінімальними змінами базової програми отримувати нові програми і нові інтерфейси.

4.4.1. Аналіз невизначеностей

Згідно з основними функціональними компонентами базової математичної моделі (виробництво, використання, управління) розглядаємо:

- невизначеність виробництва;
- невизначеність попиту;
- невизначеність прийняття рішень (управління).

В цьому розділі розглянемо невизначеність прийняття рішень. В детермінованій моделі ресурси елемента виділені на розвиток виробництв ділились згідно з певним критерієм очікуваної ефективності. В імовірнісній моделі цього розділу ресурси діляться між елементами теж пропорційно очікуваній ефективності, але імовірно. Невизначеність в прийнятті рішень розглядаємо як результат невизначеностей вхідних даних для прийняття рішень та неадекватності математичних моделей процесів [21, 22].

Для підвищення ефективності процесу розвитку в умовах невизначеностей параметрів елемента та його зовнішнього оточення, в управління вводиться невизначеність. Такий підхід – основа відомих наукових напрямків "випадковий пошук", "штучні нейронні мережі" [77, 155, 156]. В теорії управління показано, що для нормального функціонування адаптивних систем управління потрібні збурення. Коли природні збурення малі для адаптації, то вводять тестові дії [145].

4.4.2. Розробка моделі локального управління в умовах невизначеності

В розділі 4.2 ми розробили модуль детермінованого розподілу ресурсу елементом виробничої системи між окремими продуктами. Тепер зробимо узагальнений модуль, де поточний ресурс ділиться спочатку на дві частки. Потім одна частка розподіляється детерміновано між окремими продуктами пропорційно критеріям їх перспективності, друга частка – імовірно виділяється одному з елементів. Імовірності вибору елементів формуються пропорційно критеріям перспективності елементів. Для ізольованого елемента математичні очікування величин ресурсу, що виділяється для розвитку окремих продуктів, при чисто імовірнісному розподілі будуть пропорційними значенням критерію перспективності. Тобто, для ізольованого елемента розподіленої системи середні величини ресурсу для розвитку різних продуктів будуть сходиться до величин визначених детермінованим розподілом.

Однак для ансамблю нелінійних динамічних систем, що виробляють певні продукти при наявності обмежень на сумарний обсяг виробництва, результати імовірнісного розподілу не будуть тотожними результатам детермінованого пропорційного розподілу. В рамках базової моделі, як показано в підрозділі 4.3 на початкових етапах розвитку, коли до обмежень сумарного виробництва ще далеко, концентрація ресурсів на одному з продуктів дає не тільки більший приріст темпу сумарного виробництва, але й приводить до незворотного розподілу потрібного виробництва на певний продукт. Альтернативою детермінованому пропорційному розподілу може бути детермінований монопольний розподіл – весь поточний ресурс віддавати кращому за критерієм перспективності продукту. Пропорційний і монопольний детерміновані розподіли – механізми наближеної реалізації оптимальних стратегій розвитку. В розділі 2 ми отримали точний розв'язок задачі оптимізації розвитку – як варіаційної задачі Больца.

В умовах невизначеностей точність математичних моделей повинна бути адекватною точності вхідних даних. До таких моделей відноситься модель комбінованого розподілу ресурсу.

Природним глобальним критерієм для системи в цілому є темп сумарного виробництва, або накопичене за певний період сумарне виробництво. Цю задачу розв'язуємо непрямым шляхом – "дозволяємо" кожному елементу максимізувати свій власний темп сумарного виробництва. Однак і цю локальну задачу оптимізації ми розв'язуємо непрямым шляхом – ми не шукаємо максимум сумарного виробництва, а просто розподіляємо ресурс відповідно з критерієм "очікувана ефективність" (4.2)–(4.4).

Якщо дотримуватись постулату "кращий отримує більше", то гра-

ниціями множини розподілів, що задовольняють постулат будуть розподіли "усім рівно" та "все кращому". Згадаємо принцип недостатності підстав: при повній невизначеності альтернатив вважати їх рівнозначними. В статті [35] розглянуто алгоритм "вибір–освоєння", що починав роботу з рівномірного розподілу ресурсів і по мірі накопичення даних змінював оцінки ефективності виробництва продуктів. Ми відбираємо з цього діапазону розподілів два простих для реалізації:

- пропорційно критерію перспективності продукту efp ;
- монополюю – кращому продукту весь поточний ресурс.

На базі цих детермінованих моделей розподілу будуюмо імовірнісний алгоритм розподілу поточного ресурсу між виробництвами різних продуктів.

Наведемо послідовність кроків з визначення локального управління за імовірнісною моделлю. Перші кроки – визначення середніх – такі, як в детермінованій моделі:

- ковзний середній темп виробництва

$$xs_{i,j} = xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_{t+1})_{i,j} \cdot (1 - \alpha);$$

- ковзний середній темп прирощення темпу виробництва

$$dxs_{i,j} = dxs_{i,j} \cdot \beta + \Delta xs_{i,j} \cdot (1 - \beta).$$

Параметри $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ – об'єкти настроювання в залежності від швидкості змін і рівня шумів [35]. Оцінка перспективності продукту

$$efp_{i,j} = a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}.$$

Наступний крок – розподіл ресурсу елемента на дві частки: імовірнісну $0 \leq lox \leq 1$ та детерміновану $(1 - lox)$ частки. Частка lox випадає одному продукту, але згідно з розподілом ймовірностей, що формується нормуванням ефективностей продуктів; частка $(1 - lox)$ ділиться відповідно цьому ж розподілу. Змінюючи параметр lox в діапазоні $0 \leq lox \leq 1$ отримуємо широкий спектр детермінованих та імовірнісних законів управління. Подаємо відповідні залежності

- нормований критерії перспективності продуктів

$$rzp_{i,j} = \frac{efp_{i,j}}{\sum_{K=1}^M efp_{i,j}}; \quad (4.5)$$

- розподіл ресурсу між імовірнісною та детермінованою часткою

$$Rpm_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot lox_i; \quad Rdp_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot (1 - lox). \quad (4.6)$$

Розподіл цих часток між витратами на розвиток виробництва продуктів:

– "лотерейний" розподіл

$$(rpm_t)_{i,j} = Rpm_{i,t} \cdot P(rzp_{i,j}); \quad (4.7)$$

– пропорційний розподіл

$$(rdp_t)_{i,j} = Rdp \cdot rpz_{i,j}. \quad (4.8)$$

Частки ресурсу для кожного елемента

$$r_{i,j} = (rpm_t)_{i,j} + (rdp_t)_{i,j}, \quad (4.9)$$

де $i = 1..N$, $j = 1..M$ – індекси елементів та продуктів; $0 \leq lox_i \leq 1$ – частка поточного ресурсу системи, що розподіляється імовірно ("лотерейний розподіл"); $Rs_{i,t}$ – поточний сумарний ресурс i -го елемента; $Rpm_{i,t}$ – імовірна монопольна частка ресурсу; $Rdp_{i,t}$ – детермінована пропорційна частка ресурсу; $P(rzp_{i,j})$ – випадкова подія: ресурс $Rpm_{i,t}$ виділений для розвитку виробництва j -го продукту; $(rpm_t)_{i,j}$, $(rdp_t)_{i,j}$ – імовірна та детермінована складові поточного ресурсу виділеного у розвиток j -го продукту; $r_{i,j}$ – локальне управління: поточний ресурс, виділений i -им елементом у розвиток j -го продукту.

4.4.3. Розробка програми моделювання та інтерфейсу

Процес розробки модуля локального управління розбито в послідовність кроків – від елементарних одновимірних генераторів випадкових подій до багатовимірної системи з самонастроюванням параметрів алгоритму локального управління. Цей процес – не тільки технологія швидкої і безпомилкової розробки певного кінцевого продукту – програмного модуля, але й редуційна декомпозиція моделі локального управління. Змінні, за якими упорядковується система моделей, породжених редуційною декомпозицією – розмірності системи $M \times N$, та кількість параметрів за якими виконується самонастроювання. В [8] подані тексти програмних модулів $vp7(Mr)$ та $vp8(Mr, lox)$. Останній модуль бере матрицю ефективностей (кожного продукту у кожного елемента) Mr розміром $(M \times N)$ та вектор lox значень "ризикової частини" для кожного продукту (в ризикології це називають схильністю до ризику), і повертає матрицю розподілу ресурсу, кожен стовпець якої – вектор розподілу ресурсу між окремими продуктами для відповідного елемента. Для кожної версії модуля локального управління були побудовані інтерфейси для відлагодження і тестування (рис. 4.14).

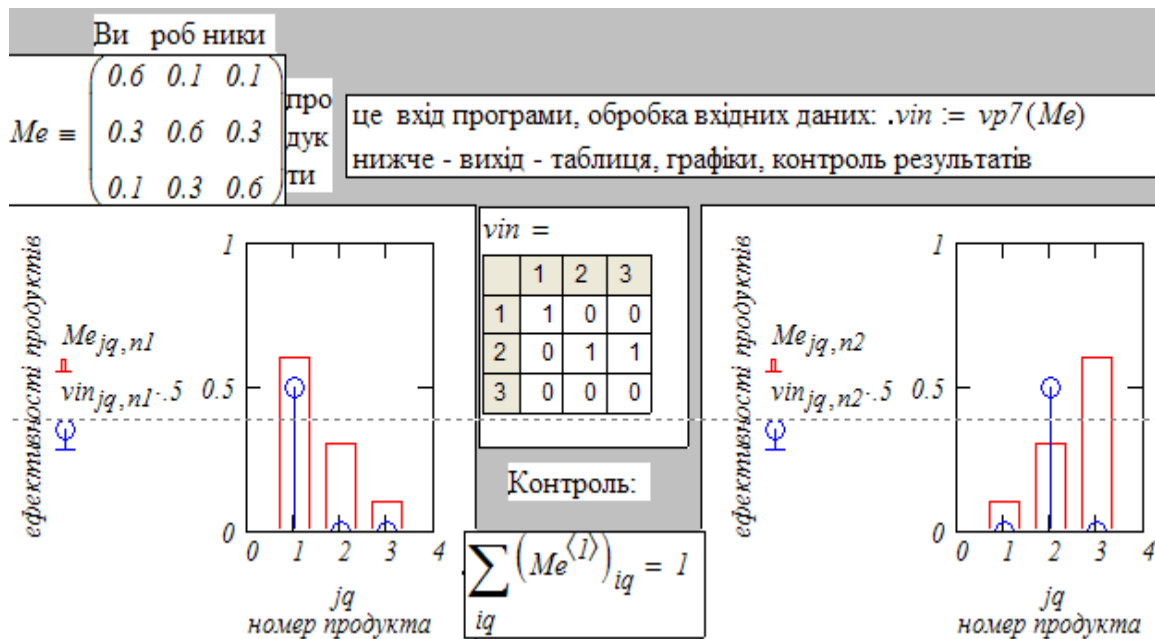


Рис. 4.14. Інтерфейс для тестування і відлагодження модуля локального управління

Програма моделювання процесів розвитку розподілених систем з урахуванням невизначеностей отримана незначною зміною попередньої програми моделювання детермінованих процесів розвитку. На рис. 4.15 подано кінцеві фрагменти двох програм. Виділено додатковий елемент – виклик підпрограми локального управління.

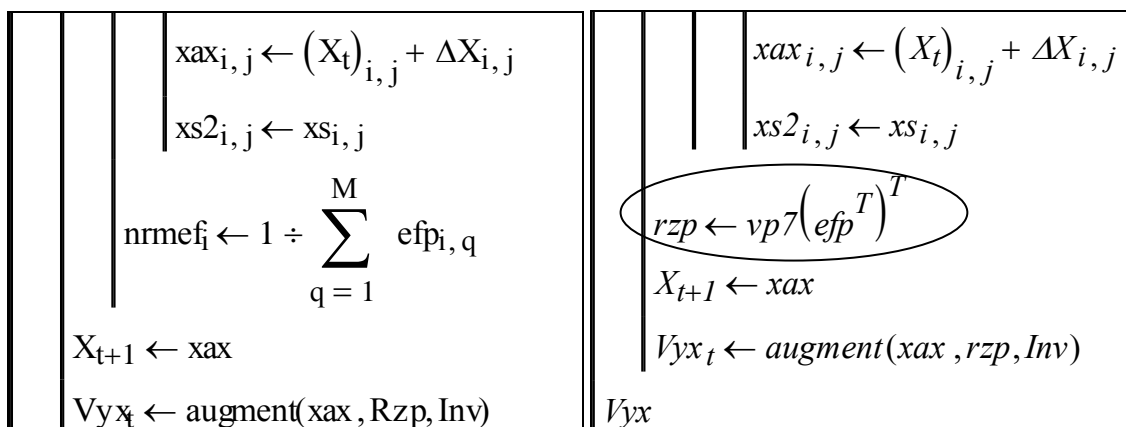


Рис. 4.15. Порівняння версій програм моделювання процесів розвитку

На рис. 4.16 подано першу частину інтерфейсу програми моделювання: вхідні дані – параметри системи та параметри обчислювального експеримента.

Параметри розподілів сукупності продуктів, ефективності, стартових темпів виробництва. Число виробників $N=30$, число продуктів $M=10$, $ORIGIN=1$, $i=1 \dots N$, $j=1 \dots M$

Параметри системи: середні об'єми продуктів на одного виробника $Rys=6$; ефективність інвестицій $efs=1.1$; стартовий темп виробництва $Xos=0.2$; домінування в стартовому рівні (відносне) $Dom=0.0$; мінімальна сукупність продуктів $Rmi=2$; мінімальна ефективність $efmi=1.1$; мінімальний стартовий темп $Xom=0.1$.

Параметри моделювання. Період моделювання $Tmo = 150$; час $tt=1 \dots Tmo$; крок моделювання $dT=0.1$; стартові значення для змінних програми: темп росту $tmp_{i,j}=0$; перспективності продуктів $nrme_{fj}=10$; стартові значення $Nmr_{fei}=0.8$; пропорції розподілу $rzo_{i,j}=1 \div N$.

Параметри моделі прийняття рішень. Усереднення: темпу виробництва $\alpha=0.6$; темпу прирощення $\beta=0.6$. Цінності: темпу $a1=1$; прирощення $a2=20$.

Рис. 4.16. Інтерфейс програми моделювання процесів розвитку з урахуванням невизначеностей

4.5. Аналіз результатів моделювання імовірнісної розподіленої системи

Друга частина інтерфейсу програми – результати моделювання – складається з декількох сторінок і утворена модифікацією інтерфейсу для детермінованої моделі (рис. 4.5–4.12). Додано тільки модуль аналізу частотних розподілів.

Було проведено великий обсяг досліджень на імовірнісній моделі. Напрямки досліджень:

- відтворення режимів, що спостерігаються в реальних розподілених системах матеріального та інформаційного виробництва;
- пошук умов оптимальності та стійкості;
- аналіз властивостей.

Далі подано малу частину проведених досліджень – приклади моделювання і одночасно приклади інтерфейсів. В імовірнісній системі реалізації процесу розвитку можуть суттєво відрізнятись.

На рис. 4.17 подано дві реалізації випадкових процесів розвитку системи "30 елементів, 10 продуктів". В кожній реалізації подано процеси зміни темпів виробництва в часі по кожному з продуктів для аутсайдера і лідера за продуктивністю.

В імовірнісній розподіленій системі навіть при рівних стартових умовах кінцевий розподіл темпів сумарного виробництва буде нерівномірним.

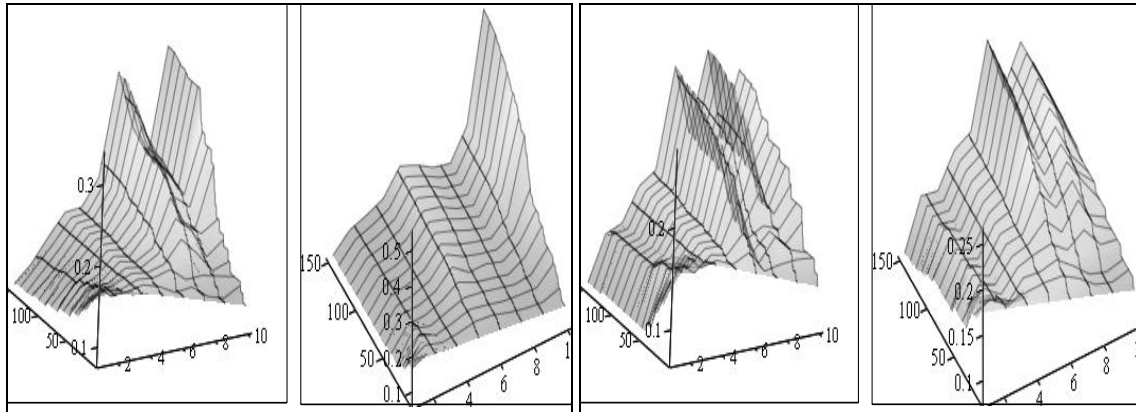


Рис. 4.17. Дві реалізації процесів розвитку для вибраних елементів

На рис. 4.18 подано ранговий розподіл усталених обсягів в системі з 30 елементів, а поряд – тривимірний графік розподілу усталених темпів виробництва в кожному елементі по кожному продукту. Можемо бачити суттєву (рангову) нерівномірність розподілу за окремими продуктами. Згідно з умовами обчислювального експерименту всі елементи мають однакову ефективність перетворення ресурсу в продукт, але невизначеність даних, на основі яких приймаються рішення, приводить до суттєво нерівномірного – гіперболічного розподілу ресурсу. Цей результат відповідає статистичним даним з розподілів в різних галузях (електроніка, програмні продукти, виробництво сталей та ін.). Це є підтвердженням адекватності запропонованих моделей.

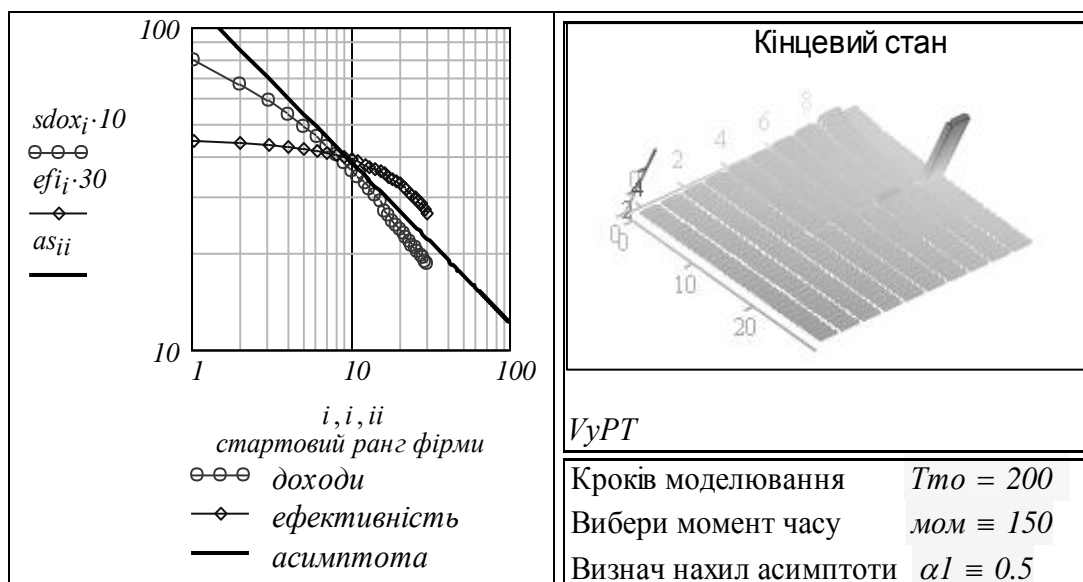


Рис. 4.18. Усталений розподіл виробництва. Приклад

При аналізі процесів розвитку детермінованих розподілених систем визначили, що навіть при невеликому домінуванні за продуктивністю в усталеному стані виникають гіперболічні розподіли, коли 10–20% елементів забирають 80–90% загального обсягу виробництва (рис. 4.8, 4.9).

Розроблена модель " $M \times N$ системи" дозволяє для кожного елемента задавати свої алгоритми управління розподілом ресурсів (локального управління). Використаємо цю можливість моделі для порівняння імовірнісних і детермінованих алгоритмів локального управління. На рис. 4.19 подано три процеси розвитку системи. На цих тривимірних графіках подано залежності темпів сумарного виробництва для 30-ти елементів системи. Умови обчислювального експерименту: елементи ранжовані за ефективністю (параметром ef_i в (4.1)), п'ятнадцять кращих елементів розподіляють ресурс у розвиток за детермінованим алгоритмом (4.2)–(4.4), а п'ятнадцять гірших – за імовірнісним (4.5)–(4.9). На рис. 4.19А подано процеси розвитку для випадку, коли згідно з ризиковим алгоритмом розподіляється частка $lox = 0.7$ елемента; на рис. 4.19Б $lox = 0.4$; на рис. 4.19В $lox = 0.0$. Можемо бачити, що елементи з підмножини "аутсайдерів" за ефективністю можуть виходити в лідери за темпом сумарного виробництва.

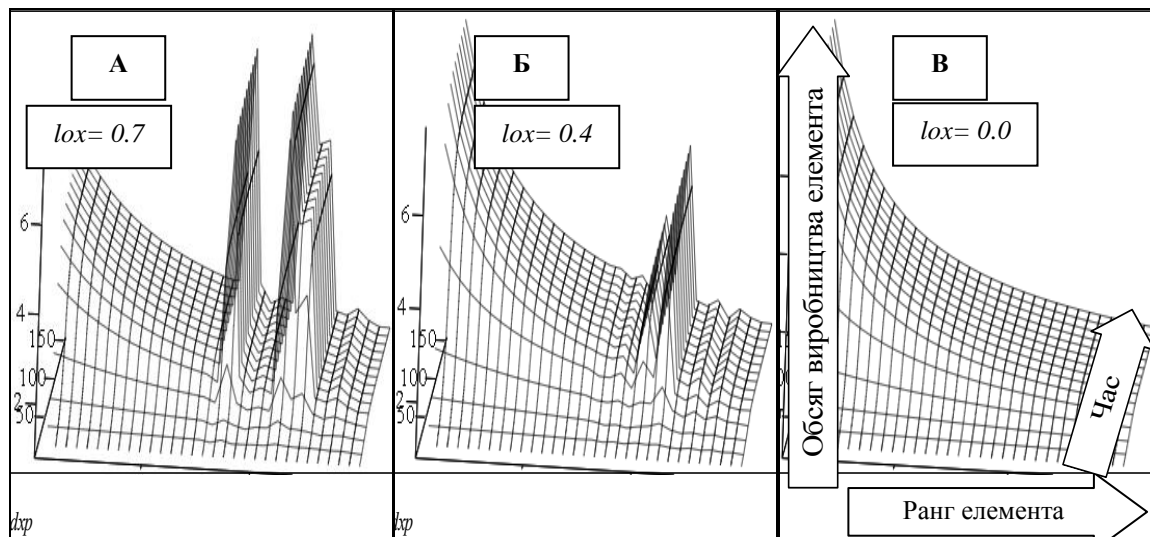


Рис. 4.19. Процеси розвитку системи з двома класами елементів

В середньому, використання імовірнісного алгоритму дає елементу перевагу в 20–40% відносно елементів, що використовують детермінований алгоритм, за продуктивністю стають лідерами за рахунок зваженого ризикового управління розподілом ресурсу.

На рис. 4.20 подано приклад статистичного аналізу усталених розподілів темпів виробництва в розподіленій системі з трьох елементів при наявності невизначеностей. На рис. 4.20А подано результати обчислювального експерименту для такої ситуації: кожен елемент має стартове домінування 12% з виробництва одного з продуктів; ефективності елементів складають відповідно 1.30, 1.15, 1.00; обсяги попиту на окремі продукти дорівнюють 3, 5, 8. Алгоритми управління у всіх елементів однакові – імовірнісні.

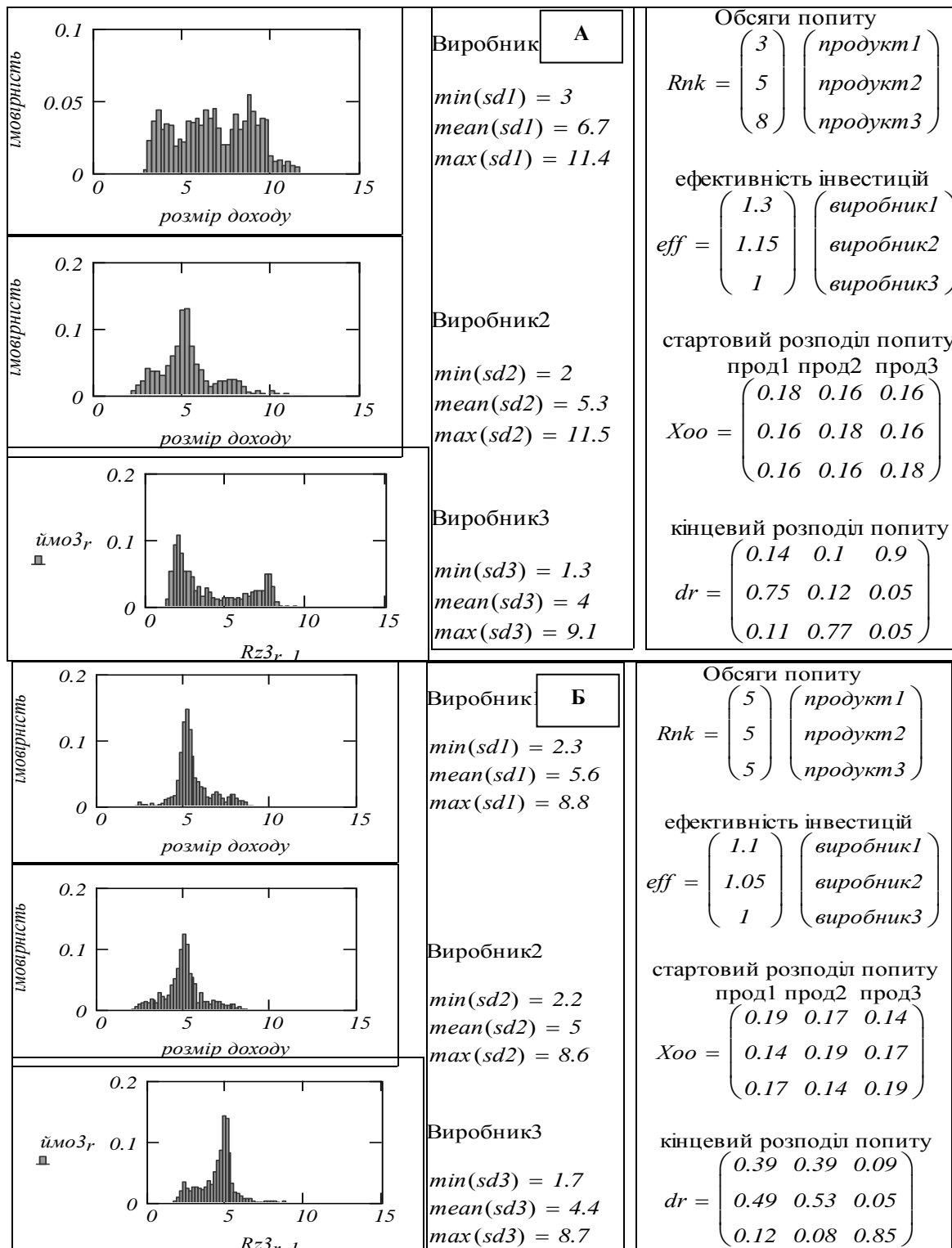


Рис. 4.20. Аналіз статистики розподілу обсягів виробництва

Усталені середні значення обсягів виробництва дорівнюють 6.7, 5.3, 4.0, а нормовані 1.67, 1.32, 1.00. Однак ці середні є малоінформативними, тому що частотні розподіли мають складну структуру:

– розподіл у лідера має три приблизно однакові максимуми (моди);

– розподіл у другого за продуктивністю теж має три моди, одна з яких є домінуючою, тобто для середнього найбільш імовірним кінцевим станом є друга позиція – середина;

– розподіл у останнього за рангом має дві моди на границях діапазону, фактично останній за продуктивності або стає останнім у виробництві, або, з меншою але суттєвою імовірністю, стає лідером. Середній стан є малоімовірним.

На рис. 4.20Б подано результати обчислювального експерименту для такої ситуації: кожен елемент має стартове домінування 12% з виробництва одного з продуктів; ефективності елементів складають відповідно 1.10, 1.05, 1.00; обсяги попиту на окремі продукти дорівнюють 5, 5, 5. Алгоритми управління у всіх елементів однакові – імовірнісні. Усталені середні значення обсягів виробництва дорівнюють 5.6, 5.0, 4.4, а нормовані 1.27, 1.13, 1.00. Усі розподіли приблизно унімодальні, моди (максимуми) є приблизно однаковими. Звернемо увагу на те, що розподіл "середнього" – симетричний, розподіли лідера і аутсайдера мають асиметричні "хвости" – для лідера в бік більших, для аутсайдера – в бік менших темпів сумарного виробництва. З практичної точки зору цікавим є те, що найбільш імовірні значення темпів виробництва є однаковими, хоч елементи мають різні ефективності. Конкретні причини – рівноцінність продуктів за попитом та наявність початкової спеціалізації. За цими розподілами ймовірностей стоять розподіли виробництва зі спеціалізацією (рис. 4.12).

Таким чином зв'язки елементів через ресурси, суттєві нелінійності і нестационарність розподіленої системи породжують складну структуру поведінки розподілених систем вже у випадку трьох елементів. В цілому отримана система моделей дозволяє отримувати нетривіальні знання про властивості розподілених систем. Моделюванням фактично підтверджено положення Форрестера "Використовуючи модель складної системи, можна дізнатися більше про внутрішні взаємодії, ніж при експериментуванні з реальною системою" [142, 143].

4.6. Розширення математичної моделі розподіленої системи

Ми розглянули декілька моделей процесів розвитку розподілених систем. Очевидно, що окремий стан розподіленої системи, взятий в певний момент часу, є малоінформативним. Системну цілісність має тільки послідовність цих станів. Менш очевидно, що окрема математична модель розподіленої системи – це тільки стан метамоделі процесу побудови системи моделей. Елементи системи моделей – метамоделі процесу розвитку, можуть бути упорядковані як певні стани чи кроки процесу розробки моделі. Головна особливість цього метапроцесу – створення

моделей, що дозволяють раціональними методами породжувати нові моделі. Метамоделі – процеси розвитку математичних моделей реальних процесів, не можуть бути повністю формалізованими, оскільки конструювання моделей включає евристичні елементи.

4.6.1. Модифікація функціональних моделей розподіленої системи

Модель попиту. Вводимо модель потенційного попиту, як черговий ієрархічний рівень в багаторівневій моделі розвитку (табл. 1.1)

$$Ry_t = Ry_{t-1} + \left[kr \cdot \left(\frac{Rmak - sxp_{t-1}}{Rmak} \right) \cdot sxp_{t-1} \right] \cdot Dt. \quad (4.10)$$

Це рівняння читається так: поточна потреба Ry_t дорівнює попередній Ry_{t-1} плюс прирощення, пропорційне кроку моделювання Dt , сумарному виробництву sxp_{t-1} , параметру "активність користувачів" kr , та множнику в дужках, куди входить фізична ємність попиту $Rmak$.

Функціональна модель "попит" має входи – максимальні ємності попиту, та сумарне виробництво усіма елементами. Вихід – "поточна ємність попиту".

Модель виробництва. Модифікуємо математичну модель розвитку виробництва:

$$xp_{i,t} = xp_{i,t-1} + \left[k_i \cdot \left(\frac{Ry_t - sxp_{t-1}}{Ry_t} \right) \cdot xin_t \cdot Vygr(r) \right] \cdot Dt, \quad (4.11)$$

де $xp_{i,t}$ – поточний темп випуску i -го елемента системи; k_i – показник ефективності витрат на розвиток виробництва; R_t – поточний обсяг попиту на продукти; $xin_{i,t}$ – обсяг витрат на розвиток виробництва;

$sxp_{j,2} = \sum_{i=1}^N (X_2)_{i,j}$ – сумарний темп виробництва в розподіленій системі;

$Vygr(r_i)$ – функція від рангу елемента, що характеризує імовірність того, що вироблені продукти знайдуть користувачів. З практики відомо, що чим вищий ранг організації і більший термін існування, тим стабільніші результати діяльності.

Модель (4.11) має особливість – множник у дужках може бути нульовим і навіть від'ємним. В останньому випадку, формально, маємо ситуацію, коли інвестування веде до зменшення потужностей з виробництв певного продукту. Однак це є першим наближенням до реальних процесів у виробництві – згортання виробництва, як і збільшення, вимагає витрат. Витрати на розгортання і згортання виробництва є асиме-

тричним як за механізмами так і за величинами. Відповідні моделі також були розроблені, випробувані [30].

В моделі другого наближення можна врахувати заморожені і резервні виробничі потужності, продаж і купівлю акцій та ін. В спрощеній моделі першого наближення вважаємо, що виробничі потужності і реальний випуск продукції є узгодженими. Це певна ідеалізація. Але логіка нашої моделі така, що виробничі потужності відслідковують реальний попит і в середньому дорівнюють йому. Тому цей недолік моделі не робить модель некоректною.

Модель витрат на розвиток. В базовій моделі ми вважали, що усі наявні ресурси інвестуються у розвиток. Для інноваційних процесів розвитку (нові продукти, нові технології) більше половини планового періоду (життєвого циклу) проходить саме в такому режимі і на додаток залучаються ще зовнішні ресурси. Для другої половини життєвого циклу потрібна модель розподілу ресурсів в накопичення і в розвиток. Вибираємо загально визнану модель [143], якої свідомо чи несвідомо дотримуються на практиці:

$$\left. \begin{aligned} \dot{xin}_{i,t} &= xin_{i,t-1} + kin_i \cdot (Dxp - din_i \cdot xin_{i,t-1}) \cdot Dt; \\ Dxp &= xptr - xp_{i,t-1}; \\ xptr &= Ry_{t-1} \cdot \frac{xp_{i,t} + xp_{i,t-1} + xp_{i,t-2}}{3 \cdot sxp_{t-1} + 1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

де $xin_{i,t}$ – поточний темп ресурсів у розвиток в i -му елементі; Dxp – потрібне прирощення темпу випуску; $xp_{i,t-1}$ – темп випуску в i -му елементі в попередній період; $xptr$ – бажаний темп виробництва; Ry_{t-1} – обсяг попиту за попередній період; sxp_{t-1} – сумарне виробництво за попередній період. Параметри kin_i , din_i мають інтерпретацію "підсилення" та "демпфування".

4.6.2. Аналіз результатів отриманих на модифікованій моделі розподіленої системи

Модифіковано модель в рамках цієї роботи – тільки перевірка можливості уточнення і розширення базової моделі класу $N \times M$ для розподілених систем. Проведено дослідження відповідності моделі емпіричним даним [15], та аналіз можливостей прогнозування розвитку розподілених систем. Подаємо приклад можливостей модифікованої моделі.

На рис. 4.21–4.23 подано процеси розвитку розподіленої системи в цілому при різних значеннях параметрів "максимальний попит" та "імовірність успіху".

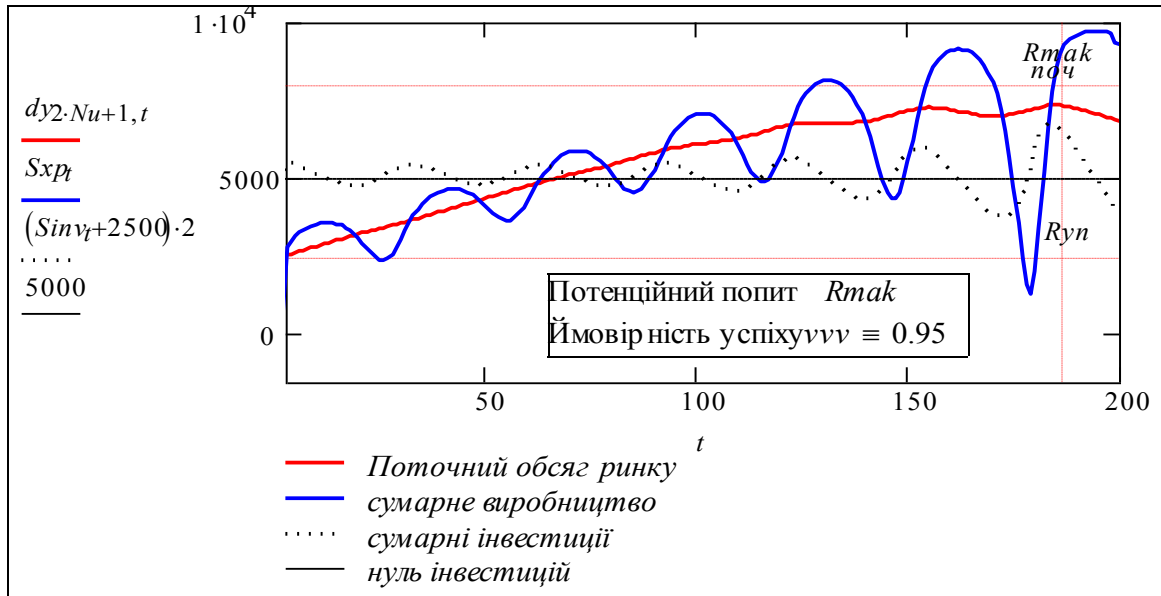


Рис. 4.21. Приклад процесу розвитку: малий попит, високий рівень успіху

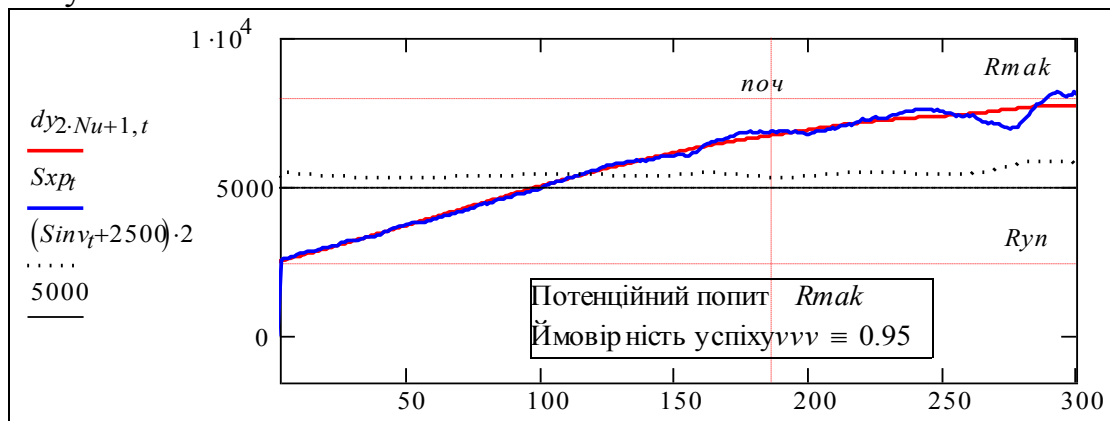


Рис. 4.22. Приклад процесу розвитку: малий попит, низький рівень успіху

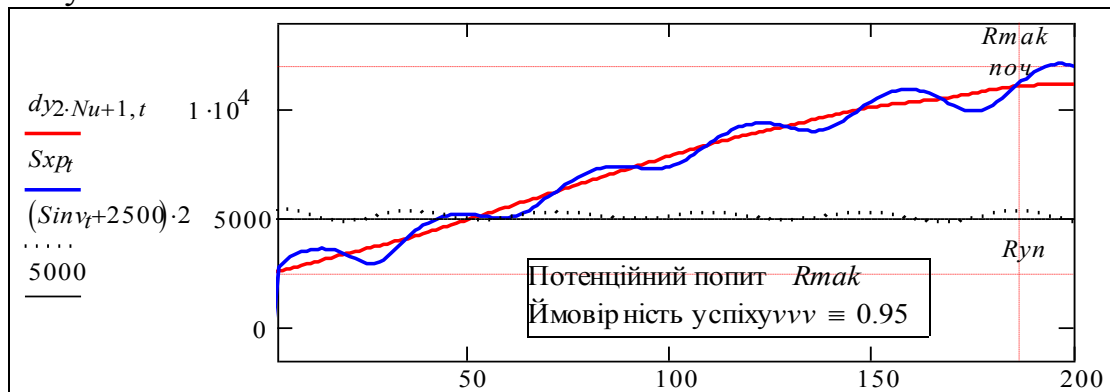


Рис. 4.23. Приклад процесу розвитку: великий попит, високий рівень успіху

Можемо бачити взаємодію двох динамічних підсистем: виробництво і попит. Коливання виробництва, що реагує із запізненням на зростаючий згідно зі зростанням виробництва попит, викликає коливання попиту.

На рис. 4.21 бачимо процес розвитку з коливальною нестійкістю. Причини нестійкості – динамічний зв'язок попиту з виробництвом та запізнення віддачі витрат на розвиток. Модель дає можливість знайти і перевірити в обчислювальному експерименті потрібні дії для забезпечення стійкості розподіленої системи.

Розглянемо дві альтернативи:

– зменшення успішності в ланцюгу "виробництво–використання", при зміні ймовірності успіху з 0.95 до 0.60 система стає стійкою (див. рис. 4.22);

– збільшення обсягу максимального попиту (розширення кола користувачів через Інтернет та інше) теж підвищує стійкість системи (див. рис. 4.23).

На рис. 4.24 подано головний модуль інтерфейсу програми моделювання з тим же, що і на рис. 4.21 нестійким процесом розвитку.

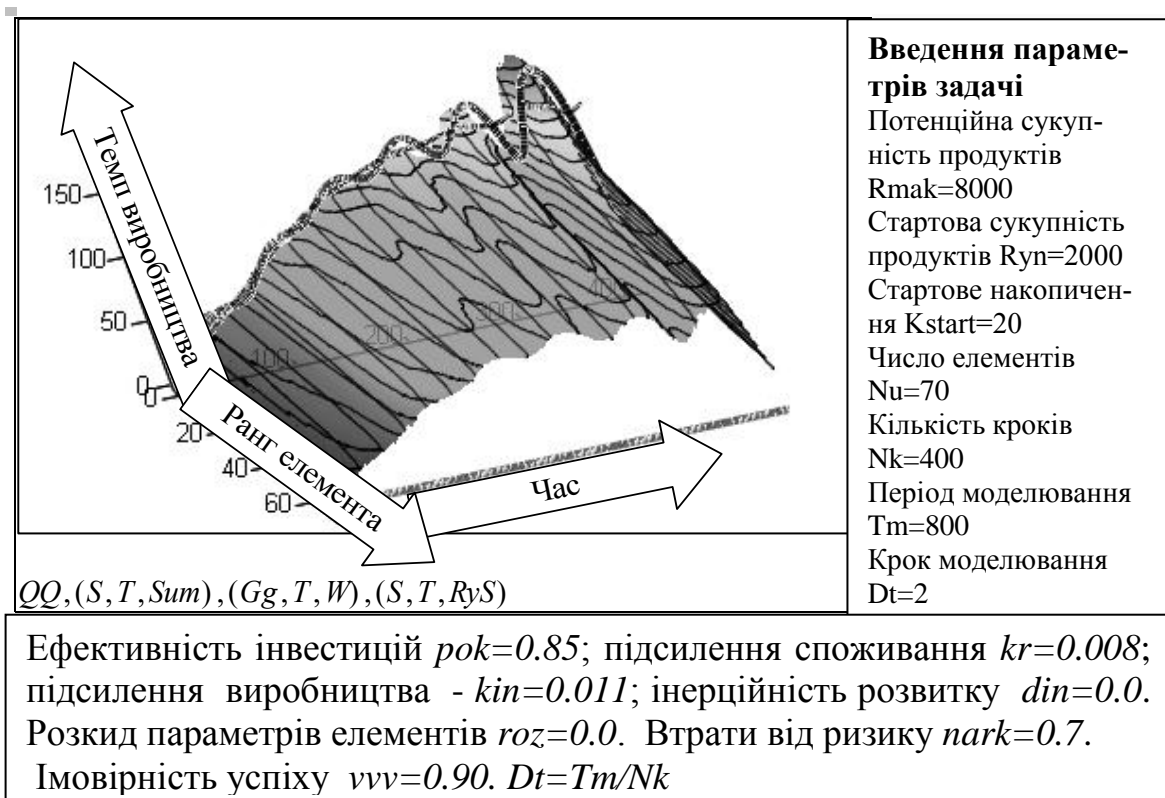


Рис. 4.24. Головний інтерфейс модифікованої програми моделювання процесів розвитку розподіленої системи

В модифікованій моделі розподілена система визначається десятьма скалярними і векторними параметрами. Наприклад, параметр "ефек-

тивність витрат на розвиток" перейшов від базової моделі; параметр "підсилення попиту" для виробничої системи є фактично коефіцієнтом підсилення в зворотному зв'язку – впливу темпу виробництва на попит, для обчислювальної системи, це параметр обчислювального алгоритму, що описує розподіл задач між обчислювальними елементами.

Зведемо результати розробки і дослідження математичних моделей класу „N елементів, M продуктів” в підсумкову порівняльну таблицю (Таблиця 4.1).

Таблиця 4.1

Порівняння розробленої моделі класу „N елементів, M задач” з прототипами

Існуючі моделі систем класу „N елементів, M задач”
<p>Модель відкритого управління, "аукціон Вікрі" (Дж. Мірліс, В. Вікрі [71]):</p> <ul style="list-style-type: none"> – Одноресурсна: лінійні, випуклі, стаціонарні виробничі функції (ВФ). <p>Модель метаігрового синтезу (В. Опойцев [116]):</p> <ul style="list-style-type: none"> – Одноресурсна: стаціонарні, випуклі ВФ. <p>Модель конкурсного механізму розподілу ресурсів (В. Бурков [54, 55]):</p> <ul style="list-style-type: none"> – Багато ресурсна: випуклі ВФ. <p>Дворівнева модель розподілу ресурсу (Т. Боровська [28]):</p> <ul style="list-style-type: none"> – Багаторесурсна: стаціонарні ВФ.
Модифікована модель з урахуванням невизначеностей
<p>Узагальнена робоча модель елемента класу „зростання з обмеженням”</p> $\Delta X_{i,j} = \left[ef_i \cdot [(X_t)_{i,j}] \cdot \left(\frac{Ryn_j - Sus_{j,t}}{Run_j} \right) \cdot Inv_{i,j} \right] \cdot krok;$ $(X_{t+1})_{i,j} = (X_t)_{i,j} + \Delta X_{i,j}$ <p>Узагальнена модель локального управління:</p> $xs_{i,j} = xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_{t+1})_{i,j} \cdot (1 - \alpha); \quad dxs_{i,j} = dxs_{i,j} \cdot \beta + \Delta xs_{i,j} \cdot (1 - \beta);$ $efp_{i,j} = a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}$ <p>Альтернатива 1: розподіл ресурсу між імовірнісною часткою $Rpm_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot lox_i$ та детермінованою $Rdp_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot (1 - lox)$.</p> <p>Альтернатива 2: розподіл ресурсу на розвиток виробництва продуктів: "лотерейний" $(rpm_t)_{i,j} = Rpm_{i,t} \cdot P(rzp_{i,j})$,</p> <p>пропорційний $(rdp_t)_{i,j} = Rdp \cdot rpz_{i,j}$.</p> <p>Комплексна альтернатива: частки ресурсу для i-го елемента:</p> $r_{i,j} = (rpm_t)_{i,j} + (rdp_t)_{i,j}.$

В таблиці 4.1 подано порівняння відомих моделей розвитку з розробленою. Моделі такого класу досить поширені. На базі таких моделей проведені широкі дослідження і отримані фундаментальні результати. Відомі аналітичні методи базуються на припущеннях про випуклість, монотонність і наявність неперервних похідних, а іноді і про лінійність відповідних функцій.

Можливість додати щось нове в такій напрацьованій області обумовлена тим, що автори вибирали модель із умов *невикористання* аналітичних методів.

Перший пункт новизни моделі – інтегрована динамічна субмодель (освоєння, навчання, виробництва і попиту) зростання з обмеженням.

Другий пункт новизни – субмодель управління, що відтворює усі відомі алгоритми локального управління за рахунок вибору параметрів α , β , l_{ox} .

Перевага запропонованої ризикової моделі локального управління відносно відомого пропорційного управління доведена в обчислювальних експериментах.

На рис. 4.25 подано приклад експерименту: тривалість процесу розподілу задач (кроків) для пропорційного алгоритму $T_{pr}=66$; для запропонованого ризикового алгоритму $T_{lot}=54$. Отримуємо зменшення тривалості $T_{pr}/T_{lot}=0.82$.

Статистичний аналіз на вибірці реалізацій дає статистично значиму перевагу запропонованому методу. Початкову стадію такого аналізу – декілька реалізацій випадкових процесів, подано на рис. 4.19. Друга стадія – аналіз частотних розподілів для систем малої розмірності, подано на рис. 4.20. Третя стадія – аналіз частотних розподілів для систем довільних розмірностей, і четверта – побудова аналітичних моделей, виконуються, але виходять за рамки цієї монографії.

За встановленні рамки цієї монографії виходять дослідження процесів в ситуаціях "зворотного розвитку". На рис. 4.25 порівнюються процеси при різних законах локального управління при стартовому рівні сумарного виробництва меншому від обмеження ринку. Зафіксовано перевагу однієї з альтернатив.

Такі ж обчислювальні експерименти були проведені для випадків перевиробництва взагалі і по окремих продуктах. Виявлено парадоксальний результат – елементи-лідери в умовах зростання виробництва були аутсайдерами в умовах спадів.

Знайдено причину – для різних умов ринку потрібні різні закони управління. Менеджерам-практикам це відомо, згадаємо етикетку "кризовий менеджер".

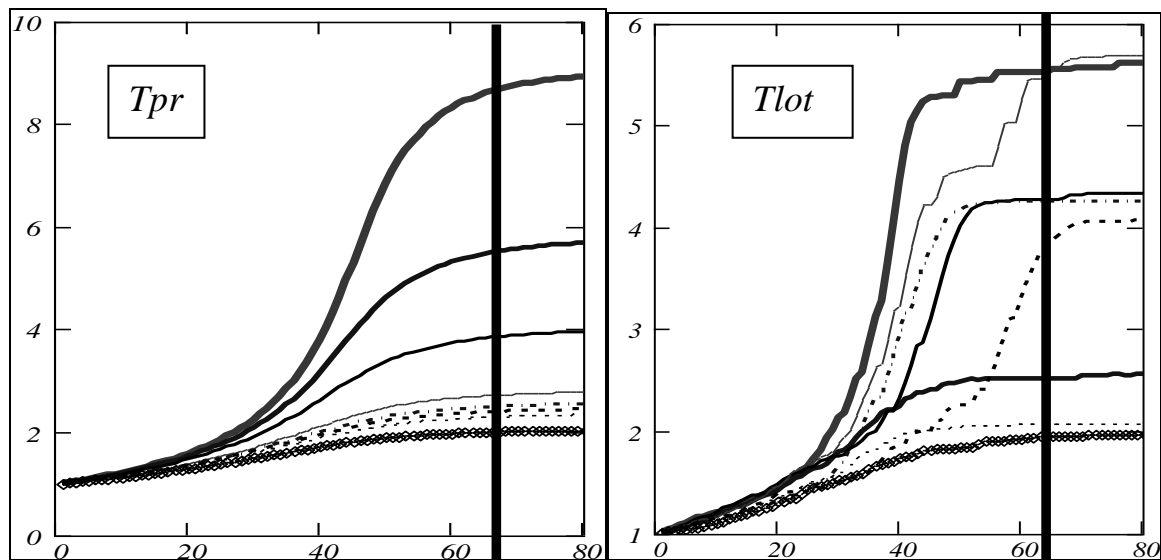


Рис. 4.25. Порівняння існуючої і запропонованої моделей оптимізації розподілу ресурсів

Проблема адекватності. Дж.Форрестер – один із засновників "індустріальної динаміки", так визначив адекватність математичних моделей підприємства: "Перевірка адекватності моделі є різною в залежності від застосувань ... модель слід оцінювати за її здатністю відтворювати і прогнозувати характеристики поведінки системи – стійкість, коливання, зростання, середній період коливань, загальні взаємозв'язки змінних, що змінюються з часом, і тенденції до підсилення чи послаблення збурень, викликані зовнішніми причинами" [142].

В підрозділах 4.3, 4.4 подано низку результатів моделювання (див. рис. 4.5–4.23) на яких не тільки демонструється працездатність програм моделювання і наявність нових результатів відносно властивостей процесів розвитку розподілених технологічних систем. Для моделі транзистора можна дати інтегральну квадратичну похибку відносно певної еталонної характеристики. Форрестер на конкретних прикладах довів некоректність такої спрощеної оцінки. Наприклад, як оцінити прескриптивну модель, що відображує бажану, здатну до реалізації, але поки не реалізовану технічну систему. Подамо перелік властивостей реальних розподілених систем відтворений в запропонованих моделях:

- узагальнені функції зростання в багатозадачних системах (див. рис. 4.6, 4.7);
- стійкі гіперболічні рангові розподіли темпів сумарного виробництва з нахилами асимптот -1 та -2 при детермінованих алгоритмах локального управління (див. рис. 4.8, 4.9);
- залежність усталених структур розподілу темпів виробництв від структури їх початкових розподілів (див. рис. 4.10–4.12);
- гіперболічні рангові розподіли темпів сумарного виробництва

при імовірнісних алгоритмах локального управління (див. рис. 4.18);

– перевага ризикової концентрації ресурсів для розвитку окремих виробництв в умовах невизначеності порівняно з пропорційним детермінованим розподілом (див. рис. 4.19, 4.25);

– нелінійні коливання типу хвиль Кондратьєва при врахуванні запізнення в процесах розвитку виробництв (див. рис. 4.21– 4.23).

Таким чином розроблені моделі відповідають сформульованим Форрестером вимогам до адекватності моделей виробничих систем.

Висновки

Виконано побудову системи математичних моделей децентралізованих розподілених систем, що складаються з однотипних елементів, кожний з яких автономно розподіляє власні ресурси між напрямками розвитку, виходячи тільки з власного критерію ефективності. Рішення елемента приймаються на базі неповної і неточної інформації, неточних математичних моделей прогнозування і планування, що обумовлює невизначеності процесів розвитку системи в цілому.

Вдосконалено відомі моделі колективної поведінки: розроблені моделі працездатні для довільних функцій виробництва, розвитку і освоєння; розглядається багатопродуктове виробництво; урахована залежність попиту на продукт від ефективності системи, коли система власне створює попит на свій продукт.

В результаті проведення досліджень на детермінованих моделях отримано нові наукові результати:

– визначені залежності усталених розподілів від початкових умов та ефективностей елементів;

– показано, що усталені розподіли є композиціями двох граничних розподілів ("монополія" і "спеціалізація");

– доведено, що відомі стійкі гіперболічні рангові розподіли можуть бути результатом дії детермінованих механізмів.

В підсумку отримані результати досліджень дозволяють точніше прогнозувати розвиток розподілених систем.

Вдосконалено математичні моделі розподілених систем з урахуванням невизначеностей і процесів освоєння. В результаті дослідження на цих моделях отримано нові результати: показано, що існує оптимальний рівень збурень, що стабілізує розвиток системи, повна інформованість елементів може бути джерелом нестійкості розподіленої системи. Розроблена система моделей розподілених систем підтвердила працездатність декомпозиції процесу створення моделей. Відпрацьована інформаційна технологія створення моделей як системи структурних, функціональних і редуційних моделей.

5. РОЗРОБКА СИСТЕМИ ДЛЯ АНАЛІЗУ І ОПТИМІЗАЦІЇ ЖИВУЧОСТІ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Ціль цього розділу – застосувати отримані в попередніх розділах теоретичні результати, а саме математичні моделі, для побудови і розрахунку конкретних розподілених інформаційно-управляючих систем. Відомо, що моделі класу, які досліджуються в цій роботі, мають широкий спектр інтерпретацій – від великих виробничих і енергетичних систем, до локальних комп'ютерних мереж і систем технологічних агрегатів. Суттєвий елемент розширення моделей – урахування узагальненої вартості комунікацій в обчислювальній мережі. Під терміном "узагальнена вартість" маємо на увазі комплексне оцінювання детермінованих і імовірнісних [21–23] (відмови, аварії) витрат на комунікації.

В цьому розділі ми розглядаємо два об'єкти застосування – розподілені автоматизовані системи підприємств – металургійної і харчової промисловості. Задачі розділу – побудова інтерпретацій математичних моделей відносно конкретних розподілених систем. Під інтерпретацією розуміємо двосторонній процес:

- узагальнення, спрощення і абстрагування опису моделі реальної системи, можна навіть сказати: "втискування" реальної системи в досить тісні рамки математичної моделі певного класу;

- деталізація, конкретизація і спеціалізація математичної моделі для задовільного відображення поведінки реальної системи [3, 108].

Суттєвою складовою процесу побудови інтерпретацій математичних моделей розподілених систем є вбудовування в моделі усіх рівнів відмовобезпечності, відмовостійкості, відмовонечутливості. В цьому плані декомпозиційний підхід, взагалі, та системи класу " M елементів, N задач", зокрема, забезпечують відмовостійкість і відмовонечутливість на рівні властивостей математичних моделей.

5.1. Структура автоматизованої системи управління трубчастими обертовими печами

Розглянемо реальні розподілені системи, що є об'єктами професійної діяльності спеціаліста з автоматизованих систем управління виробництвом. Система автоматичного керування трубчастими обертовими печами – типовий приклад виробничої системи, де одночасно співіснують давні металургійні технології – екологічно небезпечні, енерговитратні, з важкими умовами роботи, і небезпечні при аваріях, і високотехнологічні процеси, сучасні засоби автоматики і управління з їх безмежними можливостями реалізації складних методів управління.

Ціль поданого опису – виділити практичні задачі, де можуть бути використані результати теоретичних досліджень.

Процес випалювального переділу металургійного цеху складається з таких етапів з відповідними задачами контролю і управління:

- прийом і збереження руди, флюсів, палива, що надходять на завод;

- усереднення руди, підготовка інших матеріалів до переділу;
- випал шихти на недогарок.

Випалювальний переділ містить у собі такі виробничі ділянки:

- відкритий склад сировини з декількома залізничними естакадами;
- відділення великого дроблення з прийомними бункерами;
- відділення середнього дроблення;
- перевантажувальний вузол;
- шихтарник;
- відділення трубчастих обертових печей;
- система сухого газоочищення;
- відділення подачі, розподілу й обліку природного газу.

Ділянка дозування шихти розташована у будинку шихтарника. Шихтові матеріали з бункерів за допомогою дискових живильників і стрічкових вагодозаторів у заданому співвідношенні подаються на шихтові транспортери.

Шихта плавильного переділу складається із суміші руди, відновлювача, нікелевих шламів і оборотного пилу, надходить на випалювання у трубчасті обертові печі (ТОП).

У ТОП здійснюється часткове відновлення окислів кольорових металів і заліза. Випал у трубчастих печах за характером процесів, що відбуваються, умовно поділяється на три зони: зона сушіння; зона підігріву; зона випалювання.

У зоні сушіння, що починається від завантажувального кінця печі, відбувається нагрівання шихти з видаленням вільної вологи.

У зоні підігріву шихта нагрівається до 700–800 °С з частковим видаленням кристалізаційної вологи, що входить до складу мінеральних сполук.

У зоні випалу шихта нагрівається до 900–1000 °С. При цьому відбувається розкладання і часткове відновлення окислів кольорових металів, вищих окислів заліза до закису, а також видалення кристалізаційної вологи.

Структурна схема системи автоматизованого керування трубчастими обертовими печами (САК ТОП) наведена на рис. 5.1.

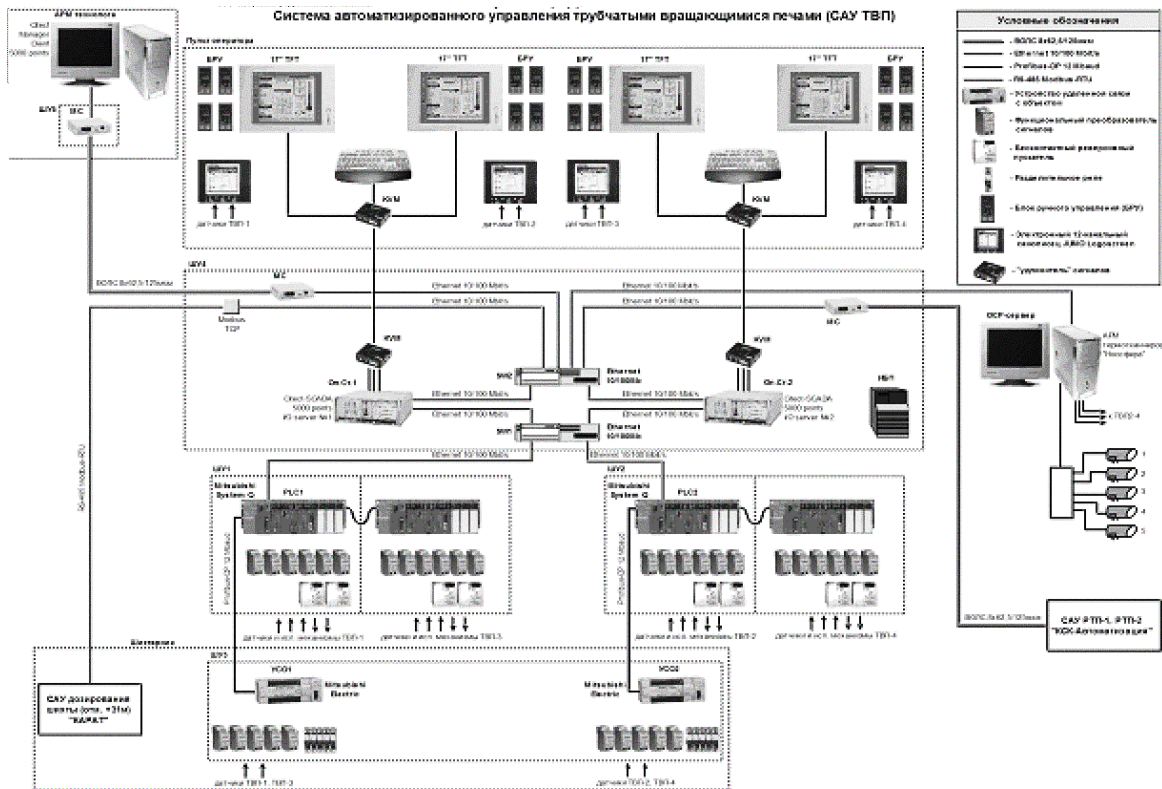


Рис. 5.1 Схема автоматизованої системи виробництва феронікелю

5.1.1. Підсистема нижнього рівня

Згідно з ієрархічною декомпозицією САК ТОП звичайно підрозділяється на такі рівні: нижній (польовий); середній; верхній.

До нижнього (польового) рівня відносяться: датчики; вимірювальні перетворювачі; сигналізатори технологічних параметрів; виконавчі механізми; кабельне господарство. Призначення технічних засобів нижнього рівня – первинне перетворення фізичних величин у стандартизовані сигнали вимірювань технологічних параметрів, трансляція зазначених сигналів на середній рівень систем керування, а також безпосередній вплив на технологічні об'єкти керування за допомогою виконавчих механізмів. Схема підсистеми нижнього рівня наведена на рис. 5.2.

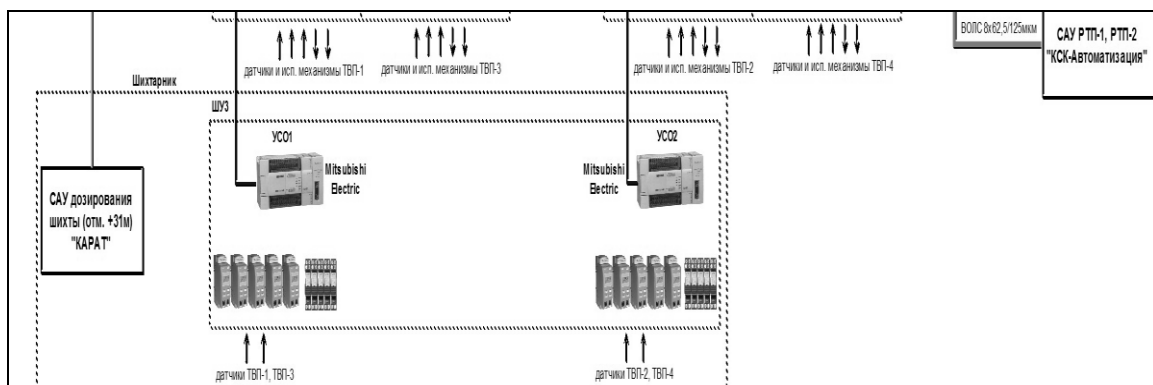


Рис. 5.2 Схема підсистеми нижнього рівня

5.1.2. Підсистема середнього рівня

До середнього рівня відносяться (рис. 5.3): програмувальні логічні контролери; модулі виділеного зв'язку з об'єктом (УСО); блоки "ручного" керування (управління) виконавчими механізмами (БРУ); комунікаційне устаткування міжконтролерного обміну.

Устаткування середнього рівня повинне забезпечити передачу на верхній рівень інформації про хід технологічного процесу, про стан систем і механізмів, про величини вимірюваних параметрів, забезпечити виконання дистанційних команд керування, реалізацію програм керування, регулювання і блокувань.

До складу програмованих логічних контролерів входять: ПЛК1 – програмований логічний контролер ТОП1 і ТОП3 (трубчастих обертових печей); ПЛК2 – програмований логічний контролер ТОП2 і ТОП4; УСО1 і УСО2 – пристрої віддаленого зв'язку з об'єктом – датчиками і вимірювальними перетворювачами, розташованими в електроприміщенні РП-5 будинку шихтарника (УСО – "удалённая связь с объектом").

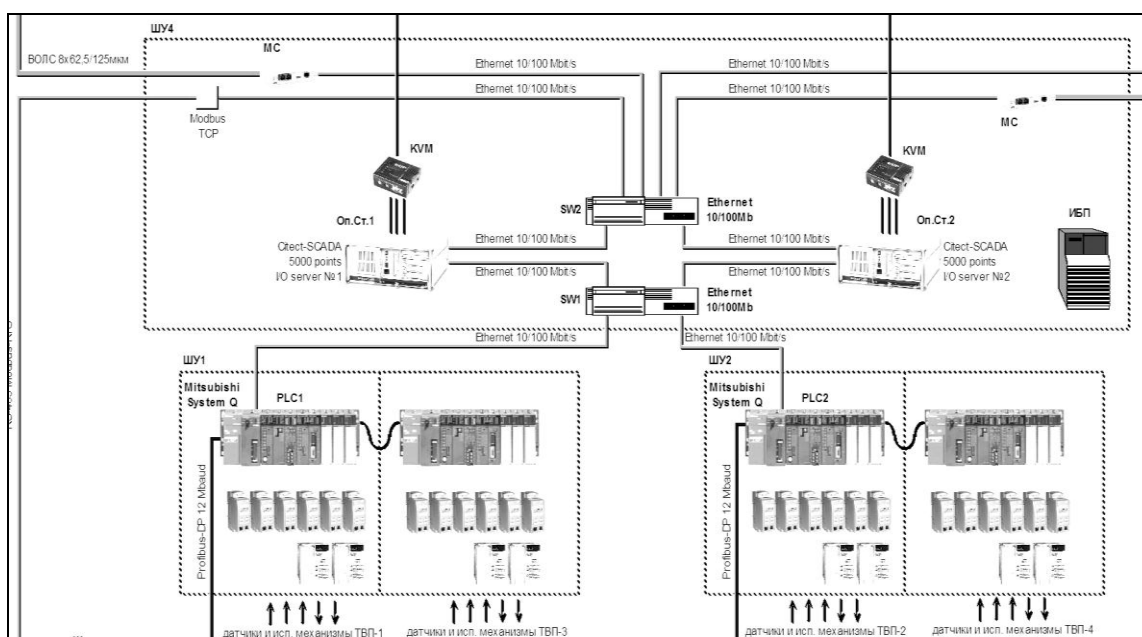


Рис. 5.3. Схема підсистеми середнього рівня

Функціонально програмовані логічні контролери ПЛК1 і ПЛК2 підрозділяються на базову шину і шину розширення, на які встановлено однаковий набір сигнальних модулів. Це дозволяє розподілити сигнали від різних ТОП на різні частини контролерів. Крім того, має місце такий розподіл сигналів (рис. 5.1): на ПЛК1 від ТОП1 і ТОП3; на ПЛК2 від ТОП2 і ТОП4.

Це дозволяє підвищити живучість, тобто відмовобезпечність, відмовостійкість та відмовонечутливість системи і гарантувати подачу ши-

хти на кожну з руднотермічних печей РТП1, РТП2 навіть у випадку виходу з ладу і виведення на обслуговування (заміна, ремонт) одного з контролерів. Звернемо увагу на те, що в реальних вимогах до реальної технічної системи не йде мова про "ймовірність відмови", чи "напрацювання на відмову", а тільки про гарантовану працездатність системи при відмові одного контролера.

Функції контролю і керування найбільш важливими контурами регулювання повинні бути дубльовані блоками "ручного" керування, що забезпечують локальну індикацію сигналів вимірювань і дистанційне ручне керування положенням регулюючого механізму (клапана, заслінки, приводу).

Це теж реальні вимоги до реальних систем – незалежно від статистичної надійності підсистем автоматичного регулювання передбачається можливість переходу на ручне управління. Також з метою дублювання контролю і реєстрації найбільш важливих технологічних параметрів призначені багатоканальні електронні самописці. В перекладі на мову абстрактних моделей тривимірної декомпозиції (див. підрозділ 1.5.5) вимоги неідентичного резервування відображуються у моделі як структурна декомпозиція.

До комунікаційного устаткування середнього рівня відноситься сегмент Ethernet, реалізований за допомогою комутатора, до якого підключені контролери ПЛК1, ПЛК2 і операторські станції ОС1 і ОС2. До верхнього рівня відносяться: автоматизовані робочі місця операторів і технологів, реалізовані як операторські станції ОС1 і ОС2; комунікаційне устаткування; АРМ технолога.

5.1.3. Підсистема верхнього рівня

Устаткування верхнього рівня повинне забезпечити прийом інформації про хід технологічних процесів, про стан механізмів, про величини вимірюваних параметрів. Устаткування цього рівня забезпечує попереджувальну й аварійну сигналізацію, обробку інформації (нагромадження, сортування та ін.), представлення цієї інформації на екранах моніторів існуючих операторських станцій.

Кожна з операторських станцій повинна бути обладнана 2 моніторами. Загальна кількість моніторів 4 шт., що забезпечує можливість візуалізації технологічного процесу у вигляді динамізованих мнемосхем по всіх чотирьох печах одночасно. Крім того, на монітори операторських станцій можуть бути виведені службові відеокадри, що включають протоколи подій, аварійних повідомлень, трендів та ін.

З урахуванням відповідальності і безперервності технологічних процесів відділення трубчастих обертових печей для САК ТОП повинна застосовуватися схема 100% гарячого резервування операторських станцій. Зазначена схема працює в такий спосіб.

Завдяки постійному швидкодіючому обміну в мережі на обох серверах накопичуються "дзеркальні" архіви технологічних даних. Крім того, операторські станції в цій мережі обмінюються діагностичною інформацією про свою працездатність. У випадку виходу з ладу первинного сервера ОС1, резервний сервер ОС2 на основі діагностичної інформації негайно активує свою комунікацію до контролерів ПЛК1 і ПЛК2, стаючи первинним сервером і забезпечуючи нерозривність операторського контролю над технологічним процесом і цілісність технологічних архівів. Після відновлення працездатності першої операторської станції ОС1 і повторного її включення, обидва сервери у фоновому режимі якийсь час синхронізують свої внутрішні архіви, домагаючись повної їх "дзеркальності". Після цього функції первинного сервера знову переходять на першу операторську станцію ОС1.

Також до складу верхнього рівня входить АРМ технолога випалювального цеху, розташована в адміністративно-побутовому комплексі цього цеху.

САК ТОП у своєму функціонуванні повинна одержувати інформацію від суміжних систем. До них відносяться: система керування дозуванням шихти; система зважування вагон-кюбелів, що входить до складу САК електричним режимом РТП–1 і РТП–2; система термосканерного контролю вогнетривів печі.

САК ТОП повинна бути розрахована на безперервну роботу в реальному часі з періодичним оглядом і регламентними роботами під час планових зупинок. Система повинна забезпечувати керування технологічним об'єктом керування в нормальних, перехідних і перед аварійних умовах функціонування, а також його захист при погрозі аварії.

Система повинна функціонувати в таких режимах:

- автоматичне керування технологічним устаткуванням;
- дистанційне керування виконавчими механізмами з операторських станцій;
- діагностування і тестування САК.

Діагностування і тестування САК повинне виконуватися програмними й апаратними засобами і забезпечувати повну перевірку: працездатності програмно-технічних засобів; якості функцій перетворення і регулювання; каналів зв'язку між компонентами системи.

Діагностування і тестування системи здійснюється в таких режимах:

- роботи системи при керуванні технологічним процесом;
- проведення регламентних робіт на непрацюючому устаткуванні або відключеній системі від об'єкта керування.

У режимі роботи система повинна безупинно проводити самодіагностику працездатності ПТС і каналів зв'язку. Результатом такої діагно-

стики повинна бути локалізація і визначення місця несправності (апаратний модуль, програмний засіб, елемент вимірювального каналу, канал зв'язку, сегмент локальної мережі).

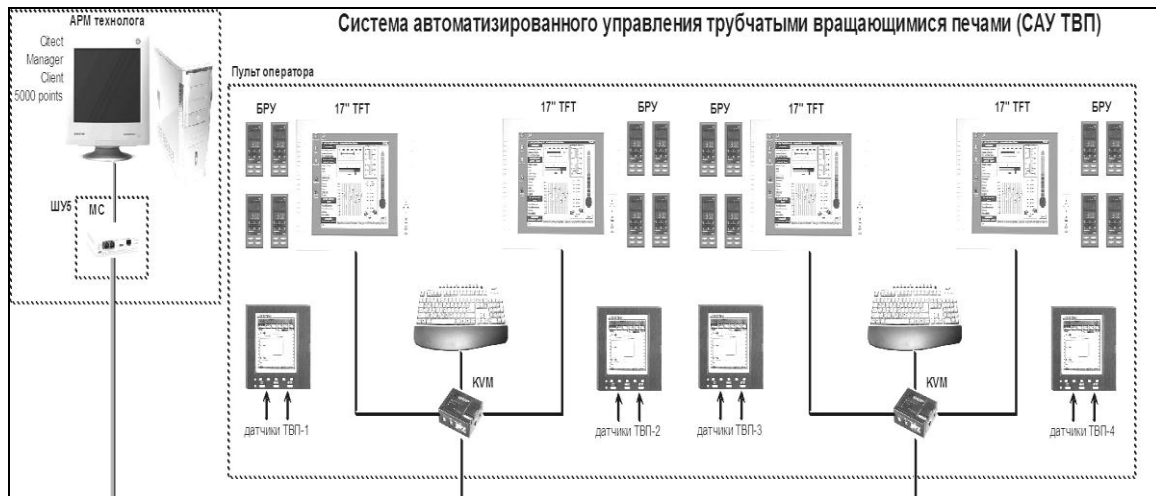


Рис. 5.4. Схема підсистеми верхнього рівня

5.2. Узагальнення задач побудови розподілених виробничих систем

Для того, щоб оцінити "вагу" специфіки конкретної розподіленої системи, порівняємо автоматизовану систему металургійного виробництва з системою виробничої переробки сільгосппродукції. На рис. 5.5 подано схему автоматизованої системи для олієжиркомбінату. Схема відповідає початковій стадії автоматизації – обліку і контролю. Необхідна умова корисності застосування розглянутих в попередніх розділах роботи математичних моделей – досить точна і оперативна інформація про витрачання ресурсів і вихід продуктів, як проміжних, так і кінцевих. Саме на базі цієї інформації визначаються узагальнені функції виробництва і розвитку. Система складається з досить чітко визначених функціональних підсистем: склад насіння; ділянка жирової сировини; олієекстракційний завод; гідрогенізаційний завод. В кожній підсистемі можна виділити, як і в системі металургійного виробництва, три рівня управління процесами: нижній (польовий); середній; верхній.

Склад цих рівнів, їх функції та вимоги до надійності і ефективності подібний до металургійного виробництва, тому переходимо безпосередньо до узагальнень. Сучасні програмно-технічні засоби є стандартизованими і уніфікованими. Тому певна частина питань і задач проектування та функціонування розподілених автоматизованих систем є інваріантною відносно специфіки об'єктів і процесів управління.

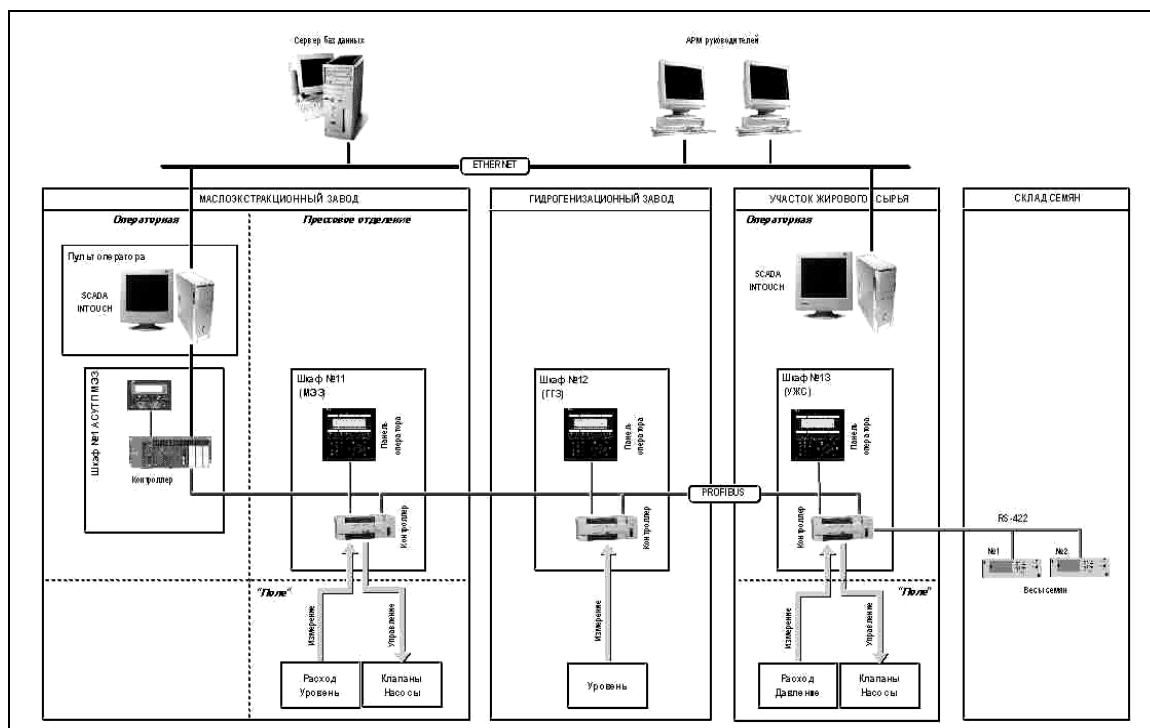


Рис. 5.5. Схема автоматизованої системи обліку сировини і продукції олієжиркомбінату

Наведемо інваріантні задачі автоматизованих систем упорядковані за рівнем ієрархії:

- оптимальна відносно критеріїв ефективності і живучості декомпозиційна структура системи;
- оптимальний розподіл задач між елементами розподіленої системи;
- моделювання процесів функціонування автоматизованої системи;
- моделювання процесів розвитку автоматизованої системи;
- моделювання розвитку виробничої системи в оточенні аналогічних систем.

Специфічні задачі автоматизованих систем: задачі вимірювання, задачі вибору і реалізації управлінь, задачі формування попиту.

Специфіку задач вимірювання визначимо на прикладах: вимірювання параметрів в середині хімічного реактора, вимірювання параметрів в середині металургійних агрегатів. Це нетривіальні задачі, поки не знайдуться ефективні методи вимірювання. Після цього на перший план виходять задачі оптимізації, розв'язання яких створює можливості для розв'язання задач побудови моделей прогнозування і управління.

Специфіка задач управління визначається набором альтернатив дії на процес чи об'єкт управління, відносною величиною енергетичних витрат на управління. Пошук економних, точних і безпечних засобів управління для конкретних задач – фундаментальна проблема. Якщо ві-

дпрацьовані і випускаються ефективні стандартизовані засоби управління – електроприводи, гідроприводи та ін., – на перший план виходять декомпозиційні задачі: паралельне використання альтернативних виконавчих елементів спеціалізованих за рівнем (грубе, точне управління), зовнішніми умовами (малий рівень випуску продукту, великий рівень).

Сучасні технічні та виробничі системи є не тільки високотехнологічними і високопродуктивними, але й високочутливими до відхилень процесів функціонування. Під чутливістю маються на увазі великі втрати. В розділі 4 було доведено обчислювальними експериментами, що в сучасних умовах відставання виробничої системи на 3–5% в продуктивності приводить до витіснення цієї системи з ринку попиту на певний продукт.

В сукупності специфіка об'єкта чи процесу вимагає вибору чи створення відповідних засобів – сенсорів і актуаторів. Якщо відповідні пристрої та їх моделі відомі, ми приходимо до незалежної від специфіки об'єкта задачі побудови тривимірної декомпозиційної структури [8, 28]. Прикладний зміст задачі – визначення послідовності застосування операторів функціональної, структурної та редукційної декомпозицій, кількості елементів на певному рівні декомпозицій.

5.3. Розробка робочої моделі обчислювальної мережі для розподіленої виробничої системи

На основі розгляду прикладів автоматизованих систем робимо робочу модель для розрахунку, оптимізації та моделювання розподілених обчислювальних мереж, що реалізують автоматизовану систему управління для розподіленої технологічної системи. Сучасні програмно-апаратні засоби дозволяють реалізувати запропоновану в розділі 1 структуру розподіленої системи в багатьох варіантах, що породжує задачу вибору оптимальної реалізації обчислювальною мережею системи задач управління розподіленою системою. В цьому підрозділі ми одночасно конкретизуємо математичні моделі з розділів 2, 3 і 4, і формалізуємо розглянуту в підрозділі 5.2 практичну задачу побудови відмовостійкої автоматизованої системи управління розподіленою технологічною системою.

Конкретна мета розділу – розробити програмний модуль для аналізу варіантів реалізації АСУ з урахуванням вимог відмовостійкості. В практиці проектування АСУ звичайно виникає низка організаційних обмежень типу: "використати тільки вже замовлену марку мікроконтролера", "використати вже спроектований раніше модуль: "елемент розподіленої системи + локальна система управління"". В підсумку множина припустимих варіантів суттєво звужується і оптимальний варіант реалі-

зації може бути вибраний методом прямого перебору.

Розроблений програмний модуль використано для аналізу АСУ об'єктів запровадження. На базі цього модуля розроблено розділ електронного посібника, що використовується в навчальних дисциплінах "Теорія автоматичного управління", "Обчислювальні системи", "Адаптація та навчання в системах управління" [42, 44, 45].

Конкретизуємо поняття живучості, що було визначено в [8, 28]. Нам потрібно отримати критерій, що може бути обчислений як функція характеристик елементів системи та їх поточної конфігурації. Живучість, на відміну від надійності, – детермінована величина: зміна ефективності технічної системи при відмовах певних елементів без урахування ймовірностей цих відмов. Можливі відмови елементів ранжують за вартістю відмовних елементів. Вимоги до живучості диференціюють в залежності від вартості відмов [8, 28, 29]:

– при малих відмовах – відмовонечутливість: функціонування технічної системи без погіршення ефективності;

– при середніх відмовах – відмовостійкість: задовільне функціонування технічної системи;

– при великих відмовах – відмовобезпечність: втрати не виходять за межі системи (відсутність пожеж, вибухів, виносу шкідливих речовин).

В практиці проектування ці рівні об'єднують в "функцію деградації" і формулюють проектну вимогу "плавної деградації" системи при відмовах, тобто зменшення ефективності. В [28] введено поняття функції живучості, як залежності максимальних втрат ефективності системи від вартості конфігурації відмови. Максимум шукається на підмножині конфігурацій відмов цієї вартості:

$$Gm(Cv) = \max\{G(K(Cv))\},$$

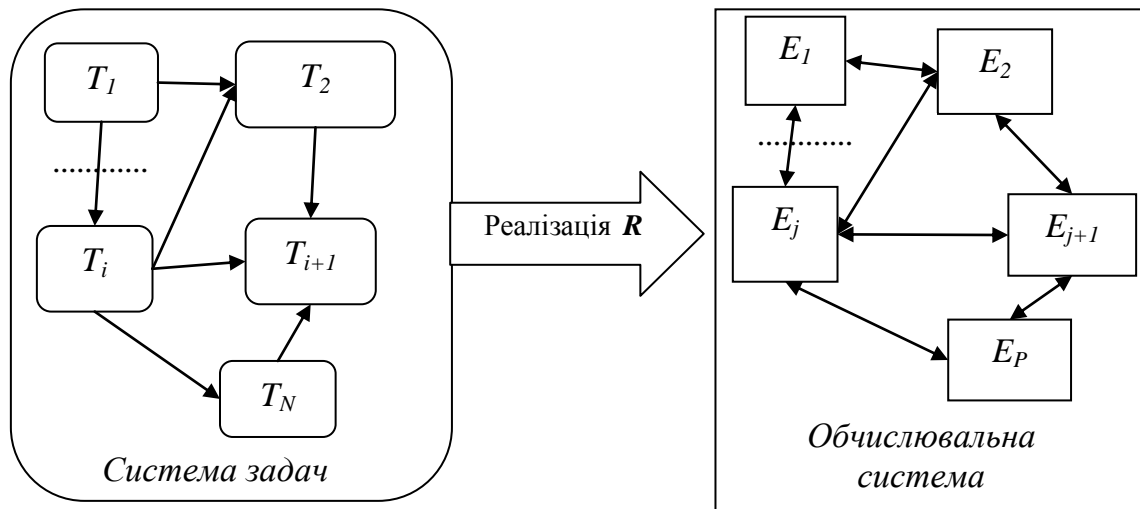
де $0 \leq Cv \leq 1$ – нормована вартість конфігурації відмови; $K(Cv)$ – конфігурація відмови з підмножини конфігурацій цієї вартості Cv ; $G(K(Cv))$ – втрати, що викликає ця конфігурація.

Фактично це функція Беллмана для відповідної оптимізаційної задачі. Для довільних декомпозиційних структур системи знаходження максимуму потребує прямого перебору варіантів.

Формалізуємо задачу реалізації (рис. 5.6): маємо декомпозицію загальної задачі управління розподіленою системою (окремі задачі та інформаційні зв'язки між ними), декомпозицію обчислювальної мережі (окремі обчислювальні елементи – мікроконтролери, мікропроцесори та зв'язки між ними). Потрібно розмістити, локалізувати задачі по елементах мережі з умов оптимізації певного комплексного критерію, що включає ефективність, витрати і живучість.

Обчислювальна мережа може бути представлена графом, вершина-

ми якого є елементи обчислювальної мережі, а ребрами – інформаційні зв'язки між елементами, які фізично реалізуються інтерфейсами (рис. 5.6.).



T_1, \dots, T_N – окремі задачі системи;
 $A = \{A_{ik}\}$ – матриця інформаційного обміну між окремими задачами
 $i = 1 \dots N; k = 1 \dots N$.

$R = \{R_{ij}\}$ – матриця реалізації системи задач в обчислювальній системі $0 \leq r_{ij} \leq 1$
 $i = 1 \dots N; j = 1 \dots P$.

E_1, \dots, E_P – елементи мережі; $B = \{B_{il}\}$ – матриця інформаційного обміну між елементами мережі
 $i = 1 \dots P; l = 1 \dots P$.

Рис. 5.6. Схема реалізації задач управління обчислювальною мережею

В епоху дорогих засобів зберігання і обробки інформації методи реалізації будь-яких алгоритмів зводили задачу реалізації до економії ресурсів – пам'яті, швидкодії та ін. В цьому випадку будемо розглядати задачу реалізації, виходячи з постійного зниження вартості програмно-технічних засобів. Це дозволить не вирішувати складні і громіздкі задачі масового обслуговування, теорії розкладів. Основна увага буде приділена забезпеченню гнучкості (адаптивності) і живучості реалізуючої мережі. В першому наближенні вважаємо структуру і об'єм зв'язків як між окремими задачами, так і між елементами обчислювальної мережі постійними в часі. Інтенсивності інформаційного обміну між задачами і елементами також візьмемо постійними.

При реалізації певної пари задач розподіленої системи в різних елементах мережі інформаційно-логічні зв'язки між задачами відображаються в зв'язки між елементами. Формально змінними оптимізації мережі можуть бути типи і кількість елементів (мікроконтролерів, мікропроцесорів), обсяг інформаційного обміну між елементами, а також

живучість.

Розглядаємо певну розподілену обчислювальну систему для управління виробництвом феронікелю, харчових продуктів та ін. Звичайно відомий склад задач управління, або окремих функцій, які необхідно виконувати. Приклад опису конкретних задач подано в підрозділах 5.1 – 5.2. Можливі такі "граничні" альтернативи реалізації задачі:

а) усі задачі виконувати в одному комп'ютері, пов'язаному з об'єктами контролю і управління лініями прямого (сигнали від вимірювачів стану об'єкта) і зворотного (сигнали управління) зв'язків;

б) для кожної задачі виділити свій обчислювальний пристрій, а усі пристрої зв'язати лініями зв'язку для забезпечення обміну даними між задачами.

Очевидно, що оптимальний варіант реалізації системи задач АСУ в обчислювальній мережі лежить в діапазоні поданих варіантів.

Формалізуємо виділену практичну задачу реалізації: задано певний граф – декомпозицію глобальної задачі системи в локальні задачі та зв'язки між ними. Треба відобразити ці локальні задачі і зв'язки між ними в граф зв'язків обчислювальної системи, тобто визначити для кожної задачі, в яких елементах вона реалізується, і потрібні вхідні і вихідні дані для кожного елемента. Причому відобразити так, щоб реалізація задовольняла поставлені обмеження і оптимізувала певний критерій.

Деталізуємо і формалізуємо задачу реалізації. Задано декомпозицію задачі управління і контролю або обробки даних в окремі задачі $\{T_i\}$, $i=1\dots N$, та матриця інформаційних зв'язків між задачами $\{A_{i,k}\}$, $i, k=1\dots N$. Елемент цієї матриці $A_{i,k}$ характеризує темп (біт/с) обміну між відповідною парою задач. (Приклад окремих задач: контроль, діагностика, регулювання, фільтрація, ідентифікація, оптимізація та ін.)

Задано також множину реалізуючих елементів $\{E_j\}$, $j=1\dots P$ (це можуть бути мікроконтролери, сигнал-процесори, мікропроцесори, сервери). Назвемо реалізацією певної задачі обробки інформації і управління обчислювальною системою матрицю $\{R_{i,j}\}$, $i=1\dots N$, $j=1\dots P$. В класичних задачах розміщення вважається, що якщо $R_{i,j}=0$ – i -та задача не виконується в j -му елементі, а якщо $R_{i,j}=1$ – задача виконується. Реалізацію $R_{i,j} \in \{0,1\}$ назвемо "жорсткою". В реальних обчислювальних системах розподіл задач може бути надлишковим, гнучким, динамічним. Для відображення цього введемо "м'яку" реалізацію: $0 \leq R_{i,j} \leq 1$.

Обґрунтуванням такого розподілу є те, що певна задача може виконуватись з різними рівнями точності, тобто для кожної задачі існує редуційна декомпозиція, – наявність декількох моделей одного класу з різними рівнями точності обробки даних, наприклад: для інтерполяції результатів вимірювання (прогнозування і управління) можуть використовуватись сплайн-апроксимація першого, другого, третього, ... поряд-

ків. В межах, звичайно, одного класу задач і програм обчислень – чим менша точність, тим менший час обчислень.

Формулюємо задачу оптимізації (див рис.5.6).

Для заданої системи задач $\{T_i\}$ з матрицею зв'язків $\{A_{i,k}\}$, $i, k=1 \dots N$; системи елементів обчислювальної мережі $\{E_j\}$, $j=1 \dots P$; критерію ефективності реалізації $Jo(R_{i,j})$, знайти матрицю реалізації $\{R_{i,j}\}$, $i=1 \dots N$, $j=1 \dots P$ і відповідну матрицю темпу обміну між елементами обчислювальної системи $\{B_{k,l}\}$, $k=1 \dots P$, $l=1 \dots P$.

В першому наближенні темп інформаційного обміну вважаємо таким, що монотонно залежить від якості виконання окремої задачі. Тоді ми можемо подати залежність між матрицями A, B – темпів інформаційного обміну між задачами і між елементами ОС – у вигляді

$$B = R^T \cdot A \cdot R. \quad (5.1)$$

Зв'язок між двома матрицями $B1$ та $B2$ двох різних реалізацій $R1$ та $R2$ задається залежностями:

$$B2 = H_{21}^T \cdot B1 \cdot H_{21}; \quad H_{21} = R^T \cdot A \cdot R. \quad (5.2)$$

Проаналізуємо декомпозиційну структуру матриці реалізації R , що подана на рис. 5.7. Введемо терміни (прямих прототипів для задачі реалізації не знайдено) для елементів матриці R . Назвемо вектор-рядок R спектром функціональної декомпозиції глобальної задачі в j -му елементі ОС, а вектор-стовпець R – спектром редукційної декомпозиції i -ої окремої задачі в ОС.

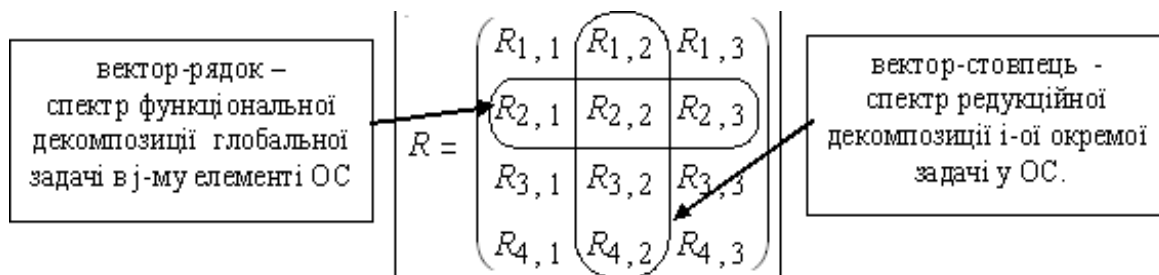


Рис. 5.7. Декомпозиційна структура задачі реалізації системи задач в розподіленій обчислювальній системі

В загальному випадку залежність ефективності виконання глобальної задачі від рівня виконання можна подати такою мультиплікативною моделлю [28].

$$Jo = \prod_{i=1}^N Si(Ji(Ti)), \quad (5.3)$$

де $Ji(T_i)$ – критерій рівня виконання локальної задачі; $Si(Ji(T_i))$ – функція, що характеризує "проекцію" рівня виконання локальної задачі на рівень виконання глобальної задачі.

Це нестрого монотонно зростаючі функції, що можуть бути і ступінчастими. Інтерпретація релейної функції така: якщо рівень виконання локальної функції менший певного порогового рівня, то рівень виконання глобальної функції нульовий, якщо вищий, то рівень виконання глобальної функції не залежить від цієї локальної функції.

Рівень виконання локальної задачі нестрого монотонно залежить від величини виділених для цієї задачі обчислювальних ресурсів (тобто не погіршується при збільшенні величини ресурсів). Рівень виконання j -ї локальної задачі явно залежить від обсягу обчислювальних ресурсів для i -ї локальної задачі $JRi(R_i)$. Вартість певного елемента можна оцінити як функцію $FC(.)$ від суми ресурсів потрібних для виконання всіх задач, що реалізовані в i -му елементі [28]:

$$Ci = FC \left(\sum_{j=1}^N R_{i,j} \right). \quad (5.4)$$

Наведемо деякі емпіричні правила інженерного підходу до задачі оптимізації обчислювальних систем:

- "закон Парето": 20% елементів певної системи задач дають 80% сумарних витрат, тому при оцінці витрат не слід враховувати складові, ваги яких менші точності вхідних даних;

- якщо якісь елементи відносно дешеві, і мають стандартний параметричний ряд за потужністю чи продуктивністю, то слід вибирати їх з певними запасами на випадки майбутніх модифікацій та відмов в обчислювальній системі.

Розглянемо приклад отримання робочої залежності для обсягу зв'язків в ОС при "жорсткому" розподілі задач по елементах ОС. Число задач $N := 3$; число елементів $M := 2$. Задаємо матрицю інформаційних зв'язків системи задач

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 2 & 16 \\ 4 & 7 & 13 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

В цій матриці діагональні елементи – середні інтенсивності обчислень для відповідної задачі, а недіагональні елементи – середні інтенсивності обміну між задачами. В цьому прикладі число варіантів "жорсткої" реалізації мале. Розглянемо процес вибору оптимального варіанта в деталях. Множина припустимих варіантів реалізації:

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; R_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; R_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; R_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; R_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вирази для матриць інформаційних зв'язків між елементами:

$$Bz_1 := R_1^T \cdot A \cdot R_1; Bz_2 := R_2^T \cdot A \cdot R_2; Bz_3 := R_3^T \cdot A \cdot R_3;$$

$$Bz_4 := R_4^T \cdot A \cdot R_4; Bz_5 := R_5^T \cdot A \cdot R_5; Bz_6 := R_6^T \cdot A \cdot R_6.$$

Подаємо вираз для зв'язків між елементами в розгорнутому вигляді:

$$B1p := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & 16 \\ 4 & 7 & 13 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B1p = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 9 & 28 \end{pmatrix}; Bz_1 = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 9 & 28 \end{pmatrix};$$

$$Bz_2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 7 & 35 \end{pmatrix}; Bz_3 = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 29 & 24 \end{pmatrix}; Bz_4 = \begin{pmatrix} 28 & 9 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}; Bz_5 = \begin{pmatrix} 24 & 29 \\ 10 & 3 \end{pmatrix};$$

Побічним результатом цієї роботи є технології розробки робочих моделей виробничих систем. Одним з обов'язкових елементів технології розробки програмних модулів без прототипів є повна відкритість усіх елементів моделей і алгоритмів, використання примітивних, але безвідмовних методів типу методу прямого перебору. Після відлагодження і верифікації прозорий і простий модуль стає еталоном для більш ефективних робочих моделей.

Для порівняння варіантів жорсткої реалізації вводимо критерій "обсяг інформаційних зв'язків між елементами обчислювальної системи"

$$J1(B) := \sum_{k=1}^{cols(B)} \sum_{m=1}^{cols(B)} B_{k,m} \cdot if(k \neq m, 0, 1). \quad (5.5)$$

Це робочий вираз. В середовищі математичного пакета це функція користувача, що бере певну матрицю B і повертає суму її недиагональних елементів. Випишемо значення критерію $J1(.)$ для усіх варіантів жорсткої реалізації:

$$J1(Bz_1) = 27; J1(Bz_2) = 24; J1(Bz_3) = 39;$$

$$J1(Bz_4) = 27; J1(Bz_5) = 24; J1(Bz_6) = 39.$$

Знайдемо варіант, що дає мінімум інформаційного обміну:

$$\min(J1(Bz_1), J1(Bz_2), J1(Bz_3), J1(Bz_4), J1(Bz_5), J1(Bz_6)) = 24.$$

Згідно з технологією розробки моделей робимо більш ефективну і узагальнену модель. На рис. 5.8 подано фрагмент документа для визначення оптимальної реалізації:

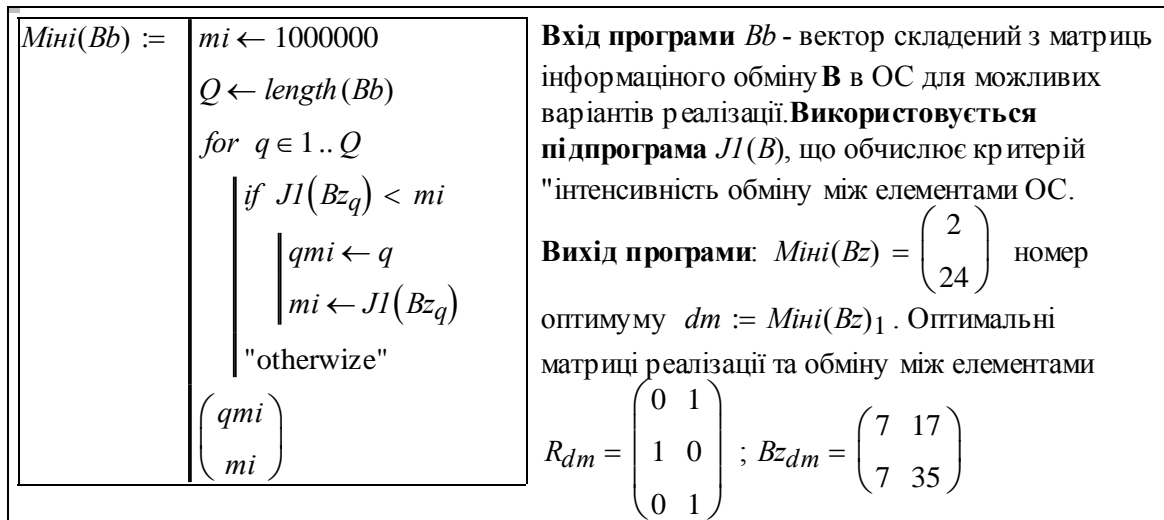


Рис. 5.8. Модуль визначення оптимальної реалізації

При реалізації звичайно виникають і певні обмеження на загальний обсяг обчислень в елементі обчислювальної мережі. Можливі такі обмеження:

- ОС складається з однакових за потужністю елементів;
- ОС складається з різних елементів, потужність яких вибирається з певного ряду фіксованих значень та ін.

Перевіримо виконання обмеження реалізації на потрібний обсяг обчислень. Використаємо вбудовану функцію $tr(M)$ – суму діагональних елементів і зробимо функцією користувача :

$$sumel(M) := \sum_{i=1}^{rows(M)} \sum_{j=1}^{cols(M)} M_{i,j}; \quad (5.6)$$

$$tr(A) = 21; \quad tr(Bz_1) = 39; \quad tr(Bz_2) = 42; \quad tr(Bz_3) = 27;$$

$$sumel(A) = 66; \quad sumel(Bz_1) = 66; \quad sumel(Bz_2) = 66; \quad sumel(Bz_3) = 66.$$

Отримаємо робочі залежності для обсягу зв'язків в ОС для випадку "розмитої" реалізації задач по елементах ОС. Поставимо такі вимоги до розмитої реалізації:

а) кожна локальна задача, хоч в одному елементі виконується з максимальною (в рамках конкретного проекту) точністю (тобто, з рівнем виконання =1);

б) використовуємо таку узагальнену модель розмитої реалізації локальних задач в кожному елементі: задачі ранжуються за рівнем виконання, найвищий рівень виконання задачі в деякому елементі обчислювальної системи – 1, для інших, "надлишкових" задач, рівень виконання зменшується приблизно в гіперболічній залежності. Гіперболічна залежність вибрана тому, що процеси розвитку розподілених систем приводять саме до гіперболічних залежностей (розділ 3).

Вводимо оператор "розмивання реалізації" – реалізуємо його як функцію користувача, що бере матрицю "жорсткої" реалізації та параметр розмивання і повертає матрицю "розмитої" реалізації і тут же тестуємо модуль.

$Rzm(Rr, \beta) :=$ <pre> rzm ← Rr St ← rows(Rr) Ko ← cols(Rr) for i ∈ 1..St pok ← β for j ∈ 1..Ko umο ← rzm_{i, j} rzm_{i, j} ← $\begin{cases} rzm_{i, j} & \text{if } umο \\ pok & \text{otherwise} \end{cases}$ pok ← max(umο, pok) · pok end for end for rzm </pre>	<p>Вхід програми <i>Rr</i> - матриця "чіткої" реалізації, <i>β</i> - "розмивання"</p> $Rr := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Вихід програми - "розмита" реалізація: $Rzm(Rr, .8) = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>Використані вбудовані функції пакета <i>rows()</i>, <i>cols()</i>, <i>max()</i></p>
--	---

Рис. 5.9. Модуль визначення розмитої реалізації

Залежності для визначення інформаційних зв'язків залишаються такими як і для жорсткої реалізації ((5.1), (5.2)). Випробуємо їх для різних значень параметра розмивання:

$$Br(R) := R^T \cdot A \cdot R; \quad Br(Rzm(R_2, 0)) = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 7 & 35 \end{pmatrix}; \quad J1(Br(Rzm(R_2, 0))) = 24;$$

$$b1 := 0.2; \quad Br(Rzm(R_2, b1)) = \begin{pmatrix} 13.2 & 25.7 \\ 16.1 & 40.1 \end{pmatrix}; \quad J1(Br(Rzm(R_2, b1))) = 41.8;$$

$$b2 := 0.7; \quad Br(Rzm(R_2, b2)) = \begin{pmatrix} 40.9 & 49.8 \\ 44.7 & 55.2 \end{pmatrix}; \quad J1(Br(Rzm(R_2, b2))) = 94.6.$$

Розробимо необхідні модулі для оцінки і вибору варіантів розмитої реалізації. Згадаємо, навіщо нам потрібні розмиті реалізації. Розмиті реалізації – це надлишковість: інтенсивність обчислень в елементах та інтенсивність між елементного обміну зростають.

Згідно з відповідними залежностями зростає потрібна обчислювальна потужність і вартість обчислювальних елементів. Для того, щоб комплексно оцінити ефекти, витрати і втрати розмитих реалізацій, введемо такі критерії:

– критерій інтенсивності обміну

$$J1(B) := \sum_{k=1}^{cols(B)} \sum_{m=1}^{cols(B)} B_{k,m} \cdot if(k=m, 0, 1); \quad (5.7)$$

– критерій інтенсивності обчислень

$$J2(B) := \sum_{k=1}^{cols(B)} \sum_{m=1}^{cols(B)} B_{k,m} \cdot if(k=m, 1, 0). \quad (5.8)$$

Ці два критерії треба відобразити у вартості потрібних обчислювальних засобів. Зробимо перше наближення для функції "інтенсивність обчислень–витрати ресурсів". Ця функція звичайно ступінчаста – обчислювальні потужності визначаються низкою дискретних значень.

$$Jc(j1, j2, Co, cm, \alpha) := cm \cdot [Co + (j1 + j2)^\alpha]. \quad (5.9)$$

Живучість в конкретній задачі – це рівень виконання глобальної задачі rvo ($0 \leq rvo \leq 1$) при відмовах елементів. Будемо розглядати в першому наближенні тільки відмови одночасно тільки одного елемента. Введемо поняття "реалізація при відмові" – матрицю, складові якої – рівні виконання глобальної задачі при відмові відповідного елемента.

Використання концепції редукційної декомпозиції було логічною основою для введення "розмитої" реалізації певної задачі в обчислювальній системі. Аналогічно жорстким і м'яким реалізаціям будемо розглядати "жорсткі" (повні) і "м'які" (часткові) відмови елемента otk : $0 \leq otk \leq 1$, де 0 – система непрацездатна, 1 – система повністю працездатна.

Задаємо відмову не вектором, а матрицю – в нашому прикладі – з трьох однакових стовпців. Наведемо приклади для системи "3 задачі, 3 елементи": відмова 2-го елемента, 1-го елемента, часткова відмова 1-го елемента

$$Ot1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ot2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ot3 := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розширимо поняття реалізації – визначимо реалізацію при відмові через оператор векторизації (еквівалентний програмі з подвійним циклом, але з швидкодією в 5–20 разів більшою):

$$Rvd = \overrightarrow{(Rn \cdot Otk)}, \quad (5.10)$$

де Rvd – матриця реалізації при відмові; Rn – деяка номінальна (при відсутності відмов) реалізація; Otk – матриця відмови елемента обчислювальної системи.

Суть цієї операції розглянемо на прикладах, для жорсткої реалізації:

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} \\
 Rvd1 & := (Rr \cdot Ot1); \quad Rvd2 := (Rr \cdot Ot2); \quad Rvd3 := (Rr \cdot Ot3); \\
 Rr & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Rvd1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Rvd2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Rvd3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

та для м'якої реалізації:

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} \\
 Rrz & := Rzm(Rr, .9); \quad Rvd4 := (Rrz \cdot Ot1); \quad Rvd5 := (Rrz \cdot Ot3); \\
 Rrz & = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.81 \\ 0.9 & 1 & 0.81 \\ 0.9 & 0.81 & 1 \end{pmatrix}; \quad Rvd4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.81 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.81 & 1 \end{pmatrix}; \quad Rvd5 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.405 \\ 0.9 & 1 & 0.81 \\ 0.9 & 0.81 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тепер визначимо вектор наслідків відмов. Для цього нам потрібно визначити функцію – залежність ефективності ОС від ефективностей її елементів. В першому наближенні візьмемо просто добуток від ефективностей елементів, в другому – добуток S -функцій від ефективностей елементів.

Обґрунтування такого вибору: ми вважаємо систему задач функціональною декомпозицією. На рис. 5.10 подано програмний модуль першого наближення разом з блоком контролю.

Модуль бере матрицю реалізація при наявності певної відмови і повертає структуру (вектор), що складається з скаляра – значення критерію ефективності ОС – (5.3) та вектора ефективностей окремих елементів ОС.

Згідно з технологією розробки робочої математичної моделі для задачі реалізації використовуємо модуль першого наближення як еталон для контролю наступного, більш складного і адекватного реальній задачі модуля.

Розмита реалізація фактично є ресурсною і функціональною надлишковістю. Нам потрібні "прилади" для оцінки негативних і позитивних аспектів цієї надлишковості.

Статистичні дані, відомі емпіричні закони для залежностей "продуктивність–вартість" для комп'ютерів дозволяють прийняти гіпотезу для залежності "узагальнена точність виконання локальної задачі – ефективність виконання глобальної задачі".

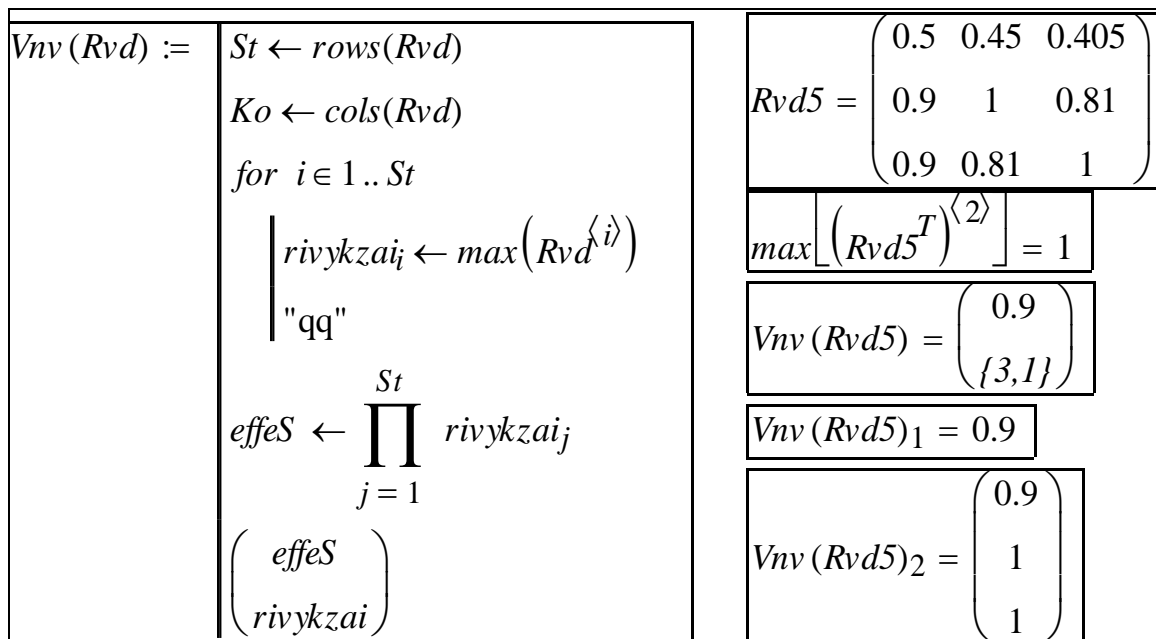


Рис. 5.10. Модуль визначення відмовостійкості. Перше наближення

Методами системного аналізу можна побудувати такі залежності для конкретних систем і процесів. Нормована залежність "точність виконання локальної задачі – глобальна ефективність (системи в цілому)" може бути наближена в класі двопараметричних S -функцій з параметрами w та s :

$$F4(x, w, s) \equiv 1 \cdot \left(1 - e^{-w \cdot x} \right)^s.$$

Модифікуємо програмний модуль (рис. 5.10) для оптимізації розмитості розподілу задач. Спочатку зробимо модуль, що формує реалізацію системи задач в цій ОС при відмові i -го елемента.

Модуль для оптимізації розмитості розподілу задач по елементах обчислювальної системи бере базову матрицю чіткої реалізації Re , параметр "м'якої" реалізації β , і параметр „рівень відмови” γ , а повертає структуру з трьох елементів: вектора з матриць "відмовних" реалізацій, матриці "відмовних ефективностей" елементів, і вектора ефективностей ОС при відмовах певних елементів.

Заключний крок в розробці програмної системи для дослідження та оптимізації реалізації задач АСУ в обчислювальній системі – масштабування.

Програмна система дозволяє аналізувати задачі реалізацій розмірністю до 20×20 . При цьому виникають тільки проблеми відображення великих масивів даних. Така перевірка була виконана і показала працездатність системи.

5.4. Використання розробленої програмної системи для аналізу відмовостійкості АСУ

Сучасна проектно-конструкторська організація виконує неперервний потік проектних розробок, приймає безпосередню участь в реалізації проекту і фактично розробка закінчується здачею автоматизованої системи „під ключ”.

Тому зміст практичного використання теоретичних результатів монографії не у виконанні конкретних разових розрахунків для конкретного проекту автоматизації конкретного підприємства, а в розробці безвідмовної і універсальної програмної системи для аналізу і оптимізації варіантів розподілу задач АСУ між елементами обчислювальної системи, тобто задачі реалізації.

5.4.1. Приклад застосування програмної системи для аналізу живучості АСУ феронікелевого виробництва

Розглянемо інтерпретацію розроблених математичних моделей об'єктів, на прикладі розглянутого вище металургійного виробництва феронікелю. Продукт виробництва має досить стабільний зростаючий попит на внутрішньому і зовнішньому ринках. Продукт виробництва є компонентом у багатоелементній вертикальній системі. Збої з феронікелем можуть спричинити збої в автопромисловості, виробництві побутової техніки, кораблів та ін.

Тому проблема живучості має, крім звичайної безпеки, ще один аспект – економічної безпеки. Відмови у виробничих процесах, крім штрафних санкцій за порушення постачання, можуть привести до втрати ринків. Аналізуємо саме можливості використання розмитої реалізації на базі редуційної декомпозиції задачі, що дозволяє синтезувати і досліджувати структури обчислювальної системи компромісні за критеріями ефективності і живучості.

Головна складова витрат часу на аналіз – це обчислення обсягів інформаційних зв'язків між задачами. Власне розрахунки характеристик реалізацій виконуються фактично без затримки. На рис. 5.11 подано схему зв'язків між задачами АСУ, а на рис. 5.12 – схему зв'язків між елементами обчислювальної мережі.

Ці схеми побудовані на основі техдокументації проектної розробки (подано в підрозділі 5.1, на рис. 5.1– 5.4). В сучасних мережевих системах фактично всі елементи багатоваріантно пов'язані з усіма, тому графи зв'язків є малоінформативними порівняно з матрицями зв'язків.

Результати аналізу для певної АСУ– розподіл задач, в деяких випадках також рекомендації до зміни апаратних елементів – систем зв'язку, концентраторів, мікроконтролерів.

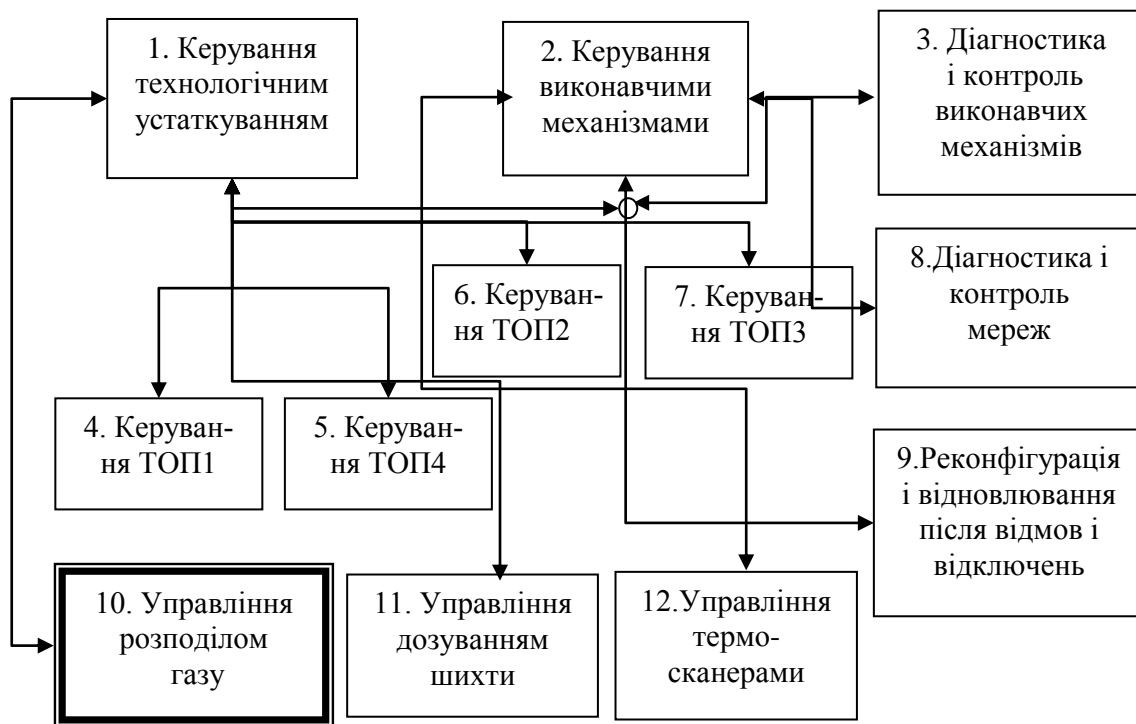


Рис. 5.11. Схема зв'язків задач АСУ

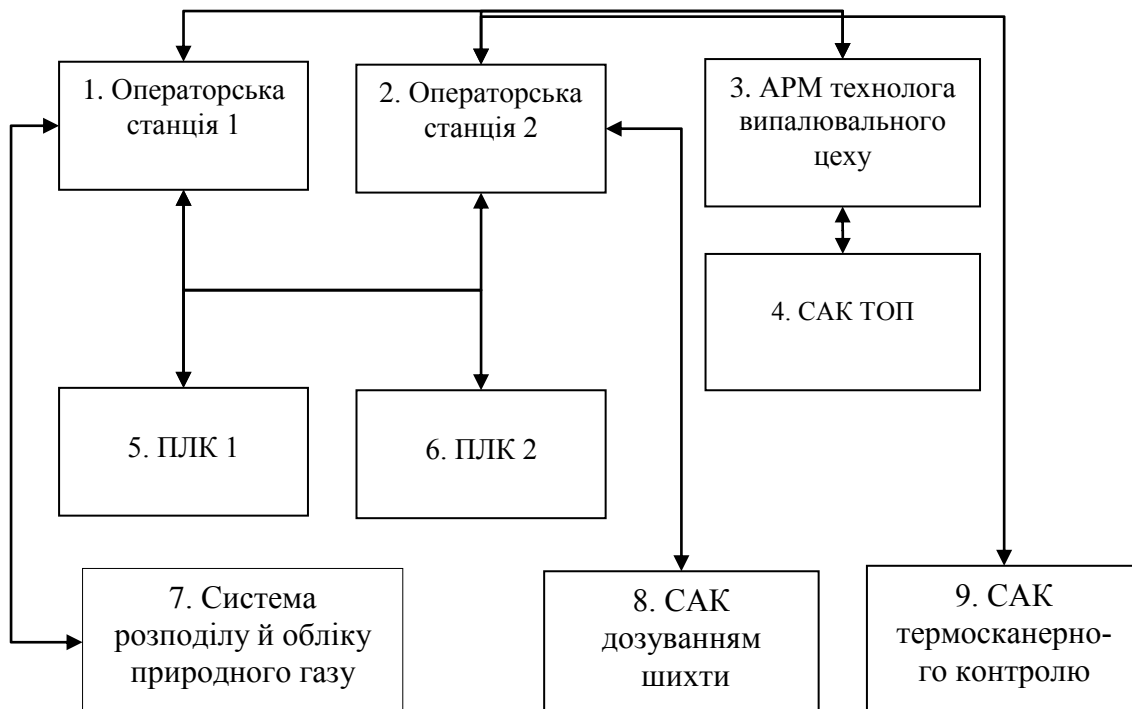


Рис. 5.12. Схема зв'язків елементів обчислювальної системи

Підставляємо в абстрактну схему відображення системи задач в

елементи обчислювальної мережі (див. рис. 5.6) конкретні схеми зв'язків задач та елементів (рис. 5.13):

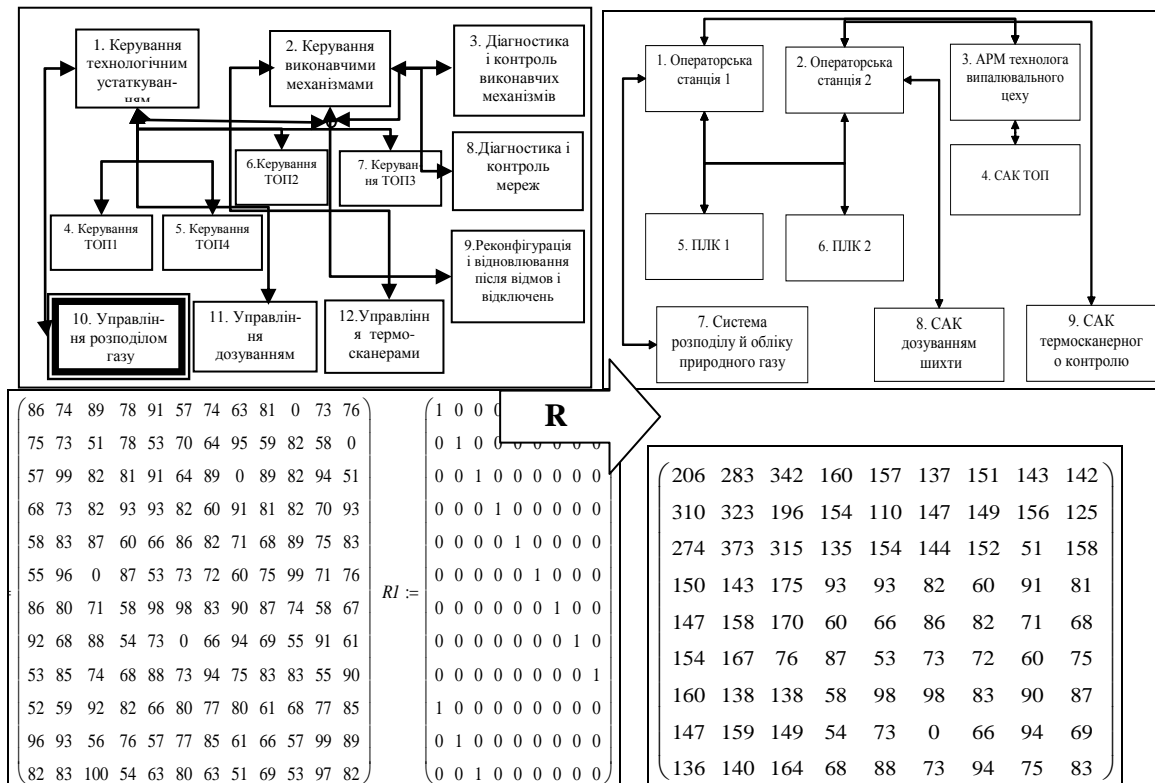


Рис. 5.13. Застосування теоретичного результату до конкретної задачі

Розмірність задачі реалізації (12 задач \times 9 елементів ОС). На рис. 5.14 подано матрицю зв'язків, недіагональні елементи матриці – обсяги інформаційного обміну між задачами.

Моделі, за якими виконується обробка даних і обчислення управлінь – дискретні, з покроковим виконанням.

На етапах ескізного проектування обсяги обчислень і обсяги обміну даними між задачами можуть бути оцінені після розробки програмного забезпечення, ці обсяги можуть бути розраховані або отримані на базі контролю завантаження процесорів і каналів зв'язків. Ці дані стосуються тільки розробників і організацій – замовника та виконавця.

Розмірність задачі прикладу вибрана з чисто формальної причини – розташування матриць в межах сторінки математичного пакета.

Математичний пакет виводить великі матриці в режимі прокрутки. Деяку підмножину задач, що складають підсистему з великим внутрішнім обміном і малим обміном з іншими задачами, раціонально агрегувати.

$$\begin{array}{l}
 Am := \begin{pmatrix} 86 & 74 & 89 & 78 & 91 & 57 & 74 & 63 & 81 & 0 & 73 & 76 \\ 75 & 73 & 51 & 78 & 53 & 70 & 64 & 95 & 59 & 82 & 58 & 0 \\ 57 & 99 & 82 & 81 & 91 & 64 & 89 & 0 & 89 & 82 & 94 & 51 \\ 68 & 73 & 82 & 93 & 93 & 82 & 60 & 91 & 81 & 82 & 70 & 93 \\ 58 & 83 & 87 & 60 & 66 & 86 & 82 & 71 & 68 & 89 & 75 & 83 \\ 55 & 96 & 0 & 87 & 53 & 73 & 72 & 60 & 75 & 99 & 71 & 76 \\ 86 & 80 & 71 & 58 & 98 & 98 & 83 & 90 & 87 & 74 & 58 & 67 \\ 92 & 68 & 88 & 54 & 73 & 0 & 66 & 94 & 69 & 55 & 91 & 61 \\ 53 & 85 & 74 & 68 & 88 & 73 & 94 & 75 & 83 & 83 & 55 & 90 \\ 52 & 59 & 92 & 82 & 66 & 80 & 77 & 80 & 61 & 68 & 77 & 85 \\ 96 & 93 & 56 & 76 & 57 & 77 & 85 & 61 & 66 & 57 & 99 & 89 \\ 82 & 83 & 100 & 54 & 63 & 80 & 63 & 51 & 69 & 53 & 97 & 82 \end{pmatrix} \\
 RI := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 Bm_1 := RI^T \cdot Am \cdot RI \\
 JI(Bm_1) = 9186 \\
 tr(Bm_1) = 1336 \\
 JI(Am) = 9540 \\
 tr(Am) = 982 \\
 Bm_1 = \begin{pmatrix} 206 & 283 & 342 & 160 & 157 & 137 & 151 & 143 & 142 \\ 310 & 323 & 196 & 154 & 110 & 147 & 149 & 156 & 125 \\ 274 & 373 & 315 & 135 & 154 & 144 & 152 & 51 & 158 \\ 150 & 143 & 175 & 93 & 93 & 82 & 60 & 91 & 81 \\ 147 & 158 & 170 & 60 & 66 & 86 & 82 & 71 & 68 \\ 154 & 167 & 76 & 87 & 53 & 73 & 72 & 60 & 75 \\ 160 & 138 & 138 & 58 & 98 & 98 & 83 & 90 & 87 \\ 147 & 159 & 149 & 54 & 73 & 0 & 66 & 94 & 69 \\ 136 & 140 & 164 & 68 & 88 & 73 & 94 & 75 & 83 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 5.14. Приклад обчислення "жорсткої" реалізації

На рис. 5.15 подано приклад розрахунку трьох альтернатив реалізації для задачі розмірності „7 задач \times 5 елементів ОС”.

Розмірність прикладу вибрана з умови розміщення результатів обчислень в межах сторінки.

Можливі дві альтернативи вибору одиниць вимірювання інтенсивності потоків даних:

- а) в байтах за такт або одиницю часу;
- б) в процентах від максимального завантаження.

Задачу оцінки завантаження можна вважати рутинною, наприклад, ОС Windows на ПЕОМ може виводити: кількість задач, кількість процесів, завантаження процесора, та виділення пам'яті.

$$\begin{aligned}
Am &:= \begin{pmatrix} 14 & 5 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 9 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 9 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 9 & 12 & 14 & 5 \end{pmatrix} & RI &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & R2 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Bm_1 &:= RI^T \cdot Am \cdot RI & Bm_2 &:= R2^T \cdot Am \cdot R2 & Bm_3 &:= R3^T \cdot Am \cdot R3 \\
Bm_1 &= \begin{pmatrix} 23 & 14 & 7 & 12 & 11 \\ 25 & 25 & 15 & 11 & 14 \\ 6 & 5 & 9 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} & Bm_2 &= \begin{pmatrix} 25 & 25 & 10 & 7 & 5 \\ 26 & 23 & 9 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 9 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 12 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} & Bm_3 &= \begin{pmatrix} 23 & 14 & 7 & 12 & 11 \\ 25 & 25 & 15 & 11 & 14 \\ 6 & 5 & 9 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \\
JI(Bm_1) &= 158 & JI(Bm_2) &= 149 & JI(Bm_3) &= 158 & JI(Am) &= 168 \\
tr(Bm_1) &= 74 & tr(Bm_2) &= 74 & tr(Bm_3) &= 74 & tr(Am) &= 64
\end{aligned}$$

Рис. 5.15. Приклад обчислення параметрів "жорсткої" реалізації

Подаємо копії екранів – аналіз "розмитої" реалізації для цього прикладу. Задаємо параметр "розмивання" реалізації $b=0.5$, рівень відмови $\gamma=0.3$ (рис. 5.16).

Чітка матриця реалізації						Розмита матриця реалізації							
		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	
$RI =$	1	1	0	0	0	0	$Rzm(RI, b) =$	1	1	0.5	0.25	0.063	0.004
	2	0	1	0	0	0		2	0.5	1	0.25	0.063	0.004
	3	0	0	1	0	0		3	0.5	0.25	1	0.063	0.004
	4	0	0	0	1	0		4	0.5	0.25	0.063	1	0.004
	5	0	0	0	0	1		5	0.5	0.25	0.063	0.004	1
	6	1	0	0	0	0		6	1	0.5	0.25	0.063	0.004
	7	0	1	0	0	0		7	0.5	1	0.25	0.063	0.004

Рис. 5.16. Приклад обчислення параметрів "розмитої" реалізації

Проведемо аналіз для значень параметрів реалізації: розмивання $b = 0.5$ та рівень відмови $\gamma = 0.3$ (0 – нема відмови, 1 – повна відмова). На рис. 5.17 подано виходи програми: ефективності виконання задач; матриці ефективностей виконання задач в елементах ОС; матриця ефективностей для двох значень параметра "рівень відмови" $\gamma = 0.3$ та $\gamma = 0$ (повна відмова). Проаналізуємо результати.

Компонент структури вихідних даних $Efg2(RI, b, \gamma)_3$ програми аналізу відмовостійкості АСУ – вектор ефективностей виконання окремих задач в обчислювальній системі (ОС) при заданому рівні відмов. Поряд (див. рис. 5.17) подано вектор рангів виконання задач (1– найвищий рівень виконання, однаковим рівням виконання присвоюється однаковий ранг).

Компонент структури вихідних даних $Efg2(RI, b, \gamma)_2$ програми аналізу відмовостійкості АСУ – матриця ефективностей виконання окремих задач системи в окремих елементах ОС, наприклад: $(Efg2(RI, b, \gamma)_2^T)_{3,3} = 0.3$ – рівень виконання третьої задачі в третьому елементі ОС, $(Efg2(RI, b, \gamma)_2^T)_{3,2} = 1$ – рівень виконання третьої задачі в другому елементі ОС.

$b = 0.5 \quad \gamma = 0.3$		$RangV =$		$Efg2(RI, b, \gamma)_2^T =$							
$Efg2(RI, b, \gamma)_3 =$		1			1		1	2	3	4	5
	1	0.949		1	1		1	1	1	1	1
	2	0.949		2	1		1	1	1	1	1
	3	0.593		3	4		1	1	0.3	1	1
	4	0.928		4	2		1	1	1	0.3	1
	5	0.949		5	3		1	1	1	1	1
	6	0.949		6	1		1	1	1	1	1
	7	0.949		7	1		1	1	1	1	1

$b = 0.5 \quad \gamma = 0$		$RangV =$		$Efg2(RI, b, \gamma)_2^T =$							
$Efg2(RI, b, \gamma)_3 =$		1			1		1	2	3	4	5
	1	0.949		1	1		1	1	1	1	1
	2	0.949		2	1		1	1	1	1	1
	3	0.527		3	4		1	1	0.25	1	1
	4	0.351		4	2		1	1	1	0.063	1
	5	0.949		5	3		1	1	1	1	1
	6	0.949		6	1		1	1	1	1	1
	7	0.949		7	1		1	1	1	1	1

Рис. 5.17. Результати аналізу відмовостійкості. Приклади

Мета розробки програми аналізу відмовостійкості – не стільки отримання конкретних числових результатів для конкретної задачі проектування, скільки створення зручної програмної системи, на базі якої проектувальник може створити персональну систему для аналізу і оптимізації відмовостійкості. Проведене випробування системи дозволяє вважати мету досягнутою: комплекс програм можна модифікувати – уточнювати, змінювати розмірності задачі.

5.4.2. Приклад застосування програмної системи для аналізу живучості АСУ олієжиркомбінату

Методика на базі задачі реалізації застосована і для іншого об'єкта олієжиркомбінату. На рис. 5.18, 5.19 подано схеми зв'язків між задачами і елементами обчислювальної мережі. На основі аналізу алгоритмів виконання задач визначені величини максимальних і середніх інтенсивностей інформаційного обміну. Визначення інтенсивностей завантаження процесорів та обміну може виконуватись експериментально – безпосередньо на працюючій обчислювальній мережі.

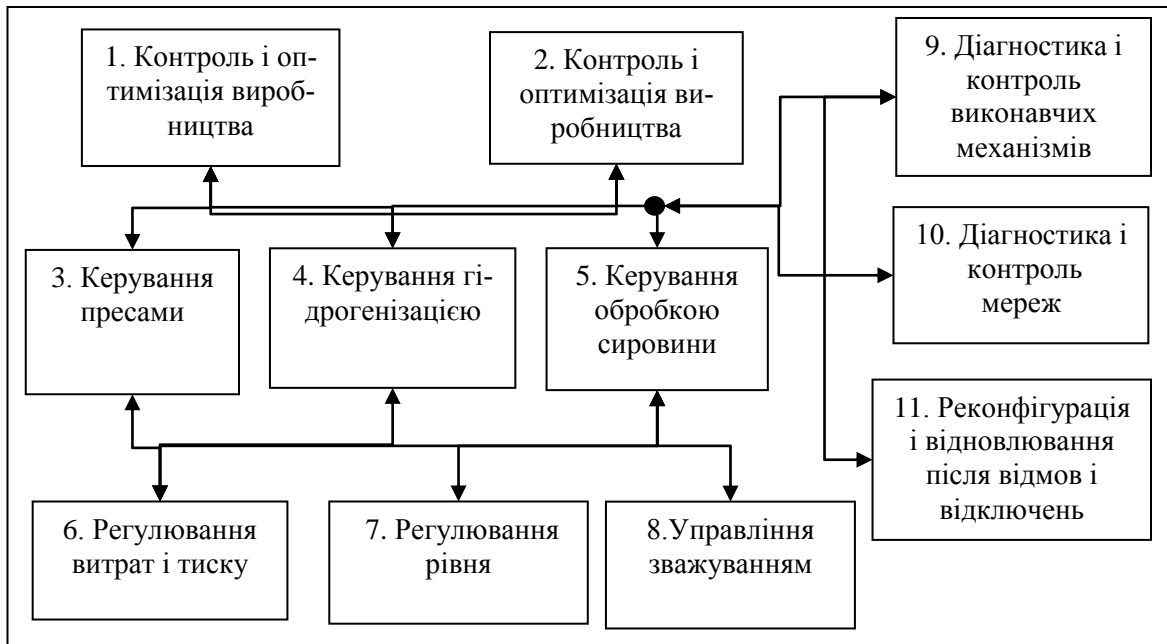


Рис. 5.18. Схема зв'язків задач АСУ



Рис. 5.19. Схема зв'язків елементів обчислювальної системи

Отримуємо ідентичну попередній (рис. 5.13) задачу реалізації – відображення матриці 11×11 в матрицю 10×10 (рис. 5.20).

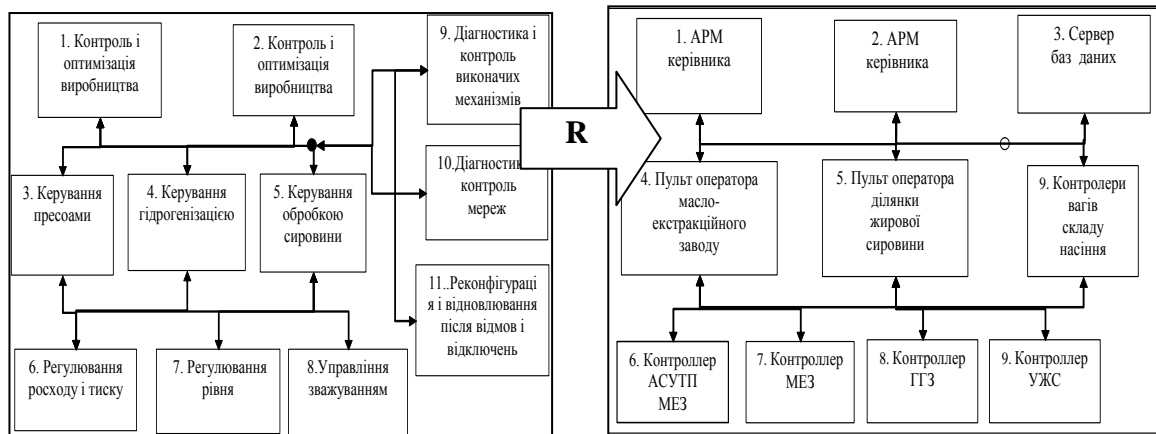


Рис. 5.20. Відображення системи задач АСУ в елементи обчислювальної мережі

Не наводимо процес обчислень і його результати – ці дані тільки для проектувальника і проектної організації. Ставилась задача розробки «інструмента» для обчислень параметрів реалізацій і дослідження ситуацій відмов в АСУ.

Розроблений комплекс модулів виконує дві функції – визначення оптимального варіанта реалізації і аналізу наслідків можливих відмов.

5.4.3. Оцінка ефекту застосування теоретичних результатів

Пам'ятаємо, що існують "науково ізольовані області техніки". До таких відносили системи реального часу. Суть терміну в тому, що існують коректні теоретичні результати, які мало що дають практиці, і існує практика, що не вкладається в рамки існуючих теорій. Запропоновані методи аналізу і оптимізації живучості теж можуть бути тільки цікавими іграшками. Спробуємо конкретизувати можливі зв'язки між теорією і практикою.

Порівняння АСУ для двох виробничих систем дозволяє зробити певні узагальнення щодо застосування методу: вимоги контролю, діагностики і живучості є стандартами а не об'єктами проектного вибору, обчислювальна система збирається з стандартних елементів високої надійності. Тобто витрати на забезпечення живучості і надійності є обов'язковою складовою, яка мало залежить від програмної надлишковості виконання задач в елементах обчислювальної системи. В першому наближенні можемо порівнювати варіанти реалізації тільки за значенням критерію живучості.

Застосування моделей покращує якість процесу проектування і, потенційно – результати проектування. Конкретизуємо результати мож-

ливого практичного використання. Ефект застосування розділяється на:

- ефект для виробничої системи;
- ефект для проектної організації.

Для проектної організації суть ефекту від запровадження теоретичних результатів в підвищенні якості вибору при зменшенні витрат часу на аналіз альтернативних варіантів. Програмна система дозволяє швидко порівняти всі припустимі варіанти "розмитої" реалізації задач в обчислювальній системі.

"Розмиту" реалізацію, коли певна програма одночасно виконується в різних елементах обчислювальної системи, можна розглядати як "гаряче резервування" на рівні програм і одночасно як засіб взаємоконтролю обчислень.

Для виробничої системи суть ефекту від запровадження теоретичних результатів в тому, що вони досягаються за рахунок певного, звичайно, незначного підвищення витрат (на апаратні і програмні засоби). Ці *додаткові витрати* дозволяють зменшити *втрати при можливих відмовах* певних елементів.

Логічно визначити ефект як різницю або відношення зменшення витрат при відмовах до збільшення витрат на обчислювальну систему.

Відсутність статистики відмов не дає можливості дати кількісну оцінку ефекту, однак оцінка в порядковій шкалі є достовірною: при несуттєвому, в межах випадкових відхилень, збільшенні витрат, втрати при можливих відмовах елементів зменшуються суттєво.

Оцінка ефекту від застосування теоретичних результатів. Сучасні розподілені технологічні системи, в тому числі і об'єкти впровадження функціонують в умовах неперервного оновлення технологій і в тісних зв'язках з іншими виробниками аналогічної продукції.

В таких умовах невелика помилка з часом приводить підприємство до банкрутства. Саме в таких складних умовах працюють об'єкти впровадження.

Суть ефекту від застосування розроблених робочих моделей в покращенні якості процесу проектування і, потенційно, – обґрунтованості рішень з розвитку виробництва у виробничій системі.

Для виробничої системи суть ефекту від впровадження теоретичних результатів в підвищенні обґрунтованості рішень керівників підприємства, наприклад: своєчасний початок введення нових технологій, своєчасне припинення нарощування виробничих потужностей на базі старої технології, оптимальний розподіл загальних ресурсів між виробництвами окремих продуктів.

Для проектної організації суть ефекту від впровадження результатів роботи:

- в підвищенні конкурентоздатності за рахунок пропозиції нового

інформаційного продукту – підсистеми для прогнозування розвитку;
 – в підвищенні якості проектних рішень за рахунок розгляду не тільки поточного стану технологічної розподіленої системи, але і процесу розвитку, що є необхідною умовою виживання.

Об’єктивна умова для реалізації теоретичних результатів – автоматизовані системи управління на об’єктах впровадження безперервно збирають статистичну інформацію про всі складові витрат, випущену продукцію, замовлення і постачання. Це дозволяє ідентифікувати і оновлювати функції виробництва, розвитку, попиту і так підвищувати адекватність моделей прогнозування розвитку.

Зводимо основні наукові результати розділу в таблицю 5.1, де порівнюються відомі моделі реалізації з поданою в розділі.

Таблиця 5.1

Порівняння модифікованої та існуючої моделей реалізації

Існуюча детермінована модель реалізації (Т. Боровська [28])	
Задані: система задач $\{T_j\}$ і матриця зв'язків задач $\{A_{i,k}\}$, система елементів обчислювальної системи (ОС) $\{E_j\}$ і матриця зв'язків елементів задач $\{B_{i,j}\}$, та критерій реалізації $Jo(R_{i,j})$. Визначити оптимальну за критерієм $Jo(R_{i,j})$ матрицю реалізації $\{R_{i,j}\}$ – відображення матриці зв'язків задач $\{A_{i,k}\}$ в матрицю зв'язків між елементами обчислювальної мережі $\{B_{i,j}\}$.	
Обмеження $R_{i,j} = (0,1)$ – „жорстка” реалізація	
Модифікована модель розмитої реалізації	
<ul style="list-style-type: none"> – Розмита (нечітка) реалізація $0 \leq R_{i,j} \leq 1$. – Розмита (нечітка) відмова $0 \leq Otk_i \leq 1$. – Реалізація при відмові $Rvd = (Rn * Otk)$. <p style="text-align: center;">Декомпозиційна структура нечіткої реалізації:</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px; text-align: center;"> Вектор-стовпець – спектр редукційної декомпозиції i-ої окремої задачі в ОС </div> <div style="margin-right: 20px;"> $R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{pmatrix}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-left: 20px; text-align: center;"> Вектор-рядок – спектр функціональної декомпозиції глобальної задачі в j-му елементі ОС </div> </div>	

Висновки

Виконано аналіз двох сучасних автоматизованих систем для підприємств металургійної і харчової промисловості – об'єкти впровадження. Вимоги безпеки, живучості, точності, стандарти, досвід проектування – все це у сукупності приводить до розподілених систем з раціональною структурою, що можуть бути адекватно подані моделями класу " N елементів, M задач".

Розроблено математичну модель для дослідження припустимих розподілів задач в елементах – мікроконтролерах, ПЕОМ та ін. з урахуванням обсягу інформаційного обміну між елементами розподіленої системи. Суть моделі – відображення графа інформаційних зв'язків окремих задач автоматизованої системи в граф зв'язків між елементами обчислювальної мережі.

Вдосконалено математичну модель реалізації системи задач розподіленою обчислювальною системою – введено розмиту реалізацію на базі редуційної декомпозиції задачі, що дозволяє синтезувати і досліджувати структури обчислювальної системи компромісні за критеріями ефективності і живучості. Критерій живучості автоматизованої системи подано як функцію двох параметрів – "розмитості" реалізації та рівня відмови, що дозволяє не тільки визначити координати екстремуму, але й оцінити околиці екстремуму. Отримано робочі моделі для порівняльного аналізу припустимих варіантів розподілу задач між елементами.

Необхідність постійної адаптації розподілених систем потребує, а значне постійне зменшення граничної вартості технічних засобів дозволяє реалізувати розподілені системи в вигляді надлишкової структури. Зниження вартості технічних засобів змінює оптимізаційні задачі реалізації: замість мінімізації надлишковості – максимізація живучості, тобто стійкості розподіленої системи до зовнішніх і внутрішніх збурень.

В цьому розділі розглянуто досить детально процес побудови робочої моделі задачі реалізації з простими числовими прикладами малої розмірності, версіями програмних модулів, блоками контролю та масштабування. Це зроблено для того, щоб дати приклад *процесу побудови моделі* виробничої системи. Фактично подано метамодель – модель процесу побудови моделі складної системи. Метамодель є результатом абстрагування процесів побудови моделей подібних поданому в цьому розділі процесу.

Сьогодні центр ваги в моделюванні технічних систем змістився з організації обчислювальних експериментів за відомими моделями до конструювання робочих моделей для прикладних цілей – вбудовування в АСУ та в системи підтримки рішень.

6. ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ ВЕРТИКАЛЬНО ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ

В попередніх розділах ми розглядали переважно моделі узагальнених виробничих систем з паралельно працюючими елементами. Це були багатопродуктові виробничі системи, системи виробників певного класу продуктів, обчислювальні системи призначені для виконання системи певних задач автоматизованої системи управління. Спільним в цих моделях були адитивні локальні і глобальні критерії, що інтерпретувались як "сумарне виробництво", "сумарний дохід", "сумарний прибуток", "сумарні витрати".

Особливістю нових задач моделювання і оптимізації розподілених виробничих систем, є зміна границь між традиційними науковими напрямками, зокрема, між "технічними" і "економічними" науками. Виділимо такі аспекти і факти:

- неможливо ефективно розвивати виробничі системи без включення в границі понять "технологія", "продукт", "виробнича система", процеси і технології доведення продукту до кінцевого споживача – логістики, маркетинг, обслуговування;

- сьогодні економічна наука в світі розділилася на десятки напрямків, наприклад "інформаційна економіка", "інтернет-економіка", "екологічна економіка" (мається на увазі використання екологічних моделей), і, нарешті, "технократична економіка";

- в останні роки нобелівські премії в галузі економіки отримували психологи, соціологи, юристи, тому що сучасне виробництво в значній мірі – інформаційний обмін між виробниками і споживачами на рівні окремих індивідів;

- засновник теорії маркетингу Філіп Котлер вважає, що маркетинг повинен повністю змінитися, а його центральними фігурами повинні бути виробник і продавець.

Системи, де елементи виконують певну частину узагальненого технологічного процесу – від проектування продукту до споживання чи використання, називаються вертикально інтегрованими.

Головний структуроутворювальний фактор для вертикально інтегрованих систем технології: при одних технологіях елементам вигідно інтегруватись, при інших – переходити на шлях вузької спеціалізації на певному технологічному етапі.

Вертикально інтегровані системи мають широкий діапазон розмірів – від системи переробки відходів на малій фермі до глобальної металургійної системи з виробничим циклом – від залізної руди і вугілля до кораблів і тепловозів. Розглянемо процес побудови моделі на конкретному прикладі системи переробки органічних відходів.

6.1. Приклади вертикально інтегрованих систем

Сьогодні практично немає обмежень на складність алгоритмів управління, зокрема фільтрації, ідентифікації, оптимізації. Не проблема і онлайнний (під час функціонування САУ) синтез параметрів регулятора. Вартість апаратних засобів для реалізації системи автоматичного управління – сенсорів, виконавчих елементів і мікроконтролерів – суттєво зменшилась.

Не зникли, а може стали більш важкими проблеми, пов'язані з нелінійністю, нестаціонарністю, невизначеністю адаптивних САУ. Для таких систем відсутні загальні методи синтезу. Найбільша неприємність може бути подана таким практичним правилом: чим більше ми вкладаємо інтелекту в САУ, тим більш різноманітними, непрогнозовними і дорогими будуть її відмови. Саме тому на практиці часто віддають перевагу САУ з постійними параметрами регуляторів, підібраними так, щоб САУ залишалась задовільною у всьому діапазоні зміни параметрів об'єкта та зовнішніх збурень [98, 122, 125, 143, 145].

Система моделей цього розділу орієнтована в першу чергу на біотехнічні системи з стабілізацією температури і витрат "робочого тіла". Це водонагрівачі, кондиціонери, теплообмінники і біореактори.

Структура і алгоритми системи автоматичного управління залежать від конструкції об'єкта управління, характеру процесів в об'єкті та вимірюваних параметрів. Приймаємо загальний напрямок в системному проектуванні регуляторів: проектування комплексу "об'єкт + система управління", що потребує мінімальних витрат енергії та "інтелекту" для управління.

Ефективний шлях розв'язання цієї проблеми – сумісне узгоджене проектування технологій і конструкції установки для переробки відходів, створення комп'ютерних моделей для накопичення досвіду і статистики на віртуальній реальності. Біохімічні і термодинамічні процеси в реакторі суттєво нелінійні, нестаціонарні, невизначені.

Біореактор є складнішим від ядерного реактора. В Швеції приділяють багато уваги екологічності та безпеці технічних систем. Зокрема там розробили ядерний реактор, автоматична система аварійного відключення якого не мала ні одного вимикача, електродвигуна, транзистора: там просто при зупинці насосів охолодження, падав тиск і "важка вода" з бар'єром витісняла звичайну воду і гасила реакцію. Саме така "природна" система – стратегічна ціль для біореактора. Вибираємо проектне рішення "дворівневий регулятор":

– перший рівень – це конструювання біотехнічної системи з саморегулюванням (підбір культур мікроорганізмів, термохімічні зворотні зв'язки та ін.);

– другий рівень – розробка регуляторів, що будуть сервісними для

біотехнічної системи (стабілізація температур, концентрацій).

Загальнозрозумілим аналогом може бути звичайний акваріум, де більшість процесів регулюються екосистемою акваріуму, а механічні регулятори забезпечують сервіс – потрібні температуру, насичення киснем та освітлення. Перший етап у розробці регулятора – ретельне вивчення властивостей поведінки об'єкта і виявлення законів, що породжують властивості. На рисунку 6.1 подано недеталізовану схему процесів в біореакторі [7].

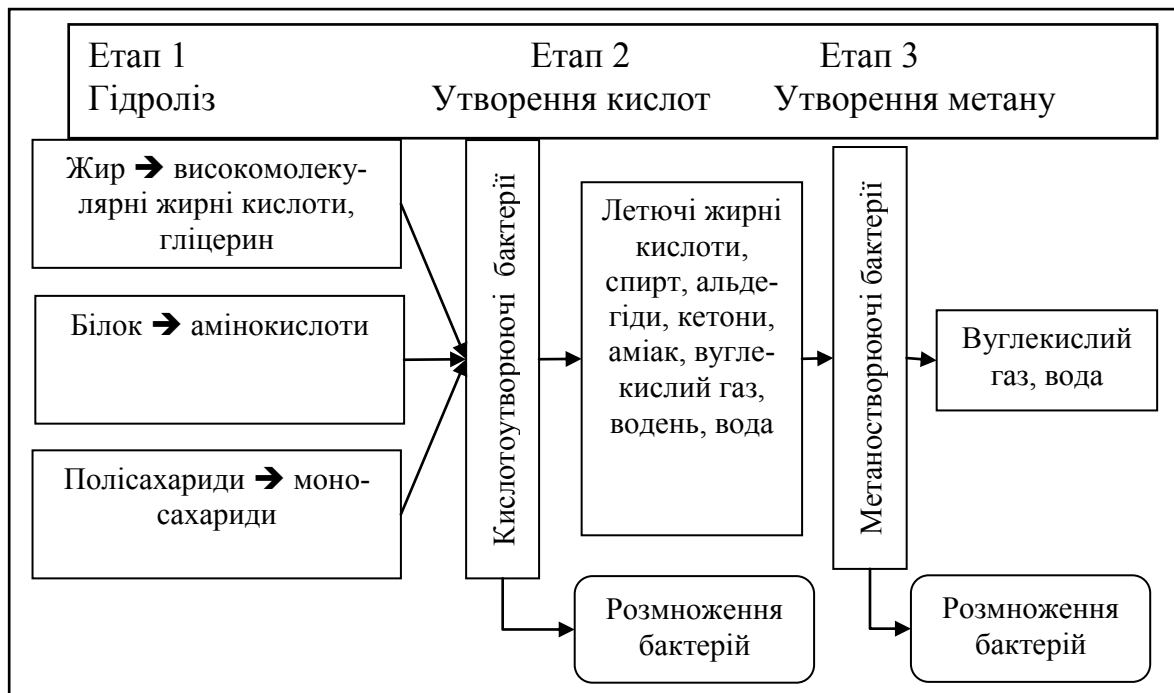


Рис. 6.1. Етапи процесу анаеробного бродіння

Головна особливість процесів – наявність двох класів бактерій і відповідно – двох типів біохімічних процесів.

Опис установки. Перш, ніж перейти до побудови моделей, виконаємо специфікацію функцій і функціональних підсистем біогазової установки згідно зі схемою на рис. 6.1.

Цільове призначення установки подаємо в порядку стратегічних пріоритетів.

1. Включення сучасних виробництв в короткі і безпечні екологічні цикли.
2. Виробництво нешкідливих і безпечних органічних добрив і виробництво екологічно чистої агропродукції на базі цих добрив.
3. Виробництво стандартних енергоресурсів з поновлюваних джерел.

Відповідно, стратегічна ціль розробки базової установки – сумісне, одночасне досягнення названих цілей за рахунок вибору раціональної схеми установки. Серед еквівалентних за комплексною мірою досягнення названих цілей (глобальним критерієм) альтернатив природно вибрати таку, що вимагає мінімальних витрат і простішої конструкції.

Склад і схема установки

Установка УББ (установка біогазова базова) складається з реактора з пластмасовим корпусом, системи термостабілізації, пристрою для перемішування сировини, газгольдера.

Установка виконується у варіантах з реакторами ємкістю в 3, 5, 8 м³, тобто створюється модельний ряд (лінійка продуктів) – саме це сьогодні є *закінченим продуктом* для виробника. Такий підхід у виробництві орієнтованому на споживача – не новація: уявимо виробника, що розробив "чоботи-сороходи", унікальні за відношенням "цінність/ціна", але тільки одного розміру.

Базова установка складається з таких модулів (рис. 6.2):

- 1 – модуль підготовки і завантаження сировини з попередньою фільтрацією і перемішуванням;
- 2 – модуль – реактор з системою електропідігріву і перемішування;
- 3 – модуль накопичення і стабілізації тиску газу;
- 4 – модуль автоматичного управління.

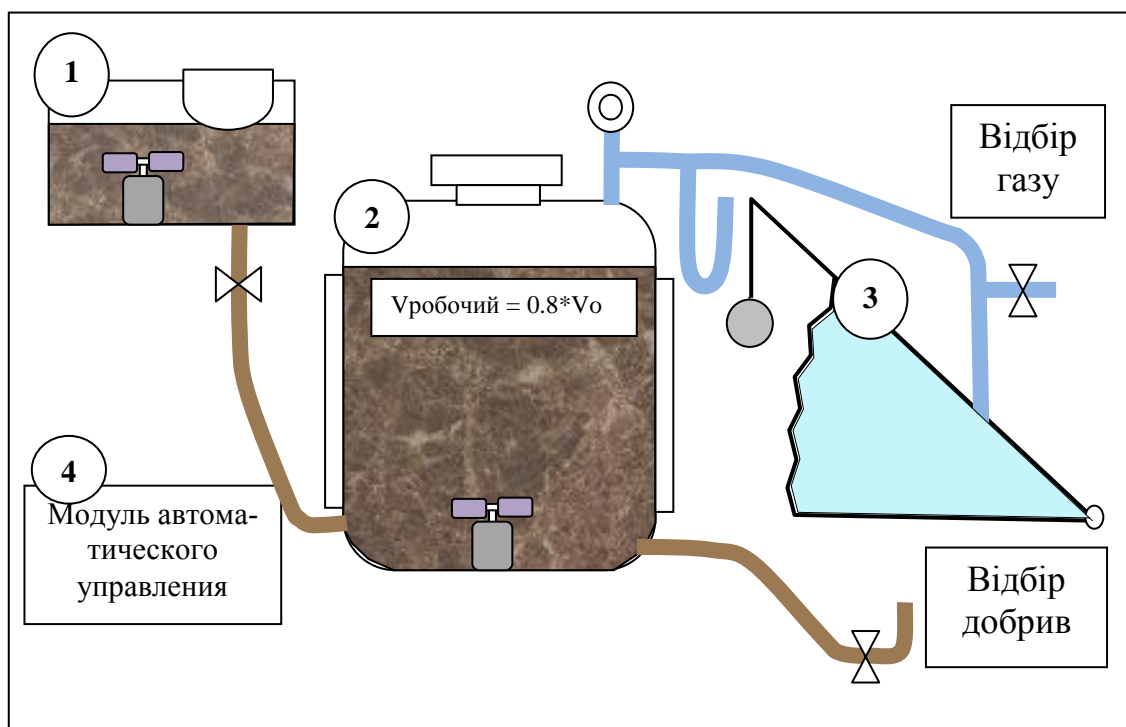


Рис. 6.2. Схема базової біогазової установки

В таблиці 6.1 подані характеристики продуктивності модельного ряду біогазових установок, визначених на базі статистичних даних [7].

Таблиця 6.1
Характеристики базової лінійки біогазових установок

Об'єм реактора, м ³	3	5	8
Висота, мм	1600	2075	2200
Діаметр, мм	1630	1830	2230
Виробництво газу, м ³ /добу	3–6	5–10	8–16
Виробництво добрив, літрів /добу	120	200	320
Завантаження реактора	щоденно, по 1/20 (4%) об'єму біореактора		

Сировина:

Сировиною служить гній, пташиний послід, силос, різнотрав'я, відходи м'ясної промисловості та інші органічні матеріали. Біогазові установки не є новацією останніх років, однак на сьогодні в застосуванні таких установок виникла серйозна проблема, що є відгалуженням набагато серйознішої проблеми: впливу біотехнологій та високих технологій взагалі на глобальний екологічний стан Землі.

Конструювання математичних моделей різних фрагментів нашого оточення відкриває нове розуміння, новий погляд на це оточення. Цей погляд дозволяє побачити дію однакових механізмів в абсолютно різних явищах і процесах.

Сьогодні змінюється, можливо незворотно стандартний набір і активність мікроорганізмів в ґрунті, в організмі людини. Розглянемо це на прикладах:

- перезахоронення кладовищ 1970–1980 років в Голландії, Германії, в зв'язку з чим виявлено, що небіжчики збереглись майже неушкодженими – вже тоді середній європесць був насичений антибіотиками, консервантами, та складовими косметики;

- майже остаточно доведено, що "коров'ячий сказ" виник в країнах з передовими і високоефективними біотехнологіями, саме як результат їх застосування.

Все це має пряме відношення до біореакторів. Наприклад, сучасні птахофабрики генерують великий обсяг відходів. В певні періоди птахам дають з кормом або в ін'єкціях антибіотики, гормони та ін. З цих причин, відходи птахофабрик в певні періоди майже не переробляються в біореакторах – наявні штами мікроорганізмів не адаптовані до нових речовин.

Склад добрив. Якщо сировина придатна для переробки в біореакторі, то в результаті отримуються ефективні добрива, склад яких подано в таблиці 6.2 [7]. Нагадаємо порядок пріоритетів складових ефекту біогазових установок: 1 – екологія, 2 – органічні добрива, 3 – біогаз.

Таблиця 6.2

Склад добрив з різних видів відходів

Початкова сировина	N загальний %	N амоній %	P, фосфор %	K, калій %	Вологість %	pH кислотність
Пташиний послід	0,2–0,8	0,1–0,5	0,87–1,7	0,4–0,8	80–90	8
Свинячий гній	0,2–1,2		0,1–0,4		80–90	6,3–8,1
Гній КРС	0,4	0,25	0,2	0,45	80–90	

З точки зору теорії виробничих систем біогазова установка – це "технологічний перетворювач", що повинен заданий потік сировини переробляти в кінцеві продукти. В таблиці 6.3 подано оцінки потрібної потужності реакторів для переробки відходів тваринництва в зручній для користувача формі – не в тонах, а в поголів'ях тварин і птиці.

Таблиця 6.3

Потрібний об'єм реактора залежно від кількості тварин і птиці

Об'єм реактора, м ³	Кількість тварин, птиці		
	КРС, голів	Свині, голів	Кури, голів
3	10	40	1600
10	40	150	2400
25	100	400	16000
50	200	800	32000
100	400	1600	64000
150	600	2300	96000
200	800	3000	128000

Ми розглядаємо багаторівневу за технологічними етапами виробничу систему, в якій добрива не є кінцевим продуктом, а тільки компо-

ненням ресурсів для виробництва рослинних продуктів. Витрати добрива при стабільному рослинництві залежать від культур і стану ґрунтів. Візьмемо усереднену оцінку. В середньому витрати добрив складають 500 літрів на гектар на весь період вегетації. Звичайно добрива вносяться двічі за період вегетації рівними частинами по 250 літрів (це важливо з точки зору рівномірності витрачання і продукування).

Відмінність установки від попередніх аналогів – максимальне використання пластмасових елементів, що забезпечує малу вагу, легкість транспортування, монтажу і демонтажу, тривалий термін експлуатації.

Об'єднання біогазових установок в системи

При використанні біогазових установок виникає стандартна задача дослідження операцій: вибір конфігурації системи реакторів під даний рівень завантаження – один і той же об'єм відходів можна переробляти в одному великому реакторі, або в декількох менших. Ця задача розв'язана, досліджена [83, 84, 146] і відповідні робочі програми можуть вбудовуватись в систему підтримки рішень.

Менш дослідженими є задачі декомпозиції біогазової системи в спеціалізовані паралельно і послідовно працюючі біореактори. Наприклад, різні фази бродіння – кислотне, метанове. Аналоги такої вертикальної декомпозиції процесу можуть бути системи травлення корови, людини, колонії термітів. Нагадаємо, що стартовим ресурсом у термітів є мертва деревина.

Декомпозиція процесу біопереробки в систему паралельно працюючих біореакторів дозволяє спеціалізувати окремі біореактори по окремих видах вхідного ресурсу: відходів тваринництва, птахівництва, відходів обтяжених антибіотиками, консервантами та ін.).

Послідовне з'єднання реакторів дозволяє відділити етап інтенсивного метаноутворення від етапу утворення безпечних якісних добрив.

При цьому модулі завантаження, накопичення газу і автоматики залишаються загальними для всіх реакторів при незначній модифікації.

Сьогодні склалися умови, коли для біопереробки відходів є всі умови – висока актуальність, наявність вільних матеріальних і фінансових ресурсів, високотехнологічних засобів виготовлення і автоматизації біогазових установок. Єдина дефіцитна складова – система робочих моделей всіх рівнів – від моделей стратегічного планування розвитку до моделей регулювання біохімічних процесів.

Сьогодні виробники багатьох видів продукції мають потужні підрозділи, що постійно розробляють нові версії автомобілів, мобільних телефонів. Такий же процес неперервного удосконалення біогазових установок – необхідна умова "не провалу" цього напрямку.

Для отримання ефективної біогазової установки необхідні інтен-

сивні і цілеспрямовані випробування реальної установки і її моделі. Таке комплексне дослідження звичайно стає процесом підвищення ефективності установки і точності моделі.

Базова модель біогазової установки другого рівня

Вище ми розглянули конструкцію установки ємністю 3–8 м³. Для потужностей в 3–5 разів більших можна збирати систему з декількох установок. Для більших потужностей, що вимагають об'єма реактора 100–200 м³ слід вибирати конструкцію установки іншого класу. На базі аналізу десятків відомих біогазових установок відібрана шведська модель неперервної дії (див. рис. 6.2) [7].

Головна перевага вибраної конструктивної схеми біореактора – неперервність і стаціонарність процесів, можливість модифікацій базової схеми реактора (рис. 6.3).

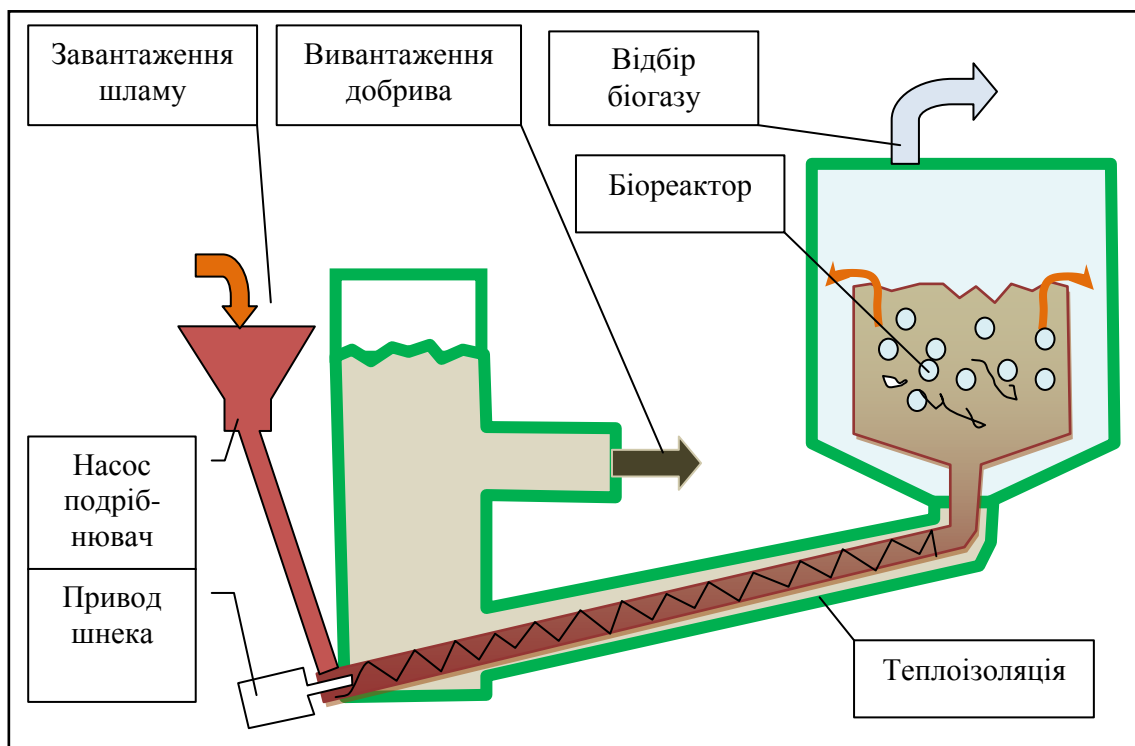


Рис. 6.3. Вибрана альтернатива: установка з неперервним циклом і протиточним теплообмінником

Оцінимо схему з точки зору *саморегулювання*:

– витрати енергії на регулювання температури шламу забезпечуються протиточним теплообмінником. Зброджена маса спливає вниз по теплоізолюваному каналу і нагріває свіжу масу, що подається вгору шнеком розташованим в теплоізолюваному каналі;

– корпус реактора і корпус газозбірника суміщені в реакторі. Маса по мірі протікання процесів піднімається вгору і сама переливається че-

рез верхній край реактора – перемішувачі не обов’язкові;

– перероблена маса накопичується в збірнику і може різними способами формуватись і транспортуватись для зберігання або використання як добрива.

На базі зібраних даних про характеристики процесів анаеробного метанового бродіння розробимо математичні моделі: беремо емпіричні дані, враховуємо термохімічні і динамічні моделі, виконуємо ідентифікацію – тобто знаходження таких значень параметрів моделей, що забезпечують мінімум розходжень між емпіричними даними та результатами моделювання. Систему моделювання реалізуємо в двох доступних альтернативних середовищах VisSim, Mathcad.

На першому етапі досліджень повинні бути проаналізовані варіанти кількості, розташування і типів вимірювачів та виконавчих елементів. Зібрана бібліотека моделей регуляторів температури та подачі шламу – імпульсних з амплітудною і фазовою модуляцією, релейних, екстремальних.

6.2. Розробка математичних моделей базового об’єкта

На базі розглянутих конструкцій, статистичних даних і початкових знань про біохімічні процеси (ферментативні процеси) можемо побудувати математичні моделі.

6.2.1. Залежність виходу газу від температури процесу

Задаємо діапазон температур шламу $te := 0..60$, діапазон часу процесів $tvr := 0, 2..150$.

Формуємо модель залежності повної кількості газу від температури (рис.6.4). Вводимо ідентифіковані значення параметрів моделей: $a11 := 0.001$; $a12 := 0.0012$; критичні температури бродіння в "шламі": $tb1 := 33 \text{ gradC}$; $tb2 := 53 \text{ gradC}$; $Sm := 2.5$; $Amh := 1.95$; масштаб для графіка $mg := 0.4$.

Записуємо текст програмного модуля.

$$\begin{array}{l}
 Vgtot(te) := \left\{ \begin{array}{l}
 Vgt1 \leftarrow 1.0 - a11 \cdot (te - tb1)^2 \\
 Vgt2 \leftarrow 1.2 - a12 \cdot (te - tb2)^2 \\
 \text{vux} \leftarrow Vgt1 \cdot (te < 40) + Vgt2 \cdot (te \geq 40)
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 \frac{4}{1.6} = 2.5 \\
 \frac{1.6}{4} = 0.4
 \end{array} \\
 \\
 Vvretot(te) := 2.5 \cdot (Sm - Amh \cdot Vgtot(te))
 \end{array}$$

Будуємо графіки залежностей обсягу отриманого газу і потрібної для цього тривалості процесу – сумісно (рис. 6.4, 6.5).

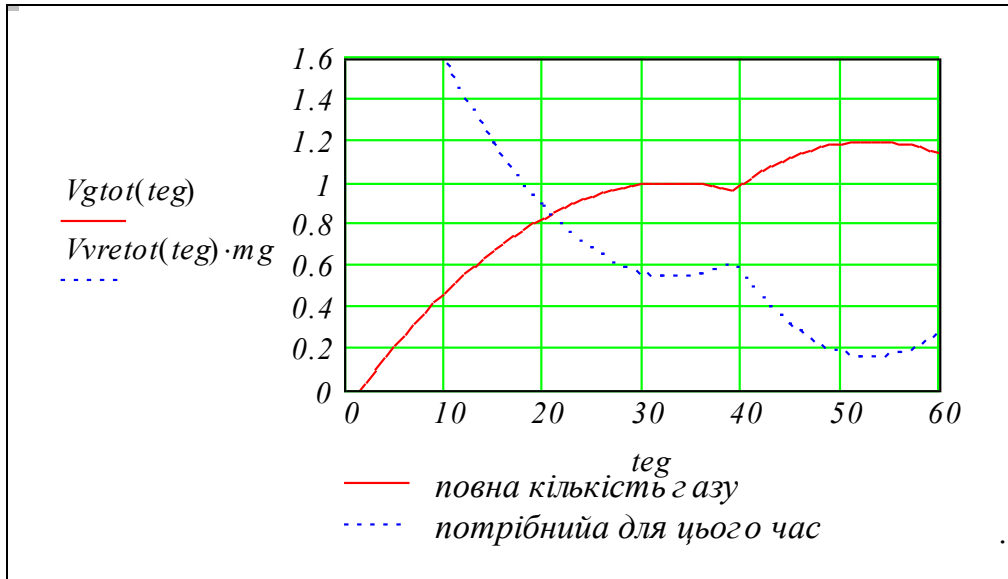


Рисунок 6.4. Залежності обсягу і тривалості видачі газу від температури (разом)

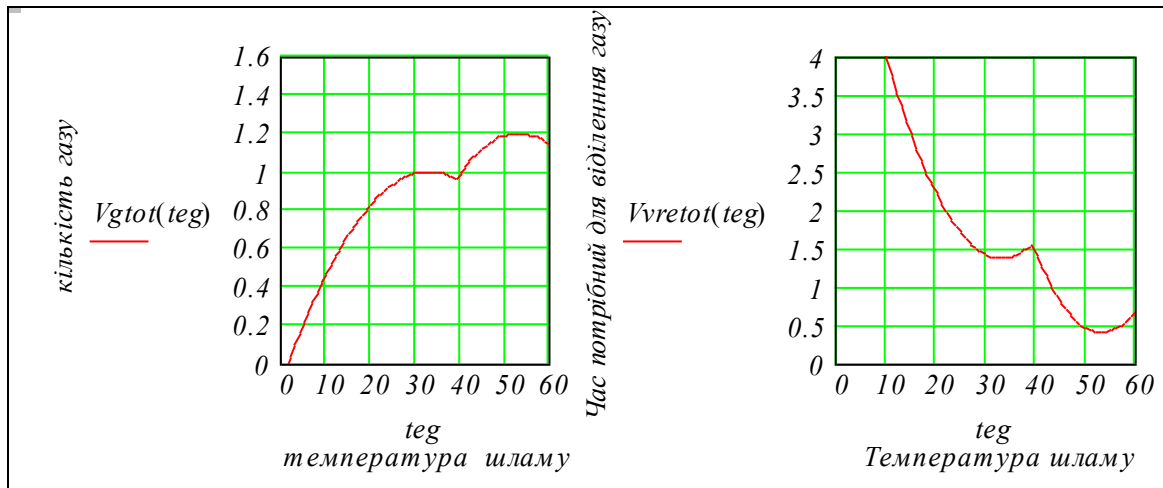


Рис. 6.5. Вплив температури на кількість газу і тривалість процесу

6.2.2. Модель динаміки анаеробного бродіння

Модель динаміки процесу бродіння відноситься до класу нелінійних узагальнених моделей "зростання з обмеженням". В процесах бродіння беруть участь два класи бактерій, тому слід динаміку описувати як суму процесів із змінними співвідношеннями цих процесів. Запишемо базове диференціальне рівняння процесу зростання з обмеженням:

$$\frac{d}{dt}x = k_1 \cdot x - k_2 \cdot x^{a_1},$$

де k_1 , k_2 , a_1 – параметри моделі.

Регулятори системи сьогодні є цифровими, тобто імпульсними, тому отримаємо еквівалентну різницеву математичну модель. Замінюємо похідну першою різницею:

$$\frac{d}{dt}x[(n+1) \cdot T] = \frac{x[(n+1) \cdot T] - x[n \cdot T]}{T}, \quad (6.1)$$

де n – номер кроку квантування; T – крок квантування.

Для подання функцій дискретного аргументу $t = n \cdot T$ використаємо індексовані змінні t_n, x_n . Задаємо параметри моделювання: кількість кроків $N := 400$, крок $T := 0.02$; індексна змінна $n := 1..N$; початковий індекс масивів $ORIGIN := 1$; дискретний час $t_n = n \cdot T$. Задаємо значення параметрів $k1$ і $k2$ процесу: $k1=6$; $k2=6$. Задаємо початкове значення x : $x_1 := 0.03$ і записуємо різницеве рівняння процесу, будуємо графіки.

$$x_{n+1} := x_n + \left[k1 \cdot x_n - k2 \cdot (x_n)^{a1} \right] \cdot T.$$

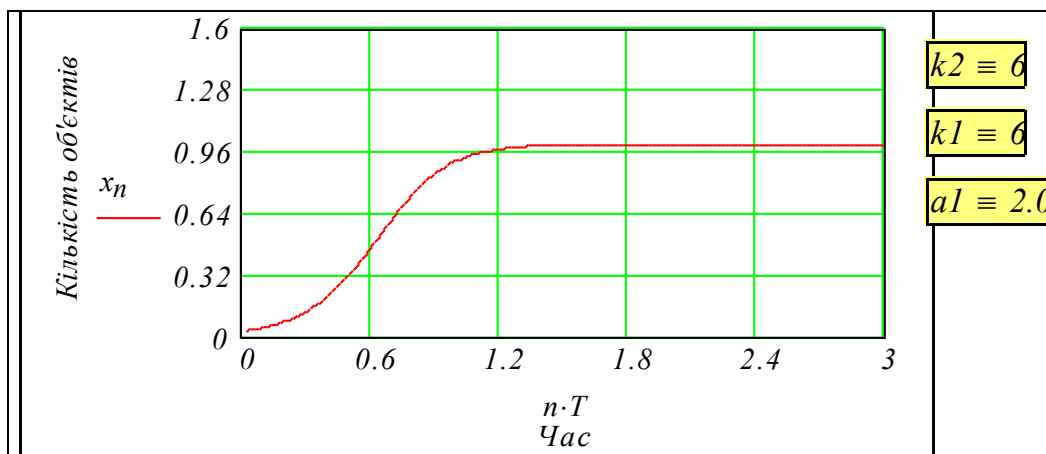


Рис. 6.6. Процес бродіння при малій початковій кількості бактерій

Зробимо модель процесу як функцію користувача:

```

x(k1, k2, a1) :=
  x1 ← 0.03
  for n ∈ 1..200
    x_{n+1} ← x_n + [ k1 · x_n - k2 · (x_n)^{a1} ] · T
  "qq"
x

```


Маємо два типи мікроорганізмів і два процеси бродіння з різними параметрами (див. рис. 6.1). Зробимо відповідну модель. Задаємо тестові параметри моделі

кислотний процес $k_{11}:=2.1$; $k_{12}:=.3$; $a_{11}:=1.8$;

метановий процес $k_{21}:=5$; $k_{22}:= 5$; $a_{21}:=1.9$; $\alpha:=0.9$.

$$X_s := \alpha \cdot x(k_{11}, k_{12}, a_{11}) + (1 - \alpha) \cdot x(k_{21}, k_{22}, a_{21}).$$

Сформуємо залежності процесу бродіння від температури на основі експериментальних даних. Маємо дані для процесів при 20, 30, 50 градусах Цельсія. Формуємо відповідні моделі:

$$X_{s20} := \alpha \cdot x(k_{11}, k_{12}, a_{11}) + (1 - \alpha) \cdot x(k_{21}, k_{22}, a_{21});$$

$$X_{s30} := \alpha \cdot x(k_{11} \cdot 1.45, k_{12} \cdot 1.3, a_{11}) + (1 - \alpha) \cdot x(k_{21}, k_{22}, a_{21});$$

$$X_{s50} := \alpha \cdot x(k_{11} \cdot 1.66, k_{12} \cdot 1.45, a_{11}) + (1 - \alpha) \cdot x(k_{21}, k_{22}, a_{21}).$$

Частка метану в вихідному газі складає 65–75%. Беремо середнє значення $kpdm:=0.7$ і формуємо функції виходу метану.

$$X_{s20m} := kpdm \cdot X_{s20}; \quad X_{s30m} := kpdm \cdot X_{s30}; \quad X_{s50m} := kpdm \cdot X_{s50}.$$

Будуємо графіки (рис. 6.7)

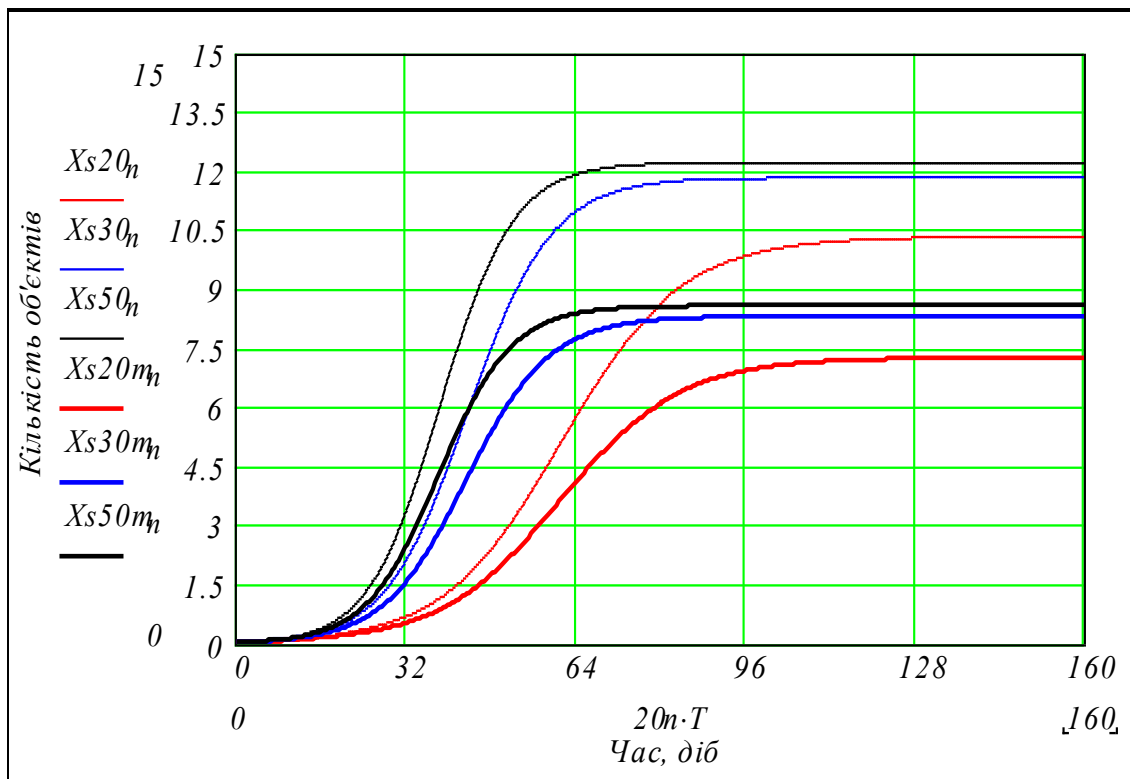


Рис. 6.7. Процеси утворення газу при температурах 20, 30, 50°C

6.3. Розробка базових моделей вертикально інтегрованих систем

Постановка проблеми

Одною із необхідних умов ефективного інноваційного розвитку виробництва є динамічна інтеграція окремих технологічних ланок сучасних виробничих систем. Причини цього:

- суттєві коливання і невизначеності потреб у виробах в часі і просторі, що ускладнює роботу як виробничих, так і логістичних систем;
- швидка зміна моделей виробів і технологій виробництва, що ускладнює довгострокове планування;
- жорстка глобалізована конкуренція, що вимагає якісного прогнозування і вибору ефективних управлінь, а саме жорсткого контролю витрат.

Ці причини обумовлюють не тільки параметричну, але й структурну динамічність виробничих систем. Сучасні виробничі системи, що замінюють виробничі системи індустріальної епохи є розподіленими. Типовий стан сучасної виробничої системи – одночасне повне припинення, згортання технічно і технологічно застарілих виробництв і введення нових, високотехнологічних, екологічних, ресурсоефективних. Вертикальна інтеграція в залежності від зовнішніх і внутрішніх чинників може як підвищувати ефективність бізнесу, так і погіршувати – до банкрутства усіх елементів вертикальної структури. Тому оцінки ефективності такої системи повинні обов'язково ураховувати усі можливі ризики і загрози.

Цілі розробки – створення теоретичних основ та програмних засобів для оцінки ризиків та оптимізації управління сучасними вертикально інтегрованими виробничими системами. Термін «сучасний» в цьому випадку не пуста етикетка, а коротке означення для комплексу швидких змін усіх елементів бізнес-процесів і наслідків цих змін – скорочення горизонту статистичного прогнозування (в електроніці – до трьох місяців).

Центральна проблема розробки моделей сучасних виробничих систем – розробка обчислювальних методів малочутливих до розмірності задач оптимізації і виду узагальнених виробничих функцій. Моделі узагальнених виробничих систем повинні відображувати суттєву нестационарність виробничих систем, наявність глибоких нелінійних зворотних зв'язків.

Класичні методи – лінійне і нелінійне програмування обмежені класами лінійних та нелінійних випуклих гладких виробничих функцій. Сучасні методи – випадковий пошук, штучні нейронні мережі, метаігровий синтез, нечітка логіка – незадовільно або взагалі не працюють у випадках невивуклих і негладких виробничих функцій.

Постановка задачі

Задачі розподілу узагальнених ресурсів – матеріальних, інформаційних – центральний момент теорії функціонування і розвитку розподілених виробничих систем. Головні проблеми в теорії управління розвитком розподілених систем в умовах невизначеності – суттєва і принципова нестаціонарність і нелінійність "механізмів" функціонування елементів і системи в цілому, великі розмірності задач – типові розподілені системи регіонального рівня мають сотні виробничих елементів і виробів. Один з перспективних напрямків зменшення обчислювальних витрат – оптимальне агрегування узагальнених виробничих функцій [7].

В [7, 46] запропоновано метод оптимального агрегування для *паралельно* працюючих елементів виробничих систем.

Сучасні виробництва складаються з досить довгих послідовностей узагальнених технологічних операцій, що можуть бути розподілені по окремих незалежних виробництвах, а можуть бути інтегровані в "монолітні" ланцюги виробничих елементів.

Для ефективного розподілу ресурсів у таких вертикально інтегрованих виробництвах, що складаються з послідовно поєднаних виробничих елементів, можлива модифікація методу оптимального агрегування. Модифікація в першу чергу стосується побудови моделей запізнь в елементах інтегрованої системи і розробки методів визначення еквівалентного запізнення у вертикально інтегрованій системі.

Відомі методи зведення різних класів запізнювань в технічних системах – інерційних, часових, випадкових і детермінованих в еквівалентне. Однак, питання мінімізації еквівалентного запізнення за рахунок певних витрат ресурсів не розглядалися.

Фактично маємо *нову задачу розробки методів заміни послідовно поєднаних виробничих елементів еквівалентним елементом з відповідними функціями виробництва і запізнення – залежностями темпу виробництва і запізнення від ресурсів введених в систему.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В доступних джерелах, в тому числі і в Інтернеті, не знайдено прямих аналогів з робочими моделями. В рамках монографії розглядаємо джерела, що безпосередньо використані для отримання результатів [7, 22, 46].

Невирішені частини проблеми. Існує проблема розробки ефективних методів оптимізації стратегій розвитку для вертикально інтегрованих систем високої розмірності.

6.3.1. Застосування методу оптимального агрегування для оптимізації системи з послідовно працюючими елементами

Розглянемо спочатку методику застосування методу оптимального агрегування для задачі з паралельно працюючими елементами [89]. Згі-

дно принципу оптимальності, що виконується для цієї задачі, скільки б ресурсу не виділялося в розвиток виробництва – він повинен розподілятися оптимально.

Розширюємо задачу – шукаємо не точкове розв’язання, а вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу, відповідну оптимальну узагальнену виробничу функцію системи.

На рис. 6.8 подано схему системи з послідовно працюючими елементами. Для більшості практичних задач можна сформулювати глобальний критерій ефективності як мультиплікативну згортку локальних критеріїв ефективності. Потрібно знайти розподіл ресурсу між елементами системи, що дає екстремум глобального критерію.

Природно сформулювати оптимізаційну задачу так, щоб застосувати метод оптимального агрегування. Схема відображує суть методу оптимального агрегування: ми замінюємо ланцюг елементів вертикально інтегрованої системи еквівалентним і оптимальним по відображенню «вхід – вихід» елементом.

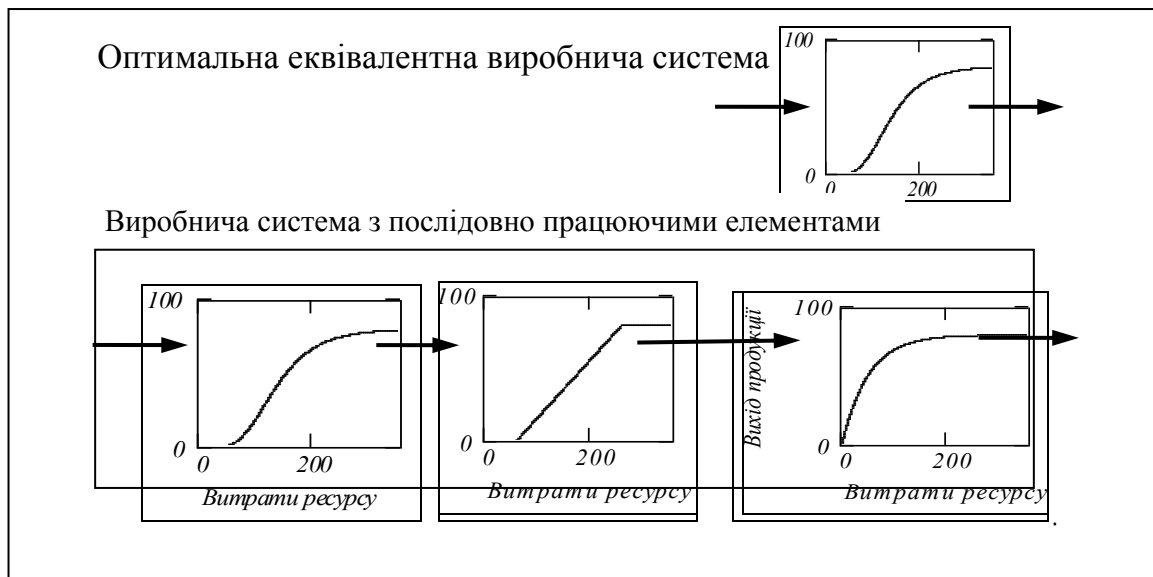
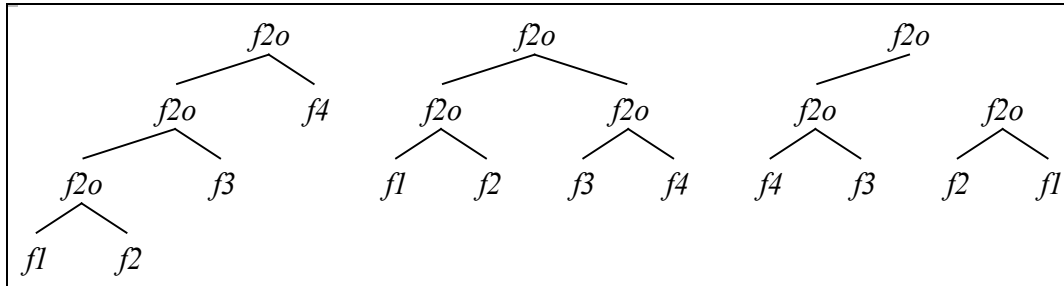


Рис. 6.8. Схема заміни розподіленої системи еквівалентною одноелементною

Технологію застосування методу оптимального агрегування розглянемо на прикладі системи з чотирьох елементів. Для застосування методу розглядаємо функції виробництва (ФВ) в дискретному вигляді – як певні масиви, перший стовпець яких – значення ФВ, а інші – пропорції розподілу ресурсу між елементами системи [7, 46]. Для прикладу запишемо формулу агрегування чотирьох елементів в звичайній формі: $Ops4 := f2o(f2o(f1,f2),f2o(f3,f4))$ і в структурній – декілька еквівалентних виразів, де $f2o()$ – бінарний оператор оптимального агрегування [7]. Метод оптимального агрегування зводить задачу нелінійного програму-

вання до рівня алгебраїчної, подібної до алгебри дійсних чисел з операцією «+» – додавання, або «·» – множення. Операція агрегування теж бінарна, асоціативна і комутативна, як видно з цих еквівалентних виразів:



Принципова відмінність оператора агрегування $f2o()$ в тому, що розмірність результату агрегування збільшується при кожній операції агрегування. Структура результату – матриця, перший стовпець якої – значення ФВ оптимального еквівалентного елемента, а інші стовпці – значення компонентів вектор-функції оптимального розподілу ресурсу. Число цих стовпців дорівнює числу елементів виробничої системи. Тобто, елементи алгебри з бінарною операцією «оптимальне агрегування» – $f2o(f1, f2)$ фактично зберігають інформацію про історію утворення виробничої системи.

Для виробничої системи з послідовно поєднаних елементів глобальний критерій системи з чисто логічних міркувань повинен бути мультиплікативною формою від локальних критеріїв елементів (якщо один з елементів вертикально інтегрованої системи непрацездатний, то всі наступні елементи не зможуть функціонувати). Модифікуємо цей метод для випадку мультиплікативного глобального критерію:

- задаємо моделі виробничих функцій елементів – локальні критерії та параметри цих моделей;
- записуємо еквівалентну адитивну модель задачі оптимізації – беремо логарифм від критерію;
- визначаємо для еквівалентної адитивної задачі оптимальну виробничу функцію та вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу;
- отримуємо результати для мультиплікативної задачі.

Формування моделі вертикально інтегрованої виробничої системи. Реалізуємо цю послідовність кроків в середовищі математичного пакета. Вводимо параметри математичних моделей виробничих функцій елементів. Записуємо для порівняння поряд адитивний і мультиплікативний критерії ефекту розподіленої системи

$$J_s = \sum_{i=1}^N f(x_i, A_i, w_i, s_i); \quad J_m = \prod_{i=1}^N f(x_i, A_i, w_i, s_i).$$

Використаємо символний процесор для отримання потрібного нам виразу – "логарифм від добутку"

$$\ln \left(\prod_{i=1}^{N1} f(x_i, A_i, w_i, s_i) \right) \text{exp and, } f \rightarrow \sum_{i=1}^{N1} \ln(f(x_i, A_i, w_i, s_i)). \quad (6.2)$$

Введемо позначення:

$$F4l(x, Av, wv, sv) := \ln(F4(x, Av, wv, sv)). \quad (6.3)$$

і запишемо вираз для критерію еквівалентної задачі

$$Jml(R, \alpha) = \sum_{i=1}^N F4l(R \cdot \alpha_i, A_i, w_i, s_i). \quad (6.4)$$

Сформулюємо оптимізаційну задачу: для кожного заданого R обмеження по ресурсу для системи, знайти такий розподіл ресурсу:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

що максимізує значення критерію (6.4).

Модуль оптимального агрегування системи з трьох елементів.

Модифікуємо одну з версій [46, 89] оператора оптимального агрегування. Для контролю виводимо (це обов'язковий елемент технології розробки робочих математичних моделей) цільову функцію і параметричний графік для точок максимуму при відповідних значеннях обмеження по ресурсу для трьох випадків (рис. 6.9):

- агрегування функцій виробництва першого і другого елементів;
- агрегування функцій виробництва першого і третього елементів;
- агрегування функцій виробництва третього елемента і агрегованої функції першого і другого елементів.

Оператор оптимального агрегування бере і повертає дискретизовані виробничі функції (функції розвитку, корисності, надійності та ін.). Задаємо кількість точок дискретизації: $Kto:=200$. При відсутності необхідності внесення змін закриваємо зону з програмами агрегування.

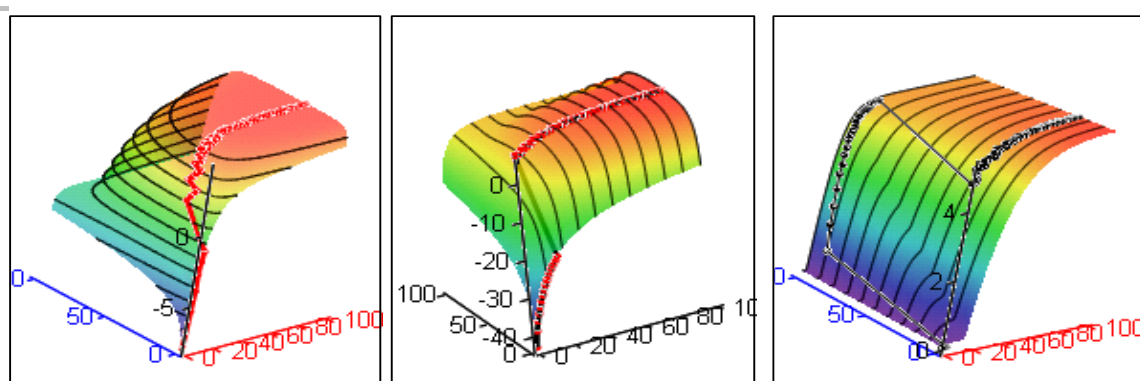


Рис. 6.9. Оптимальне агрегування розподіленої системи: цільові функції та годографи оптимального розподілу

6.3.2. Приклад отримання оптимальної виробничої функції системи

Дискретизуємо узагальнені виробничі функції елементів. Задаємо: діапазон зміни обмеження по ресурсу $Rma:=150$; кількість точок обчислення ФР $Kto:=100$. Задаємо крок квантування ресурсу $dx:=Rma\div Kto$; ранжовану змінну $n:=1..Kto$; формальну функцію оптимального розподілу ресурсу в одноелементній системі $r0_n:=1$ (весь ресурс одному елементу).

Обчислюємо, згідно з (6.2)–(6.3) оптимальну виробничу функцію системи та вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу. Результати оптимізації системи подано на рис. 6.10. Результати оптимізації відповідають логіці: при малих обсягах ресурсів, основна частка ресурсів виділяється "слабким ланкам" – елементам з малою ефективністю, при збільшенні обсягу ресурсів, вони виділяються продуктивним елементам. Менш продуктивні елементи досягають стану насичення (згідно з заданими виробничими функціями) і тому їм виділяється менша частка ресурсів.

Для вертикально інтегрованих систем більш природною є спряжена оптимізаційна задача – мінімум витрат на забезпечення заданого темпу випуску кінцевого продукту системою. Запишемо постановку для пари спряжених задач.

Пряма задача: знайти розподіл ресурсу $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$, що максимізує критерій

$$F(x) = \prod_{i=1}^N f_i(x_i, Vp_i)$$

при обмеженні $G(x) = \sum_{i=1}^N x_i - Rogr = 0$.

Спряжена задача: знайти розподіл ресурсу $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$, що мінімізує критерій

$$G(x) = \sum_{i=1}^N x_i$$

при обмеженні $F(x) = \prod_{i=1}^N f_i(x_i, Vp_i) - Xtreb = 0$.

Інтерпретація спряженої задачі – мінімізація сумарних витрат на заданий випуск продукції вертикально інтегрованою системою.

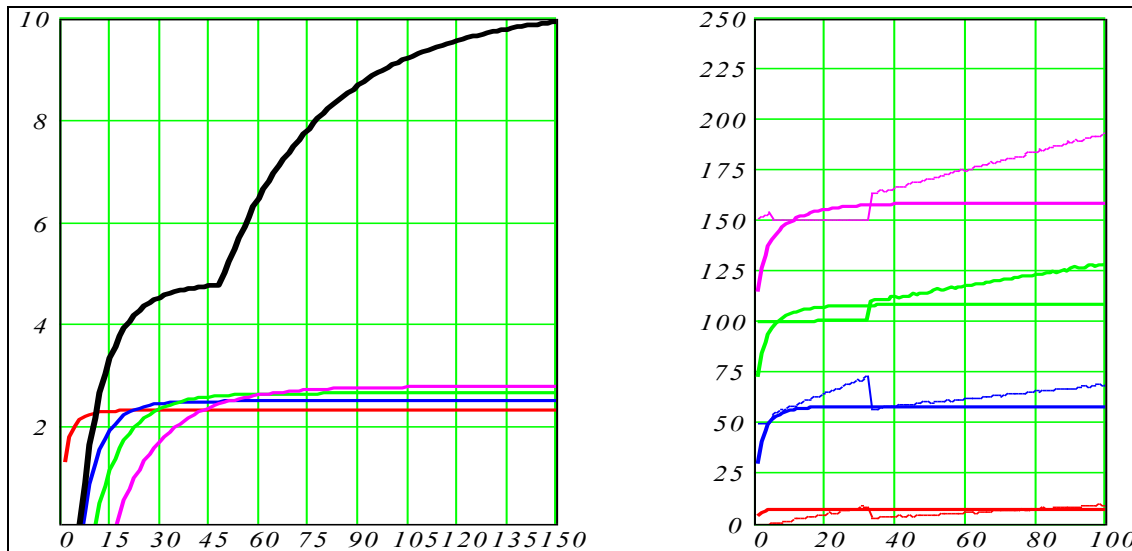


Рис. 6.10. Оптимальне агрегування розподіленої системи з послідовним поєднанням елементів

6.4. Задача оптимального розвитку вертикально інтегрованої системи

Задача оптимального розподілу ресурсів – перший крок до розробки ефективного методу розв’язання задачі розвитку. За термінологією Беллмана перша задача – однокрокова, а друга задача – багатокрокова. За своєю методологією застосований для розв’язання однокрокової задачі метод оптимального агрегування вже є переходом від задач нелінійного програмування до задач варіаційних. Отриманий розв’язок є для однокрокової задачі «надлишковим» – замість точкового рішення – оптимальна виробнича функція системи. Наявність такої функції дозволяє розділити задачу оптимізації розвитку в послідовність задач оптимізації розподілу ресурсу «в часі» – між накопиченням і розвитком виробничої системи в цілому; і «в просторі» – розподіл ресурсів розвитку між елементами системи. Обґрунтування такої декомпозиції – виконання принципу оптимальності: незалежно від обсягу ресурсів виділених в розвиток, їх розподіл повинен бути оптимальним – давати максимум критерію (див. (2.3)).

Постановка задачі оптимального розвитку. У виробничій системі виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$. Задано рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = fin(y(t)_i, i), i = 1.. N \quad (6.5)$$

та критерій $JN = \int_0^T xs(t) \cdot unak(t) dt, \quad (6.6)$

де $x_s(t) = \sum x(t)_j$ – сумарний темп виробництва; $fin(y(t)_i, i)$ – функція розвитку i -го виробництва, що характеризує ефективність перетворення ресурсу у виробничі потужності; $unak(t)$ – управління, що визначає частку ресурсів виділену в накопичення; в розвиток йде частка ресурсу $urzv(t) = (1 - unak(t))$; $y(t)_i$ – об'єм ресурсів на розвиток i -го виробництва.

Потрібно визначити стратегію розвитку, що максимізує критерій (6.6). Маємо варіаційну задачу з $N+1$ змінними (з урахуванням використання зовнішніх ресурсів). Метод оптимального агрегування дає можливість замінити багатовимірну оптимізаційну задачу еквівалентною одновимірною.

Для одновимірної задачі застосовуємо наближене розв'язання для функції Гамільтона (див. (2.4) з підрозділу 2.2). Виправдання: відхилення наближеного розв'язку від точного 3–6%, точність даних для розрахунку процесу розвитку на 1–5 років в середньому складає 15–30% .

Наближене розв'язання задачі. Нагадаємо "фізичний смисл" функції Гамільтона в нашій задачі "одиниць прирощення кінцевого значення інтегрального критерію "накопичений випуск продукту" на одиницю значення змінної управління".

Виходячи з такої інтерпретації і чисто логічних міркувань, можна сконструювати наближення $Hi(x, \alpha)$, що є оцінкою залежності прирощення критерію $J1$ від поточного управління $\alpha(t)$ та поточного стану $x(t)$ виробничих потужностей. Частка ресурсу виділена в накопичення дасть прирощення критерію $S1 = x(t) \cdot (1 - \alpha)$.

Прирощення продукції, що можна отримати до кінця процесу буде

$$S2 = \Delta x \cdot (T - t) = fin(x(t) \cdot \alpha(t)) \cdot (T - t).$$

Це додатковий ресурс, який можна на наступних кроках використати для накопичення і розвитку. Адекватна точності вхідних даних буде оцінка прирощення критерію $S2$. Тоді маємо

$$H(x, \alpha) = S1 + S2 = x(t) \cdot (1 - \alpha(t)) + fin(x(t) \cdot \alpha(t)) \cdot (T - t). \quad (6.7)$$

В підсумку розроблено працездатну базову математичну модель вертикально інтегрованої виробничої системи, що дозволяє знаходити прямі оцінки ризиків оптимізованої системи в режимі обчислювальних експериментів. Базова модель може бути легко модифікована для урахування втрат від запізнь та зменшення продуктивності окремих елементів системи.

6.4.1. Постановка задачі оптимізації продуктивності вертикально інтегрованої системи

Постановка проблеми. Однією з необхідних умов ефективного розвитку виробництва є інтеграція окремих технологічних ланок сучасних технічних систем. Причини:

- істотні коливання і невизначеність потреб в продуктах в часі і просторі;
- швидка зміна моделей виробів і технологій виробництва;
- жорстка глобальна конкуренція, що ускладнює роботу виробничих і логістичних систем.

Ці причини обумовлюють параметричну і структурну динамічність сучасних виробничих систем. Структурна динамічність означає, що встановлення і розрив зв'язків між виробничими елементами відбувається настільки часто, що його не можна ігнорувати в стратегічному плануванні. Невідомо чи є така динамічність благом, чи результатом розпаду структур індустріальної економіки без виникнення нових раціонально керованих структур.

Поки можна спостерігати тільки один стихійний і "природний" спосіб забезпечення стабільності і ефективності виробничих систем – утворення сталевих, алюмінієвих, банківських, програмних імперій.

Природно в таких умовах не виносити остаточних думок щодо бажаності або небажаності, керованості або некерованості сучасних виробничих систем на основі бездоганної логіки аналітиків, фундаментальних моделей типу недавно скасованої "кривої Філіпса", а розробити імітаційні моделі, що відображають природні механізми соціо-техніко-економічних систем і просто досліджувати віртуальну реальність. Емпіричні дані дозволяють припустити, що в певних умовах для виробничих елементів вигідна вертикальна інтеграція, в інших умовах переважно спеціалізація на одній технологічній стадії з максимальним розширенням об'ємів виробництва на цій стадії.

Довгострокове планування вимагає розробки методів прогнозування і вибору ефективних управлінь. У сучасних умовах це можливо тільки на базі створення системи робочих моделей і моделювання. *Центральна проблема* розробки моделей сучасних виробничих систем – створення обчислювальних методів нечутливих до "реалій" – істотних нестационарностей, нелінійностей, невизначеностей і високої розмірності об'єктів моделювання. Математичні пакети, не "прискорюють обчислення", а змінюють парадигму моделювання – концепцію власне моделі і технологію її розробки.

Постановка задачі. На змістовному рівні ставиться завдання створення "конструктора", що складається з бібліотеки модулів – моделей виробничих елементів і засобів, що дозволяють збирати з модулів мо-

делі конкретних вертикально інтегрованих систем.

У теоретичному плані ставиться задача оптимізації розподілу ресурсів між елементами вертикально інтегрованої системи. Це задача нелінійного програмування, зазвичай цілочислова, з неадитивною цільовою функцією. Ефективні обчислювальні методи нелінійного програмування не працюють у разі негладких і неопуклих цільових функцій і функцій обмежень.

Метод оптимального агрегування [46, 49, 89] дозволяє замінити систему *паралельно* працюючих виробничих елементів одним еквівалентним оптимальним елементом. Для задачі з адитивним критерієм виконується принцип оптимальності Беллмана, і це дозволяє замінити задачу знаходження екстремуму функції багатьох змінних послідовністю задач одновимірної оптимізації.

База методу – пошук екстремуму функції однієї змінної "*неінтелектуальним*" методом прямого перебору. Це забезпечує нечутливість методу до виду цільових функцій.

З певними обмеженнями цей метод може бути застосований для задачі з мультиплікативним критерієм. Інтерпретацією такого критерію може бути вірогідність виконання задачі, якість виконання, пропускна спроможність. Логарифмування мультиплікативного критерію дозволяє отримати оптимізаційну задачу з адитивним критерієм.

Для поставленої задачі – комплексної оцінки всіх наслідків інтеграції або дезінтеграції системи необхідна деталізація моделі.

На рис. 6.11 представлена схема агрегації системи з вертикальною інтеграцією. Ця схема відображає результати конкретного розрахунку. На цій схемі f_1, f_2, f_3, f_4 – узагальнені виробничі функції (ВФ) елементів виробничої системи; f_2o – оператор оптимальної агрегації, який бере пару ВФ і повертає набір: оптимальну ВФ системи і вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу (витрат) по елементах вертикально інтегрованої системи оптимуму.

В цілому метод майже нечутливий до розмірності задачі і виду функцій. Система з послідовно працюючими елементами складніша за систему з паралельно працюючими елементами.

На рис. 6.12 подано деталізовану схему елемента вертикально інтегрованої системи. Головна відмінність цієї схеми від елементів схеми з паралельно працюючими елементами в специфічних інтерфейсах входу і виходу елемента: необхідність узгодженої роботи вертикально інтегрованих елементів спричиняє необхідність утворення буферних складів для згладжування коливань вхідних і вихідних потоків продуктів.

Більш складними є також критерії ефекту і витрат. Як правило критерії для вертикально інтегрованих систем є мультиплікативними, або комбінованими, наприклад *позіномами*.

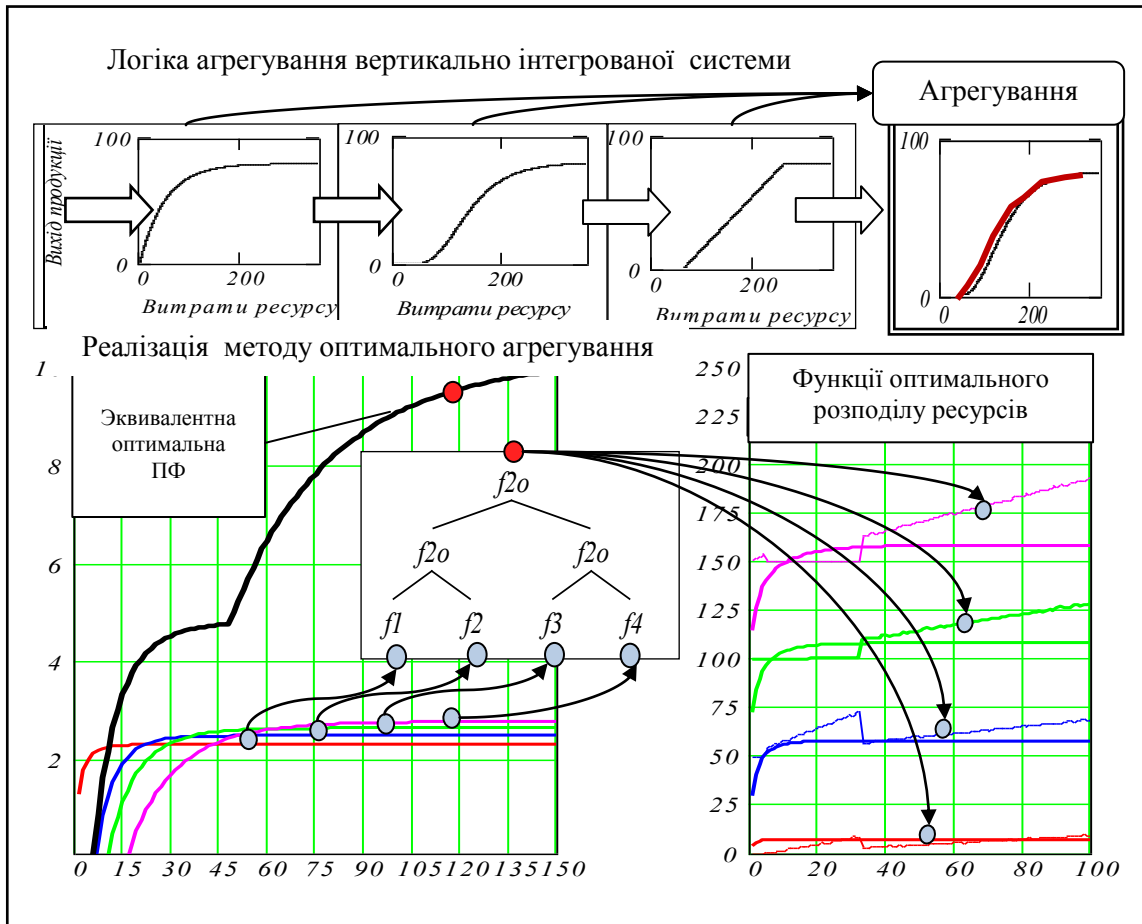


Рис. 6.11 Оптимальне агрегування вертикально інтегрованої системи

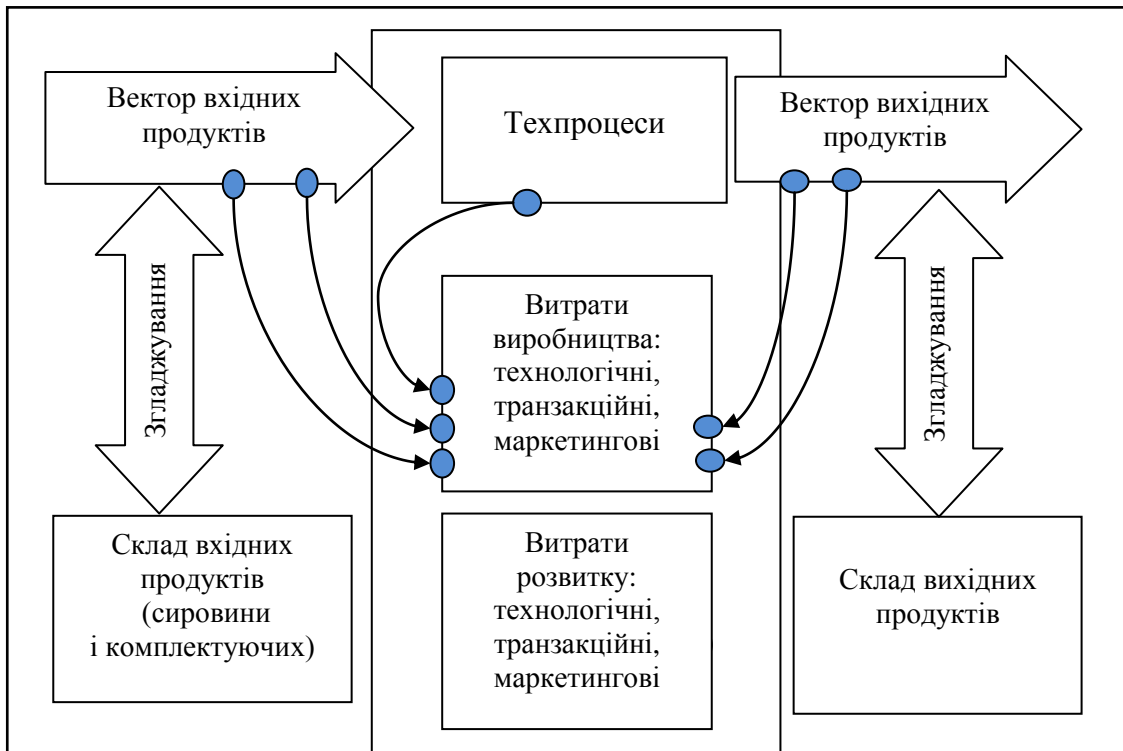


Рис. 6.12. Схема елемента вертикально інтегрованої системи

6.4.2. Задача оптимізації системи "виробництво-постачання"

Незалежно від глибини зв'язків між елементами технологічного ланцюжка елемент повинен мати зв'язки з транспортними і логістичними системами. Виникає складне завдання оптимізації системи "виробництво-постачання". Це завдання було поставлене і досліджене Беллманом [22]. Для наших цілей бажано знайти простий наближений метод оптимізації.

Якщо враховувати вартість зберігання запасів, то отримаємо варіаційну задачу мінімізації інтеграла виду:

$$J(x) = \int_0^T \left[F(x(t) - r(t)) + G\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + H\left[\int_0^t (x(s) - r(s)) ds\right] \right] dt. \quad (6.8)$$

Функція $H(\cdot)$ дає залежність витрат на зберігання в одиницю часу поточного об'єму запасів. Інтеграл $\int_0^t (x(s) - r(s)) ds$ визначає кількість нереалізованого продукту на момент часу t .

Введені функції мають таку інтерпретацію: $F(\cdot)$ – штраф за витрати зайвого, щодо потрібного випуску, праці і ресурсів, тобто штраф за омертвляння капіталу; $G(\cdot)$ – це фактично інвестиційні витрати на розширення виробництва; $H(\cdot)$ – витрати на зберігання запасів на складі.

Методика обчислення оптимального управління. Числове вирішення задач такого класу знайти відносно нескладно, – якщо "вгадати" вид функції Беллмана. Розглянемо загальну методику вирішення таких задач методом динамічного програмування Беллмана. Дискретизуємо задачу, розглядаємо N -кроковий процес, на кожному кроці якого потрібно знайти оптимальне управління x_k . В цілому потрібно знайти мінімум критерію – функції N змінних, які задовольняють обмеження $x(t) \geq r(t)$:

$$J(x) = \sum_{k=1}^N (F(x_k - r_k) + G(x_k - x_{k-1})), \quad (6.9)$$

де початковий стан задається $x_0 = c$.

Розглянемо загальну задачу мінімізації величини

$$J_K(x) = \sum_{k=K}^N (F(x_k - r_k) + G(x_k - x_{k-1})), \quad x_{K-1} = C$$

по всіх послідовностях (x_k) таких, що $x_k \geq r_k$.

Введемо функцію Беллмана, тоді основне рекурентне рівняння приймає вид

$$f(C)_K = \min(F(x_k - r_k) + G(x_k - x_{k-1}) + f(C)_{K+1}), \quad K = 1, 2, \dots, N - 1,$$

причому

$$f(C)_N = \min(F(x_N - r_N) + G(x_N - x_{N-1}) + f(C)_{K+1}), \quad x_N \geq r_N.$$

Нескладно організувати обчислення оптимального управління x_k , яке дає мінімум критерію. Досліджуємо спочатку поведінку системи з регулюванням на основі "здорового глузду": не допускати рівня запасів менше гарантованого мінімуму, ввести параметр "згладжування" і змінювати його так, щоб мінімізувати витрати в умовах попиту з випадковою компонентою, лінійним і сезонним трендами [21–23, 145].

Для вирішення складної задачі оптимізації, слід розбити процес на послідовність достатньо простих кроків. Спочатку потрібно зібрати реальну статистику (це не тільки довгий і витратний, але і непродуктивний шлях, через конфіденційності практично всієї інформації), напрацювати віртуальну статистику і віртуальний досвід на моделях систем такого класу.

Для оптимізації в задачі згладжування розроблена програма моделювання інтегрованої системи "виробництво–постачання".

Визначимо змістовно ціни і штрафи. Ціна зберігання на складі – це витрати на зберігання одиниці вимірювання продукції протягом одиниці часу. Сюди входять втрати від "усихання", "права випасу" і морального старіння.

Ціна фондів – це витрати на створення фондів для виробництва одиниці продукції за одиницю часу. Не враховуємо поки амортизацію і витрати на конверсію зайвих фондів.

Ціна регулювання виробництва – це витрати на переналадку і реорганізацію виробництва без зміни фондів. Конкретно це зміна тривалості робочого дня або тижня, перекидання персоналу з інших ділянок.

Програма моделювання дозволяє вести дослідження впливу компонентів витрат і параметрів згладжування на показники системи – сумарні витрати на задоволення попиту. На рис. 6.13 наведений приклад інтерфейсу та приклад процесу для випадку випадкового попиту з періодичним і лінійним трендами. В цій версії програми реалізовано принцип "автоматної оптимізації" Я. Ципкіна [145], коли для оптимізаційної задачі будується нелінійна імпульсна САУ, усталеним станом якої є оптимальне управління системою.

Входи: ціна зберігання запасів на складі (грн/шт×день) $czap \equiv 0.10$;
 ціна створення фондів (грн/шт) $cinv \equiv 1$;
 ціна перенастроювання виробництва (грн ×день ×день/шт) $ckol \equiv 24$;
 Параметри згладжування (визначаються модулем оптимізації) $Ine \equiv 24$, $Sgl \equiv 0.03$
 Виходи: Витрати на створення запасів $VsZap = 1639$
 Витрати на створення фондів $VsInv = 427$
 Витрати на перенастроювання $VsKol = 561$
 Сумарні витрати (критерій) $kriteria = 2626$

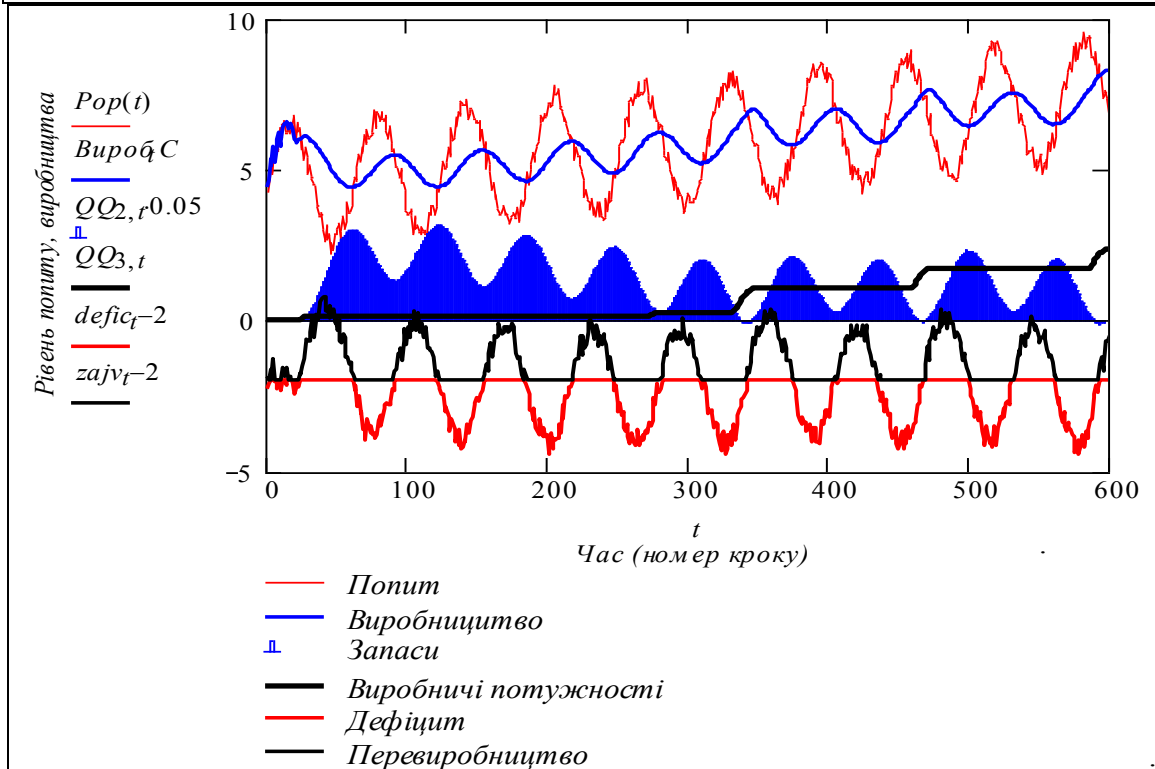


Рис. 6.13. Результати моделювання інтегрованої системи "виробництво–постачання"

6.4.3. Дискретна задача оптимізації розподілу ресурсу між елементами вертикально інтегрованої системи

Надійність, живучість елементів технологічного ланцюга – вирішальна складова ефективності вертикально інтегрованої системи. Будемо систему альтернативних робочих моделей оптимізації розподілу витрат на виробничі потужності в елементах вертикально інтегрованої системи для випадків дискретного (цілочислового) і безперервного (зокрема на базі нечіткої логіки) розподілу.

Приводимо базову версію робочої моделі оптимізації. Використовуємо модель з пункту 6.3.2, вводимо нові імена змінних і виробничих функцій:

$$F4l(x, Av, wv, sv) := \ln(F4(x, Av, wv, sv))$$

і запишемо вираз для критерію еквівалентної задачі – адитивного.

$$Jml(R, \alpha) = \sum_{i=1}^N F4l(R \cdot \alpha_i, A_i, w_i, s_i).$$

Формулюємо оптимізаційну задачу: для кожного заданого R – обмеження по ресурсу для системи, знайти такий розподіл цього ресурсу $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, який би максимізував значення критерію. Записуємо пряму і спряжену оптимізаційні задачі.

Пряма задача: знайти розподіл ресурсу $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$, що максимізує критерій $F(x) = \prod_{i=1}^N f_i(x_i, Vp_i)$

при обмеженні $G(x) = \sum_{i=1}^N x_i - Rogr = 0$.

Спряжена задача: знайти розподіл ресурсу $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$, що мінімізує критерій $G(x) = \sum_{i=1}^N x_i$

при обмеженні $F(x) = \prod_{i=1}^N f_i(x_i, Vp_i) - Xtreb = 0$.

Інтерпретація спряженої задачі – мінімізація сумарних витрат на заданий випуск продукції вертикально інтегрованою системою.

Були проведені порівняльні дослідження моделей і методів оптимізації систем з мультиплікативним критерієм. Мета досліджень – вибір обчислювально ефективних моделей і програм. На рис. 6.14 наведено приклад отримання оптимальної ВФ для трирівневої системи з дискретними модулями устаткування.

Представлено три варіанти *оптимальної ВФ* з різними значеннями вартості модулів. Можна бачити, що ці ВФ близькі між собою і сходяться до деякої гладкої кривої. Можна показати, що для випадку опуклих елементів ВФ, оптимальна ВФ належатиме до цього ж класу функцій. На цьому ж графіку наведена *вектор-функція оптимального розподілу дискретного ресурсу*. Слід звернути увагу на немонотонний характер компонентів цієї вектор-функції: при певному рівні ресурсу кількість модулів на одній стадії зменшується, а на іншій – збільшується. Це математично коректний результат, але нераціональний для практики: при подальшому підвищенні рівня ресурсу число модулів відновлюється. Це недолік моделі оптимізації, що не враховує витрати на рекон-

фігурацію (в задачі згладжування – пункті 6.4.2 ці витрати включені в критерій).

На рис. 6.15 представлено два варіанти вектор-функції оптимального розподілу ресурсів. По осях відкладаються кількості ресурсу по відповідних стадіях процесу. Один варіант розрахований програмою дискретної оптимізації, інший – програмою, де обмеження цілочислові зроблені нечіткими.

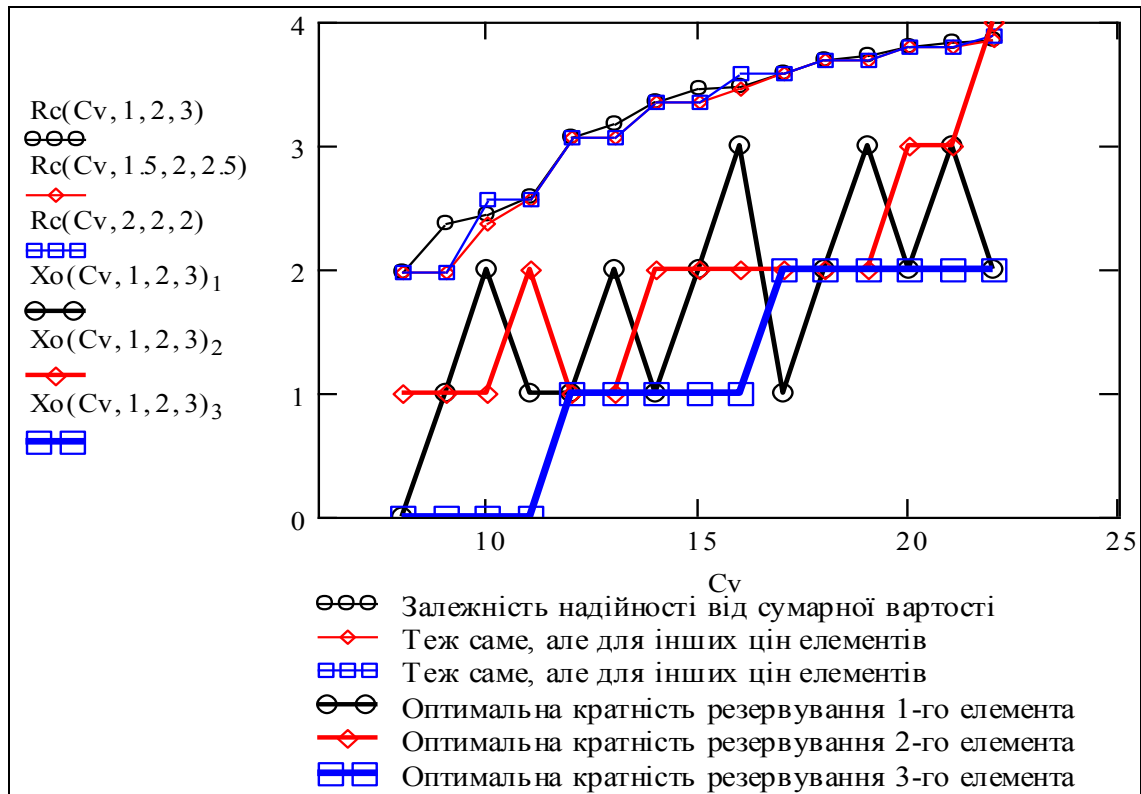


Рис. 6.14. Оптимальна виробнича функція для трирівневої системи з дискретними модулями

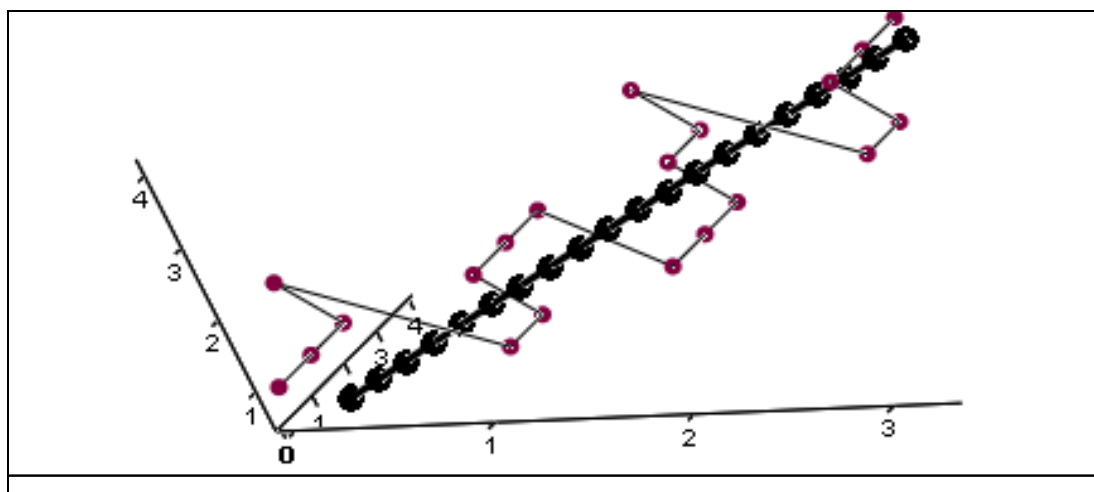


Рис. 6.15. Вектор-функції оптимального розподілу ресурсу розраховані за альтернативними моделями

Бачимо наскільки корисно для розуміння системи сумісне використання альтернативних моделей. Результат, отриманий для нечіткої моделі, – пряма у фазовому просторі, яку можна вивести аналітично: для опуклих ВФ одного класу компоненти вектор-функції оптимального розподілу ресурсу – лінійні функції від обмеження.

Висновки

Розглянуті приклади вертикально інтегрованих виробничих систем та відповідні задачі і математичні моделі оптимізації. Запропонована базова схема елемента для вертикально інтегрованих систем, що враховує залежності транзакційних витрат від ступеня інтеграції. Розроблені математичні моделі утворюють базову систему придатну для подальшого уточнення моделей і розробки спеціалізованих моделей під різні виробництва продуктів і послуг – металургію, агровиробництво, банківські послуги та ін.

Вертикально інтегровані системи сучасності не мають накопиченого досвіду, статистики, тому важливим є створення відкритої системи для накопичення досвіду і статистики на віртуальній реальності.

І для цього напрямку досліджень маємо стартову систему моделей, що охоплюють основні аспекти функціонування вертикально інтегрованих систем: оптимальний розподіл витрат із умови мінімізації витрат, запізнень і надійності та відмовостійкості.

Головна перевага системи моделей для вертикально інтегрованих систем – відсутність вимог до виду узагальнених виробничих функцій – лінійності, квадратичності, випуклості, неперервності.

Навіть при досконалих технологіях створення робочих моделей безпомилковість і адекватність моделі негарантована. В розробленій системі паралельно використовуються альтернативні моделі – неперервні, дискретні, нечіткі. Така диверсифікація дозволяє організувати взаємоконтроль моделей.

Загальні висновки

Побудовано систему з декількох десятків робочих моделей, що описують процеси розвитку виробничих систем з урахуванням зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння. Паралельно розглядалися альтернативні моделі виробничих систем – агреговані і "молекулярні", де відтворювалась поведінка кожного окремого елемента системи.

Зроблено робочі розширені версії класичних моделей розвитку, попиту, обміну і розроблено нові моделі розвитку виробничих систем:

- модель процесу розвитку з урахуванням обмежень попиту і використання зовнішніх ресурсів, отримано розв'язання варіаційної задачі;

- модель розвитку з урахуванням ефектів освоєння виробництва, отримано розв'язання варіаційної задачі;

- модель розвитку розподіленої системи класу "N виробників × M продуктів";

- модель живучості розподіленої системи "N задач × M елементів обчислювальної системи";

- моделі оптимального розподілу ресурсів у вертикально інтегрованій системі.

У всіх шести розділах монографії відпрацьовувалась технологія конструювання робочих математичних моделей, що складається з таких етапів: лінгвістична модель – графова модель – система робочих математичних моделей. Словесна модель будується на збиранні і лінгвістичній обробці маси фрагментів релевантної інформації. В розділах 5 і 6 для побудови моделей використовувались досить деталізовані описи металургійної системи і біогазової установки. Для подальшого швидкого розвитку моделей розробнику просто необхідно працювати з реальною системою.

І тут виявляється дійсно проблема в ефективному конструюванні моделей для прогнозування і управління, назвемо її згідно з модою "ЗК": Конфіденційність, Конкуренція, Концентрація. Для розробленої системи моделей не знайдено прямих прототипів в доступних джерелах, тому що традиційна наука і освіта просто не встигає за змінами у виробництві і бізнесі. А бізнес обслуговує *конфіденційна* корпоративна наука, результати якої не виставляються на сайтах і не друкуються у підручниках, ключові області знань *концентруються* в одному-двох центрах. "Сьогодні провідні університети світу конкурують з корпоративними вузами (найбільш відомі з них створили компанії General Electric і Motorola)". [М. Бердичевская. Экзамен для теста// Эксперт-Украина № 17, 2008]. Суть цього стихійного розколу в тому, що висока наука вимагає високих витрат, і тісного зближення з корпоративними дослідженнями. Між іншим, можна промоделювати і цей процес.

Література

1. Акерлофф Г.А. Рынок "лимонов": неопределенность качества и рыночный механизм / Акерлофф Г.А. // THESIS: теория и история экономических и социальных институтов и систем. 1994. – №5. – С. 91–104.
2. Аккоф Р. О целеустремленных системах. / Аккоф Р., Эмери Ф. – М.: Сов.Радио, 1974 – 272с. – ISBN 978-5-382-00638-3.
3. Акофф Р. Планирование в больших экономических системах. / Акофф Р. – М.: Советское радио, 1972. – 224 с.
4. Андреева Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации. / Андреева Е.А., Цирулева В.М. – М.: Высшая школа, 2006 – 584 с. – ISBN 5-06-004746-6.
5. Андрейчиков А.В. Интеллектуальные информационные системы. / Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 424 с. – ISBN 5-279-02568-2.
6. Арнольд В.И. Теория катастроф. / Арнольд В.И. – М.: Наука, 1990. – 128 с. – ISBN: 978-5-354-01142-1.
7. Баадер В. Биогаз: Теория и практика. (Пер. с нем.) / Баадер В., Доне Е., Бренндерфер М. – М.: Колос, 1982. – 148 с.
8. Бадьора С.П. Декомпозиційні методи моделювання розвитку розподілених технологічних систем. Дисертація на здоб. вч. ступ. канд. техн. наук. / Бадьора С.П. — Вінниця.: ВНТУ, 2007. — 220 с.
9. Бадьора С.П. Оптимальне управління інтегрованою системою «виробництво-постачання». Задача згладжування / Бадьора С.П. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2006. – № 1(5). – С. 58–62.
10. Бадьора С.П. Моделі інноваційного розвитку розподілених систем. Параметрична оптимізація цінових стратегій / Бадьора С.П., Северілов В.А., Васильська М.В. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – №3. – С. 47–52.
11. Бадьора С.П. Розподілена система управління запасами і виробництвом в умовах невизначеності / Бадьора С.П., Гайдучок О.В., Северілов П.В. // Матеріали IV міжнародної конференції “Інтернет – освіта – наука” (ІОН-2004). – Том 2. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2004. – С. 424–427.
12. Бадьора С.П. Організація графічної інформації в задачах нелінійного програмування / Бадьора С.П., Січко Т.В. // Матеріали МНТК «Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології». – Вінниця: ВДТУ. – 2001. – С. 192.
13. Бадьора С.П. Конструювання моделей соціо-техніко-економічних систем – нова навчальна дисципліна / Бадьора С.П., Северілов В.А., Васильська М.В. // Матеріали МНМК “Дистанційні

- технології навчання та їх засоби. – Випуск 1. – Вінниця: ВМУРоЛ „Україна”. – 2004. – С. 136–141.
14. Бадьора С.П. Оптимальне управління інтегрованою системою «виробництво-постачання». Задача згладжування / Бадьора С.П. //Збірник матеріалів VIII Міжнародної НТК «КУСС-2005». – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2005. – С. 211.
 15. Бадьора С.П. Система моделей класу «N-виробників, M-продуктів» / Бадьора С.П., Васильська М.В. // Збірник матеріалів VIII Міжнародної НТК «КУСС-2005». – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2005. – С. 212.
 16. Бадьора С.П. Декомпозиційні методи аналізу і синтезу управління в розподілених системах / Бадьора С.П., Боровська Т.М. // Збірник матеріалів XIII Міжнародної НТК «Автоматика-2006». – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2006. – С. 221.
 17. Бадьора С.П. Задачі стратегічного управління в розподілених системах / Бадьора С.П., Северілов В.А., Салюк П.І. // Збірник матеріалів XIII Міжнародної НТК «Автоматика-2006». – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2006. – С. 201.
 18. Бакаев А.А. Имитационные модели в экономике. / Бакаев А.А., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. – К.: Наук. думка, 1978. – 304 с.
 19. Баканов М.И. Теория экономического анализа. / Баканов М.И., Шеремет А.Д. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 285 с. – ISBN 5-279-02042-7.
 20. Бахвалов Н.С. Численные методы. / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.– 600 с. – ISBN 5-94774-175-X,5-94774-060-5.
 21. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. / Беллман Р. – М.: Наука, 1964. – 317 с.
 22. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления. / Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. – М.: Издат. иностр. литер., 1962. – 233 с.
 23. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления. / Беллман Р., Калаба Р. – М.: Наука, 1969. – 131 с.
 24. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. / Берзин Е. А. – М.: Сов. радио, 1974. – 304 с.
 25. Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент. / Бланк И.А. – К.: МП “Итем” ЛТД, “Юнайтед Лондон Трейд Лимитед”, 1995. – 448 с. – ISBN 966-521-263-X.
 26. Бобрышев Д.Н. Управление конфигурацией технических систем. / Бобрышев Д.Н., Рексин В.Э. – М.: Советское радио, 1978. – 184 с.
 27. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. / Болтянский В.Г. – М.: Наука, 1966. – 308 с.

28. Боровская Т.Н. Декомпозиция задач в информационно-измерительных системах и выбор методов их решения. Дисертация на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. / Боровська Т.М. – Вінниця.: ВПІ, 1985. – 229 с.
29. Боровська Т.М. Використання декомпозиційних структур для синтезу регуляторів / Боровська Т.М. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2000. – №1. – С. 5–14.
30. Боровська Т.М. Імовірнісна модель для прогнозування розвитку розподілених систем / Боровська Т.М., Бадьора С.П. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 1. – С. 45–52.
31. Боровська Т.М. Детермінована модель для прогнозування розвитку розподілених систем / Боровська Т.М., Бадьора С.П. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 2. – С. 41–47.
32. Боровська Т.М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Цінові стратегії / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 6. – С. 143–150.
33. Боровська Т.М. Система для моделювання довільних ринків / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Січко Т.В. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. – №6. – С. 72–76.
34. Боровська Т.М. Моделювання багатопродуктових виробничих систем / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 1. – С. 48–54.
35. Боровська Т.М. Моделі обміну ресурсами в системах з асиметричною інформаційною структурою / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 2. – С. 76–81.
36. Боровська Т.М. Мультимедійний комплекс для самостійного освоєння розділу «Моделювання та прогнозування розвитку розподілених систем виробників / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Северілов В.А., Стужук Н.П. // Матеріали МНМК “Дистанційні технології навчання та їх засоби. – Випуск 1. – Вінниця: ВМУРОЛ „Україна”. – 2004. – С. 106–110.
37. Боровська Т.М. Моделювання системи «виробники–ринки–споживачі» при довільних виробничих функціях / Боровська Т.М., Бадьора С.П. // Збірник матеріалів VII Міжнародної НТК «КУСС–2003». – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2003. – С. 205.
38. Боровська Т.М. Нечітка оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі з неопуклими виробничими функціями елементів / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник

- Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 5. – С. 36–41.
39. Боровская Т.Н. Многошаговые процессы принятия решений при монотонно убывающих функциях полезности и стоимости измерительной информации. / Боровская Т.Н., Нехаевская Н.А. // Социотехнико-экономические системы. Оптимальность, устойчивость, живучесть. – Киев: ИК АН УССР, 1989. – С. 38 – 45.
 40. Боровская Т.Н. Что будет, если? Имитационное моделирование в Mathcad / Боровская Т.Н., Северилов В.А., Северилов П.В. // Компьютеры+Программы. – 2000. – №12. – С. 37– 41.
 41. Боровская Т.Н. Детская экономика. Моделирование и оптимизация производственных систем / Боровская Т.Н., Северилов В.А., Колесник И.С. // Компьютеры+Программы. – 2002. – №2. – С. 43–47.
 42. Боровська Т. М. Спеціальні розділи вищої математики. Навчальний посібник / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 182 с. – ISBN 978-966-641-276-1.
 43. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Кредитні стратегії / Боровська Т. М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 6. – С. 173–180.
 44. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій. Навчальний посібник / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 242 с. – ISBN 978-966-641-275-4.
 45. Боровська Т.М. Моделювання задач управління інвестиціями: Навчальний посібник. / Боровська Т.М, Северілов В.А, Бадьора С.П., Колесник І.С. – Вінниця: ВНТУ, 2007. – 175 с.
 46. Боровська Т.М. Оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі на базі агрегування виробничих функцій / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – № 1 – С. 12–18.
 47. Боровська Т.М. Структура і технології розробки електронних книг, орієнтованих на дистанційну освіту / Боровська Т.М., Колесник І.С. // Матеріали МНМК “Дистанційні технології навчання та їх засоби”. Випуск 1. – Вінниця: ВМУРОЛ „Україна”. – 2004. – С. 111–115.
 48. Боровська Т.М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Тези доповідей VII міжнародної науково-технічної конференції “Контроль і управління в складних системах”. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2003. – С. 203.

49. Боровська Т.М. Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах: Монографія. / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2009. – 229 с.
50. Боровська Т.М. Орієнтація на обчислювальний експеримент – зміна парадигми вищої освіти. / Боровська Т.М., Рибіна І.В. // Матеріали НМК “Проблеми підручника вищої школи”. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2001. – С. 12.
51. Боровська Т.М. Аналіз навчального процесу в умовах МРС: обробка даних та моделі навчання. / Боровська Т.М., Северілов В.А. // Нові технології. – 1991. – №1–2. – С. 22–26, 59–64.
52. Букан Дж. Научное управление запасами: Пер. с англ. / Букан Дж., Кенигсберг Є. – М.: Наука, 1967. – 423 с.
53. Бунге М. Философия физики: Пер. с англ. / Бунге М. – М.: "Прогресс", 1975. – 347 с. – ISBN 5-354-00439-X.
54. Бурков В.Н. Большие системы: моделирование организационных механизмов. / Бурков В.Н. – М.: Наука, 1989. – 246 с.
55. Бурков В.Н. Введение в теорию активных систем. / Бурков В.Н., Новиков Д.А. – М. : ИПУ РАН, 1996. – 125 с.
56. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. / Бусленко Н.П. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
57. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. / Вентцель Е.С. – М.: Наука, 1969. – 371 с. – ISBN 5-06-003650-2.
58. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. / Вилкас Э.Й. – М. : Наука, 1990. – 256 с.
59. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі : Навч. посібник. / Вітлінський В.В. – К. : КНЕУ, 2002. – 446 с.
60. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник / Вітлінський В.В. – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
61. Воеводин В.В. Параллельные вычисления. / Воеводин В.В. – П.: БХВ–Петербург, 2002. – 609 с. – ISBN 5-94157-160-7.
62. Волгин Л.И. Алгебраические логики: взаимоотношения, законы и свойства. / Волгин Л.И. – М.: Новые технологии, 2003. – 24 с.
63. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч. 1, 2. / Воронов А.А. – М.: Энергия, 1986, 1987.
64. Гелловэй Лес. Операционный менеджмент. Принципы и практика. / Гелловэй Лес. – Санкт–Петербург, Москва, Харьков, Минск: Питер, 2001, 323 с. – ISBN 5-272-00379-9, 1-86152-378.
65. Гергель В.П. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. / В.П. Гергель, Р.Г. Стронгин. – Издательство Нижегородского гос.университета им. Н.И. Лобачевского, 2001. – 122 с.
66. Глушков В.М. Кибернетика. Вопросы теории и практики. /

- Глушков В.М. – М.: Наука, 1986. – 477 с.
67. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем. / Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. – К.: Техника, 1975. – 390 с.
 68. Горбань А.В. Модели, моделирование и проектирование систем: Учебное пособие. / Горбань А.В. – Харьков, 1978 – 115 с.
 69. Кемени Дж. Кибернетическое моделирование. / Дж. Кемени, Дж. Снелл – М.: Советское радио, 1972. – 223 с.
 70. Дибб С. Практическое руководство по сегментированию рынка. / С. Дибб, Л. Симкин – Москва–Харьков: Питер, 2001. – 231 с. – ISBN 5-318-00025-8.
 71. Довбишко М. Видатні незнайомці. / Довбишко М. – К.: Київ, 2002. – 320 с.
 72. Дубіненко С.Б. Штучні соціальні системи: моделювання процесів розвитку інформаційних мереж / Дубіненко С.Б., Бадьора С.П., Стадник Л.В. // Матеріали IV міжнародної конференції «Інтернет – освіта–наука» (ІОН–2004). – Том 2. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2004. – С. 530–534.
 73. Дубовой В.М. Прийняття рішень в умовах змішаної невизначеності. / Дубовой В.М., Ковалюк Д.О., Ковалюк О.О. // Вісник ВПІ. – 2003. – № 6, — С. 23–30.
 74. Дубров Я. А. Системное моделирование и оптимизация в экономике. / Дубров Я. А. – К.: Наук. думка, 1976. – 254 с.
 75. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. / Евтушенко Ю.Г. – М.: Наука. Гл. ред. физмат. лит., 1982. – 432 с.
 76. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. / Ермольев Ю.М. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
 77. Ермольев Ю.М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. / Ермольев Ю.М., Ястремский А.М. – М.: Наука, 1979. – 254 с.
 78. Згуровський М.З. Системна стратегія технологічного передбачення в інноваційній діяльності / Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – №3. – С. 7–24.
 79. Изерман Р. Цифровые системы управления. / Изерман Р. – М.: Мир, 1984. – 233 с.
 80. Имитационное моделирование производственных систем / Под общ. ред. А.А. Вавилова. – М.: Машиностроение; – Берлин: Техника, 1983. – 416 с.
 81. Исследование операций. Том 1. Методологические основы и математические методы. / Под ред. Дж. Моудера. – М.: Мир, 1981. – 712 с.

82. Кветный Р.Н. Математическое моделирование в задачах проектирования средств автоматики и информационно-измерительной техники. / Кветный Р.Н. – К.: УМК ВО, 1989. – 112 с.
83. Келле Д.Е. Модели стоимости в ракетно-космической технике / Келле Д.Е. // Вопросы ракетной техники. – М.: Мир, 1972. – № 12, – С. 3–63.
84. Кемени Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения./ Кемени Дж., Снелл Дж. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
85. Кендел М. Временные ряды. / Кендел М. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
86. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. / Клейнер Г.Б. – М.: Финансы и статистика, 1986. — 567 с.
87. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. / Клейнрок Л.; [пер. с англ.; под ред. В.И. Неймана]. – М.: Мир, 1979. – 432 с.
88. Клиланд Д. Системный анализ и менеджмент проектов. / Клиланд Д., Кинг В. – М.: Советское радио, 1974.
89. Колесник І.С. Моделювання процесів розподілу ресурсів у децентралізованих системах. Дисертація на здоб. вч. ступ. канд. техн. наук, зах. 17.03.2006, затв. 08.06.2006 / Колесник І.С. — Вінниця.: ВНТУ, 2006. — 208 с.
90. Колесник І.С. Інтернет-орієнтовані технології виробництва інтелектуальної продукції. Структура малих дослідницьких груп / Колесник І.С., Бадьора С.П. // Матеріали III міжнародної конференції “Інтернет – освіта – наука” (ІОН–2002). – Том 2. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2002. – С. 285–288.
91. Колесник І.С. Інтеграція навчання, наукових досліджень і практики на прикладі узагальнень задачі Марковіца / Колесник І.С., Бадьора С.П. // Матеріали III міжнародної конференції “Інтернет– освіта– наука” (ІОН–2002). – Том 2. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2002. – С. 275–279.
92. Колесник І.С. Оптимізація портфеля цінних паперів. Мультимедійний комплекс для дистанційної освіти. / Колесник І.С., Мирончук В.М. // Матеріали IV міжнародної конференції “Інтернет – освіта – наука” (ІОН–2004). – Том 2. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2004. – С. 259–264.
93. Колесник І.С. Управління проектами розвитку нових виробництв. Програмний комплекс для дистанційної освіти. / Колесник І.С., Боровська Т.М., Северілов В.А. // Матеріали IV міжнародної конференції “Інтернет–освіта–наука” (ІОН–2004). – Том 2. – Вінниця:

- УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2004. – С. 254–258.
94. Колесник І.С. Моделі і методи для аналізу і оптимізації інвестиційних проектів / Колесник І.С., Боровська Т.М., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 4. – С. 56–61.
 95. Колесник І.С. Оптимальне управління розподіленням ресурсів в децентралізованих системах. / Колесник І.С., Северілов В.А. // Матеріали VI міжнародної науково–технічної конференції “Контроль і управління в технічних системах” (КУСС–2001). – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2001. – С. 73–78.
 96. Колесник І.С. Мультимедійний комплекс для самостійного освоєння розділу „Оптимізація інвестиційних проектів. Стратегії розвитку виробничих систем” / Колесник І.С., Северілов В.А., Хільська І.І. // Матеріали МНМК “Дистанційні технології навчання та їх засоби. Випуск 1, – Вінниця: ВМУРОЛ „Україна”, 2004. — С. 100–105.
 97. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. / Коршунов Ю.М. – М.: Энергия, 1980. – 475 с.
 98. Кофман А. Модели и методы исследования операций. / Кофман А. – М.: Мир, 1966. – 370 с.
 99. Краснов М.Л. Вариационное исчисление. / Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. – Едиториал УРСС, 2002. — 176 с. – ISBN 5-354-00015-7.
 100. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции: Базовый курс. Учебник для вузов. / Крушвиц Л. – Москва–Харьков: Питер, 2000. – 389 с. – ISBN 5-272-00130-3.
 101. Крушевский А.В. Математическое программирование и моделирование в экономике. / Крушевский А.В., Швецов К.И. – К.: Вища школа, 1979. – 454 с.
 102. Кубонива М. Математическая экономика на персональном компьютере. / Кубонива М., Табата М., Табата С., Хасэбэ Ю.; пер. с яп. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
 103. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. / Куропаткин П.В. – М.: Высшая школа, 1980. – 275 с.
 104. Левин Р. Практическое введение в технологию искусственного интеллекта и экспертных систем. / Левин Р., Дранг, Эделсон Б. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 238 с.
 105. Леонтьев В. Теоретические допущения и ненаблюдаемые факты / Леонтьев В. // США: Экономика, идеология, политика. – 1972. – № 9. – С. 15.
 106. Лифшиц А.А. Статистическое моделирование СМО. / Лифшиц А.А., Мальц М.А. – М.: Высшая школа, 1974. – 215 с.

107. Мак Дональд М. Стратегическое планирование маркетинга. (роль экспертных компьютерных систем) / Мак Дональд М. – Санкт-Петербург, Москва, Харьков: Питер, 2000. – 232 с. – ISBN 5-314-00074-1, ISBN 0-7494-2096-0.
108. Месарович М.Д. Основания общей теории систем / Месарович М.Д. // Общая теория систем. – М.: Мир, 1966. – С. 15–18.
109. Месарович М.Д. Теория иерархических многоуровневых систем. / Месарович М.Д., Мако З., Такахара М. – М.: Мир, 1973. – 310 с.
110. Месарович М.Д. Математическая теория систем. / Месарович М.Д., Такахара И. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
111. Мескон М. Основы менеджмента. / Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф. – М.: Изд-во Академии народного хозяйства, 1994. – 703 с. – ISBN 0-06-044415-0, ISBN 5-7749-0047-9.
112. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. / Мину М. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с. – ISBN 5-02-013980-7.
113. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. / Моисеев Н.Н. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
114. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / Нейман Дж., Моргенштерн О.; пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 708 с.
115. Нэгл Томас Т. Стратегия и тактика ценообразования. Руководство для принятия решений приносящих прибыль. / Нэгл Томас Т. – Москва–Харьков: Питер, 2001. – 375 с. – ISBN 5-94723-068-2.
116. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. / Опойцев В.И. – М.: Наука, 1977. – 346 с.
117. Палагин А.В. Интеллектуальные решающие машины: проблемы создания и основные принципы. / Палагин А.В., Коваль В.Н., Рабинович З.Л. и др. // УСИМ. – 1992. – № 1/2. – С. 27–34.
118. Первозванский А.А. Финансовый рынок: расчет и риск. / Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. – М.: Инфра, 1994. – 192 с.
119. Петренко А.И. Основы построения систем автоматизированного проектирования. / Петренко А.И., Семенов О.И. – К.: Вища школа, 1984. – 296 с.
120. Петров А. А. Принципы построения моделей. / Петров А. А., Краснощеков П.С. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 264 с.
121. Петров Б.Н. Информационные аспекты качественной теории динамических систем. / Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Кочубиевский И.Д., Хазен Э.М., Ульянов С.В. // Техническая кибернетика. Т. 7. – М.:Итоги науки и техники, 1976. – С. 5–201.
122. Пешель М. Моделирование сигналов и систем. / Пешель М. – М.:

- Мир, 1981. – 286 с.
123. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. Изд.2. / Понтрягин Л.С. – Едиториал УРСС. – 2004. – 64 с. – ISBN 5-354-00817-4.
 124. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. Изд.2. / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. – М. : Высшая школа, 1969. – 384 с.
 125. Попов Э.В. Экспертные системы. / Попов Э.В. – М.: Наука, 1987. – 284 с.
 126. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. / Робертс Ф.С. – М.:Наука, 1986, – 500 с.
 127. Самуельсон П. Економіка. / Самуельсон П. – Львів: Світ, 1993. – 496 с. – ISBN 5-8459-0060-3.
 128. Северилов В.А. Детская экономика. Роль везения и умения в развитии производственных систем / Северилов В.А. // Компьютеры+Программы. – 2002. – №1. – С. 46–50.
 129. Северилов В.А. Эволюционная технология разработки экспертных систем / Северилов В.А., Боровская Т.Н., Мельник Е.Н. // Теория автоматизированного проектирования. – Харьков: ХАИ, 1987. – Вып. 4 – С. 33–38.
 130. Северілов В.А. Проблема моделювання сучасних виробництв і ринків. / Северілов В.А., Колесник І.С., Бадьора С.П. // Матеріали НМК “Проблеми підручника вищої школи”. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2002. – С. 15.
 131. Северілов В.А. Електронна книга “Моделювання та оптимізація в економіці”. Проблема трьох “не” - нелінійності, нестационарності та не випуклості. / Северілов В.А., Колесник І.С., Бадьора С.М. // Матеріали науково-методичної конференції “Проблеми підручника вищої школи”. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2001. – С. 138-141.
 132. Северілов В.А. Узагальнення задач оптимального управління розподіленням ресурсів в часі. / Северілов В.А., Колесник І.С. // Доповіді МНК “Контроль і управління в технічних системах”, Вінниця, 2001. — С. 142 –146.
 133. Соколов В.Г. Исследование гибкости и надежности экономических систем. / Соколов В.Г., Смирнов В.А. – Новосибирск.: Наука, 1990. – 253 с.
 134. Стрелец И.А. Новая экономика и информационные технологии. / Стрелец И.А. – М.: Экзамен, 2003. – 256 с. – ISBN 5-94692-216-5.
 135. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. / Трухаев Р.И. – М.: Наука, 1981. – 258 с.

136. Уайльд Д. Оптимальное проектирование. / Уайльд Д. – М.: Мир, 1981. – 240 с.
137. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам. / Уотермен Д. – М.: Мир, 1989. – 390 с. – ISBN 5-03-001119-6.
138. Управление бизнесом в бурные времена. / Альпина Ч. – Бизнес Букс, 2006. – 208 с. – ISBN 978-5-9614-0574-3.
139. Ясинский Ф.Н. Математическое моделирование с помощью компьютерных сетей. / Ясинский Ф.Н., Чернышева Л.П., Пекунов В.В. – Иваново, 2000. – 204 с.
140. Федоренко В.Г. Инвестиционный менеджмент. / Федоренко В.Г. – К.: МАУП, 1999. – 184 с.
141. Форд Л.Р. Потоки в сетях. / Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. — М.: Мир, 1966. — 272 с.
142. Форрестер Дж. Динамика города (пер. с англ.). / Форрестер Дж. – М.: Прогресс, 1974. – 276 с.
143. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (пер. с англ.). / Форрестер Дж. – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
144. Хаотические системы. Тематический выпуск. систем // — М.: Мир, ТИИЭР. — 1988. — №8. — 174 с.
145. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. / Цыпкин Я.З. — М.: Наука, 1968 — 400 с.
146. Чуев Ю.В. Технические задачи исследования операций. / Чуев Ю.В., Спехова Г.П. — М.: Советское радио, 1981. — 176 с.
147. Шелдрейк Дж. Теория менеджмента от тейлоризма до японизации. / Шелдрейк Дж. – Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск: Питер, 2001, 352 с. – ISBN 5-318-00028-2.
148. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. / Шеннон Р. – М.: Мир, 1978. – 418 с.
149. Шрейдер Ю.А. Системы и модели. / Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. — М.: Радио и связь, 1982. – 216 с.
150. Экланд И. Элементы математической экономики. / Экланд И. — М.: Мир, 1983. — 248 с.
151. Экспертные системы. Принципы работы и примеры: Пер. с англ. / А. Брукинг, П. Джонс, Ф. Кокс; под ред. Р. Форсайта. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.
152. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. Изд.6. / Эльсгольц Л.Э. –М.: КомКнига, 2006. – 208 с. – ISBN 5-484-00425-X.
153. Яблонский А.И. Модели и методы математического исследования науки (научно–аналитический обзор). / Яблонский А.И. — М.: Наука, — 1977. — 223 с. – ISBN 5-8360-0257-6.
154. Яблонский А.И. Стохастические модели научной деятельности. / Яблонский А.И. // Системные исследования. Ежегодник — М.:

- Hayka, — 1975. — 171 c.
155. Kelly K. New Rules for the New Economy. 10 radical strategies for a connected world. / Kelly K. – Penguin books, 1999. – 180 p. – ISBN 014028060X.
156. Martin Antony Mathematics for economics and finance / Martin Antony, Norman Biggs – © Cambridge University Press 1996, 394 c. – ISBN-10: 0521551137, ISBN-13: 978-0521551137.
157. Robert R. Prechter. Jr Conquer the Crash.. You can survive and prosper in deflationary depression. / Robert R. Prechter. Jr — John Willey&sons, LTD, 2002 — 278p. – ISBN-10: 0470849827, ISBN-13: 978-0470849828.

Наукове видання

**Таїса Миколаївна Боровська
Сергій Петрович Бадьора
Віктор Андрійович Северілов
Павло Вікторович Северілов**

**МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ
РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ
ВИКОРИСТАННЯ ЗОВНІШНІХ РЕСУРСІВ
ТА ЕФЕКТИВ ОСВОЄННЯ**

Монографія

Редактор С. Малішевська
Оригінал-макет підготовлено Т. Боровською

Видавництво ВНТУ “УНІВЕРСУМ-Вінниця”
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-85-32

Підписано до друку
Формат 29,7×42¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різнографічний Ум. друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам. №

Віддруковано в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-81-59