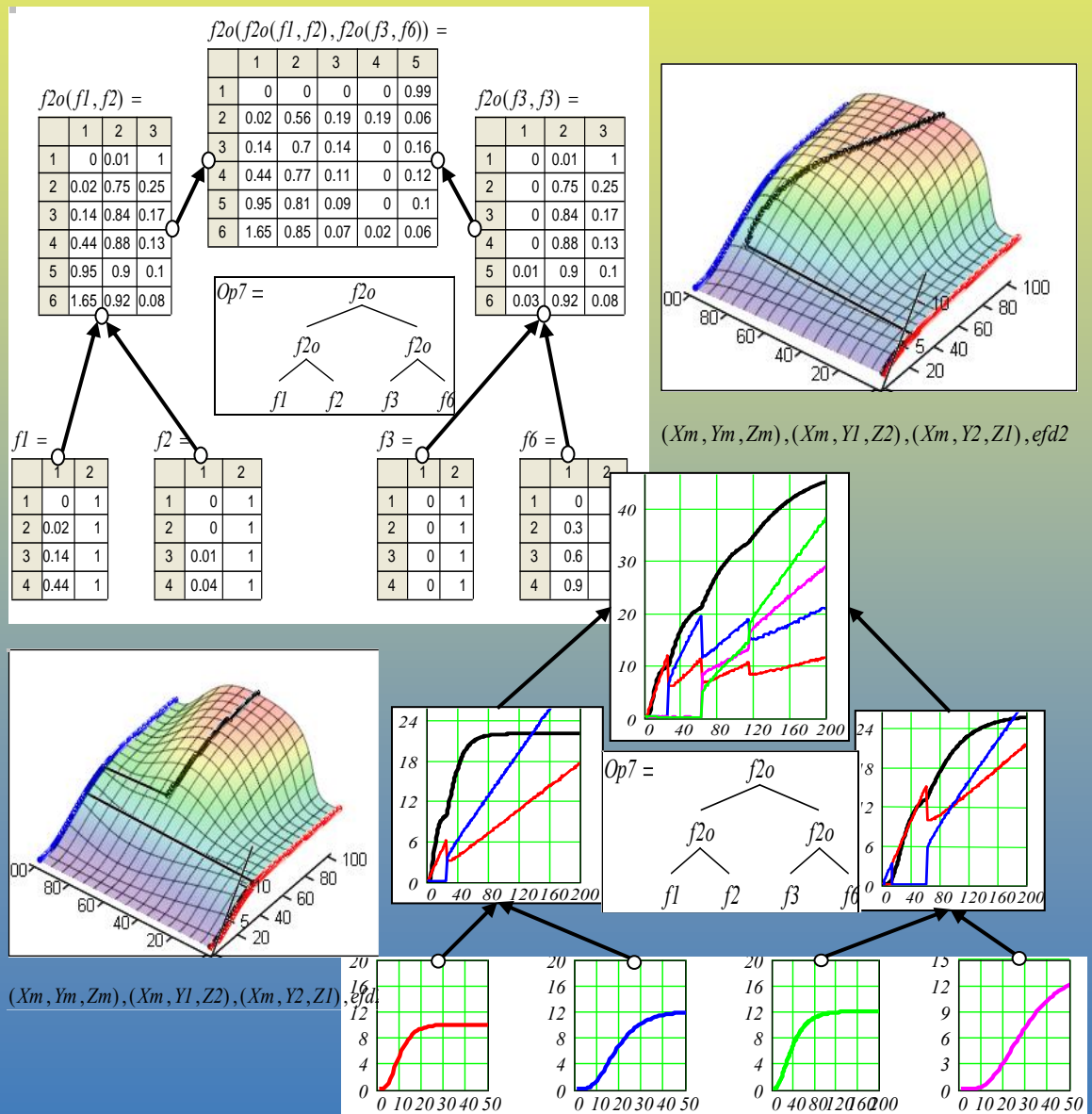


Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО АГРЕГУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов

**МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО АГРЕГУВАННЯ
В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ**

Монографія

УНІВЕРСУМ - Вінниця 2009

УДК 519.81

Б 83

Рецензенти:

I. I. Хаймзон, доктор технічних наук, професор

С. В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №13 від 3.07.2008 р.)

Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А.

Б 83 Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах

Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 229 с.

ISBN

В монографії розглядаються питання теоретичного обґрунтування, програмної реалізації і практичного застосування методу оптимального агрегування, який відноситься до методів розв'язання задач нелінійного програмування з адитивними цільовими функціями і обмеженнями. Метод оптимального агрегування переводить задачу нелінійного програмування в інший клас задач – таких, де обсяг обчислень зростає тільки лінійно із зростанням розмірності задачі, він не має обмежень по виду обмежень і цільових функцій, що можуть бути невивуклими, негладкими. Метод дає можливість ефективно розв'язувати ряд варіаційних задач оптимального управління інноваційним розвитком і визначати оптимальні виробничі, кредитні, цінові, інформаційні, конкурентні стратегії. Монографія повністю написана в середовищі математичного пакету, що і дало можливість отримати нові теоретичні і практичні результати.

УДК 519.81

ISBN

© Т. Боровська, І. Колесник, В. Северілов, 2009

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	6
Вступ	7
1. Аналіз і класифікація математичних моделей розподілених виробничих систем	8
1.1. Приклади моделей розподілених виробничих систем	8
1.2. Формалізація базових математичних моделей розподілу ресурсу	18
1.3. Класифікація моделей виробничих функцій	26
Висновки	39
2. Узагальнена модель однокрокового розподілу ресурсів при довільних виробничих функціях елементів	40
2.1. Постановка задачі оптимізації розподілу ресурсів	40
2.2. Знаходження оптимального розподілу ресурсів для випадку елементів з випуклими виробничими функціями ...	42
2.3. Побудова моделі системи автоматичного управління для оптимального розподілу ресурсу	44
2.4. Властивості моделей оптимального розподілу ресурсів при невиконаних виробничих функціях	51
2.5. Порівняльний аналіз моделей оптимізації розподілу ресурсу у децентралізованих системах	58
2.6. Розробка моделі процесу розподілу ресурсу на базі агрегування виробничих функцій елементів	63
2.7. Порівняльний аналіз точності і ефективності методу оптимального агрегування	67
Висновки	73
3. Моделювання багатокрокових процесів розподілу ресурсів	74
3.1. Постановка і розв'язання базової задачі	74
3.1.1. Одновимірна задача Марковиця–Беллмана	75
3.1.2. Двовимірна задача Марковиця–Беллмана	77
3.2. Узагальнення задачі моделювання розвитку розподіленої системи.....	79
3.2.1. Наближене розв'язання узагальненої задачі розподілу ...	81
3.2.2. Точне розв'язання узагальненої задачі розподілу	82
3.2.3. Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язань.	84
3.3. Розв'язання узагальненої задачі розподілу для випадку використання зовнішніх ресурсів	86
3.4. Аналіз результатів моделювання оптимальних процесів розвитку	90
3.4.1. Дослідження моделі однопродуктової системи	90
3.4.2. Дослідження моделі двопродуктової системи	95

3.5.	Застосування методу оптимального агрегування для моделей систем високої розмірності	101
	Висновки	104
4.	Практичні застосування результатів дослідження	105
4.1.	Моделювання процесів оптимального розподілу ресурсу на базі принципу відкритого управління.....	107
4.2.	Розв'язання задачі оптимального розподілу навантаження для системи котлоагрегатів	121
4.2.1.	Математична модель системи котлоагрегатів	121
4.2.2.	Математична модель оптимізації розподілу навантаження	123
4.3.	Розробка системи програм для аналізу впливу невизначеностей	127
4.3.1.	Теоретичні основи задачі оптимізації розподілу ресурсу	128
4.3.2.	Логіка методу оптимального агрегування	131
4.4.	Розробка системи програм для аналізу оптимальних процесів розвитку	137
4.5.	Розв'язання задачі оптимізації розвитку мережевих систем	147
	Висновки	154
5.	Застосування нечіткої логіки для усунення розривів в функціях оптимального розподілу ресурсу	156
5.1.	Математична модель оптимального розподілу ресурсу на базі нечіткої логіки. Адитивний критерій	156
5.2.	Математична модель оптимального розподілу ресурсу на базі нечіткої логіки. Мультиплікативний критерій	163
5.3.	Узагальнення моделі оптимального розподілу ресурсу – урахування витрат на регулювання виробництва	168
	Висновки.....	175
6.	Побудова робочих моделей та дослідження "природно агрегованих систем"	176
6.1.	Розробка робочої моделі формування кредитного портфеля	176
6.2.	Розробка моделі розподіленого попиту на кредити для	

споживання.....	178
6.3. Залежність темпу кредитів від розміру і тривалості повернення	184
.....	
6.4. Розробка моделі розподіленого попиту	189
6.4.1. Скалярна модель попиту на кредити	189
6.4.2. Векторна (розподілена) модель попиту на кредити	190
6.4.3. Векторна (розподілена) модель еластичності попиту ...	193
6.4.4. Моделі залежності функцій попиту від рівня доходів клієнта	195
6.5. Визначення оптимального розподілу ставок кредитів різних розмірів	197
6.6. Визначення функцій попиту на кредити для розвитку	200
6.6.1. Постановка і розв'язання задачі оптимального розвитку виробничої системи	201
.....	
6.6.2. Програма оптимізації і моделювання процесу розвитку виробничої системи	204
6.6.3. Аналіз типових функцій попиту на кредити для розвитку	207
.....	
6.7. Напрямки узагальнення і застосування моделі оптимального розподілу ресурсу	213
Висновки	222
Література	223

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $f_i(x)$ – виробнича функція i -го елемента системи
 $F(x, y)$ – критеріальна функція у варіаційній задачі розподілу
 $G(x, y)$ – функція розвитку у варіаційній задачі розподілу
 x – темп виробництва у варіаційній задачі розподілу
 y – темп ресурсів на розвиток у варіаційній задачі розподілу
 $Fop(R)$ – оптимальна виробнича функція децентралізованої системи
 $Dop(R)$ – вектор-функція оптимального розподілу ресурсу системи
 $fk(x)$ – k -функція ($fk(x) = k \cdot f(x/k)$)
 $Fd2(x, \alpha)$ – α - функція ($Fd2(x, \alpha) = \alpha \cdot f_1(x) + (1 - \alpha) \cdot f_2(x)$)
 $f2op(f1, f2)$ – оператор, що бере пару виробничих функцій і повертає оптимальну виробничу функцію та вектор функцію оптимального розподілу ресурсу
 R – обмеження по ресурсу для системи в цілому
 λ – множник Лагранжа – "ціна" ресурсу
 $L(.)$ – функція Лагранжа у задачі нелінійного програмування
 T – плановий період у задачі розвитку виробничої системи
 $H(x, u)$ – функція Гамільтона для динамічної системи, де x – вектор стану; u – вектор управління
 ψ_i – спряжена (з x_i змінною вектора стану) функція
 $|M|$ – норма (визначник) матриці
 M^T – транспонована матриця (масив)
 $M^{(i)}$ – i -ий стовпець матриці (масиву)
 $M_{i,j}$ – елемент матриці (масиву)
 $Given.. Find(.)$ – вбудована функція знаходження розв'язку системи рівнянь
 $Given..Minerr(.)$ вбудована функція знаходження мінімальної відстані
 $Given..Maximize$ вбудована функція знаходження максимуму при обмеженнях
 $\overline{f(M)}$ – функція векторизації (виконання функції $f(.)$ над усіма елементами масиву M)

ВСТУП

В умовах децентралізації виробничих систем, скорочення життєвого циклу виробів, виробничих систем і технологій актуальною є задача оптимального розподілу ресурсів або навантаження між паралельно працюючими елементами певної децентралізованої виробничої системи. Це розподілення повинно виконуватись в реальному часі.

Задачі розподілу ресурсів актуальні на всіх рівнях ієрархії виробничих систем. До цього класу задач відносяться системи розподілу навантаження в енергомережах та тепломережах, система розподілу навантаження між паралельно працюючими хімічними реакторами, котельними та іншими технологічними установками. Дешеві і надійні мікро-процесорні засоби стимулюють застосування оптимального управління розподілом ресурсів в системах нижнього ієрархічного рівня. Характерним прикладом може бути система оптимального розподілу навантаження між циліндрами сучасного автомобільного двигуна. Особливість системи в тому, що при зменшенні навантаження відключаються окремі циліндри, тобто залежність управління від рівня загального навантаження є розривною. Управління такими двигунами є дуже складним, однак воно дає великий екологічний і економічний ефект і тому реалізовано. Технічні проблеми реалізації оптимального управління розподілом ресурсу чи навантаження можна вважати вирішеними. Сьогодні бракує тільки методів оптимізації, що працюють при невизначених, нестационарних, невіпуклих робочих характеристиках – узагальнених виробничих функціях елементів розподілених систем.

Оптимізація розподілу узагальнених ресурсів та моделювання процесів розподілу розглядається у великій кількості робіт. В рамках цієї монографії неможливо дати вичерпний аналіз робіт і методів, що стосуються розподілу ресурсів. Назвемо тут тільки ті, що були основними першоджерелами в нашій роботі. Це праці Р. Беллмана, Л. Понтрягіна, М. Болтянського, В. Опойцева, М. Пешеля, А. Горбаня.

Головним прототипом для побудови математичних моделей сучасних розподілених технічних систем та пошуку розв'язань оптимізаційних задач виявилися роботи Р. Беллмана з математичної теорії управління. Він визначив основні класи оптимізаційних задач управління, визначив структуру оптимальних розв'язань для довільних функцій критеріїв та обмежень. Сьогодні є можливість зробити такі кроки – довести теоретичні результати до конкретних розв'язань, розробити ефективні програми для оптимальних систем управління розподілом ресурсів.

РОЗДІЛ 1.

АНАЛІЗ І КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНИХ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ

В цьому розділі ставимо за мету огляд особливостей моделей сучасних розподілених систем, виділення базових задач моделювання таких систем. Базовими задачами називаємо задачі, з яких стандартними методами математики і програмування можна отримати моделі і програми для задач більшої розмірності та з урахуванням більшого числа факторів – нелінійностей, запізнь та ін.

Дається огляд відомих результатів. Як підсумок будується класифікація децентралізованих систем та їх елементів і формулюються нові задачі моделювання процесів розподілу ресурсів.

1.1. Приклади моделей розподілених виробничих систем

Визначення понять. Поняття, що використовуються в нашій роботі досить поширені і мають досить багато інтерпретацій. Конкретизуємо і визначимо ці поняття згідно з роботами, в яких розглядаються задачі розподілу ресурсів в технічних системах і нелінійному програмуванні. Даємо тільки словесні формули – математичні моделі понять конкретизуються в наступних підрозділах, де розглянуті приклади конкретних виробничих систем. Ми не намагаємось дати "остаточні" визначення понять – виробничі системи є складними системами, що можуть бути описані тільки частково, приблизно, спрощено через комплекси математичних моделей, що подають різні аспекти побудови і функціонування системи [16, 17, 63, 66, 73, 77, 79].

Виробничий елемент – перетворювач певних ресурсів у певний продукт. Ресурс і продукт вважаються вимірюваними. Виробничий елемент вважається нероздільним.

Виробнича функція (ВФ) – залежність між кількостями ресурсів і кількістю продукту в деякій реальній системі. Модель виробничої функції – математичний опис ВФ для певного класу реальних виробничих елементів. Далі замість терміну "модель виробничої функції" використовуємо, згідно з літературою [25, 77] термін "виробнича функція" (ВФ).

Виробнича система – набір виробничих елементів та зв'язків типу "вхід–вихід" між елементами. Система з паралельно працюючими елементами – набір виробничих елементів, кожний з яких переробляє певну частку загального ресурсу, що надходить до системи у певний продукт. Усі елементи використовують один і той же ресурс і

виробляють один і той же продукт. Вхідний ресурс за певними правилами розподіляється між елементами, а виходи усіх елементів об'єднуються в сумарне виробництво продукту. Особливістю реальних виробничих систем є те, що виробничі функції і навіть технології переробки ресурсу в продукт можуть відрізнятися.

Децентралізована система – система з паралельно працюючими елементами, що пов'язані тільки через спільний ресурс і сумарне виробництво. Елементи системи можуть самостійно визначати власні обсяги виробництва і використання ресурсу. Такі децентралізовані системи мають також інтерпретацію як обчислювальні алгоритми для оптимізаційних задач високої розмірності [77].

Конкретизуємо предмет дослідження – математичні моделі і методи оптимального розподілу ресурсів в децентралізованих системах. Це три певні формальні моделі, для трьох класів задач, що мають широке коло інтерпретацій і практичних застосувань. Назвемо ці моделі:

М1: модель оптимізації розподілу обмеженого ресурсу між паралельно працюючими елементами певної виробничої системи в однокрокових процесах за критерієм сумарного виробництва [7–9];

М2: модель визначення оптимальної стратегії розподілу ресурсів між паралельно працюючими елементами децентралізованої системи за інтегральним критерієм, або модель оптимізації багатокрокових процесів [7–9];

М3: модель оптимізації розподілу обмеженого ресурсу між паралельно працюючими елементами децентралізованої системи, коли кожний елемент контролює значення певної, своєї змінної управління так, щоб оптимізувати свій локальний критерій, або модель метаігрового синтезу.

Перша модель є моделлю класичної задачі нелінійного програмування [46–47], друга – моделлю класичної варіаційної задачі з обмеженням [8], третя – моделлю задачі динаміки і статички так званих ансамблів динамічних систем [77].

Саме комплекс цих задач і відповідних моделей дає можливість побудови раціонального управління сучасними децентралізованими виробничими системами. Особливість цих задач у тому, що вони давно актуальні, давно увійшли в підручники [10, 30, 49], що, звичайно, є ознакою вичерпного розв'язання усіх проблем. Однак сучасні високотехнологічні виробничі системи ставлять нові задачі, для яких потрібно розробити відповідні математичні моделі і методи. Це обумовлено не тільки швидкими кількісними змінами, але і суттєвими структурними змінами. Розглянемо особливості сучасних наукомістких високотехнологічних виробничих систем.

Еволюція виробничих систем. Виробничі системи 1980–2008 років якісно відрізняються від систем 1900–1970 років. В [20] запропоновано класифікацію, де всі параметри класифікаційного простору систем мають одну розмірність – час, і не пов’язані з предметною областю. Виробничі системи класифікуються за їх локалізацією в просторі параметрів [20]:

$\tau_1 = Tn/T\zeta$ – середній період компенсації наслідків середньої аварії (або просто помилки в управлінні системою);

$\tau_2 = Tz/T\zeta$ – запізнення реалізації рішень;

$\tau_3 = Tm/T\zeta$ – період зміни системи (напівоновлення);

$\tau_4 = Tz/T\zeta$ – часовий горизонт прогнозування.

В цих залежностях: $T\zeta$ – тривалість життєвого циклу системи; $Tn = Cn/O\epsilon$ – середній час компенсації наслідків середньої помилки; Cn – середня вартість втрат від помилки; $O\epsilon$ – продукційний ефект виробничої системи (темپ повернення капіталовкладень); Tz, Tm, Tz – розмірні значення відповідних параметрів.

За останні десятиріччя дещо змінилися відношення у тріаді τ_2, τ_3, τ_4 (запізнення реалізації, період напівоновлення, горизонт прогнозування). Для існуючих технічних систем мають місце такі ситуації:

$\tau_2 > \tau_4$: запізнення реалізації більше горизонту прогнозування, тобто в період розробки і реалізації виробничої системи відсутні прототипи і статистичні дані про майбутні перспективи виробництва;

$\tau_3 > \tau_4$: період напівоновлення більше горизонту прогнозування, тобто, наслідки технологічних і конструкторських змін не можуть раціонально вивчатись, розроблятись і управлятись класичними методами – вони не мають звичайної статистики, для них неефективно використовувати метод експертного оцінювання на базі досвіду [110, 112, 113];

$\tau_1 > 1$: збитки від середньої помилки в проектуванні та експлуатації виробничої системи не можуть бути скомпенсовані протягом життєвого циклу системи.

Ці структурні зміни повинні бути враховані в комплексі математичних моделей і програм для задач розподілу ресурсу в децентралізованих системах. Дійсна причина широкого використання моделей і моделювання не в тому, що це підвищує ефективність наукових досліджень і управління, а в тому, що сучасні технічні і технологічні системи не можуть інакше проектуватись, досліджуватись і управлятись. Це в свою чергу змінює підхід до моделювання: замість підгонки за допомогою лінеаризації, апроксимації, редукції реальної технічної системи до існуючих класичних моделей застосовуємо модифікацію, узагальнення існуючих моделей і, взагалі, конструювання

нових математичних моделей для нових задач, що постійно виникають [89, 79, 107].

Проблема невивуклості. За останні 20–30 років у виробничих системах відбулася ще одна суттєва якісна зміна. Суть цієї зміни – зменшення витрат на виробництво одиниці продукції при одночасному зростанні інформаційних (обробка інформації) та інтелектуальних (синтез нової інформації: дослідження, проектування та ін.) витрат [109, 110, 113].

Увігнутий характер узагальнених виробничих функцій має місце на всіх рівнях ієрархії виробничих систем. На рис. 1.1 подана залежність "обсяг випуску продукції–витрати" для перших п'ятдесяти корпорацій і фірм – виробників програмного забезпечення. Крайня права точка – Майкрософт, що виробляє основну частину програмної продукції.

Головним в цій залежності є невивуклість. Такі залежності мають місце для виробників мікропроцесорів, мобільних телефонів, пива, банківських продуктів – будь-якого виробництва на базі комплексних високих технологій. Розглянемо приклад моделі розподіленої системи нижнього ієрархічного рівня – регулювання потужності автомобільних двигунів. Ціни на паливо та екологічні вимоги до автомобільних двигунів постійно зростають. Однак це не призводить до зменшення потужностей двигунів: в середньому біля 1000 к.с. для вантажівок і 250 к.с. для легкових машин, ця потужність важлива і потрібна в певних короткочасних ситуаціях. Однак значну частину часу потрібна потужність складає біля 10% максимальної. На режимах малого газу (рух на міських вулицях) потужний двигун не просто є неекономічним, але й екологічно шкідливим, бо неможливо ефективно спалювати малі дози палива.

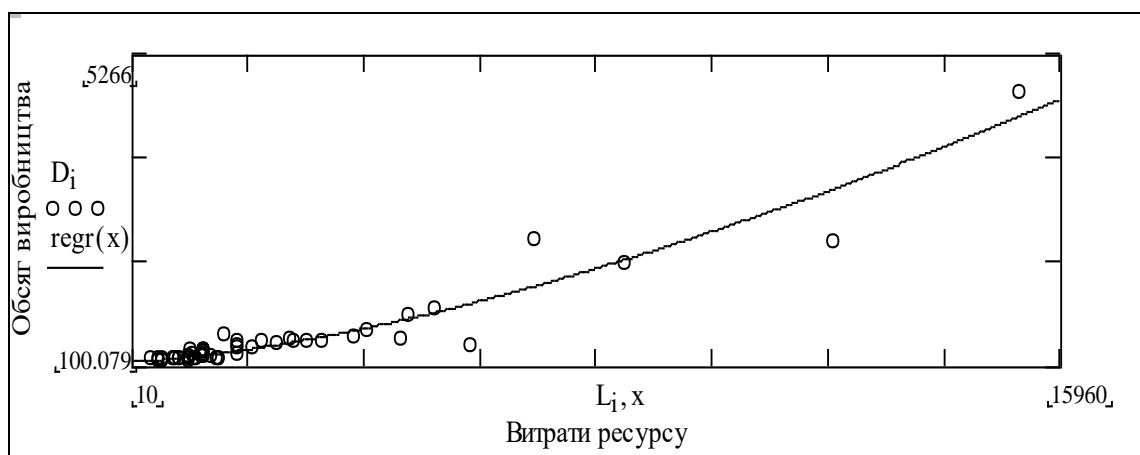


Рис. 1.1. Залежність "витрати–випуск" для виробників програмної продукції

Не менше 50 років у світі працюють над двигунами із змінним

числом працюючих циліндрів. Конструкцію такого двигуна легко осмислити, але надто важко реалізувати. Сьогодні такі двигуни є дорогими. Однак вже плануються випуски мільйонів екземплярів машин. В середньому такий двигун дає 5–10% економії палива. Однак, з урахуванням масштабів, навіть економія менше процента є макроекономічним фактором. Сьогодні серійно випускається більше десяти марок автомобілів з відповідними двигунами: Мерседес 600, Каділлак, Крайслер, Тойота, Хонда та ін. Двигун "Sixteen" концерну General Motors має 16 циліндрів, робочий об'єм 14 літрів і розвиває потужність 1000 кінських сил. Система управління – 4-х ступінчастий мікроконтролерний "автомат". Двигун є таким тільки при максимальних навантаженнях. У звичайному режимі роботи і при русі на середній швидкості, двигун, за допомогою системи "Displacement on Demand", відключає половину циліндрів і стає 8-ми циліндровим. Якщо мотор працює на холостому ходу, то він перетворюється в 4-х циліндровий, об'ємом 3,4 літра. Середні витрати палива у такого двигуна не вище, ніж у сучасних 8-ми циліндрових агрегатів. Можливо в майбутньому цей напрямок не отримає подальшого розвитку, але узагальнена задача розподілу навантаження залишиться: "автомобіль 2015 року" Мерседес 600Ф буде мати комбіновану систему з дизеля у 250 кінських сил та електродвигуна в 68 кінських сил.

Одне з головних призначень математичних моделей і моделювання в тому, що вони дають чітке розуміння проблеми і ведуть її до рангу конкретної технічної задачі. На рис. 1.2 подано результат моделювання такого двигуна. **Саме цей приклад є основою для побудови логіки отримання теоретичного результату – методу оптимального агрегування.** Дросельна характеристика одного циліндра двигуна внутрішнього згоряння є невіпуклою з обмеженням. В прикладі взято кусково-лінійну апроксимацію "виробничої функції". На рис. 1.2 подано також усі робочі залежності для побудови відповідних виробничих функцій – ВФ звичайного двигуна і оптимальна ВФ двигуна із змінним числом працюючих циліндрів. Для порівняння подано оптимальну виробничу функцію для випадку випуклих ВФ елементів.

Подібна задача розподілу навантаження виникає і для іншого виду гібридних двигунів: в місті (зарулювання і вирулювання на стоянках, в гаражах, транспортні пробки та ін.) працює електродвигун, на трасі працює тільки бензиновий двигун, при обгоні працюють обидва двигуни. Економія енергії до 25%. Управління гібридним двигуном вимагає складних комп'ютерних програм (firmware). На рис. 1.3 подано оптимальну "виробничу функцію" гібридного двигуна.

$x := 1..50$;
 $Ac := 0.2$; $wc := 0.006$; $sc := 10$; $Nc := 4$.
 $f1c(x) := F6(x, Ac, wc, sc)$;
 $f2c(x) := 2 \cdot F6(x \div 2, Ac, wc, sc)$;
 $fNc(x, Nc) := Nc \cdot F6(x \div Nc, Ac, wc, sc)$;
 $fopc(x, N) :=$

```

fopc(x, N) :=
  ORIGIN ← 1
  for i ∈ 1.. N
    "qq"
    VFi ← fNc(x, i)
  For ← max(VF)

```

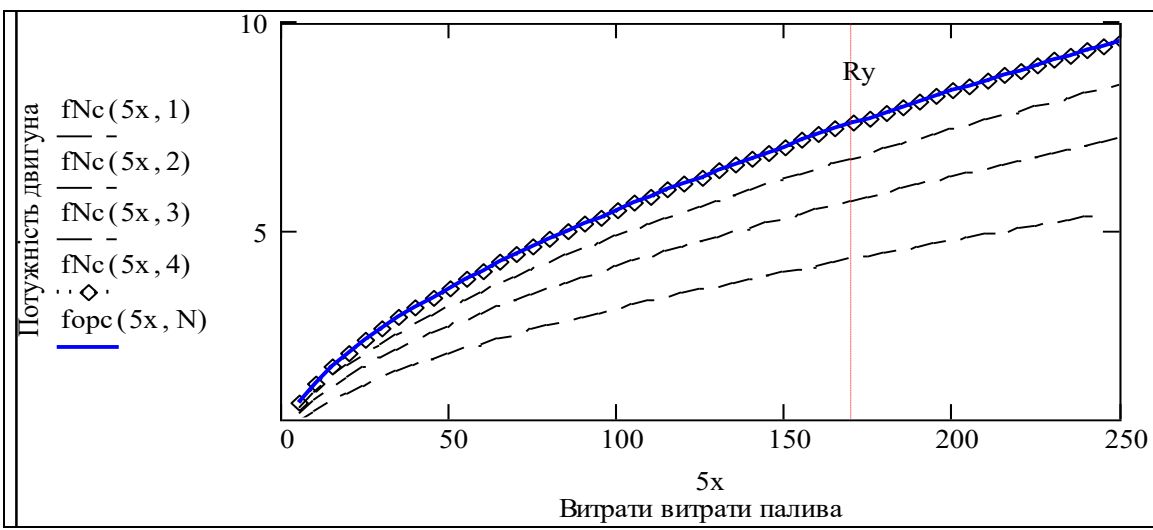
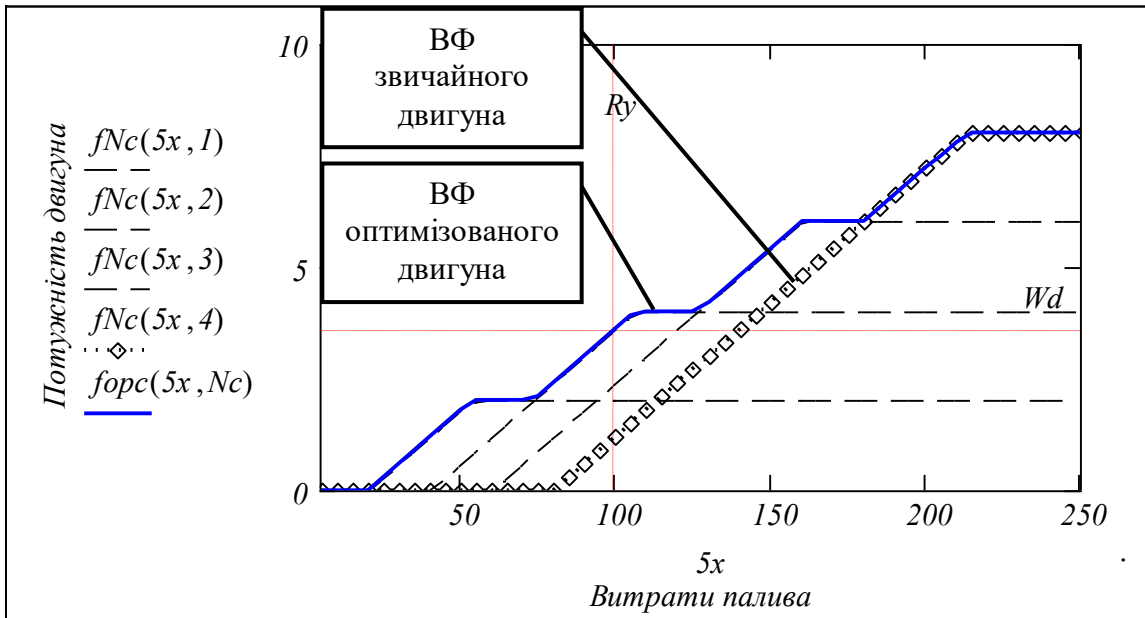


Рис. 1.2. Приклад оптимальної системи з паралельно працюючими елементами

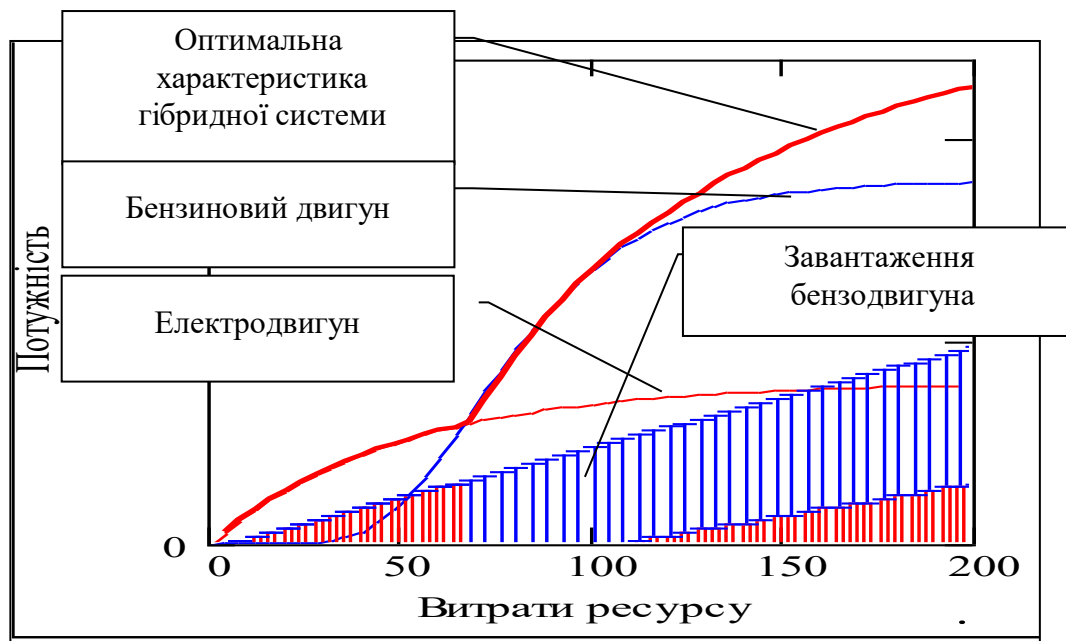


Рис. 1.3. Характеристики гібридного двигуна

Модель системи оптимального управління виробництвом стиролу. Розглядаємо наступний приклад моделі розподіленої виробничої системи – виробництво стиролу – сировини для синтезу багатотоннажної пластмаси – полістиролу. В реакторі нагрівається етилбензол в присутності каталізатора, утворюється суміш стиролу, етилбензолу, бензолу, толуолу, що переганяється, і виділений етилбензол знову йде у реактор. Реактор підігрівається парою. Особливості системи – нелінійні і нестационарні характеристики реактора, а також паралельна робота декількох реакторів на потрібний сумарний вихід стиролу. Необхідно розробити оптимальну за витратами систему розподілення етилбензолу по окремих реакторах з урахуванням обмеження на сумарну продуктивність.

В [66] запропоновано систему оптимального управління системою реакторів синтезу стиролу на базі регулювання множника Лагранжа. Величина множника Лагранжа λ змінюється так, щоб досягався плановий сумарний випуск стиролу, а на основі цього значення λ обчислювався оптимальний розподіл навантаження між реакторами. Недолік цього підходу в тому, що потрібно точно знати характеристики "продуктивність–витрати" для всіх реакторів. Виробничі функції реакторів змінюються через старіння і поступове "отруєння" каталізатора. В системі можливі режими великих збурень – відключення одного з реакторів на ремонт і профілактику, або підключення нового реактора.

Природно поставити систему управління, яка б оптимально розподіляла навантаження окремих реакторів. Логічно в цьому випадку є мінімізація сумарних виробничих витрат при обмеженні сумарного темпу виробництва. Навіть незначне зменшення виробничих витрат дає, в силу великих обсягів виробництва, великий абсолютний поточний ефект. Оскільки виробництво стиролу є масштабним і досить стабільним, то накопичений ефект економії є вирішальним для виробничої системи у стратегічному плані [66].

На рис. 1.4 подано структурну схему системи оптимального управління реакторами. Система управління повинна виконувати дві задачі – підтримку заданого сумарного випуску продукції і оптимальний перерозподіл навантаження між реакторами. Виконання першої задачі може забезпечити звичайний пропорційно-інтегральний регулятор.

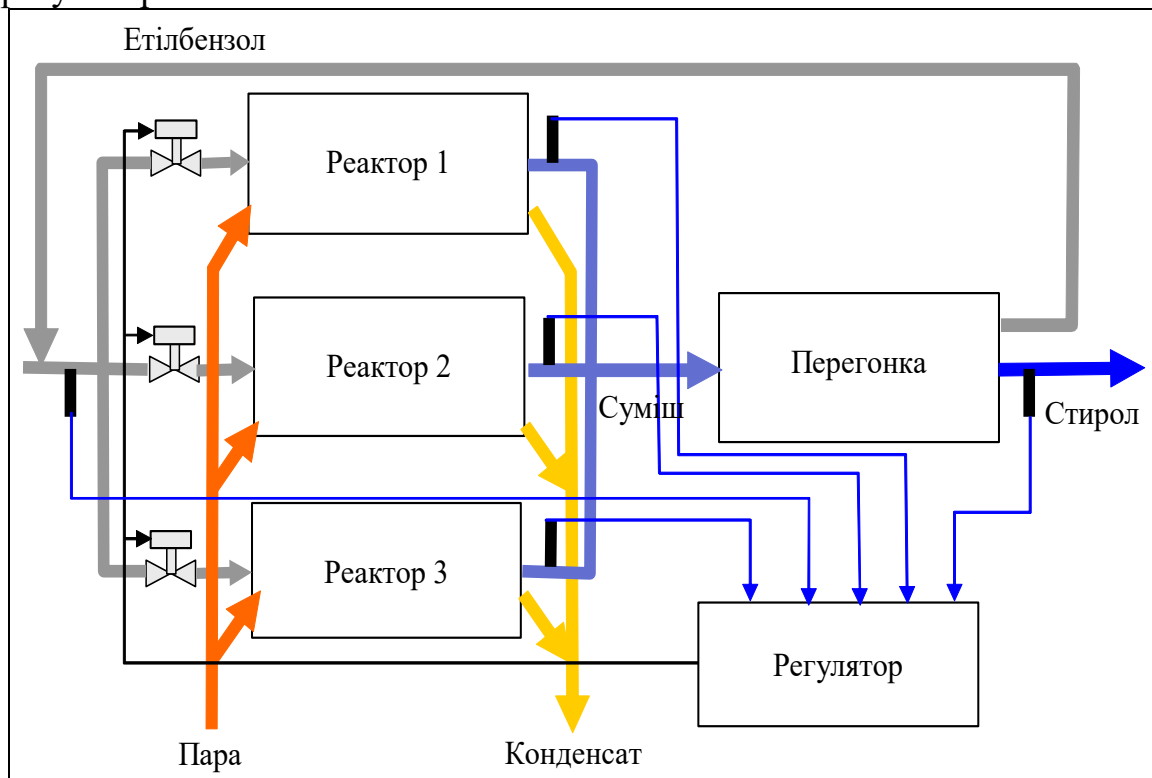


Рис. 1.4. Схема технологічної системи синтезу стиролу

Виконання другої задачі ускладнено проблемами оперативного вимірювання системних виробничих функцій елементів. Можна використати **індикатор** – величину, яка пов'язана з потрібною величиною монотонною залежністю. Такою величиною може бути залежність прирощення виходу стиролу на одиницю прирощення подачі етилбензолу.

Словесна модель регулятора оптимізації розподілу навантаження така: регулятор рівня подає однакові управління в усі реактори;

вимірюються "відгуки" dPi кожного з реакторів на це управління; формуються відхилення від середнього і з затримкою на такт на реактори подаються "вирівнюючі" управління. Після чого збільшується навантаження реакторів, у яких dPi вище середнього і зменшується для реакторів з меншою ефективністю. В другому розділі подано програму моделювання та оптимізації такої системи і проведено її дослідження.

Задачі оптимального розподілу навантаження між тепловими агрегатами. Ми розглянули, як актуальні приклади, застосування методів оптимального управління для автомобільних двигунів і хімічних реакторів. Особливість цих об'єктів в тому, що з різних причин рівень систем управління і науковість є високими. Однак, в Україні традиційно відсталими за ефективністю досі залишаються котельні різних рівнів, що постачають пару і підігріту воду. Це неосяжний резерв економії енергоносіїв, однак заміна їх новітніми котлоагрегатами – витратний за часом і коштами процес. Однак, вже сьогодні, на існуючому обладнанні можна досягти 5–15% економії за рахунок досконалих систем управління оптимальним розподілом навантаження між котлоагрегатами. Для такої модернізації не потрібно великих витрат – прецизійні цифрові сенсори та виконавчі елементи сьогодні є дешевими і надійними.

Розглянемо структуру і особливості таких систем. На рис. 1.5 подана схема котельні з трьома паралельно працюючими водяними котлами. На рис. 1.6 подана схема котельні з трьома паралельно працюючими паровими котлами.

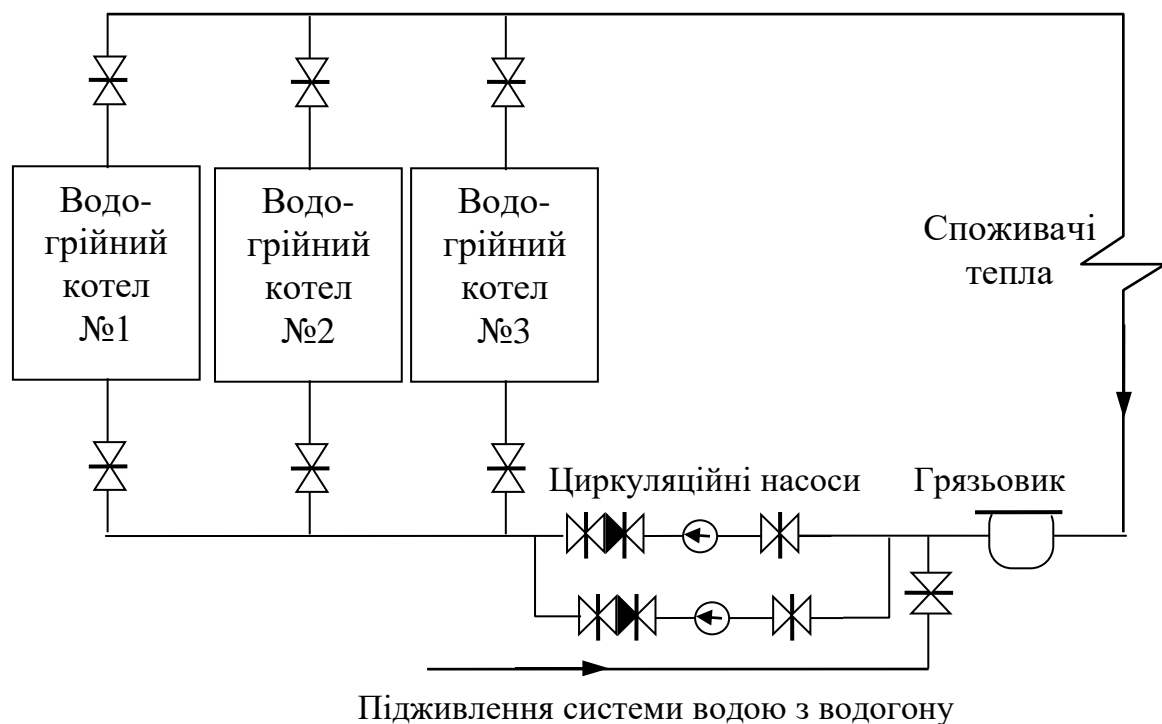


Рис. 1.5. Схема котельні з трьома водогрійними котлами

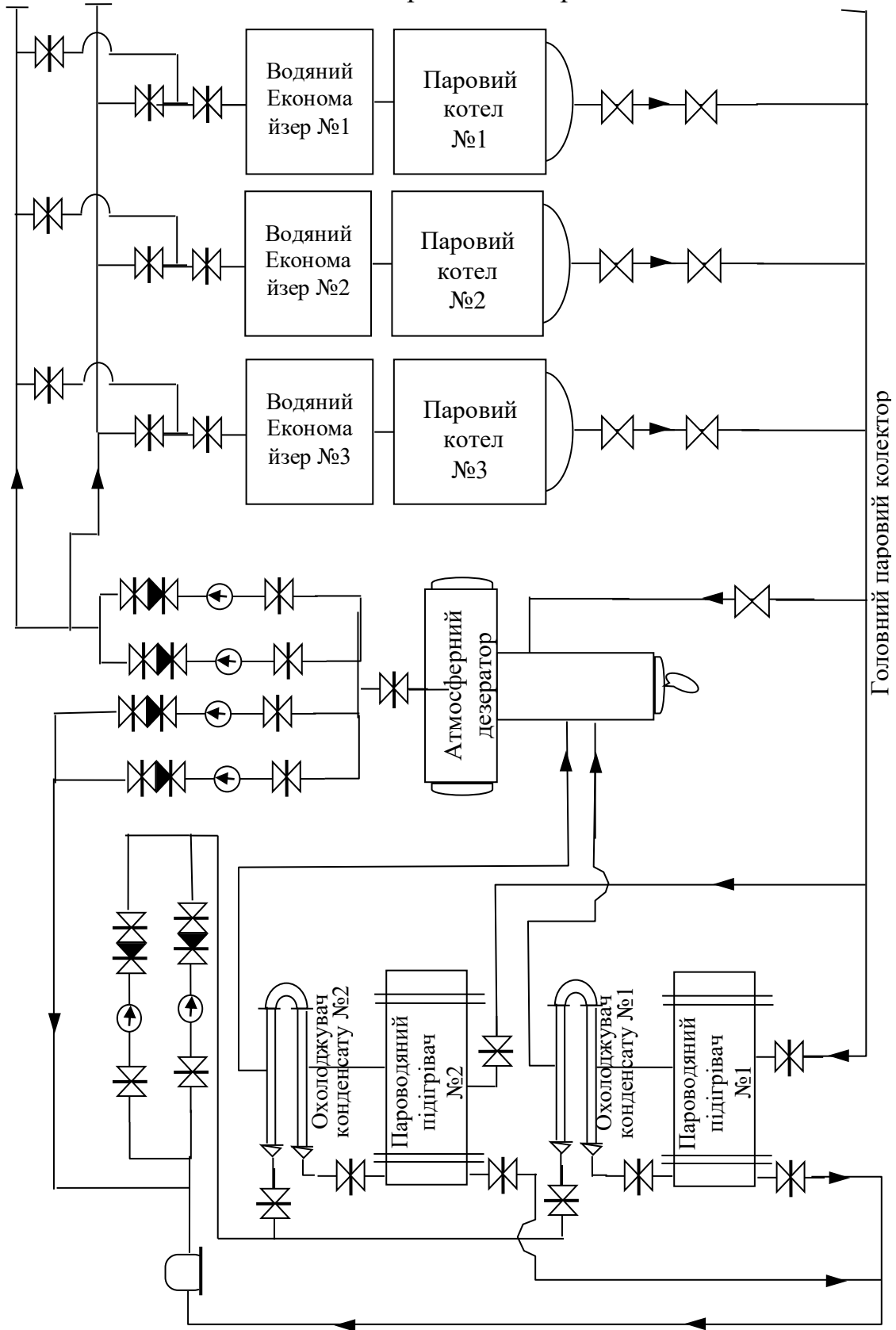


Рис. 1.6. Схема котельні з трьома паровими котлами

Котли можна охарактеризувати залежністю виробництва тепла – кількістю води нагрітої до заданої температури, як функції витрати палива. Ця узагальнена виробнича функція (ВФ) є різною для різних моделей котлів, крім того ВФ котлів однієї моделі можуть помітно відрізнятись за рахунок зміни (звичайно – погіршення) характеристик в процесі експлуатації. Конкретними причинами цього можуть бути нагар, накип, погіршення гідродинамічних характеристик трубопроводів. Ще одна особливість ВФ котлоагрегатів – наявність негладких нелінійностей класів "зона нечутливості" та "обмеження рівня".

Значення коефіцієнта корисної дії (перетворення енергії палива в теплову енергію пари і води) існуючих котлоагрегатів знаходиться в межах 70–95% . Перша необхідна умова для отримання економії за рахунок оптимального управління – забезпечення потрібної точності вимірювання змінних. Застосування оптимального розподілу навантаження в системах котлів потребує розробки числових методів оптимізації придатних для випадків довільних ВФ елементів.

1.2. Формалізація базових математичних моделей розподілу ресурсу

Формалізуємо тепер виділені нами три математичні моделі (M1, M2, M3) оптимізації розподілу ресурсу або навантаження між елементами децентралізованої системи і проаналізуємо відомі моделі і методи оптимізації для відповідних задач.

Задача розподілу ресурсу в однокрокових процесах. Пряма задача. Розглядається система з N виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількості x_i і виробляють продукцію у кількості $y_i(x_i)$ згідно з виробничими функціями з класу нестрого монотонно зростаючих невід’ємних функцій: $y_i = f_i(x_i)$, $i = 1..N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу.

Задано: критерій $F(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$ – сумарне виробництво;

Обмеження $G(x) = R - \sum_{i=1}^N x_i = 0$ – витрати ресурсу.

Ціль оптимізації: максимізація критерію.

Змінні управління: вектор розподілу ресурсу (x_1, x_2, \dots, x_N) .

Спряжена задача. Розглядається система з N виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількості x_i і

виробляють продукцію у кількості $y_i(x_i)$ згідно з виробничими функціями з класу нестрого монотонно зростаючих невід'ємних функцій: $y_i = f_i(x_i)$, $i = 1..N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу.

Задано: критерій $Gs(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i$ – сумарні витрати ресурсу;

обмеження $Fs(x) = Yp - \sum_{i=1}^N f_i(x_i) = 0$ – сумарне виробництво.

Ціль оптимізації: мінімізація критерію, змінні управління: вектор розподілу навантаження y_1, y_2, \dots, y_N [4–6, 8].

Задача розподілу ресурсу в багатокрокових процесах. Р. Беллман називає задачу розподілу ресурсу в багатокрокових процесах "задачею розподілу" [8]. Саме ця задача є у нього наскрізним прикладом для методу динамічного програмування. По суті це задача оптимізації розвитку виробничих систем, яка була досить повно досліджена 50 років тому Беллманом і особливо актуальною стала сьогодні.

Постановка одновимірної задачі. Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J(y) = \int_0^T F(x, y) dt, \quad (1.1)$$

де функції $x(t), y(t)$ зв'язані диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} x(t) = G(x(t), y(t)), \quad x(0) = c > 0 \quad (1.2)$$

і на функцію $y(t)$ накладено обмеження $0 \leq y \leq x$. (1.3)

Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими. При відсутності обмежень – це класична задача варіаційного числення; при наявності обмеження – це окремий випадок задачі Больца. Розглядаючи розв'язання окремих випадків задачі (розділи 3.1, 3.2) ми побачили, що розв'язання може мати три інтервали ("все в розвиток", "пропорційно", "все в накопичення"). Головна мета цього розділу виявлення і строге обґрунтування структури розв'язання узагальненої задачі розподілу. При виконанні певних "природних" умов розв'язання має такий вигляд

$$\begin{array}{lll} y(t) = x(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 & \text{– "все в розвиток"} \\ 0 < y(t) < x(t) & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 & \text{– "ейлерова ділянка"} \end{array}$$

$$y(t) = 0 \quad \text{при } t_2 \leq t \leq T \quad - \text{ "все в накопичення" .}$$

Припускаємо, що функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ задовольняють такі умови:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) функції } F \text{ та } G \text{ належать до класу } C^2 \text{ тобто мають} \\ \text{неперервні окремі похідні другого порядку;} \\ \text{б) існують константи } p, q, r \text{ такі, що} \\ p \cdot x < G(x, y) < q \cdot x + r \text{ при } x > 0 \text{ та } 0 < y < x; \\ \text{в) функція } G_y \text{ (тобто частинна похідна } \frac{\partial}{\partial y} G(x, y)) \\ \text{приймає значення тільки одного знаку:} \\ \text{або } G_y > 0 \text{ або } G_y < 0 \text{ при усіх значеннях } x, y, \\ \text{що задовольняють умови } x > 0 \text{ та } 0 < y < x . \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Умова б) означає, що на інтервалі $(0, T)$ функція $x(t)$ буде (в силу диференціального рівняння (1.2)) обмежена позитивними константами

$$0 < m \leq x(t) \leq M . \quad (1.5)$$

Постановка багатовимірної задачі. Багатовимірна задача не створює принципово нових проблем крім чисто кількісної проблеми розмірності. Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J = \int_0^T F(x(t), y(t)) dt , \quad (1.6)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – вектор стану (темпи виробництва); $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор управління. Вектор-функції $x(t), y(t)$ пов'язані системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} x_i = G_i(x(t), y(t)), \quad x_i(0) = c_i > 0, \quad i = 1..N \quad (1.7)$$

і на вектор-функцію $y(t)$ – управління накладено обмеження

$$0 \leq y_i \leq x_i, \quad i = 1..N . \quad (1.8)$$

Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими. Розв'язання багатовимірної задачі в загальному випадку теж має ділянки "все в розвиток", "ейлерова ділянка", "все в накопичення" [7, 9, 11].

Окремий випадок – задача Марковица–Беллмана [8]. В цьому випадку критерій і обмеження є адитивними функціями (сумами). Більшість актуальних практичних задач належать саме до цього підкласу задач розподілення.

В децентралізованій системі виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ (в задачі 1 через x позначались витрати ресурсу). Продукція може йти в накопичення або на збільшення виробничих потужностей. Задані рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt} x(t)_i = \text{fin}_i(y(t)_i) = \text{fin}_i(xs(t) \cdot u_i),$$

де $\text{fin}_i(y(t)_i)$ – функція розвитку для i -го виробництва, що належить до класу невід’ємних нестрого монотонно зростаючих функцій,

$xs(t) = \sum_{j=1}^N x(t)_j$ – сумарне виробництво в момент t ; $0 \leq u(t)_i \leq 1$ –

управління, відповідно, це частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей з i -го продукту. Для управлінь виконується умова нормування (обмеження на управління):

$$\sum_{j=1}^N u(t)_j + unak(t) = 1,$$

де $0 \leq unak \leq 1$ – частка ресурсів, що йде в накопичення. Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку – вектор-функцію $uop(t)$, що максимізує інтегральний критерій – сумарний накопичений випуск за плановий період T

$$JN = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N x(t)_j \right) \cdot unak(t) dt.$$

На відміну від більшості робіт з оптимізації, того часу і сучасних, Беллман не обмежувався випадком випуклих і гладких (таких що мають першу і другу похідні) функцій F та G . Він отримав і проаналізував розв’язання задачі розподілу для випадків випуклих та невивуклих функцій. Причому отримав загальні розв’язки задачі альтернативними методами – варіаційного числення і динамічного програмування.

Беллман знайшов загальну методику розв’язання таких задач для випадку лінійних рівнянь динаміки виробничих потужностей. Оптимальні управління (стратегії) в цьому випадку є розривними – вони складаються з двох інтервалів – "все в розвиток", "все в накопичення". Складність рівнянь для визначення відповідних моментів переключення управлінь швидко зростає з ростом розмірності виробничої системи.

Задача розподілу ресурсу при невизначеності. Урахування невивуклості ВФ в задачі 1 (однокрокової оптимізації) суттєво змінює і ускладнює цю тривіальну задачу нелінійного програмування [77].

Однак, урахування невизначеності і нестационарності ВФ навіть за умови випуклості ВФ теж робить задачу 1 повністю непридатною для розв'язання методами нелінійного програмування.

Для задач з адитивними критерієм і обмеженнями використовуються метод метаігрового синтезу [25, 26, 77], суть якого в тому, що кожному елементу системи приписується власний критерій і виділяється змінна управління. Змістовно це означає, що елемент "сам вирішує" скільки йому брати ресурсу і виробляти продукту, щоб максимізувати "свій" локальний критерій.

В техніці, зокрема, в обчислювальній техніці і програмуванні, існують продуктивні напрями, в основі яких лежить аналогія з екологічними та біологічними системами, зокрема – з неймережами живих організмів. Штучні нейронні мережі – продуктивний напрямок для розв'язання складних задач, існує також не менш продуктивний напрямок в теорії і практиці великих розподілених систем на базі аналогії – "штучні соціальні мережі" або "колективна поведінка автоматів" [12, 34, 45, 66, 77, 100, 104, 114].

Термінологія напрямку "штучні соціальні системи": "ціни", "попит", "кредити", "рішучість", "прибуток", "обережність" – зручні назви параметрів обчислювальних алгоритмів. Будемо враховувати ці особливості при подальшому розгляді методів на базі колективної поведінки та метаігрового синтезу [8, 25, 73, 77, 97, 100, 105].

Ідея методу метаігрового синтезу в побудові неперервної або дискретної системи управління зі зворотними зв'язками. Можна вибрати структуру і параметри управління так, що система буде стійкою до збурень і невизначеностей, а усталений стан буде близьким до глобально оптимального.

Управління в такій системі складається з координаційного управління (яке зручно інтерпретувати як ціни ресурсів і продуктів) і локальних управлінь, що виконуються елементами. Особливість такої системи, що в ній не тільки виробництво, але й управління є децентралізованим.

На цих ідеях можлива побудова ефективних методів розв'язання задач лінійного програмування високої розмірності: ми фактично розпаралелюємо задачу пошуку екстремуму функції N змінних в N задач пошуку екстремуму однієї змінної. Метагра – гра, що повторюється. Метаігровий синтез – отримання близького до оптимального розподілу ресурсу після кінцевої кількості кроків ігрового розподілу ресурсу.

Формалізуємо словесну модель. Процес розподілу ресурсу методом метаігрового синтезу відкритого управління можна подати системою нелінійних, нестационарних різницевих або диференціальних рівнянь

[77]. В цій системі кожному елементу відповідає диференціальне рівняння. Воно характеризує "виробничу діяльність" елемента. Елемент може управляти тільки однією – власною змінною x_i . Інтерпретація цих змінних – заявки на ресурс. Елемент вибирає x_i так, щоб максимізувати значення своєї локальної цільової функції. Щоб підкреслити цю певну автономність елементів, такі системи називають "ансамблями динамічних систем" (АДС).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \frac{d}{dt} x_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \frac{d}{dt} x_N &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} x = F(x).$$

Для АДС в цілому задано глобальну цільову функцію – звичайно сумарне виробництво. Розглянемо дискретну модель функціонування АДС. Деякий "центральный орган" визначає за певними правилами координаційне управління – "ціну" ресурсу та кількості ресурсів для кожного елемента y_i . Залежність наступного вектора "заявок" елементів від попереднього можна подати різницеvim рівнянням:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Gamma_k \cdot (F(x^{(k)}) - x^{(k)}), \quad (1.9)$$

де $F(x^{(k)})$ – оператор міжелементних зв'язків; $\Gamma_k = \text{diag}(\gamma_{1,k}, \dots, \gamma_{n,k})$ – матриця коефіцієнтів підсилення зворотних зв'язків, що вибираються з діапазону $\gamma_{1,k} \in (0,1)$. Ще раз нагадаємо, що "заявки", "ціни" – параметри алгоритмів пошуку екстремуму. Вектор коефіцієнтів Γ_k вводиться для забезпечення досить швидких і одночасно стійких перехідних процесів до усталеного стану. Звичайно ці коефіцієнти з часом процесу зменшуються.

Перша важлива для практики ітеративних і пошукових обчислювальних методів задача – визначення стійкості та станів рівноваги системи. Виходячи із моделі АДС можна бачити, що точка рівноваги – це так звана "нерухома точка оператора міжелементних зв'язків". Ця точка може бути знайдена з рівняння

$$x = F(x).$$

Іноді зручніше розглядати оператор $G(x) = F(x) - x$, тоді умова рівноваги може бути записана у вигляді:

$$G(x) = 0.$$

Задача знаходження оптимального розподілу обмеженого ресурсу на базі принципу відкритого управління є окремим випадком метаігрового синтезу. Одним з найбільш поширених і потенційно продуктивних методів метаігрового синтезу (алгоритму децентралізованого пошуку екстремуму функції багатьох змінних) є метод відкритого управління (інші назви – принцип відкритого управління, механізми відкритого управління, принцип чесної гри – калька з англійського).

Є дві причини, з яких задача визначення оптимального розподілу ресурсу стає багатокроковою і розподіленою між елементами:

1) за рахунок розпаралелювання зменшується обчислювальна складність задачі.

2) за рахунок зворотних зв'язків фактично виконується ідентифікація невизначених і нестационарних виробничих функцій елементів.

Саме можливість ідентифікації невідомих виробничих функцій елемента і є головною перевагою методу відкритого управління.

Сформулюємо принцип відкритого управління для задачі розподілу обмеженого ресурсу [26, 38, 77]. Координаційне управління верхнього рівня – ціна ресурсу λ (беремо те саме означення, що і для множника Лагранжа в задачі M1 – математична функція цієї змінної управління є подібною). Природно локальний критерій елемента взяти у вигляді

$$D_i = f_i(r_i, a_i) - \lambda \cdot r_i, \quad (1.10)$$

де $f_i(r_i, a_i)$ – виробнича функція елемента; r_i – кількість ресурсу отриманого елементом; a_i – параметр (звичайно вектор параметрів, неповністю відомий); λ – поточна "ціна" ресурсу. Важко не побачити таку інтерпретацію критерію: "прибуток = доход – витрати".

На кожному кроці елементи подають "заявки" x_i .

Суть принципу відкритого управління в цьому випадку в тому, що "центр" вважає заявку елемента значенням параметра ВФ: $a_i = x_i$, а за локальний критерій елемента приймає вираз

$$Dv_i = f_i(r_i, x_i) - \lambda \cdot r_i. \quad (1.11)$$

Зауважимо, що в інших методах метаігрового розподілу заявки можуть означати бажану кількість ресурсу та ін.

Далі "центр" знаходить для кожного елемента кількість ресурсу, що максимізує критерій елемента (1.11) при обмеженні

$$R - \sum_{i=1}^N r_i = 0.$$

В результаті може бути отриманий вираз для критерію елемента, як функції усіх змінних управління $D_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

При умові випуклості ВФ усіх елементів, легко довести, що максимуми локальних критеріїв досягаються, коли заявки усіх елементів дорівнюють параметрам виробничих функцій [77]. Можна це трактувати як: "вигідно повідомляти про себе правду".

Перейдемо тепер до аналізу відкритого управління, як процесу, що описується рівнянням $\frac{d}{dt}x = F(x)$, де $F(x)$ – оператор міжелементних зв'язків. Вважаємо, що елементи формують "заявки" на базі індикаторної поведінки. Тоді точка рівноваги (це точка Неша для гри, тобто, точка рівноваги системи, від якої кожному елементу не вигідно відходити – при незмінних стратегіях інших елементів він тільки втрачає) визначається системою рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i = 0, \quad i = 1..N.$$

З цих рівнянь визначаються компоненти оператора міжелементних зв'язків

$$F(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)).$$

Кожна компонента $\phi_i(x)$ визначається як розв'язання рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \phi_i(x), \dots, x_N) = 0,$$

яке після ряду перетворень для випуклих ВФ класу $y_i = \alpha_i \cdot \sqrt{r_i}$ приводиться до виду [77]

$$(\sigma_i)^2 \cdot (\alpha_i - \phi_i(x)) = \frac{1}{2} \cdot (\phi_i(x))^3, \quad (1.12)$$

$$\text{де } (\sigma_i)^2 = \sum_{(j \neq i)} (x_j)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j)^2 - (x_i)^2.$$

Монотонність. З (1.12) видно, що $\phi_i(x)$ – монотонно зростаюча функція від $(\sigma_i)^2$. Тому і оператор $F(x)$ – монотонний, випуклий ("вгору"), має нерухому точку (стан рівноваги).

Випуклість. Можна довести, що оператор є випуклим (вгору). Для цього потрібне виконання умови: $\phi_i(\tau \cdot x) > \tau \cdot (\phi_i(x))$; $x_i \geq 0$; $\tau \in (0,1)$.

Нехай $f(x)_i = a_i$ – розв’язання рівняння (1.11). Введемо b_i таке, що

$$(\sigma_i)^2 \cdot (\alpha_i - b_i) = \frac{1}{2} \cdot (b_i)^3 \quad (1.13)$$

Потрібно довести, що $b_i > \tau \cdot a_i$. Замінімо в (1.13) b_i на $\tau \cdot a_i$.

$(\sigma_i)^2 \cdot (\alpha_i - \tau \cdot a_i) = \frac{1}{2} \cdot (\tau \cdot a_i)^3$. Після заміни ліва частина стає більшою від правої, але ліва частина зменшується по b_i , а права – збільшується, тому $b_i > \tau \cdot a_i$. Таким чином, оператор $F(x)$ – випуклий (вгору).

Нерухома точка. Розв’язання рівняння (1.13) – умови стаціонарності – існує тільки в діапазоні $0 < \phi_i(x) < \alpha_i$. Таким чином, усі розв’язки (1.12) $\phi_i(x)$ належать інтервалам $(0, \alpha_i)$, це значить, що повинна бути точка $x_0 = F(x_0)$. Внаслідок випуклості ця точка стійка.

Нагадуємо, що все це отримано для випадку виробничих функцій $y_i = \alpha_i \cdot \sqrt{r_i}$ – випуклих (вгору).

В [25, 26, 31] розглянуті альтернативні механізми метаігрового розподілу ресурсу: метод зворотних пріоритетів, конкурсні механізми та методи на базі принципу аукціону. **Збіжність до оптимального стану в цих методах строго доведена лише для випадку випуклих ВФ і малих розмірностей задачі.**

В [77] проведено узагальнюючий аналіз подібних метаігрових методів розподілу ресурсу і показано їх еквівалентність щодо оптимальності усталеного стану, при виконанні певних обмежень – випуклості та умови слабого впливу – відсутності монопольних ефектів. Сформульовано "принцип мінімально розумного управління" (МРУ).

Таким чином, невідомі ефективні методи оптимізації для виробничих систем з невивуклими ВФ елементів і монопольними ефектами, коли елементи мають велику різницю у "виробничих потужностях".

1.3. Класифікація узагальнених моделей виробничих функцій. Аналіз моделей виробничих функцій

Головна складова розглянутих в підрозділі 1.2 задач розподілу ресурсу – узагальнені моделі виробничих функцій (ВФ) – характеристики елементів системи, як технологічних перетворювачів ресурсу в продукт. Ми називаємо ці залежності узагальненими ВФ, щоб підкреслити інваріантність задач оптимізації і моделювання відносно

змістовної інтерпретації "ресурсу" і "продукту". Це може бути певний неперервний або дискретний продукт, енергія, послуги, інформація, засоби виробництва. Наведемо декілька загальних визначень виробничої функції з підручників і монографій.

“Математическая функция, ставящая в соответствие количественным характеристикам использования производственных факторов внутрихозяйственной единицы количественные характеристики выпуска продукции” [49].

“Функция, определяющая зависимость между затратами производственных факторов и выпуском продукции” [52].

“Количественное соотношение, описывающее технологическую зависимость между затратами производственных факторов и результатами деятельности производственного объекта” [61].

“Математична модель виробничої системи, як технологічного перетворювача ресурсів” [64].

Поняття ВФ вважається корисним наближенням, що в одних умовах є припустимим, а в інших – ні [25, 26, 77]. Далі розглядаються саме моделі ВФ, однак, згідно з прийнятою в літературі термінологією будемо використовувати за замовчуванням термін "виробнича функція" замість "математична модель виробничої функції". В класифікаційній схемі будемо виходити не тільки із загальних властивостей існуючих технічних і технологічних систем, але і перспектив їх розвитку на базі інтелектуалізації виробничих систем і продукції – вбудовування мікроконтролерних систем контролю і управління. Саме такий приклад – сучасний автомобільний двигун – ми розглянули в підрозділі 1.1. Деякі з моделей класифікаційної схеми можуть мати реальні прототипи, деякі – бути чисто віртуальними клітинками "морфологічного ящика".

Розрізняють короткотермінову ВФ і довготермінову ВФ [15, 25, 26, 30, 49, 66, 97].

Короткотермінова ВФ – зміна потрібного темпу виробництва досягається тільки параметричними змінами в технологічному перетворювачі. Наприклад, в енергетичних агрегатах – двигунах внутрішнього згорання, газових і парових турбінах для зміни потужності змінюється темп подачі головного ресурсу – палива, а всі інші ресурси і параметри процесу (подача кисню, тиск, температура, та ін.) змінюються так, щоб оптимізувати режим цієї потужності. Велика кількість технологічних перетворювачів є фактично однорежимними. Це хімічні реактори, де йде неперервний процес в одному оптимальному і безпечному режимі, різні види ракетних двигунів. Регулювання виходу в таких виробництвах досягається за рахунок імпульсного включення єдиного технологічного агрегату, або за рахунок включення і виключення агрегатів з однаковими або різними

оптимальними потужностями.

Довготермінова ВФ. Можливі ситуації, коли навантаження (потрібний темп виробництва) зростає стабільно і досить повільно. Наприклад, потреба в певній продукції зростає на 5% за місяць. В таких випадках регулювання виконується за рахунок структурних змін у виробництві – встановленням додаткових агрегатів, модифікацією існуючих або заміною їх на більш досконалі і потужні. Чіткої межі між короткотерміновими і довготерміновими ВФ не існує.

Параметричний клас ВФ. Виробничі функції можуть бути задані:

1) таблично – масивом пар значень (x_k, y_k) ;

2) наближенням за допомогою певної стандартної функції $y = f(x, p)$,

де p – вектор параметрів функції;

3) породжуючим механізмом – системою диференціальних або різницевих рівнянь, розв’язання яких при фіксації часу дають вирази для поточної виробничої функції.

Ідеальний випадок для теорії і практики – коли знайдений саме механізм, "генератор" [79] виробничої функції для цього технологічного перетворювача. Однак, як було відзначено вище, в цьому випадку поняття виробничої функції як статичної залежності $y = f(x, p)$ зникає.

До параметричного класу віднесемо ВФ, що відрізняються тільки значеннями вектора параметрів, тобто, якщо дві ВФ: $f_1(x, p_1, p_2, p_3)$ та $f_2(x, p_1, p_2, p_3)$ належать до одного параметричного класу, то

$$f_1(x, p_1, p_2, p_3) \equiv f_2(x, p_1, p_2, p_3).$$

Оптимальні розподіли ресурсів для систем з функціями одного параметричного класу мають корисні властивості. На практиці при визначенні параметричного класу ВФ звичайно використовують не більше трьох параметрів.

Визначимо еволюцію в загальному плані, як процес зміни станів в системі, що не досягла стаціонарного (усталеного) стану. Еволюція є нечітким поняттям. Конкретизувати поняття еволюції можна введенням системного поняття ієрархії [73]: системи синтезуються з частин (компонентів), компоненти системи є також системами. Для сучасних виробничих систем характерні еволюційні процеси зростання. Суть ієрархічного подання систем, що еволюціонують в тому, що підсистема деякого ієрархічного рівня є динамічною системою, змінні стану якої є параметрами для системи нижчого рівня ієрархії, а параметри цієї системи є змінними стану системи вищого рівня ієрархії (див. рис. 1.7). Природно взяти для кожного рівня ієрархії одну й ту ж модель динаміки процесу, а з точки зору відповідності емпіричним даним і законам фізики природно взяти за таку базову модель диференціальне зростання з

обмеженням

$$\frac{d}{dt}x = f(x, y_p, y_m, V_p),$$

де V_p – вектор параметрів; y_p, y_m – позитивні і негативні впливи на зростання:

$$y1_p(t) \geq y_p(t) \text{ спричиняє } f(x, y1_p, y_m, V_p) \geq f(x, y_p, y_m, V_p);$$
$$y1_m(t) \geq y_m(t) \text{ спричиняє } f(x, y_p, y1_m, V_p) \geq f(x, y_p, y_m, V_p).$$

М. Пешелем [79] запропоновано підхід до моделювання еволюційних процесів на базі ієрархії елементарних процесів росту з обмеженням. На рис. 1.7 подано схему "механізму породження" для виробничої системи – "вежі" з елементарних процесів. На кожному рівні діє механізм зростання з обмеженням, що має внутрішні зворотні додатні і від'ємні зв'язки (33) та зовнішні входи від вищого рівня ієрархії. Для виробничої системи рівні ієрархії інтерпретуються як:

- 1) розробка виробів і технологій – це фактично "виробництво інтелектуальної продукції";
- 2) створення виробничих фондів – створення засобів виробництва;
- 3) виробництво продукції – виробництво кінцевих (для цієї виробничої системи) виробів.

Зауважимо, що у великих системах зв'язки між рівнями замикаються. В цій роботі ми обмежуємося моделями рівнів 2 і 3 з урахуванням дії механізмів розвитку. В класифікації ми повинні відобразити результати дії механізму породження. Ієрархічна модель процесів розвитку добре узгоджується з емпіричними даними про "швидку" і "повільну" виробничу функцію виробничої системи.

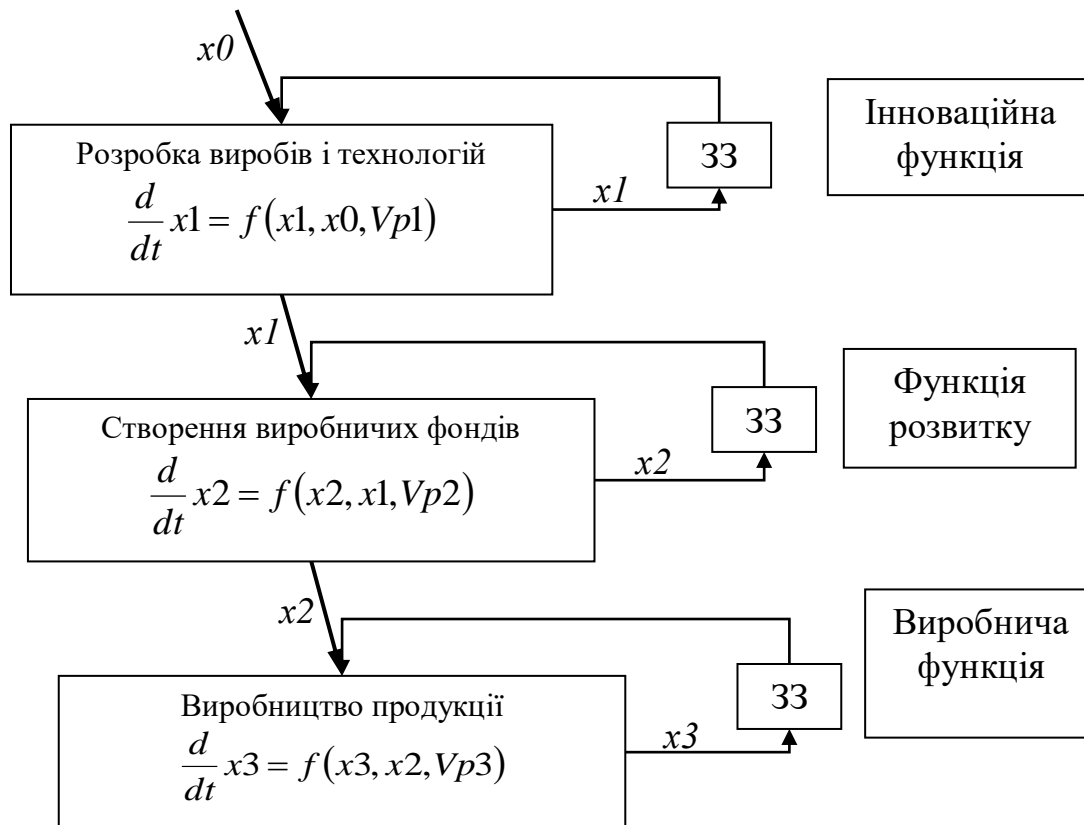


Рис. 1.7. Структура механізму породження для виробничої системи

В цій роботі виробничі функції розглядаються як зовнішній емпіричний факт, досить пояснений і обґрунтований теоретично. І ми приймаємо цей факт з обов'язковим урахуванням нечіткості цього поняття. Також ми дотримуємося твердження, що наближення ВФ в класі випуклих функцій є менш реалістичним, ніж наближення в класі увігнутовипуклих функцій (S-функцій).

Аналіз задач і методів оптимізації розподілу ресурсів у виробничих системах показав, що більшість з них базується на припущеннях про випуклість ВФ. В літературі [25, 26, 49, 77, 105] даються обґрунтування використання випуклих ВФ: обмеженість природних ресурсів, фізичні обмеження технологічних процесів та конструкційних матеріалів. Ще одним виправданням для використання випуклих ВФ була обмеженість припустимого інтервалу для вхідної змінної ВФ (рис. 1.8 а).

Однак, для сучасних виробничих систем характерні суттєві коливання рівня виробництва. Коли припустимий інтервал для вхідної змінної виходить за випуклості ВФ (рис. 1.8б), то необхідно застосовувати аналітичні і обчислювальні методи, придатні для невивуклих задач. В таких випадках оптимальні розв'язання будуть належити до зовсім іншого класу [2, 8, 25, 45, 49, 105].

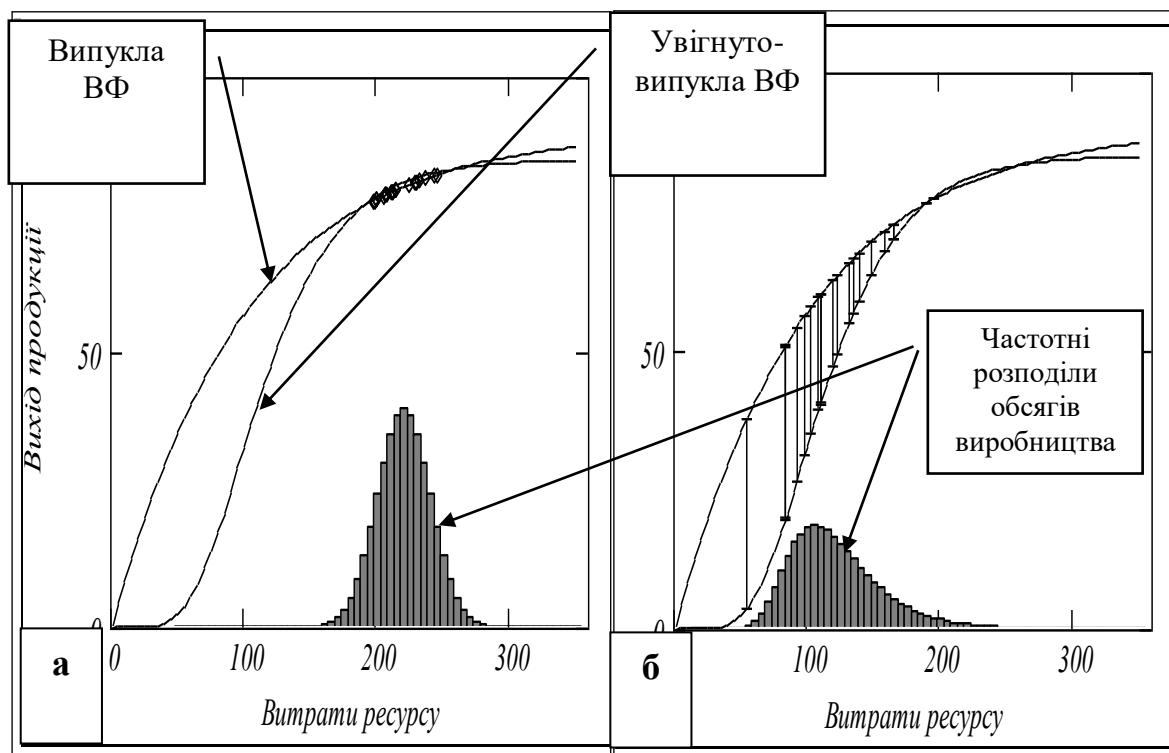


Рис. 1.8. Еволюція коректності випуклих моделей виробничих систем

Проблеми невиконання ВФ найбільш широко аналізуються і досліджуються в США і на теоретичному і суто практичному рівнях.

Індикатором актуальності проблеми стала поява спеціальних термінів для виробництв із зростаючою продуктивністю: “ n^2 value”, “increasing return” [109–113].

Формалізуємо поняття випуклих і невиконаних ВФ і обґрунтуємо вибрану нами термінологію [47, 49]. Виробнича функція. Залежність $y = f(x)$, що на інтервалі визначення $0 \leq x \leq xm$ задовольняє умови

$$y \geq 0, x_2 > x_1, f(x_2) \geq f(x_1).$$

Враховуємо існування дискретних виробництв, чому й ВФ і їхні похідні можуть бути розривними. Випукла виробнича функція. ВФ, що на інтервалі визначення $0 \leq x \leq xm$, крім (1.13) додатково задовольняє умови

$$\begin{aligned} x_1 \in (0, xm), 0 \leq \lambda \leq 1, (1-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x_1 \in (0, xm). \\ (1-\lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x) \leq f[(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Багатовимірна ВФ. Темп виробництва може залежати від декількох видів ресурсів. Якщо існує можливість взаємної конвертації

ресурсів, то завжди можна виконати задачу субоптимізації – побудувати ВФ, що залежить від одного базового ресурсу, який розподіляється так, щоб максимізувати темп виробництва. Розв’язання задачі такого класу розглянуте в [15].

Наведемо канонічне визначення випуклої багатовимірної функції з [15]. Функція f , що визначена на множині $X \subset R^n$ (R – множина дійсних чисел; R^n – відповідна множина n -вимірних векторів) називається випуклою в деякій точці x_1 , якщо з умов

$$\begin{aligned} x \in X, 0 \leq \lambda \leq 1, (1-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x_1 \in X \text{ впливає} \\ (1-\lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x) \leq f[(1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Якщо остання нерівність є строгою для $x_1 \neq x$, то функція є строго випуклою. Якщо змінити знак нерівності, то отримаємо визначення увігнутої функції.

Розглянемо два приклади лінгвістичних моделей механізмів формування виробничих функцій.

Приклад 1. Узагальнена термохімічна система (реактор). При малих рівнях витрат ресурсу система працює неефективно (мала температура, мала інтенсивність взаємодії речовин та ін.), в певному діапазоні витрат ресурсу система працює в режимі близькому до оптимального (оптимальні температура, концентрація та ін.), при подальшому підвищенні витрат ресурсу ефективність системи падає (підвищення температури обмежено властивостями матеріалів і вимогами безпеки, речовини не встигають прореагувати та ін.).

Приклад 2. Підсистема розширення виробництва. При малих рівнях витрат ресурсу система працює неефективно (обсяги робіт малі відносно фондів і штатів, які все одно треба утримувати та ін.), в певному діапазоні витрат ресурсу система працює в режимі близькому до оптимального (фонди і штати оптимально завантажені та ін.), при подальшому підвищенні витрат ресурсу ефективність системи падає (перевантаження фондів і персоналу та ін.).

Цим словесним описам відповідає функція увігнута при малих значеннях витрат ресурсу і випукла при великих. Подібні функції використовуються в теоріях корисності і прийняття рішень і в нейронечітких мережах – як функції належності і порогові функції [30, 31, 41, 42, 48, 83, 85].

Формалізуємо увігнуто-випуклу ВФ (інша назва: S-функція). Строго монотонна виробнича ВФ належить до класу S-функцій, якщо в інтервалі визначення $(0, xm)$ існує точка $xpg: 0 < xpg < xm$, така, що на інтервалі $0 \leq x \leq xpg$ ВФ є увігнутою, а на інтервалі $xpg < x \leq xm$ –

випуклою. Альтернативне означення: строго монотонна ВФ належить до класу S-функцій, якщо в інтервалі визначення похідна від ВФ має один максимум. Очевидно, що випадок: максимум похідної на лівій границі інтервалу $(0, x_m)$ відповідає випуклій ВФ, а випадок: максимум похідної на правій границі – увігнутій ВФ.

На рис. 1.9 подано S-функцію, її похідну, точку перегину та функцію-індикатор увігнутості, що дорівнює одиниці, коли функція в цій точці увігнута, і нулю – коли випукла. Індикатор обчислено за умовою (1.14).

Поняття випуклості/невипуклості спочатку застосовувались тільки у математиці, сьогодні з розширенням практичних застосувань математичних методів в інженерній практиці, відбуваються певні зміни в термінології.

В літературі існують три версії термінології відносно випуклості (*concave*) та увігнутості (*convex*) [49, 79, 105]:

- а) класична, поширена в математичних роботах, фактичний стандарт;
- б) "інженерна", що поширюється в прикладних роботах;
- в) перехідна з термінами "випукла вгору" та "випукла вниз".

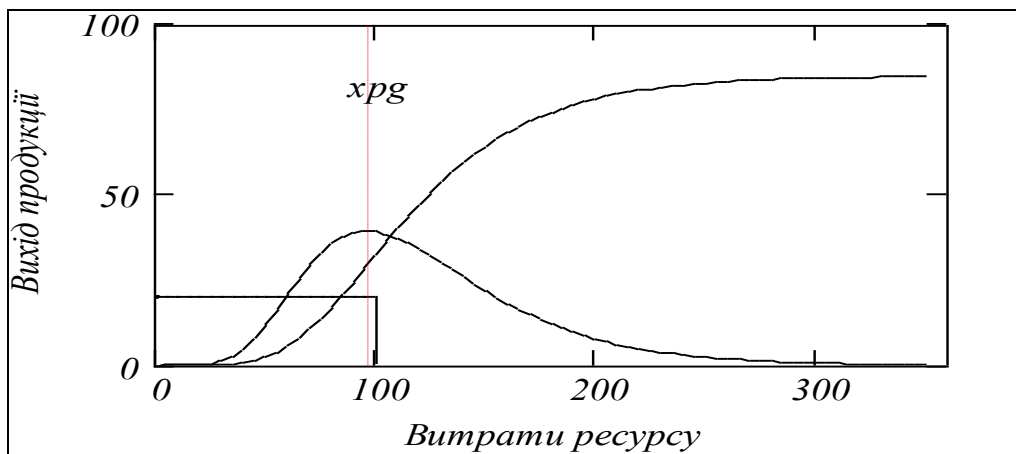


Рис. 1.9. До визначення S-функції

Згідно з класичною термінологією (рис. 1.10) границею **випуклої множини** (області) є **увігнута функція**. В літературі відхід від класичної термінології мотивується так: "...используются понятия выпуклости вверх и выпуклости вниз, более подходящие с точки зрения естественности восприятия их человеком" [49].

Тобто, математики кажуть так: а всім іншим природно говорити так:

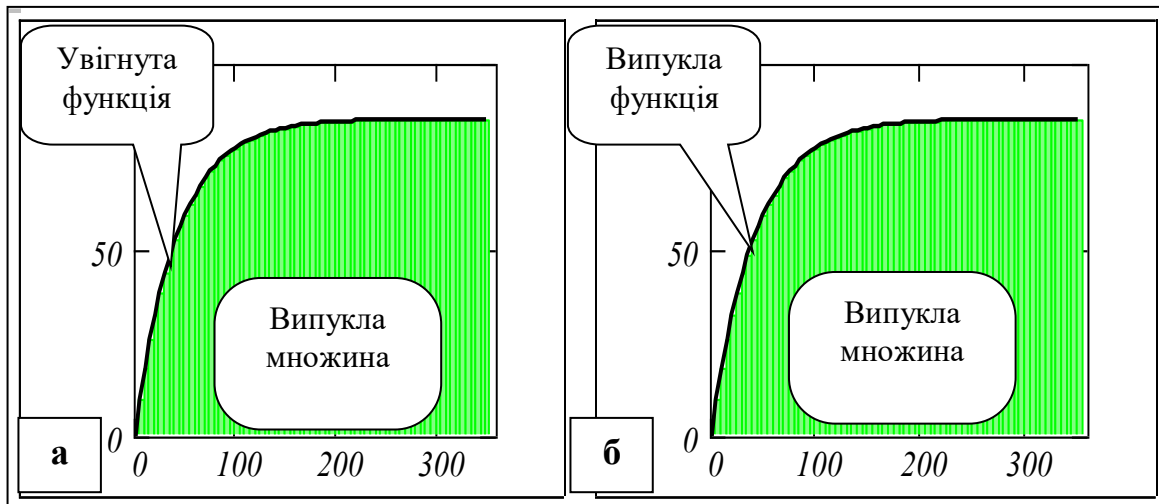


Рис. 1.10. Випуклість. Альтернативні термінології

Класифікація моделей виробничих функцій. Для класифікації виробничих функцій вибираємо такі бінарні ознаки:

- 1) "стаціонарність": стаціонарна – нестаціонарна;
- 2) "детермінованість": детермінована – імовірнісна.

За ознакою "випуклість" виробничі функції класифікуємо на:

- 1) випуклі, 2) увігнуті, 3) увігнуто-випуклі (S-функції).

Випуклі і увігнуті ВФ розділяємо на строго і нестрого випуклі, строго і нестрого увігнуті.

В цій роботі нестрого випуклі і увігнуті ВФ – це кусково-лінійні апроксимації та кусково-лінійні ВФ для дискретних виробництв. Невипуклі (увігнуті та увігнуто-випуклі) ВФ породжують комплекс важких практичних і математичних проблем, які обчислюються в першу чергу. Запропонована класифікація орієнтована на числові методи розв'язання задач оптимального розподілу ресурсів.

Класичні задачі розподілу ресурсів базувалися на припущеннях про випуклість ВФ і додатково – про належність елементів виробничої системи до одного параметричного класу ВФ. Сьогодні "екологічна ніша" для класичних задач – стабільні і за технологією, і ринками галузі – наприклад текстильне, гірничодобувне виробництво.

Для некласичних задач потрібен комплекс досить складних методів, спеціалізованих відносно певних класів цих задач. На рис. 1.11 подано класифікацію стаціонарних і нестаціонарних ВФ з прикладами відповідних ВФ різних параметричних класів.

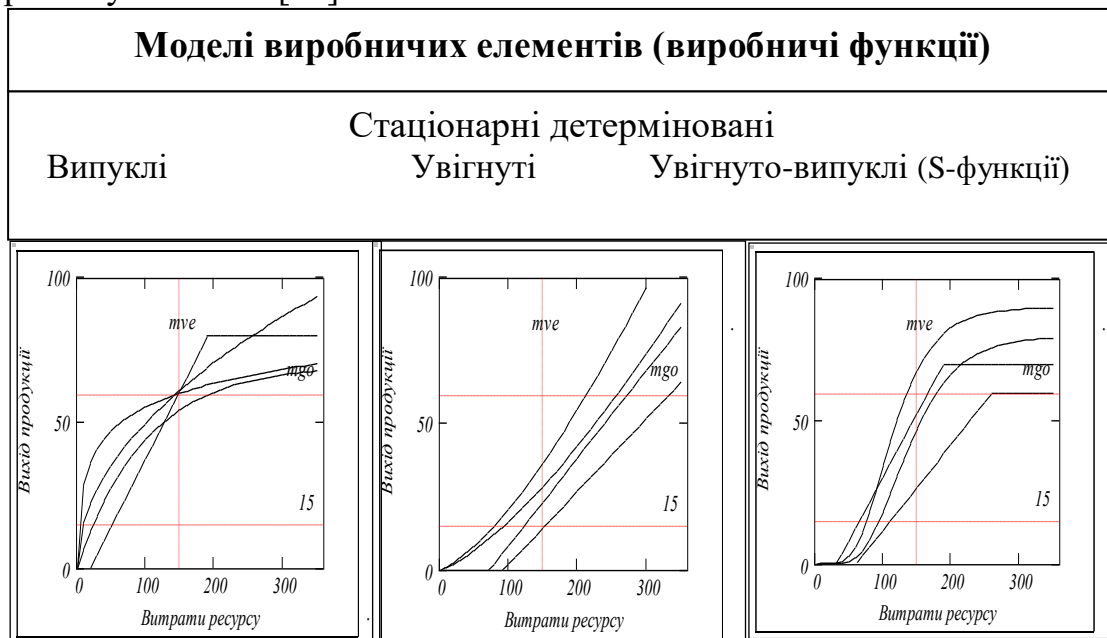
На базі запропонованої класифікації розроблено програмну систему "бібліотека виробничих функцій" (розділи 2 і 3). Під кожний клас елементів і систем розроблено робочі моделі. ВФ характеризується чотирма параметрами: номером класу, "амплітудою" – максимальним значенням у діапазоні визначення, "частотою" – максимальним

значенням похідної, "увігнутістю". Кожна конкретна ВФ є точкою чотиривимірного масиву. Конкретна виробнича система характеризується матрицею цих параметрів – матрицею з $N \times 4$ чисел. Це дає можливість векторизації обчислень при моделюванні і оптимізації виробничої системи.

На рис. 1.11 подано класифікацію стаціонарних і нестаціонарних ВФ з прикладами відповідних ВФ різних параметричних класів. Це, фактично, границя моделей виробничих функцій. Розглянемо декілька таких ВФ, графіки яких подані на рис. 1.12.

Модель Венди [29]. Область застосування – виробництво інформаційної (обробка інформації) та інтелектуальної (синтез нової інформації) продукції. Маємо дві технології (два способи дій). В усталеному стані кожен спосіб має переваги в своєму діапазоні витрат ресурсу. Спосіб дій вибирається випадково. З часом випадковість зменшується – для кожного значення витрат ресурсу (інтенсивності дій) детерміновано вибирається кращий спосіб.

Модель Зіпфа–Парето ще далі відходить від статичної моделі виробничої функції. Область застосування – нові виробництва наукомісткої, високотехнологічної продукції. Приклади таких виробництв – розробка складних програм, мікропроцесорів. Математична модель процесу належить до класу імовірнісних процесів з розгалуженнями [15].



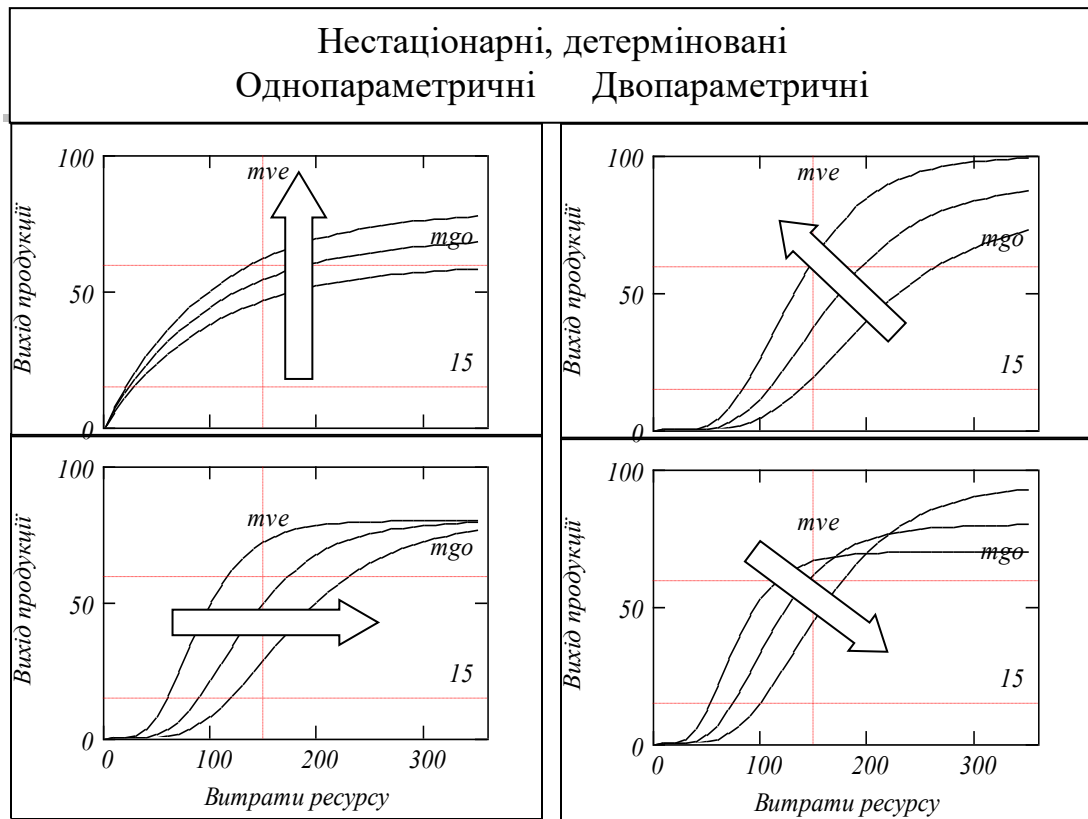


Рис. 1.11. Класифікація виробничих функцій

На рис. 1.12 подано дві реалізації процесу "песимістична" і "оптимістична". Бачимо що ВФ такого класу є увігнутою і стохастичною.

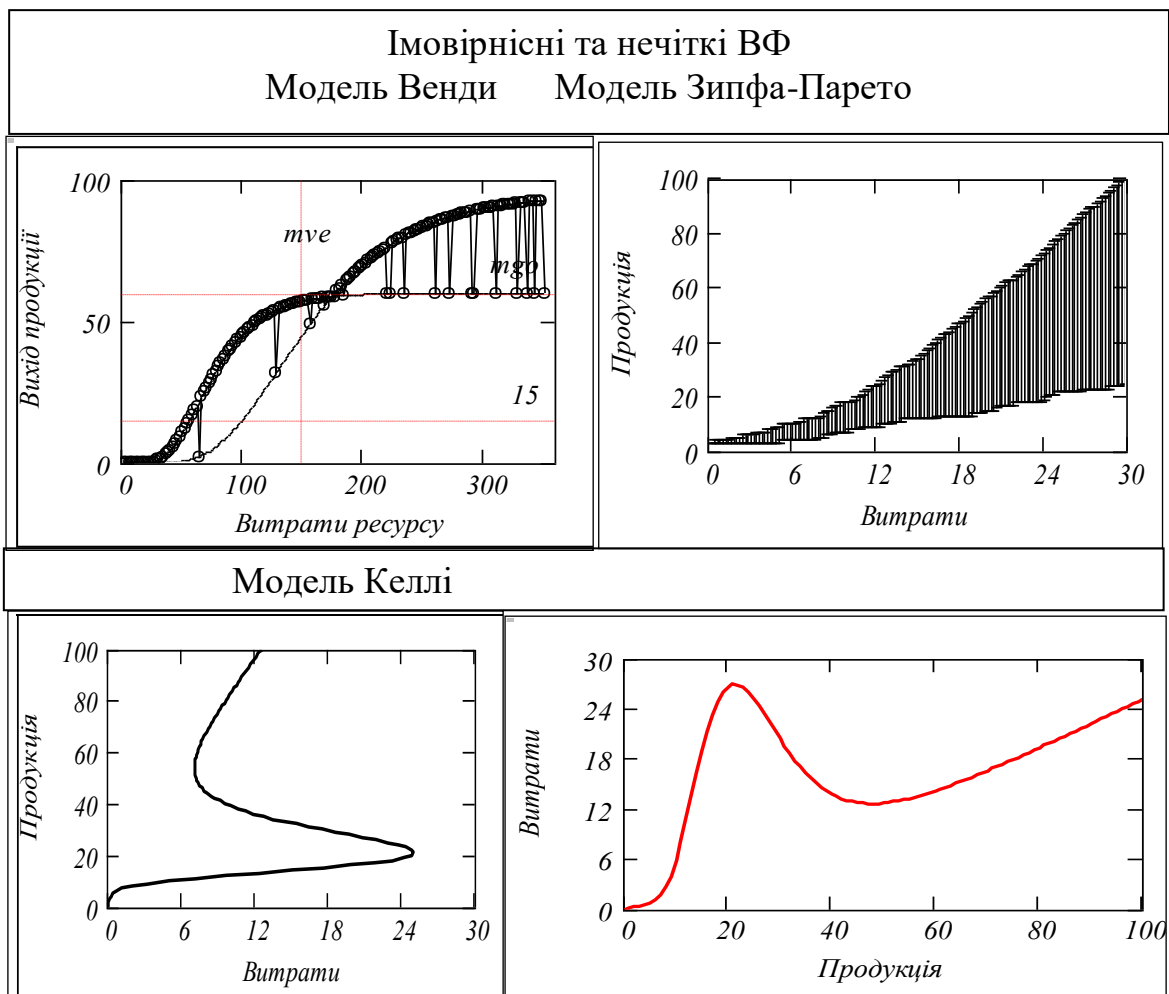


Рис. 1.12. Класифікація виробничих функцій. Імовірнісні і нечіткі виробничі функції

Модель Келлі [110] відображує суть сучасних виробничих систем. Вирвана з контексту суть цих систем здається парадоксальною: якщо ми збираємось виробляти продукт, що не вимагає дефіцитних ресурсів і може продукуватись штампуванням і копіюванням, то повна вартість виробництва 1.000.000 одиниць буде меншою, ніж повна вартість виробництва 100.000 одиниць (числа умовні).

Такий ефект забезпечується узгодженою дією трьох процесів (рис. 1.7) – виробництва, розширення виробництва, інноваційної діяльності: розробки та наукових досліджень.

Класифікація моделей виробничих систем. Для класифікації виробничих систем введемо ознаки класифікації:

- випуклість/невипуклість ВФ елементів. Невипуклою системою вважаємо таку, що має хоч один елемент з невивуклою ВФ;
- однорідність/неоднорідність. Неоднорідною системою вважаємо таку, що має хоч один елемент іншого параметричного класу.
- домінованість/недомінованість – змістовно системою з

домінуванням назвемо таку, де на всьому діапазоні рівня обмеження по ресурсу ранги елементів не змінюються. Система випуклих функцій одного структурного класу є завжди системою з домінуванням.

Формалізуємо ознаку "домінування". Розглядається система з N паралельно працюючих елементів з виробничими функціями $f_i(x)$. Для кожного значення витрат ресурсу x з діапазону визначення ВФ $0 \leq x \leq xm$ визначимо вектор рангів елементів $vr(x)$, компоненти якого $vr(x)_i, i=1..N$ – ранги елементів визначені сортуванням вектора $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x))$.

Будемо вважати, що k -й елемент виробничої системи строго домінує над j -м елементом на інтервалі $x_1 \leq x \leq x_2$, що належить до інтервалу визначення, якщо для всіх точок інтервалу має місце $f_k(x) > f_j(x)$.

Аналіз ситуацій домінування нас цікавить тільки в плані аналізу властивостей оптимальних розподілів ресурсу між елементами виробничої системи і побудови алгоритмів обчислення оптимальних розподілів. З цієї досить утилітарної точки зору всі можливі ситуації домінування елементів виробничої системи знаходяться між двома крайніми ситуаціями, які назвемо: "виробнича система з домінуванням" та "виробнича система без домінування", усі інші ситуації назвемо "виробничі системи з довільним домінуванням".

При бажанні можна побудувати деталізовану класифікацію, але для цілей цієї роботи достатньо поданої. Наприклад, при використанні аналітичних методів важливо, чи є функція логарифмічною, чи степеневою. Для числових методів має значення тільки факт випуклості. Визначимо ці ситуації і відповідні класи систем. Виробничу систему з домінуванням визначимо як систему, де вектор-функція рангів елементів не змінюється на всьому інтервалі визначення

$$vr(x) = const, 0 \leq x \leq xm.$$

Виробничу систему без домінування визначимо як систему, де для кожного i -го елемента існує ненульовий інтервал $In_i = (x_{1i}, x_{2i})$, $x_{1i} \neq x_{2i}$, де елемент має ранг $vr(x)_i = 1, i=1..N$, а всі інтервали є суміжними і покривають інтервал визначення для ВФ:

$$In_1 \cup In_2 \cup \dots \cup In_N = InV \text{ та } In_1 \cap In_2 \cap \dots \cap In_N = \phi.$$

Виділимо, в порядку зростання обчислювальної складності, такі класи задач розподілу (рис. 1.13): однорідні випуклі з домінуванням; неоднорідні випуклі без домінування; однорідні невивуклі з домінуванням; неоднорідні невивуклі без домінування.

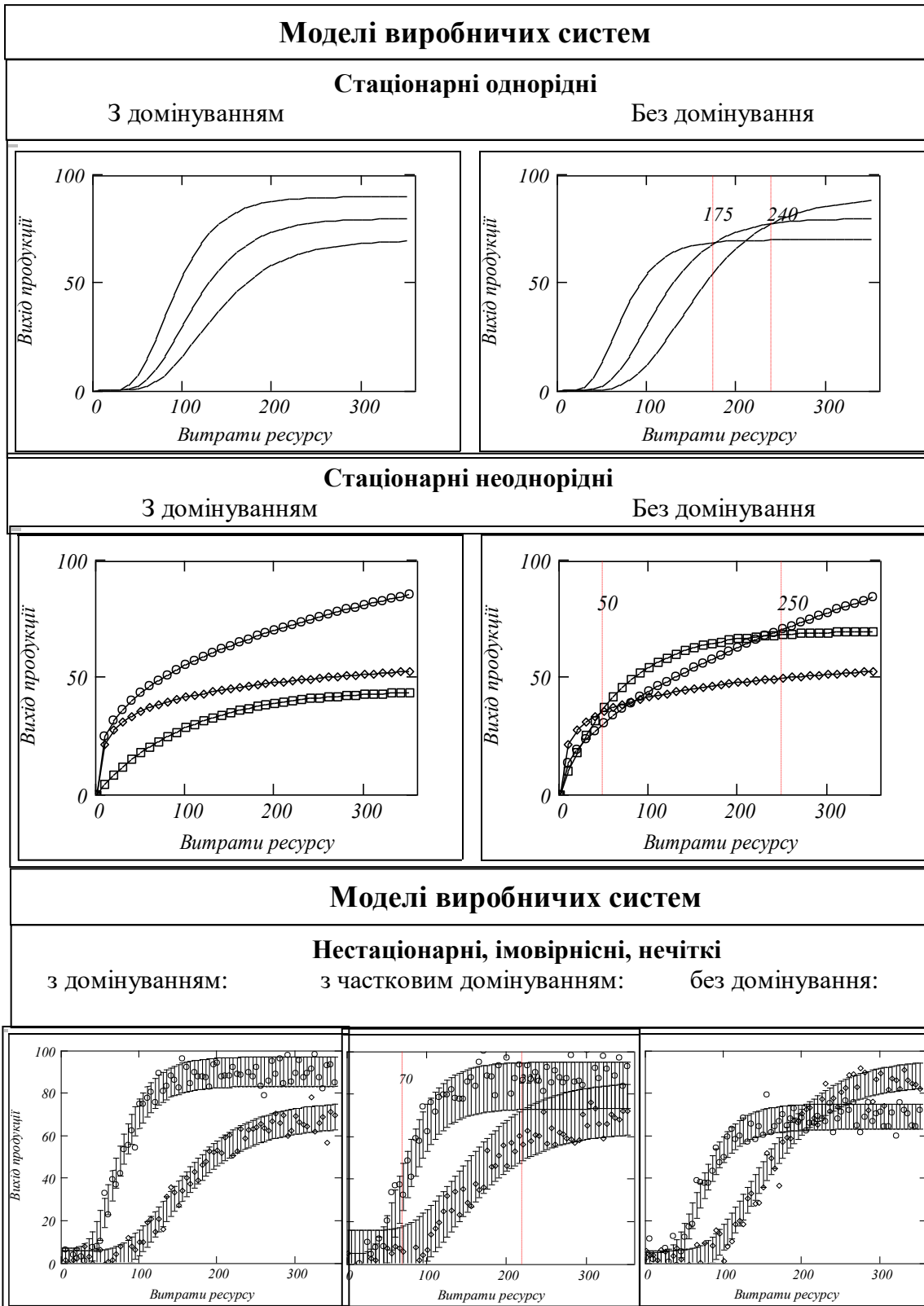


Рис. 1.13. Класифікація виробничих систем

Аналогічно класифікуємо виробничі системи, елементи яких мають ВФ з нестационарностями і різними невизначеностями: стохастичними,

нечіткостями, неповною ідентифікацією та ін. В цьому випадку немає чіткої границі між системами з домінуванням і без домінування. В цілому запропонована класифікація розділяє виробничі елементи та виробничі системи не за галузевою специфікою, розмірами, а за потрібними методами моделювання і оптимізації. Введення ознаки "домінування" необхідне саме для систем з невіпуклими ВФ елементів – вона визначає вид оптимальних розподілів ресурсу.

Висновки

Проведено аналіз і систематизацію існуючого стану напрямку: моделювання і оптимізація процесів розподілу ресурсів у сучасних децентралізованих системах. Виявлені причини малої кількості результативних робіт з вибраного напрямку: неможливість отримання конструктивних результатів без інтенсивного використання можливостей сучасних математичних пакетів та гнучкого поєднання аналітичних методів та обчислювального експерименту.

Виявлена також неадекватність класичних моделей і методів сучасним виробничим системам. Зокрема, задачі оптимізації розподілу ресурсів слід розглядати як нестационарні, з довільними виробничими функціями елементів і можливістю урахування ефектів освоєння виробництва. Аналіз існуючих методів показав, що вони переважно розраховані на випадки, коли функції обмежень і цільові функції є випуклими, мають неперервні похідні, допускають лінеаризацію. Сучасні програмні засоби дали можливість провести цей аналіз на конструктивному рівні: всі розглянуті математичні моделі були робочими – такими, що виконуються в середовищі математичних пакетів в символічному або числовому вигляді.

В результаті аналізу визначені основні тенденції розвитку технічних і технологічних систем – нестационарність, невизначеність, суттєва нелінійність і невіпуклість виробничих функцій; розроблені орієнтовані на задачі розподілу ресурсів класифікації виробничих систем та їх елементів; виділені базові моделі процесів оптимізації розподілу ресурсів між елементами децентралізованої системи в просторі і в часі. Для підвищення ефективності управління сучасними децентралізованими технічними системами необхідно розробити комплекс методів моделювання та оптимізації таких систем.

Комплексне розв'язання виділених задач створює основу для оптимального управління сучасними організаційно-виробничими системами.

РОЗДІЛ 2. УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ОДНОКРОКОВОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ ПРИ ДОВІЛЬНИХ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЯХ ЕЛЕМЕНТІВ

В розділі 1 були розглянуті приклади практичних задач оптимального управління розподіленими системами, виконано огляд робіт з цієї тематики. Виявлено, що існують недостатньо досліджені питання оптимального управління розподіленою системою при невиконаних умовах загалом виробничих функціях (ВФ). Ці питання відносяться в першу чергу до моделей розподілених систем. Запропонована орієнтована на обчислювальні методи класифікація виробничих функцій та виробничих систем.

В цьому розділі ставимо за мету створення теоретичних основ і комплексу робочих моделей, що охоплювали б усі актуальні для практики задачі тактичного управління розподіленими системами. Під тактичним управлінням розуміємо розподіл узагальненого ресурсу між елементами, оптимальний за критерієм сумарного узагальненого виробництва (максимізація), або за критерієм сумарних узагальнених витрат (мінімізація). Інша назва такої задачі "задача однокрокового оптимального управління". Задачі стратегічного, або багатокрокового управління розглядаються в третьому розділі.

2.1. Постановка задачі оптимізації розподілу ресурсів

Подаємо постановку задачі оптимізації і викладення основних властивостей оптимальних розподілів [6–8]. Розглядається система з N виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількостях x_i і виробляють деяку продукцію у кількостях $y_i(x_i)$ згідно з виробничими функціями (ВФ) з класу додатних монотонно зростаючих функцій $y = f_i(x_i)$; $i = 1 \dots N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу.

Пряма задача. Потрібно розподілити ресурс R так, щоб максимізувати сумарне виробництво

$$F_0(R) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \rightarrow \max ; \quad \text{при обмеженні} \quad \sum_{i=1}^N x_i = R .$$

Розширимо цю класичну задачу – будемо шукати не одну точку розв'язання для конкретного значення обмеження по ресурсу, а функцію, що дає залежність оптимального розподілу ресурсу у виробничій системі від величини обмеження по ресурсу.

Введемо вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу

$Dop(R)$, $0 \leq R \leq R_{\max}$, де R_{\max} – максимальне значення обмеження, що вибирається виходячи з умов конкретної прикладної задачі. Будемо використовувати також нормовану функцію оптимального розподілу

$$dop(R) = \frac{Dop(R)}{R}.$$

Функція оптимального розподілу ресурсу – вектор-функція, компоненти якої задають оптимальний за критерієм сумарного виробництва розподіл заданої кількості ресурсу. Функція $Dop(R)$ для припустимих виробничих функцій має такі очевидні властивості:

$$\sum_{i=1}^N Dop(R)_i = R \quad - \text{баланс ресурсу;}$$

$$\forall i \in 1..N: Dop(R)_i \geq 0 \quad - \text{нестрого додатні компоненти.}$$

Інші властивості функції $Dop(R)$ залежать від класів виробничих елементів і класу виробничої системи і будуть розглянуті далі.

Якщо ми обчислимо сумарне виробництво Y при деякому обмеженні по ресурсу R , для розподілу, що заданий функцією $Dop(R)$, то отримаємо точку відповідної залежності, яка відповідає заданим умовам для виробничої функції (розділ 1.2).

Оптимальна виробнича функція системи – це залежність

$$Yop(R) = \sum_{i=1}^N fi(Dop(R)_i).$$

Оптимальна виробнича функція для кожного значення обмеження по ресурсу R задає максимальну продуктивність перетворення узагальненого ресурсу в узагальнений продукт.

Оптимальна виробнича функція виробничої системи $Yop(R)$ для довільних виробничих функцій елементів має такі властивості: неперервність та неспадність при зростанні кількості ресурсу виробничої системи

$$R2 > R1 \rightarrow Yop(R2) \geq Yop(R1).$$

Інші властивості функції $Yop(R)$ залежать від класів виробничих функцій елементів будуть розглянуті далі.

Спряжена задача. В практиці часто зустрічається задача мінімізації сумарних витрат ресурсу на забезпечення потрібного сумарного випуску продукції. В системі працюють паралельно виробничі елементи з певними виробничими функціями $y_i = fi(x_i)$, $i = 1..N$, де x_i – об'єм витраченого ресурсу; y_i – об'єм випуску продукції i -го виробництва. За критерій оптимальності системи беремо сумарні витрати на випуск заданого об'єму продукції, тобто

$$F2(X) = \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N f_{zv}(y_i),$$

де $f_{zv}(y_i) = f_i^{-1} \cdot (x_i)$ – функція зворотна до виробничої функції – залежність витрат ресурсу від рівня виробництва; $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – вектор витрат ресурсів.

Сумарне виробництво повинно задовольняти обмеження

$$G2(Yp) = \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) - Yp = 0,$$

де Yp – обмеження по об'єму виробництва. Ціль оптимізації – мінімізація сумарних витрат

$$F2(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow \min .$$

Змінні управління – вектор розподілу навантаження

$$Yp = (Y1, Y2, \dots, YN).$$

Зауваження. Терміни "виробництво продукції", "об'єм виробництва", "рівень виробництва", "темп виробництва" – синоніми і означають: "кількість одиниць вимірювання продукції за плановий період" (за день, місяць, рік ...).

Мультиплікативні критерії. В певних виробничих системах з послідовним виконанням виробничих операцій домінуючими вимогами може бути якість продукту, або імовірність виконання задачі. До цього класу може бути зведена задача оптимального розподілу ресурсу між послідовно працюючими підсистемами, що виконують послідовні стадії якогось узагальненого технологічного процесу. Критерій ефективності – загальна ефективність системи. Ця ефективність визначається в простішому випадку, як добуток ефективностей елементів:

$$E_s = E1(r1) * \dots * E_i(ri) * \dots * EN(rN) \quad (2.1)$$

обмеження $r_i \geq 0; r1 + \dots + ri + \dots + rN = R$, де R – обмеження по ресурсу.

Заміною змінних така задача зводиться до задачі з адитивним критерієм.

2.2. Знаходження оптимального розподілу ресурсів для випадку елементів з випуклими виробничими функціями

Для задач класу "екстремум функції декількох змінних при обмеженні" використовуються: метод невизначених множників Лагранжа, метод виключення змінних, градієнтні методи, в тому числі і метод випадкового пошуку, методи на базі нечіткої логіки.

Метод невизначених множників Лагранжа є джерелом для певного класу пошукових методів оптимізації, які базуються на побудові

процесів, стійким станом яких є саме точка екстремуму [100]. Тому розробимо робочі моделі, орієнтовані на еволюційне моделювання [66], коли модель змінюється в процесі моделювання. Робоча модель повинна бути модульною, обчислювально ефективною та мати форму інваріантну до зміни розмірності задачі. В сучасному програмуванні модульність забезпечується підпрограмами з уніфікованими інтерфейсами (входами і виходами), обчислювальними ефективностями – розпаралелюванням (векторизацією обчислень), інваріантністю програми до розмірності задачі – матрично-векторною формою подання вхідних, вихідних даних, операторів і функцій.

Задаємо критерій оптимальності розподіленої системи (сумарне виробництво)

$$F(X) = \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N f_i(x_i), \quad i = 1..N; \quad (2.2)$$

і обмеження по ресурсу

$$G(X) = \sum_{i=1}^N X_i - R = 0, \quad (2.3)$$

де $X^T = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ – вектор розподілу ресурсу; $f_i(x_i)$ – виробнича функція i -го елемента; R – величина обмеження по ресурсу.

Введемо вектор-функцію $f_v(X, MP)$, i -м компонентом якої є виробнича функція розподіленої системи. Тоді вираз для критерію (2.2) матиме вигляд

$$F(X) = \sum_{i=1}^N f_v(X, MP)_i, \quad (2.4)$$

де X – N -вимірний вектор розподілу ресурсу; MP – матриця параметрів виробничих функцій елементів розмірністю $M \times N$.

Розв'язання задачі. Записуємо функцію Лагранжа

$$L(X, MP, R, \lambda) = F(X) + \lambda \cdot G(X),$$

де λ – множник Лагранжа, який зручно інтерпретувати як ціну ресурсу. Знаходимо похідні функції $L(X, MP, R, \lambda)$ і прирівнюємо їх до нуля

$$\frac{\partial}{\partial X_i} L(X, MP, R, \lambda) = 0, \quad i = 1..N. \quad (2.5)$$

Разом з рівнянням (2.3) отримуємо $N+1$ рівняння для $N+1$ невідомих: $X_1, X_2, \dots, X_N, \lambda$. Для випадку адитивного обмеження по ресурсу рівняння приводяться до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial X_i} L(X, MP, R, \lambda) = \frac{\partial}{\partial X_i} F(X) + \frac{\partial}{\partial X_i} \lambda \cdot G(X). \quad (2.6)$$

Підставляємо в (2.6) (2.3), (2.4) і отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial X_i} fV(X, MP)_i = \lambda, i = 1..N. \quad (2.7)$$

Таким чином, в оптимальному стані повинні виконуватись умови (2.3) і (2.7), на базі цих умов можливо будувати досить прості екстремальні системи автоматичного управління для підтримки оптимального розподілу ресурсу між елементами розподіленої системи. Продемонструємо ці можливості на конкретному прикладі.

2.3. Побудова моделі адаптивної системи автоматичного управління для оптимального розподілу ресурсу

В роботі послідовно використовується концепція конструювання математичних моделей, де під конкретний реальний об'єкт чи процес конструюється адекватна математична модель. Під терміном «конструювання» мається на увазі наявність певної класифікаційної системи математичних моделей [17] та певної "раціональної технології системного виробництва" (РТСВ) запропонованої А. Горбанем [37] і загальної методології [7, 79, 104].

Для отримання практичних результатів такий підхід вимагає неповністю формалізованого етапу інтерпретації загальносистемних моделей в конкретні прикладні моделі. Тому природно продуктивність підходу оцінити на конкретному прикладі.

Результати цього прикладу можуть мати декілька застосувань:

- а) алгоритм оптимального управління розподіленою системою;
- б) програмна система для моделювання і дослідження розподіленої системи;
- в) інтерактивний алгоритм знаходження оптимального розподілу ресурсів у розподіленій системі.

Ми вибираємо алгоритми, що є працездатними в умовах невизначеностей і збурень, що мають місце в реальних системах. Серед підмножини цих алгоритмів ми відбираємо такі, що мають властивість "плавної деградації". Останній термін означає, що при збільшенні рівня зовнішніх і внутрішніх збурень ефективність системи змінюється пропорційно, а не раптово. Пропонується підхід, коли для обчислення поточного управління використовуються тільки результати поточних вимірювань. Виробничі функції реакторів змінюються через старіння і поступове "отруєння" каталізатора. В системі можливі режими великих збурень – відключення одного з реакторів на ремонт і профілактику, або підключення нового реактора.

За критерій вибираємо сумарні виробничі витрати на заданий обсяг випуску стиролу. Необхідно розробити оптимальну за витратами систему розподілу навантаження по окремих реакторах з урахуванням

обмеження на сумарну продуктивність. Швидкість реакції залежить від температури, віку та історії використання каталізатора, концентрації компонентів та ін. Розділимо загальну задачу оптимізації на субоптимізацію роботи окремого реактора і оптимізацію системи в цілому. Будемо вважати, що локальна система оптимального управління реактором для кожного заданого темпу виробництва встановлює оптимальні параметри температури, концентрації. На основі такого припущення ми можемо побудувати оптимальні виробничі функції (ВФ) реактора. Фактично існують дві концепції виробничої функції – технологічна і системна. В технологічному аспекті ВФ – це залежність виходу стиролу (продукту) від подачі етилбензолу (ресурсу). Системний підхід вимагає розширити межі системи, враховувати всі витрати і результати роботи системи. Повні експлуатаційні витрати включають не тільки витрати етилбензолу, але й витрати на подачу етилбензолу і пари, на підігрів пари, витрати обумовлені "отруєнням" каталізатора та ін. На рис. 2.1 подані системна і технологічна виробничі функції реактора. Системна ВФ за рахунок постійної складової у витратах ресурсу є невіпуклою.

Математична модель реактора для аспекту "залежність виробничих витрат від виходу стиролу" – апроксимація реальної характеристики поліномом [66]. Запишемо також похідну від цієї залежності

$$C(a1, a2, a3, P) := 20 + a1 \cdot P + 5 \cdot a2 \cdot P^2 + a3 \cdot P^5,$$

$$dC(a1, a2, a3, P) := a1 + a2 \cdot P + 0.01 \cdot a3 \cdot P^4.$$

Математична модель реактора для аспекту "залежність виходу стиролу від рівня подачі етилбензолу" є оптимізованою по інших вхідних змінних – витратах пари, температури, тиску та ін. Використовуємо як перше наближення модель з одним параметром $b1$. Зауваження: модель нереалістична для малих значень x .

$$P_i(b1, x) := b1 \cdot x^{0.5}.$$

Задаємо ранжовані змінні P та X та будуємо графіки характеристик

$$X := 0,0.25..40; P := 0,0.5..25; a1 := .5; a2 := 0.25; a3 := 0.001.$$

Вводимо короткі означення для функцій

$$C1(P) := C(.5, 0.1, 0.001, P); C2(P) := C(2, 20.2, .002, P); C3(P) := C(4, .4, .003, P).$$

Сформулюємо оптимізаційну задачу:

цільова функція – сумарні виробничі витрати

$$C_{sum} = F(P1, P2, P3) = C1(P1) + C2(P2) + C3(P3); \quad (2.8)$$

обмеження – сумарне виробництво

$$P1 + P2 + P3 = P_{pot} ,$$

ціль оптимізації – мінімум C_{sum} . Змінні управління – $P1, P2, P3$.

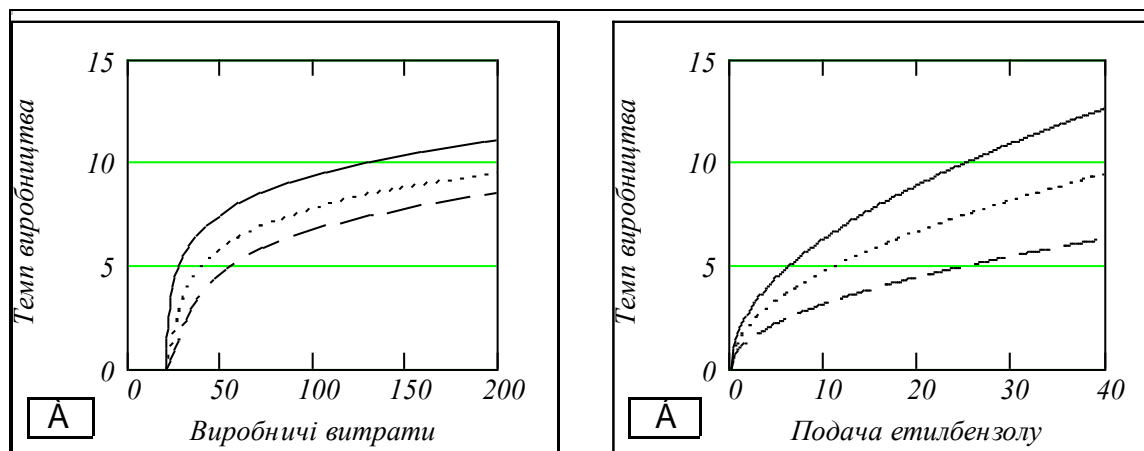


Рис. 2.1. Виробничі функції реактора: А – системна; Б – технологічна

Розв'яжемо цю задачу методом невизначених множників Лагранжа. Управління процесом можна побудувати на безпосередньому обчисленні оптимальних значень виходу стиролу для кожного реактора. Потім ці значення встановлюються за допомогою відповідних локальних систем регулювання, що повинні підтримувати ці значення, змінюючи подачу етилбензолу.

Подаємо розв'язання задачі в середовищі математичних пакетів, як приклад сучасних технологій моделювання та оптимізації.

Записуємо функцію Лагранжа

$$L(P1, P2, P3, \lambda) = F(P1, P2, P3) + G(P1, P2, P3) \cdot \lambda ,$$

записуємо необхідні умови екстремуму цієї функції

$$\frac{d}{dP1} L(P1, P2, P3, \lambda) = 0, \quad \frac{d}{dP2} L(P1, P2, P3, \lambda) = 0, \quad \frac{d}{dP3} L(P1, P2, P3, \lambda) = 0 \quad (2.9)$$

і обмеження $P1 + P2 + P3 = P_{pot}$.

Додавши рівняння обмеження отримаємо чотири рівняння для чотирьох невідомих – $P1, P2, P3, \lambda$. Підставимо конкретні значення ВФ в (2.8):

$$F(P1, P2, P3) := a11 + a21 \cdot P1 + a31 \cdot P1^4 + a12 + a22 \cdot P2 + a32 \cdot P2^4 + a13 + a23 \cdot P3 + a33 \cdot P3^4 ,$$

$$G(P1, P2, P3) := P_{port} - P1 - P2 - P3 ,$$

$$L(P1, P2, P3, \lambda) := F(P1, P2, P3) + G(P1, P2, P3) \cdot \lambda .$$

Для знаходження аналітичних виразів похідних використаємо апарат символічних обчислень

$$\frac{\partial}{\partial P1} L(P1, P2, P3, \lambda) \rightarrow a21 + 4 \cdot a31 \cdot P1^3 - \lambda;$$

$$\frac{\partial}{\partial P2} L(P1, P2, P3, \lambda) \rightarrow a22 + 4 \cdot a32 \cdot P2^3 - \lambda.$$

Вводимо значення параметрів функцій виробничих витрат для всіх реакторів. Вводимо значення обмеження $P_{tr} := 80$ та початкові значення змінних, які потрібно знайти: $P1 := 10$; $P2 := 10$; $P3 := 10$; $\lambda := 10$.

Записуємо і розв'язуємо вбудованим методом математичного пакета систему рівнянь

$$\text{Given } a21 + 4 \cdot a31 \cdot P1^3 - \lambda = 0 \quad a23 + 4a33 \cdot P3^3 - \lambda = 0;$$

$$a22 + 4 \cdot a32 \cdot P2^3 - \lambda = 0; \quad P_{tr} - P1 - P2 - P3 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} X1_{opt} \\ X2_{opt} \\ X3_{opt} \\ \lambda_{opt} \end{pmatrix} := \text{Find}(P1, P2, P3, \lambda) \quad \begin{pmatrix} X1_{opt} \\ X2_{opt} \\ X3_{opt} \\ \lambda_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.023 \\ 27.667 \\ 19.31 \\ 144.304 \end{pmatrix} .$$

Контроль виконання обмежень

$$X1_{opt} + X2_{opt} + X3_{opt} = 80, \quad P_{tr} = 80.$$

Отриманий оптимальний розподіл навантаження є результатом розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь числовим методом. Чутливість розв'язку до варіацій параметрів виробничих функцій може бути великою. Необхідна висока точність ідентифікації параметрів виробничих функцій, яка потребує великих інтервалів спостереження. Але об'єкти управління є нестационарними і нелінійними.

Розглянемо тепер альтернативний метод оптимізації на базі побудови системи автоматичного управління, усталений стан якої відповідає обмеженню і є оптимальним. Побудова таких імпульсних нелінійних систем запропонована Я. Ципкіним як універсальний метод адаптації і навчання в інтелектуальних системах [100]. Система управління технічним процесом повинна забезпечувати 1) заданий рівень темпу сумарного виробництва; 2) оптимізацію розподілу навантаження між реакторами. На рис. 2.2 подана структурна схема системи управління, що реалізує ці задачі.

Виконання першої задачі забезпечує звичайний пропорційно-інтегральний регулятор. Виконання другої задачі ускладнено проблемами оперативного вимірювання системних виробничих функцій елементів. Замість цього використаємо **індикатор** – величину, що пов'язана з потрібною величиною монотонною залежністю. Такою величиною може бути залежність dPi/dXi – прирощення виходу

стиролу на одиницю прирощення подачі етилбензолу. Словесна модель регулятора оптимізації розподілу навантаження така (див. рис. 2.2). Регулятор рівня подає однакові управління в усі реактори, вимірюються "відгуки" dP_i кожного з реакторів на це управління, формуються відхилення від середнього і з затримкою на такт на реактори подаються "вирівнюючі" управління – збільшується навантаження реакторів, у яких dP_i вище середнього, зменшується для реакторів з меншою ефективністю.

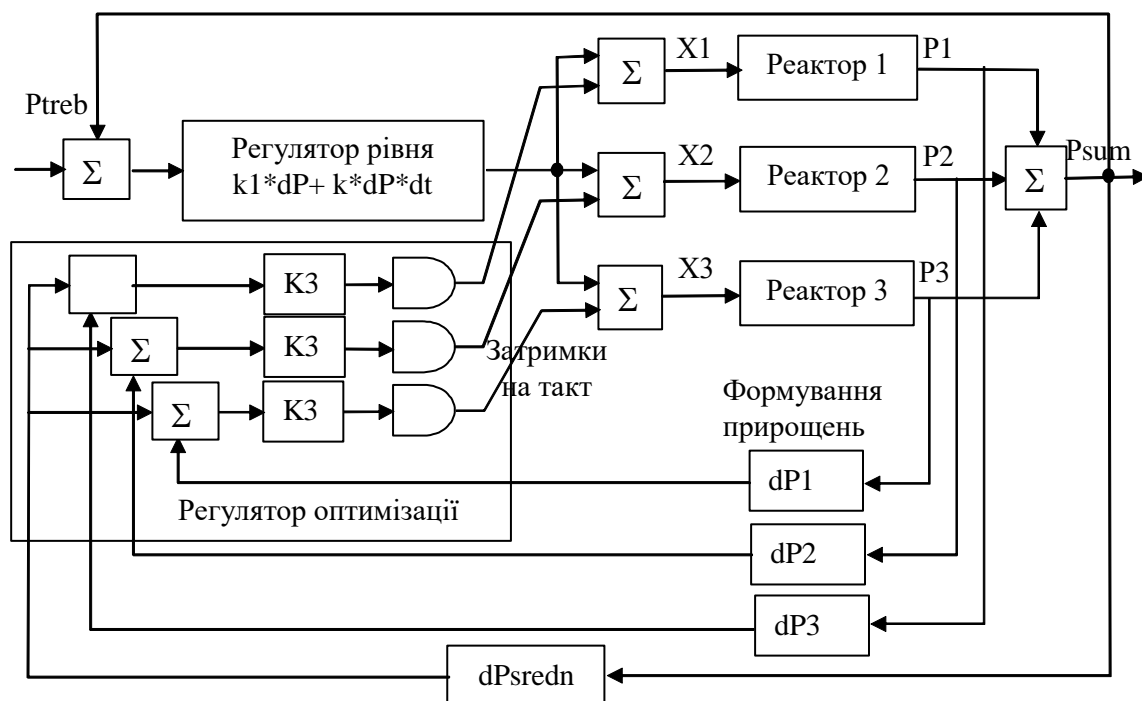


Рис. 2.2. Структурна схема системи оптимального управління

Нові програмно-технічні засоби змінюють не тільки технологію і зміст науково-дослідницької роботи, але й канони оформлення наукових робіт. На рис. 2.3 подано текст програми моделювання, яка одночасно є:

- математичною моделлю – системою різницевих рівнянь динаміки;
- блок-схемою (цей текст структурований відповідними лініями);
- алгоритмом (все записано за стандартами запису алгоритмів і операторів програмування);
- інтерфейсом, тому що в електронній версії цього документа в текст програми можна вносити зміни і практично без затримки бачити наслідки цих змін.

В програмі (див. рис. 2.3) використовується векторизація обчислень – стрілки над виразами означають "виконати цю операцію над усіма елементами масиву" для унарних операцій, і "виконати цю операцію над парами відповідних елементів двох масивів" для бінарних операцій.

Це не є просто економною формою запису циклів "по всіх рядках, по всіх стовпцях", це інструкція для сучасних мікропроцесорів. В нашому випадку три компоненти відповідного вектора можуть бути оброблені паралельно в трьох конвеєрах мікропроцесора.

В підсумку, векторизація робить текст програми простим, економним, зручним для контролю і суттєво зменшує час обчислень.

$P2(kq) :=$	$X^{\langle 1 \rangle} \leftarrow X_0 \quad k$ $dPsum \leftarrow 0$ $Ip \leftarrow 0$ $P^{\langle 1 \rangle} \leftarrow \overrightarrow{Pi(b, X^{\langle 1 \rangle})}$ $\text{for } k \in 1..N$ <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 10px;"> $q \leftarrow 2 \cdot k - 1$ $Psum \leftarrow \sum_{i=1}^{Me} Pi(b_i, X_i, q)$ $dPp \leftarrow dPsum$ $dPsum \leftarrow Ppo - Psum$ $Dp \leftarrow dPsum - dPp$ $Ip \leftarrow Ip + dPsum$ $dXogr \leftarrow kq_1 \cdot dPsum + kq_2 \cdot Ip + kq_4 \cdot Dp$ $X^{\langle q+1 \rangle} \leftarrow \overrightarrow{X^{\langle q \rangle} + dXogr}$ $P^{\langle q+1 \rangle} \leftarrow P^{\langle q \rangle} + \left(\overrightarrow{Pi(b, X^{\langle q+1 \rangle})} - P^{\langle q \rangle} \right) \cdot \frac{T}{Tr}$ $dP \leftarrow P^{\langle q+1 \rangle} - P^{\langle q \rangle}$ $dPm \leftarrow \text{mean}(dP)$ $dXopt \leftarrow \frac{kq_3}{dPm}$ $X^{\langle q+2 \rangle} \leftarrow X^{\langle q+1 \rangle} + dXopt \cdot \overrightarrow{(dP_2 - dPm)}$ $P^{\langle q+2 \rangle} \leftarrow P^{\langle q+1 \rangle} + \left(\overrightarrow{Pi(b, X^{\langle q+2 \rangle})} - P^{\langle q+1 \rangle} \right) \cdot \frac{T}{Tr}$ </div>
-------------	--

Рис. 2.3. Програма оптимального управління розподілом

навантаження реакторів

На рис. 2.4 подано перехідний процес для випадку, коли в початковий момент сумарний темп виробництва складає 62 одиниці вимірювання при заданих 80, а розподіл є дуже далеким від оптимального – найбільше навантаження має гірший реактор. Бачимо, що система управління в усталеному стані забезпечує заданий сумарний темп випуску, а розподіл навантаження стає близьким до оптимального.

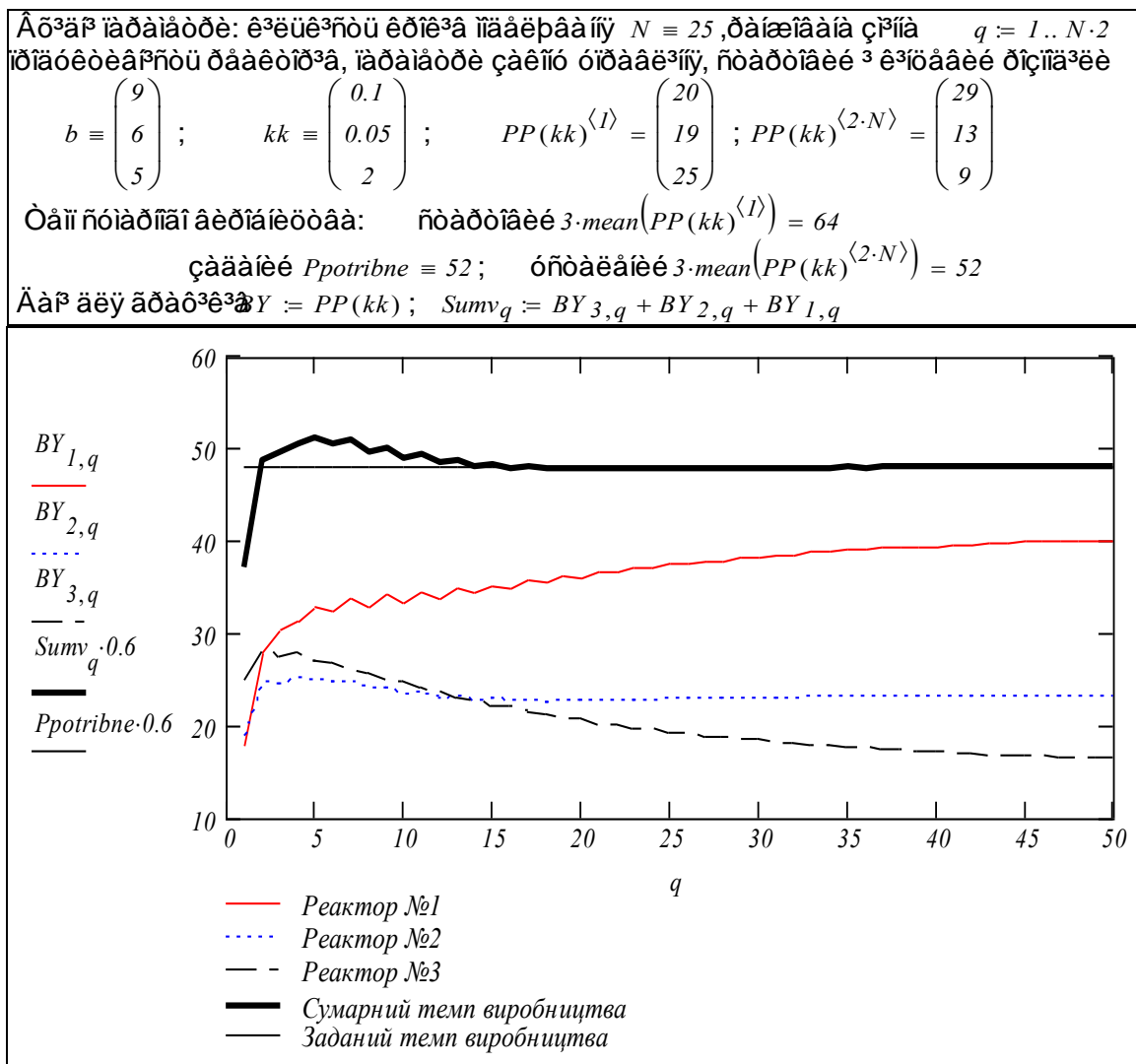


Рис. 2.4. Результати моделювання оптимальної системи управління. Приклад

За рахунок вибору параметрів регулятора kk_1, kk_2, kk_3 можна отримати задовільні перехідні процеси. Єдиний недолік системи (і алгоритму оптимізації) – в усталених станах навантаження системи і реакторів не змінюється і тому немає інформації для перерозподілу. Цей звичайний для адаптивних систем недолік усувається введенням

тестових імпульсів – зміни подачі етилбензолу в реактори.

2.4. Властивості моделей оптимального розподілу ресурсів при невивуклих виробничих функціях

В розділі 1 ми вибрали як базову ВФ увігнуто-вивуклу функцію. В фізичних, хімічних, технологічних процесах досить часто зустрічаються залежності $S(x)$ "ресурс-продукт", похідна яких $\frac{dS(x)}{dx}$ на інтервалі визначення $0 \leq x \leq X_m$ є додатною і має один максимум. Така функція має одну точку перегину. До цієї точки вона невивукла, після – вивукла. Зауважимо, що в певних задачах розглядаються більш складні невивуклі функції, наприклад, функція Севіджа, що має похідну з двома максимумами.

Серед невивуклих ВФ слід виділити підклас ВФ з розривною похідною. В технічних системах часто зустрічаються ступінчасті, кусочно-лінійні залежності. Очевидно, що для таких функцій не працюють методи, що вимагають неперервної похідної. Властивості оптимальних розподілів ресурсу в системах, усі елементи яких мають вивуклі ВФ ретельно досліджені, наприклад в [25, 77, 105]. На підставі цих результатів можна сформулювати твердження про властивості функцій оптимального розподілу.

Якщо виробничі функції усіх елементів є строго вивуклими, то:

- 1) усі функції $Dop(R)_j$ є неперервними, монотонно зростаючими функціями R ;
- 2) оптимальна ВФ системи є строго вивуклою.

Для випадку, коли розподілена система має в своєму складі елементи з невивуклими ВФ, властивості оптимальної ВФ системи та властивості функції оптимального розподілу ресурсу радикально змінюються.

Доведення відповідних тверджень про властивості оптимальних розподілів у загальному випадку розподілених систем з довільними невивуклими ВФ – об'ємна і складна математична проблема [8, 25, 77, 105]. Будемо дотримуватись методології Р. Беллмана [8]: послідовне дослідження упорядкованої системи задач – одновимірних, двовимірних, ..., лінійних, нелінійних... В підсумку так можна отримати розв'язання загальної задачі.

Для технічних наук і практики спрощені задачі мають самостійну цінність. Розподілені системи часто складаються з елементів з ідентичними або майже ідентичними характеристиками, наприклад, системи енергоагрегатів, реакторів, верстатів одного типу. Для таких практично важливих окремих випадків можна легко отримати і

дослідити оптимальні розподіли. Найпростішою реалістичною виробничою функцією технічної системи є лінійна функція з порогом і обмеженням рівня виходу. Згладженим аналогом цієї функції є S -функція.

Далі розглянемо властивості оптимальних розподілів для випадку елементів з ВФ класу S -функцій. Для таких систем можна сформулювати твердження:

Твердження 1. Для N -елементної системи увігнуто-випуклих виробничих функцій без домінування функції оптимального за критерієм сумарного виробництва розподілу ресурсу $Dop(R)_i, i = 1..N$, мають не менше N розривів.

Твердження 2. Для N -елементної системи увігнуто-випуклих виробничих функцій з домінуванням функції оптимального за критерієм сумарного виробництва розподілу ресурсу $Dop(R)_i, i = 1..N$, мають не менше $(N-1)$ розривів.

Доведення цих тверджень є можливим в загальному випадку на базі визначень випуклості, увігнутості та аналізу сум ВФ $f(r_i)_i$ при обмеженні їх аргументів

$$r_1 + r_2 + \dots + r_N = R.$$

Далі подано доведення цих тверджень для окремих випадків. Доведення для загального випадку є об'ємним. Коректність тверджень перевірена експериментально для систем до $N=10$.

Топологічні причини розривів – максимум сумарного виробництва досягається на границях інтервалу припустимих значень ресурсу і в певних умовах переходить в іншу граничну точку в N -вимірному просторі.

Розглянемо властивості оптимальних розподілів для окремого випадку систем з елементами, які мають ідентичні ВФ з класу S -функцій.

Теорема. Оптимальна функція розподілу ресурсу розподіленої системи порядку N , елементи якої мають однакові ВФ класу S -функцій, має точно $(N-1)$ розривів. На інтервалах між розривами ресурс розподіляється рівно між $1, 2, 3, \dots, N$ елементами.

Доведення. Позначимо через $F4(x, A, \omega, s)$ однакову для всіх елементів виробничу функцію з певними значеннями параметрів: "амплітуда" $A := 1$, "частота" $\omega := 0.1$, "увігнутість" $s := 10$; $x := 0,5..300$.

Припустимо (це буде доведено далі), що оптимальний розподіл на будь-якому інтервалі неперервності буде рівним. Підстава для цього – ідентичність усіх ВФ. Тоді оптимальний розподіл ресурсу може бути тільки виду "розділити ресурс рівно між k елементами", $k = 1..N$.

Створимо систему k -функцій

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &:= F_4(x, A, \omega, s) ; & f_2(x) &:= 2F_4(x \div 2, A, \omega, s) ; \\ f_3(x) &:= 3 \cdot F_4(x \div 3, A, \omega, s) ; & f_4(x) &:= 4F_4(x \div 4, A, \omega, s) ; \\ f_N(x) &:= N \cdot F_4(x \div N, A, \omega, s). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ будуть теж належати до параметричного класу $F_4(x, A, \omega, s)$ S -функцій, тобто матимуть невід'ємну похідну з одним максимумом. Дійсно, функція $f_2(x) = 2F_4(x \div 2, A, \omega, s)$ – це вдвічі збільшена і вдвічі розтягнута по осі x функція $F_4(x, A, \omega, s)$. Функції $f_1(x), f_2(x)$ матимуть одну точку перетину.

Тому для будь-якої суміжної пари функцій $f_j(x), f_k(x)$, $k = j + 1$ маємо:

$$f_j(x) > f_k(x) \text{ для } x < ts \text{ та } f_j(x) \leq f_k(x) \text{ для } x \geq ts,$$

де ts – точка перетину функцій.

Якщо припущення про паритетність оптимальних розподілів на інтервалах неперервності є істинним, то оптимальна виробнича функція буде підмножиною Парето системи функцій $f_1(x)$

$$F_{opt}(x) = \max(f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)).$$

Виконаємо процес побудови $F_{opt}(x)$ на прикладі системи з 4-х елементів

$$F_{opt}(x) := \max(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)).$$

Визначимо точки перетину функцій за допомогою числового методу пошуку нульового кореня довільного алгебраїчного рівняння

$$\begin{aligned} ts_1 &:= \text{root}[(f_2(x) - f_1(x)), x, 10, 150], \\ ts_2 &:= \text{root}[(f_3(x) - f_2(x)), x, 10, 150], \\ ts_3 &:= \text{root}[(f_4(x) - f_3(x)), x, 10, 150]. \end{aligned}$$

Зробимо функцію для перевірки увігнутості заданої функції F в заданій точці x $vog(F, x, \tau) := F(x) < \tau \cdot F(x \div \tau)$.

Перевіримо цю функцію: $vog(f_2, 20, \tau) = 1$ при $x = 20$ вона увігнута, $vog(f_2, 60, \tau) = 0$ при $x = 60$ – випукла, що можна бачити на рис. 2.5.

На рис. 2.5 подано також маркери, що вказують положення деяких точок перетину функцій. Похідна є неперервною, невід'ємною з одним максимумом, тобто функція $f_2(x)$ належить до класу S -функцій. Тепер доведемо наше припущення відносно оптимальності паритетного розподілу ресурсу між елементами з ідентичними ВФ з класу S -функцій.

Введемо множину α -функцій для системи з ідентичними ВФ:

$$fd2(x,a) := F4(a \cdot x, A, \omega, s) + F4[(1-a) \cdot x, A, \omega, s]. \quad (2.11)$$

Очевидно α -функція є виробничою функцією системи з двох елементів, отриманою за умови постійної пропорції розподілу ресурсу $0 \leq a \leq 1$.

Визначимо підмножину Парето на множині цих функцій

$$Fdd(x) := \max(fd2(x,1), fd2(x,0.5)).$$

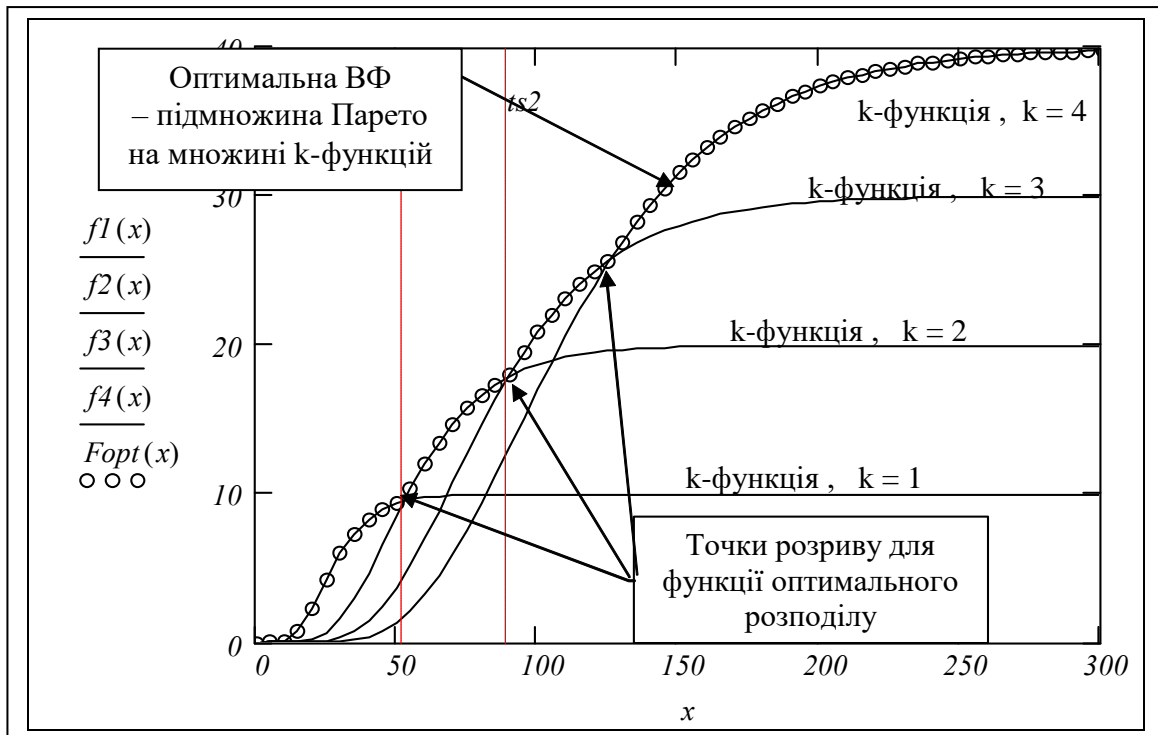


Рис. 2.5. Оптимальна виробнича функція системи з чотирьох ідентичних елементів S -класу. Приклад

На рис. 2.6 подані графіки цих функцій і маркер точки перетину функцій $fd2(x,1)$ – "все одному", $fd2(x,0.5)$ – "обом порівну".

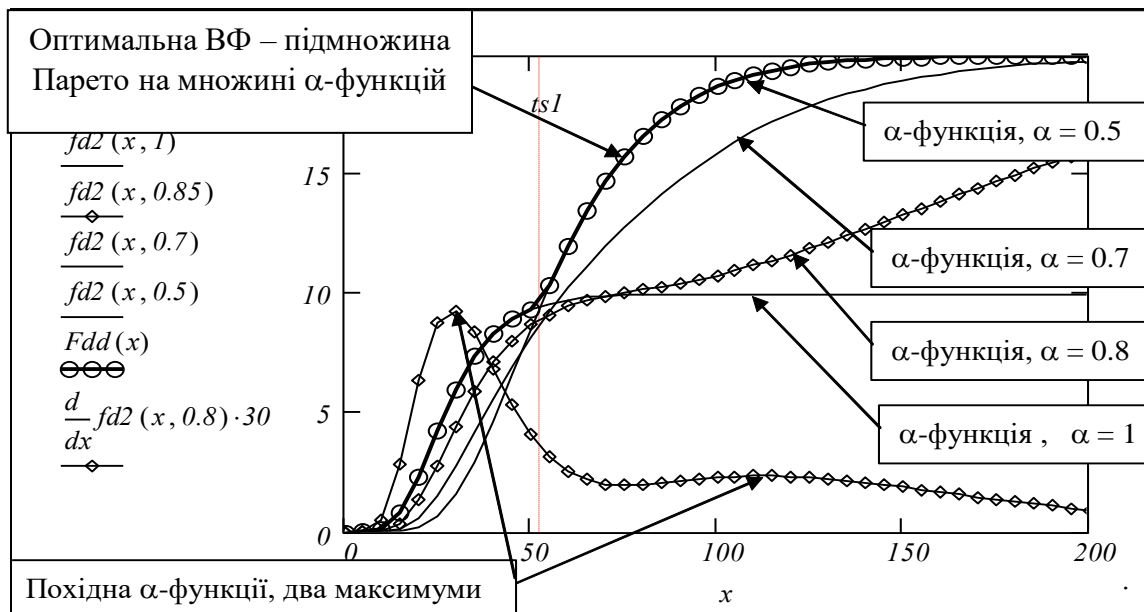


Рис. 2.6. Визначення оптимального розподілу для системи з двома різними елементами S -класу

Ми працюємо з неперервними, дискретизованими і дискретними функціями. Припустимо, що ми обчислюємо дискретизовану множину α -функцій як масив з M векторів по K чисел – значень кожної α -функції. Підмножина Парето такої дискретизованої системи складається з відповідних точок певних α -функцій.

Лема. Для системи з двома елементами, що мають ідентичні ВФ з класу S -функцій оптимальна виробнича функція є підмножиною Парето тільки двох α -функцій:

$$Fdd(x) = \max(fd2(x, a1), fd2(x, a2)), \text{ з параметрами } a1=1, a2=0.5.$$

Доведення. З усіх функцій $fd2(x, a)$, $0 \leq a \leq 1$, на інтервалі $0 \leq x \leq ts1$ в силу властивості увігнаних функцій ("концентрація вигідніше") домінуючою є функція з параметром $a=1$. На інтервалі $x > ts1$ в силу властивості максимуму сумарного виробництва при обмеженні x для випуклих ВФ елементів (похідні від ВФ в точці максимуму повинні бути однаковими) і в силу ідентичності ВФ елементів максимум функції $fd2(x, a)$ досягається при $x1 = x2$. Оскільки $x1 + x2 = x$, то $x1 = x2 = 0.5x$. Лема доведена.

Зауваження. Функція $fd2(x, a)$ при $0 < a < 1$ вже не належить до класу S -функцій – її похідна може мати два екстремуми (див. рис. 2.6). Введення систем k -функцій та α -функцій дозволило проаналізувати властивості функцій оптимальних розподілів ресурсу. Однак, головне, воно дає логічну основу для розробки методу оптимізації на базі агрегування. Під агрегуванням мається заміна декількох елементів системи одним еквівалентним по залежності "вхід-вихід" елементом. В

нашому випадку система елементів з певними ВФ, що паралельно функціонують, замінюється одним елементом з еквівалентною оптимальною виробничою функцією. Для визначення оптимальної ВФ ми використовуємо операцію визначення максимуму, яка має властивість

$$\max(A1, A2, A3) = \max(\max(A1, A2), A3).$$

Остання формула є робочою в середовищі пакета

$$\begin{aligned} \max(11,2,12) &= \max(\max(11,2),13) = 1 \quad \text{– істина, тому що} \\ \max(11,2,13) &= 13 \quad \max(\max(11,2),13) = 13. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою оптимальна ВФ розподіленої системи є підмножиною Парето системи функцій $f_k(x)$, $k=1..N$, тобто результатом застосування операції $\max(\cdot)$, яка є асоціативною і комутативною. Тому для оптимальних виробничих функцій розподілених систем з адитивним критерієм оптимальності $FopN(f1, f2, \dots, fN)$ має місце властивість

$$Fop3(f1, f2, f3) = Fop2(f1, Fop2(f2, f3)) . \quad (2.12)$$

Перевіримо це твердження на прикладі, запишемо

$$Fo2(x) := \max(f1(x), f2(x)) ; Fo3(x) := \max(f1(x), f2(x), f3(x)) ;$$

$F23(x) := \max(Fo2(x), f3(x))$. Побудуємо графіки (рис. 2.7) і виведемо значення логічного твердження (див. рис. 2.7 праворуч)

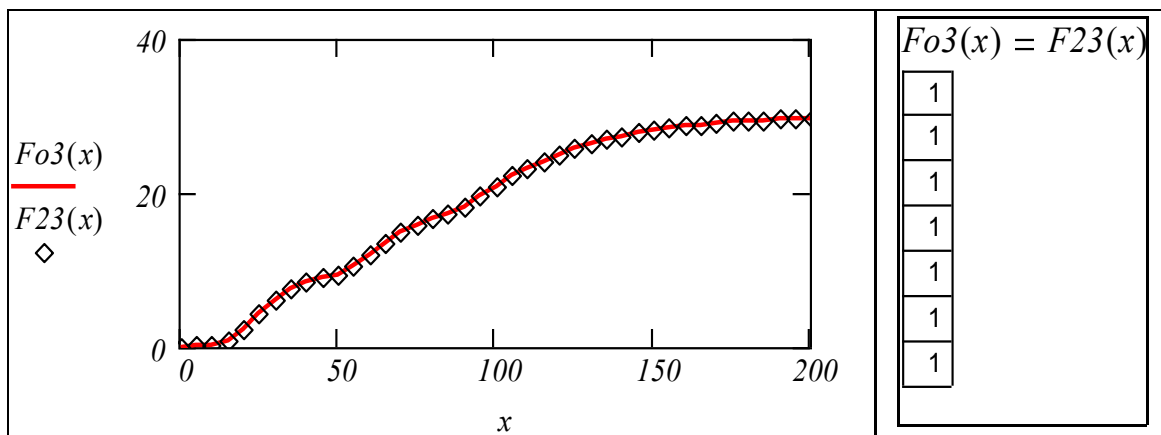


Рис. 2.7. Перевірка асоціативності операції визначення оптимальної виробничої функції системи

Узагальнення. Побудуємо оптимальну ВФ для системи з двох елементів з довільними ВФ. Ми показали, що оптимальна виробничая функція системи з двох ідентичних елементів буде підмножиною Парето системи α -функцій. Перевіримо справедливність цього

твердження для довільних ВФ елементів. Функція $fd2(x, a)$ є неперервною функцією змінних x та a . Кожний переріз цієї функції для кожного фіксованого значення сумарного ресурсу x з інтервалу визначення $0 \leq x \leq x_{\max}$ є неперервною функцією a , що має на інтервалі визначення $0 \leq a \leq 1$ максимальне значення (строгий чи нестрогий максимум, точну верхню грань). Множина цих точок є неперервною по x і утворює оптимальну виробничу функцію системи. Операція виділення підмножини Парето

$$F2_{op}(x) := \max(fd2(x, a_1), fd2(x, a_2), \dots)$$

для деякої кінцевої множини значень $\{a_1, a_2, a, \dots, a_k\}$, що рівномірно покриває інтервал визначення a , дає наближення оптимальної виробничої функції системи. Це наближення сходиться до оптимальної виробничої функції при $k \Rightarrow \infty$. Для окремого випадку системи з ідентичними невіпуклими ВФ елементів доведено, що оптимальна ВФ системи є підмножиною Парето кінцевої кількості певних k -функцій (2.10). Для системи з двох елементів ми ввели множину α -функцій (2.11) і показали, що оптимальна ВФ такої системи є підмножиною Парето множини α -функцій. Для випадку ВФ одного структурного класу (таких, що задаються одним алгебраїчним виразом і відрізняються тільки значеннями параметрів, розділ 1) оптимальна ВФ двохелементної системи з невіпуклими ВФ одного параметричного класу буде підмножиною Парето не більше ніж трьох α -функцій. На рис. 2.8 подано відповідний приклад. Можемо бачити, що оптимальна ВФ системи складається з α -функцій для значень $a=0$, $a=1$, $a = a_{opv}$. Таким чином, для визначення оптимальної ВФ системи потрібно виконати операцію

$$F2_{op}(x) = \max(fd2(x, 0), fd2(x, 1), fd2(x, a_{opv}))$$

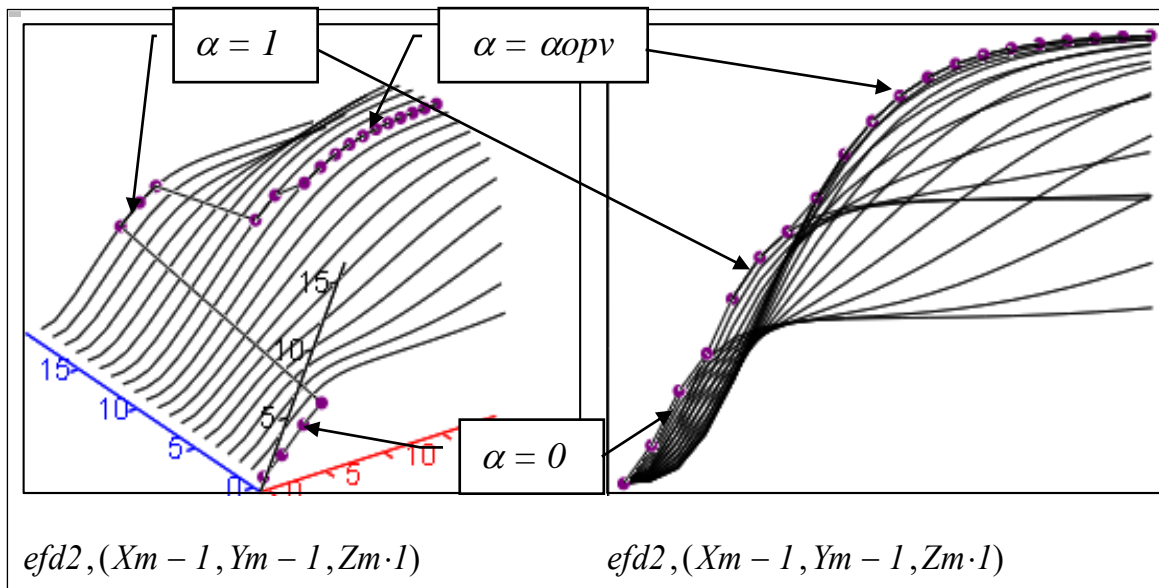


Рис. 2.8. Визначення оптимальної ВФ двохелементної системи через α -функції

Можна показати, що для системи без домінування з довільного числа елементів з невіпуклими ВФ одного параметричного класу, оптимальна ВФ буде підмножиною Парето кінцевого числа α -функцій. Назвемо цю підмножину системою αk -функцій. Опишемо її словесно для випадку системи з трьох елементів (будемо їх вважати упорядкованими за параметром "амплітуда"):

- 1) ВФ 1-го елемента f_1 ;
- 2) оптимальні ВФ пар елементів $f_{2op}(f_1, f_2), f_{2op}(f_1, f_3), f_{2op}(f_2, f_3)$;
- 3) оптимальна ВФ для трьох елементів $f_{3op}(f_1, f_2, f_3)$.

Принципова відмінність оптимальних розподілів на системі елементів з випуклими ВФ від розподілів для систем елементів з невіпуклими ВФ в тому, що усі елементи отримують ненульову кількість ресурсу на всьому діапазоні зміни обмеження по ресурсу. В системі з невіпуклих елементів при зростанні величини обмеження по ресурсу ми отримуємо оптимальні розподіли, що включають тільки один, два, три ... елементи. Ці властивості дозволяють зменшити обсяг обчислень з визначення оптимальної виробничої функції децентралізованої системи.

2.5. Порівняльний аналіз моделей оптимізації розподілу ресурсу у децентралізованих системах

Ми розглядаємо певний клас задач нелінійного програмування

$$Fo(R) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \rightarrow \max ; \text{ при обмеженні } \sum_{i=1}^N x_i = R$$

– задач з адитивними критерієм і обмеженням. Функції $f_i(x_i)$

належать до класу додатних (за винятком початкової точки $f_i(0)$) і нестрого монотонно зростаючих (мається на увазі наявність інтервалів, де функція є постійною). Задачі такого класу поширені і актуальні.

Для цього обмеженого класу задач ми вийшли за межі канонічної задачі нелінійного програмування:

а) відмовилися від виконання умов Куна–Такера і розглядаємо невикпклі і взагалі довільні цільові функції і обмеження;

б) перейшли від пошуку точки – оптимального розв’язання для конкретного значення обмеження R , до пошуку функції – залежності $fop(R)$ оптимального розв’язку від значення обмеження.

В такій постановці задача стає подібною до варіаційної задачі: задана система функцій $f_i(x_i)$,

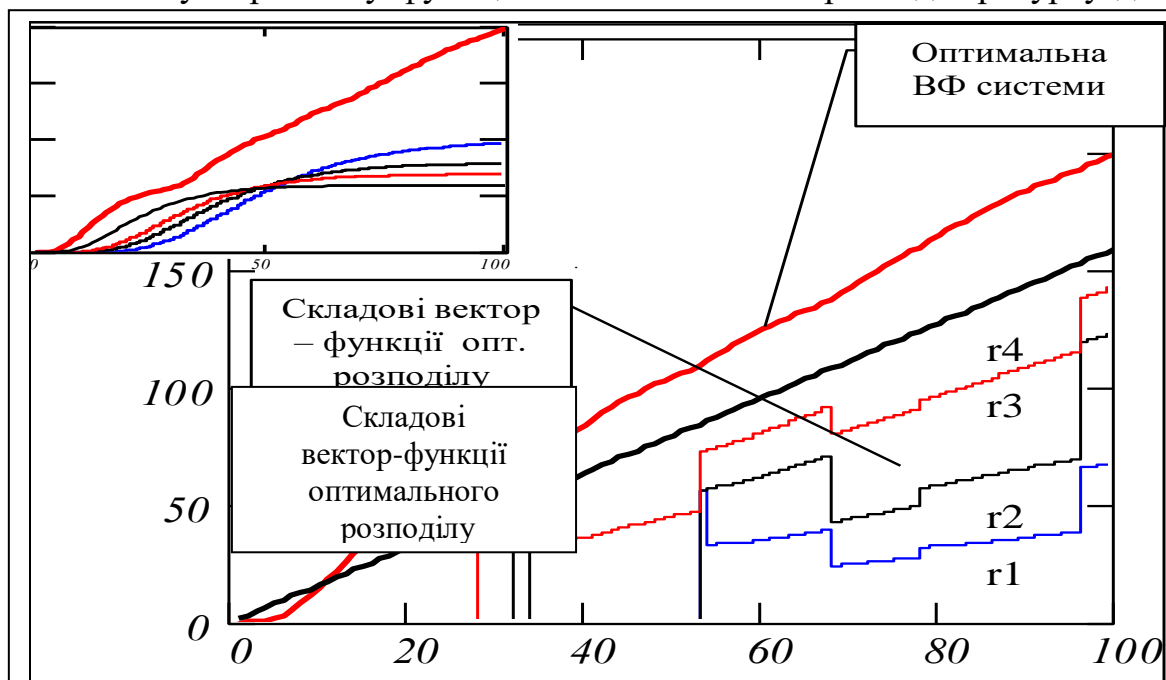
треба знайти функцію $fop(x)$, $x = \sum_{i=1}^N x_i$,

що дає максимум критерію $F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$.

Навіть, якщо така постановка задачі не давала б переваг в плані обсягу і складності обчислень, вона має методологічну перевагу – дає можливість досліднику, практику-аналітику глянути на задачу "зверху", побачити вплив невизначеності і динаміки. В реальних задачах обмеження змінюються з часом, виробничі функції є невизначеними і нестаціонарними.

Однак, новий підхід до задачі оптимізації має переваги і як числовий метод оптимізації. Для того, щоб обґрунтовано визначити місце запропонованого підходу в класифікаційній системі відомих методів проведемо спочатку візуальний аналіз оптимізаційних задач і результатів оптимізації.

На рис. 2.9 подано результат оптимізації розподілу ресурсу для системи з чотирьох елементів з невикпклими ВФ. На рис. 2.10 подано оптимальну виробничу функцію та оптимальний розподіл ресурсу для



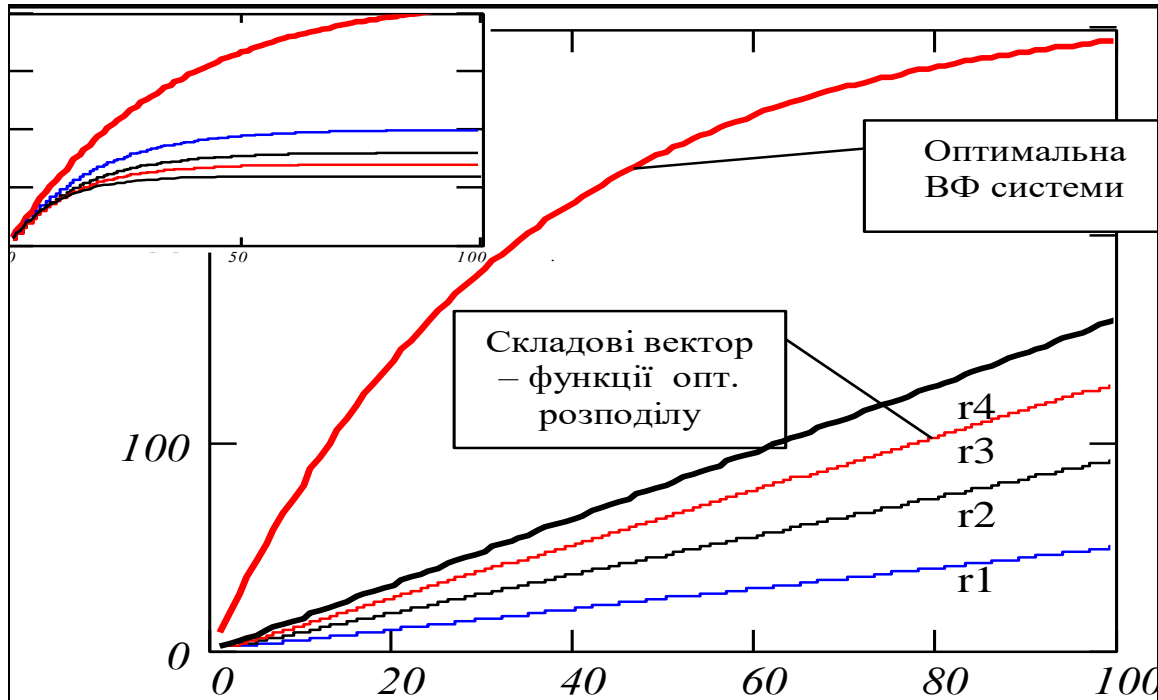


Рис. 2.10. Оптимальний розподіл ресурсу для системи з випуклими ВФ

Порівнюємо рис. 2.9 і 2.10. Для системи з невивуклими ВФ оптимальна виробнича функція системи дійсно є підмножиною Парето системи α -функцій. Вона є кусочною і складається з інтервалів, на яких вона має неперервні похідні. Границі цих інтервалів відповідають точкам розривів функції розподілу ресурсу.

Згідно з твердженнями 1, 2 (стор. 52) функція оптимального розподілу ресурсу має більше чотирьох розривів. Для системи з випуклими ВФ – оптимальний розв'язок простий: оптимальна виробнича функція належить до класу випуклих, функція оптимального розподілу ресурсу не має розривів. Очевидно, задача оптимізації і управління системою з невивуклими елементами не тільки складніша за випуклу задачу, вона дійсно належить до іншого класу задач:

"В этом случае можно получить некоторые результаты, но они имеют другую природу и требуют использования других методов, для которых нам нужно сначала подготовить почву" [105]. Головні складнощі невивуклість приносить саме в практику управління розподіленими технічними і технологічними системами. На рис. 2.11 подано схему системи оптимального управління розподілом навантаженням в теплоенергосистемі.

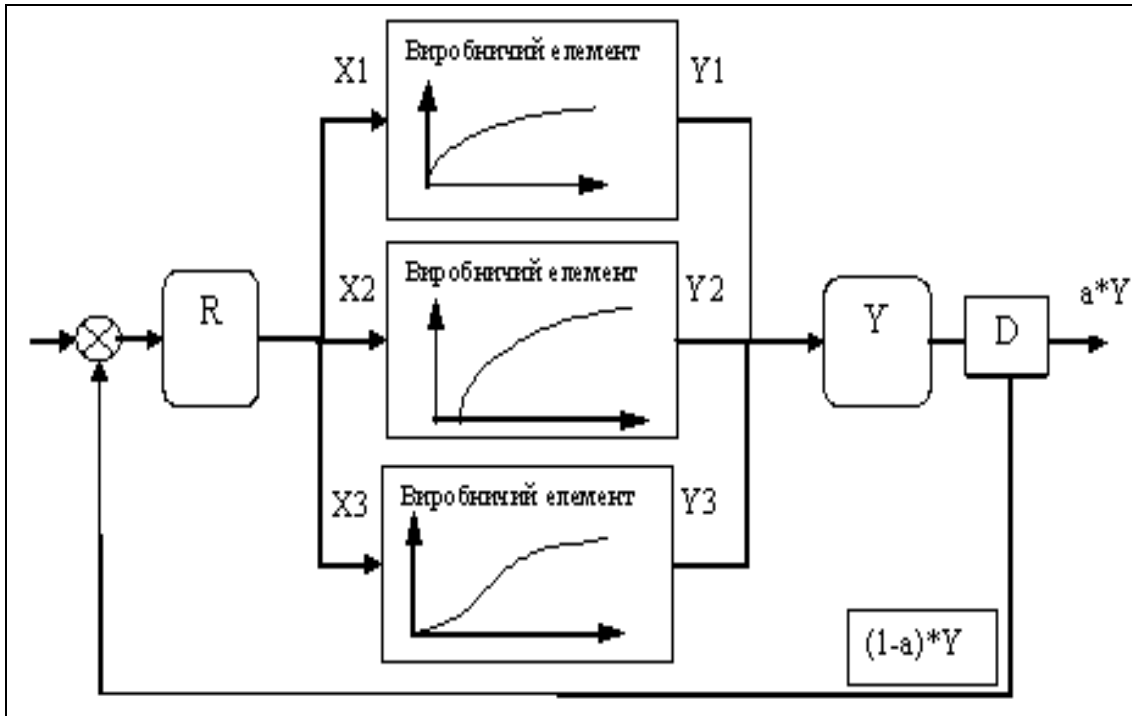


Рис. 2.11. Схема управління розподіленою виробничою системою

Природна інтерпретація задачі – розподіл навантаження в теплоенергосистемі. Звичайно навантаження в таких системах має випадкові коливання і детерміновані складові – лінійні і періодичні тренди (звичайно – добові). Для прикладу взято систему з двох елементів і графік навантаження з періодичними коливаннями та випадковими короткочасними коливаннями. Система управління (як і в задачі про виробництво стиролу з розділу 2.3) повинна для кожного заданого рівня навантаження знаходити оптимальний за критерієм сумарних витрат розподіл між елементами. На рис. 2.12 – 2.15 подано результати розрахунку розподілу і оптимальних виробничих функцій системи для випадків випуклих і невивуклих ВФ елементів та різних функцій навантаження. При наявності визначених: оптимальної виробничої функції $For(R)$ та вектор функції оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$ маємо просту алгебраїчну задачу.

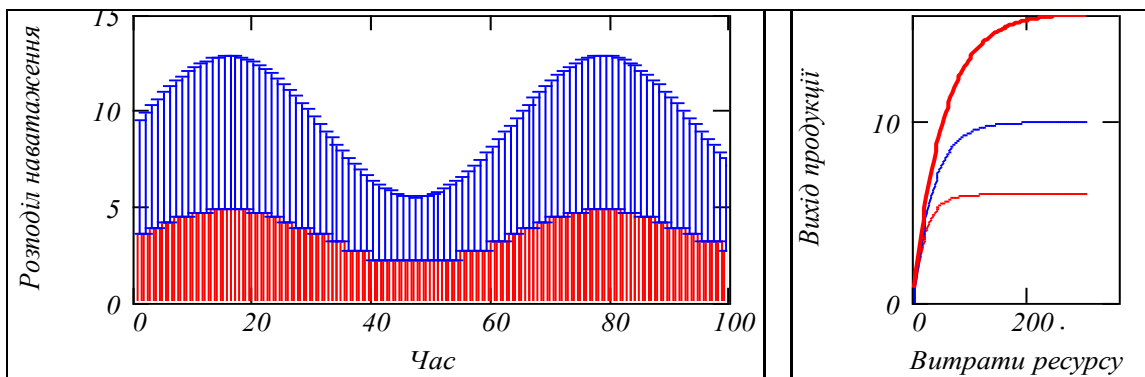


Рис. 2.12. Оптимальний розподіл навантаження для випуклих ВФ

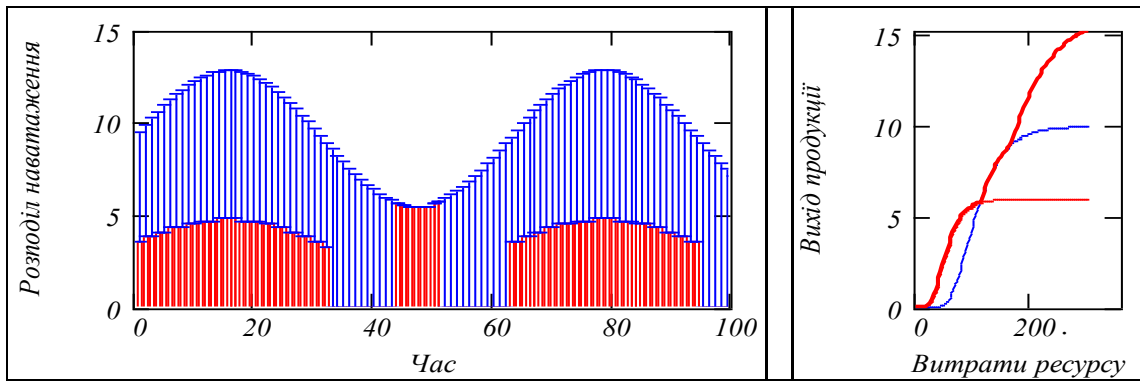


Рис. 2.13. Оптимальний розподіл навантаження для невикпуклих ВФ

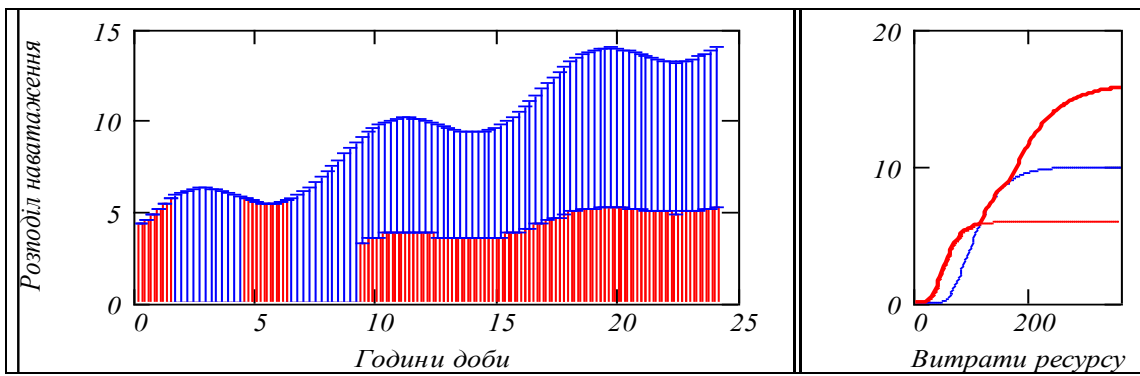


Рис. 2.14. Оптимальний розподіл навантаження для невикпуклих ВФ і навантаження з лінійним і періодичними трендами

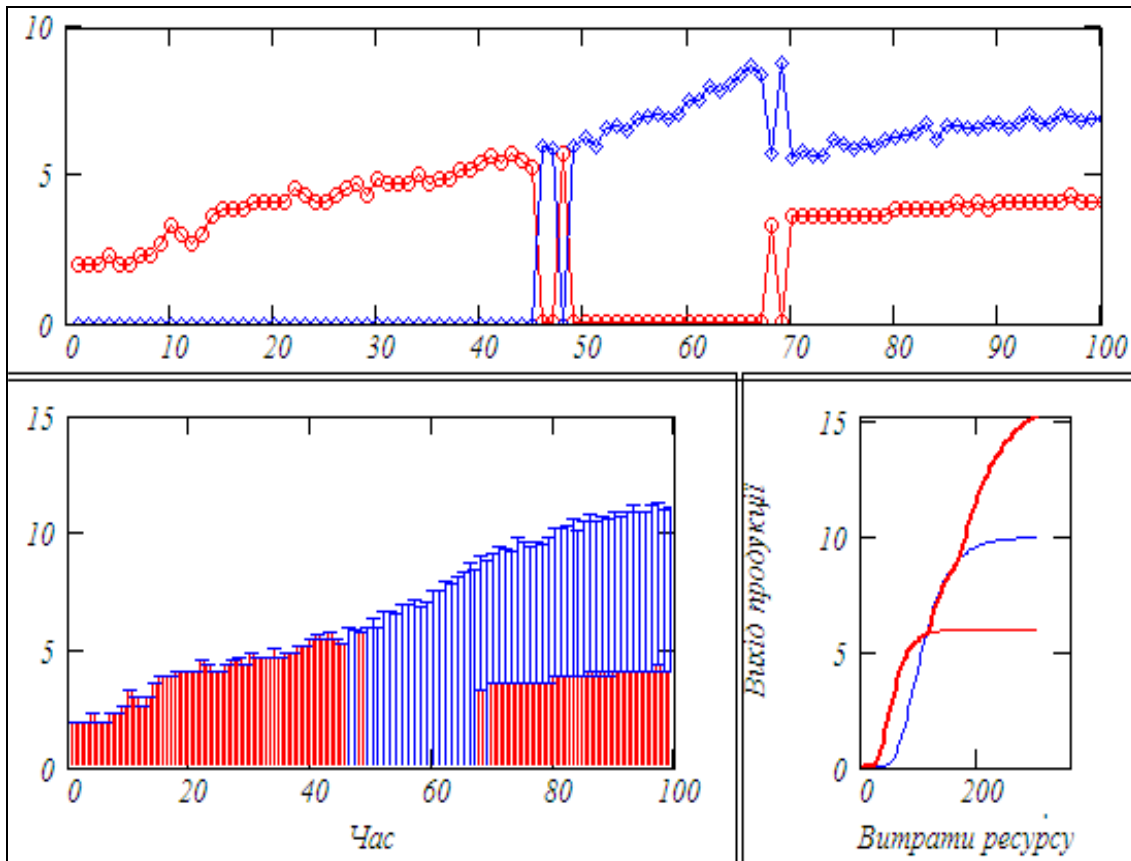


Рис. 2.15. Оптимальний розподіл навантаження для невикпуклих ВФ і навантаження з лінійним, періодичними трендами та випадковою складовою

Бачимо, що у випадку невикпуклих ВФ на певних інтервалах часу навантаження певних елементів стає нульовим. Але найгіршим є те, що така зміна в розподілі навантаження повинна бути раптовою.

Уявимо собі: автомобіль з двигуном із змінним числом циліндрів їде по шосе в граничному режимі потужності, коли при малому зменшенні потрібної потужності працюють чотири циліндри, а при такому ж збільшенні – вісім циліндрів. При зміні числа циліндрів одночасно треба змінювати подачу палива. При неточній реалізації режимів переключення можливі скачки потужності з відповідними наслідками. Саме цей момент був протягом 50 років перепорою для введення автомобільних двигунів із змінним числом працюючих циліндрів.

Уявимо собі регіональну виробничу систему з декількох заводів з оптимальним управлінням при коливаннях попиту. "Виключити" або "включити" завод набагато складніше, ніж котлоагрегати чи хімічні реактори.

Тобто оптимальні управління розподілом ресурсів в розподілених системах з невиконаними узагальненими виробничими функціями не тільки складно обчислювати, але і набагато складніше реалізувати.

Це вимагає розширення задачі – урахування обмежень на переключення, пошуку компромісних рішень, що "пом'якшують" розривні оптимальні управління. В розділі 4 розглянуто модифікацію базової задачі введенням нечітких обмежень.

2.6. Розробка моделі процесу розподілу ресурсу на базі агрегування виробничих функцій елементів

В підрозділі 2.4 теоретично обґрунтовано метод оптимального агрегування. Для реалізації потенційних переваг методу слід знайти ефективну програмну реалізацію. Першопричина ефективності методу – інше формулювання задачі. В нашому випадку оптимізаційну задачу зручною для побудови ефективної програми робить формально несуттєвий вибір змінних управління: не абсолютних величин ресурсу, а їх часток. Беллман для варіаційних задач розподілу ресурсу при обмеженнях ввів ці форми подання задачі і вибирав з них ту, яка була кращою у відповідній конкретній задачі [8]. Порівняємо ці форми управління.

На рис. 2.15, 2.16 подано комплексні графіки оптимального розв'язку на фоні цільової функції $F(x_1, x_2)$.

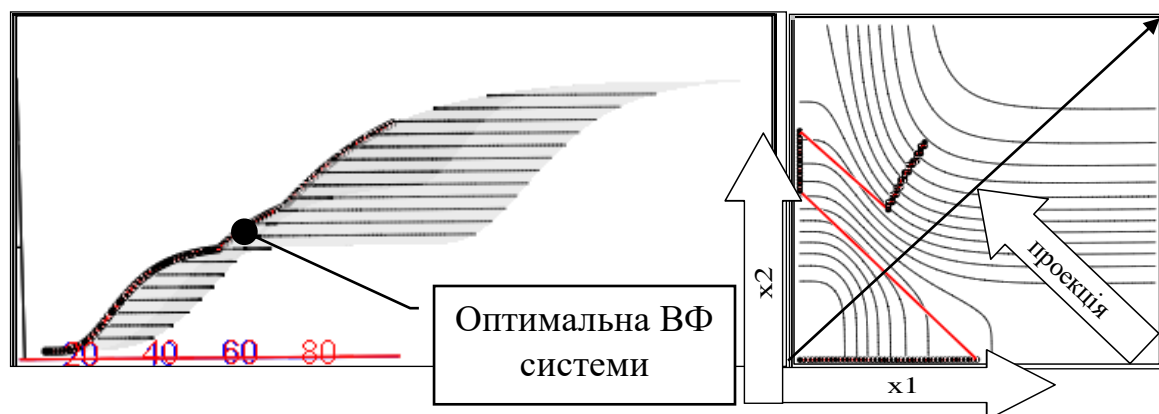


Рис. 2.16. Визначення оптимального розподілу ресурсу в просторі змінних управління x_1, x_2

На рис. 2.17 подано три проекції цільової функції $F(x_1, x_2)$ та накладеної на неї траєкторії максимумів функції $fd_2(x, a)$ при зміні обмеження по ресурсу.

На першому графіку можна бачити, що оптимальна ВФ розподіленої системи є дійсно підмножиною Парето для α -функцій, нижче, – нормовану функцію розподілу ресурсу, що задає пропорцію

оптимального розподілу ресурсу між двома елементами. На графіку праворуч (рис. 2.17) бачимо послідовність функцій однієї змінної, яку ми отримуємо фіксуючи обмеження x в $fd2(x, a)$. Глобальний максимум може досягатись як на границях інтервалу ($\alpha=0$, $\alpha=1$) так і в середині. Локальних максимумів може бути декілька.

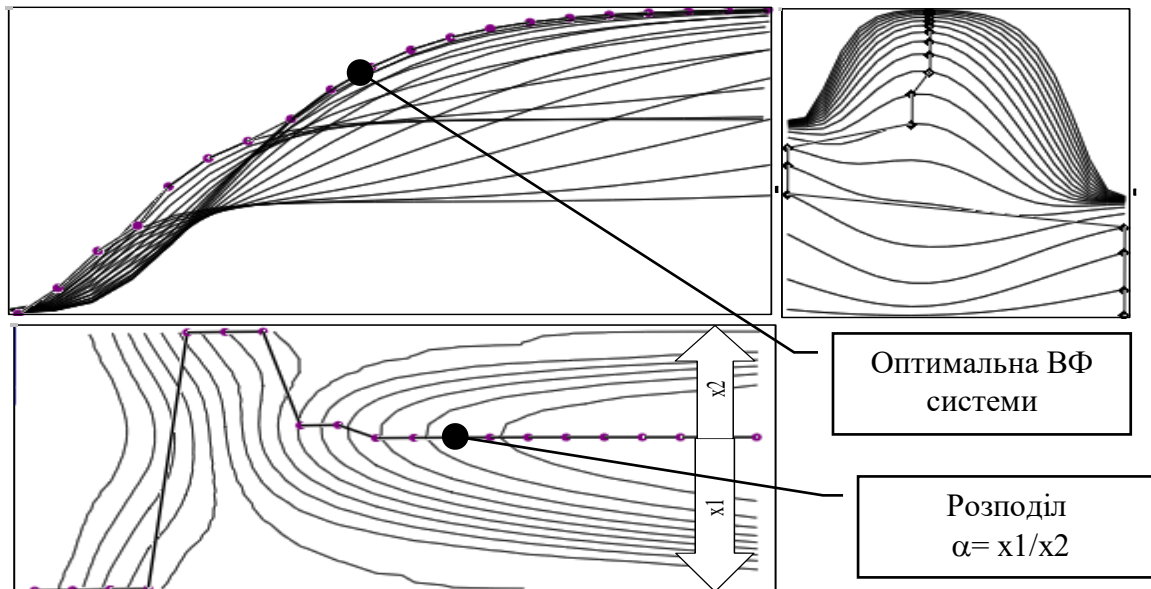


Рис. 2.17. Визначення оптимального розподілу ресурсу в просторі змінних управління $\alpha1$, $\alpha2$ на множині α -функцій

У підсумку, розглянуті властивості оптимальних виробничих функцій та оптимальних розподілів ресурсу в системах з двох елементів, дають можливість розробити альтернативний метод оптимізації розподілу обмеженого ресурсу в розподілених системах з довільним числом елементів і довільними виробничими функціями. Розроблено програмний модуль $f2o(mf1, mf2)$, що фактично реалізує **бінарний оператор**, який бере пару дискретизованих виробничих функцій і повертає оптимальну виробничу функцію системи та відповідну вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу (рис. 2.18). Тоді **оптимальну виробничу функцію довільної розподіленої системи можна знайти послідовним попарним агрегуванням ВФ**.

На рис. 2.19 дано приклад застосування модуля "Опагра" для визначення оптимальної ВФ для системи з чотирьох елементів. В центрі рис. 2.19 – робоча формула (оператор) в структурному вигляді. Поряд – вхідні і вихідні масиви. Оператор $Op7$ бере виробничі функції елементів $f1$, $f2$, $f3$, $f4$ (нижній ряд таблиць). ВФ елементів подаються масивами. Оператор оптимального агрегування $f2o$ бере ВФ (масиви) відповідних елементів і повертає масив, другий і третій стовпці якого – це компоненти вектор-функції оптимального розподілу ресурсу. На верхньому рівні оператор $f2o$ бере попередні результати і повертає

масив з такою ж структурою.

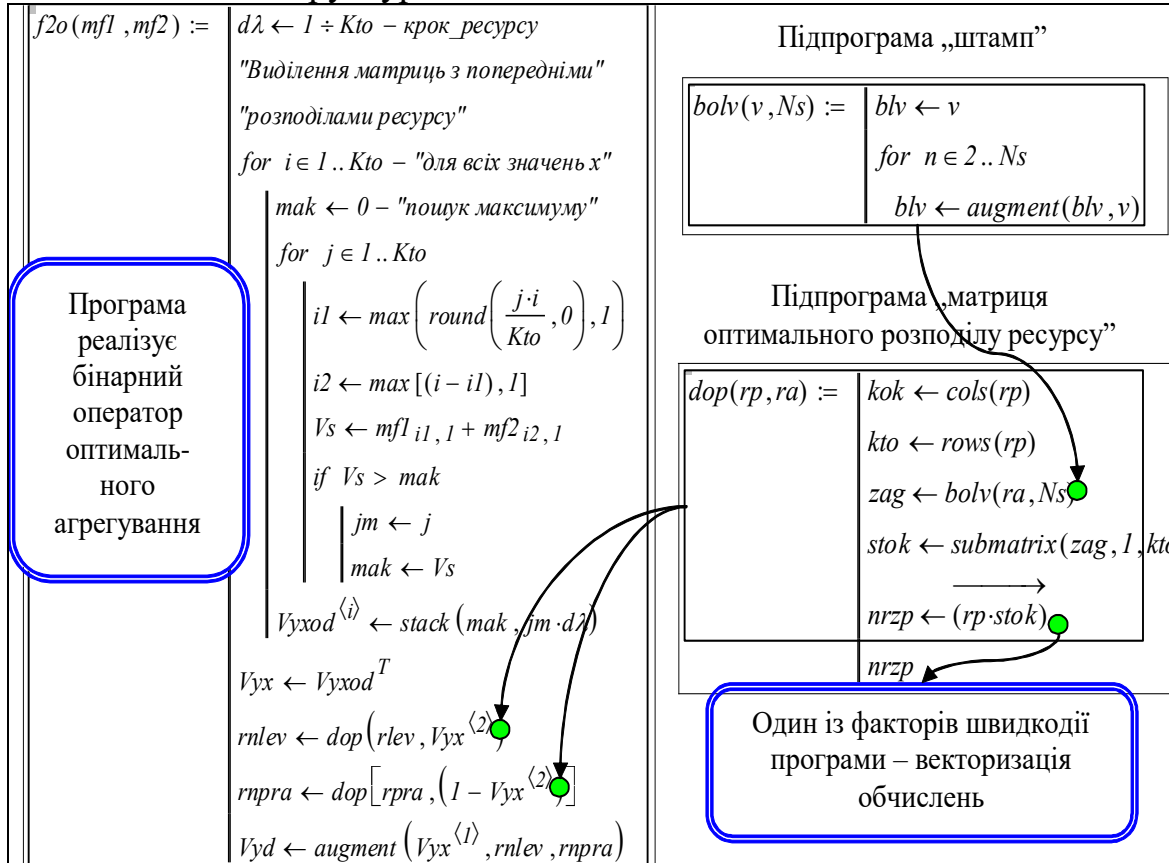
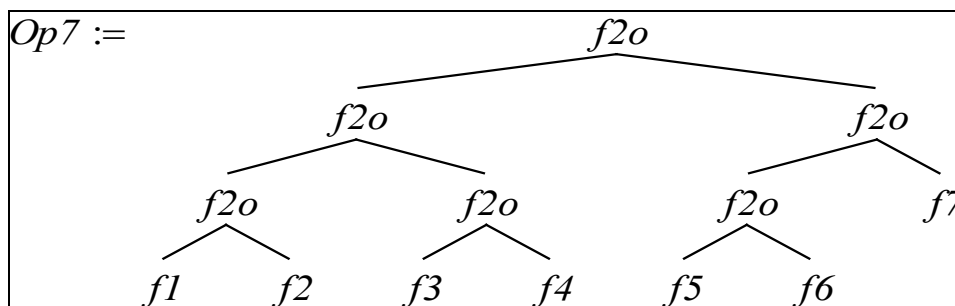


Рис. 2.18. Програмний модуль "Опагра" – реалізація бінарного оператора оптимального агрегування

Технічна проблема для математиків. Відомі бінарні оператори – сума, добуток скалярів, добуток матриць, згортка частотних розподілів – повертають об’єкти тієї ж розмірності, що і операнди. В нашому випадку повертається матриця з тим же числом рядків, а число стовпців дорівнює сумі стовпців операндів мінус два. Оператор оптимального агрегування оперує з елементами змінної розмірності. Цікавим для математика є питання про існування і властивості зворотного оператора – дезагрегування. Аналогія – розкладення певного числа на множники. Розглянемо для прикладу систему з семи елементів. Записуємо робочу формулу:



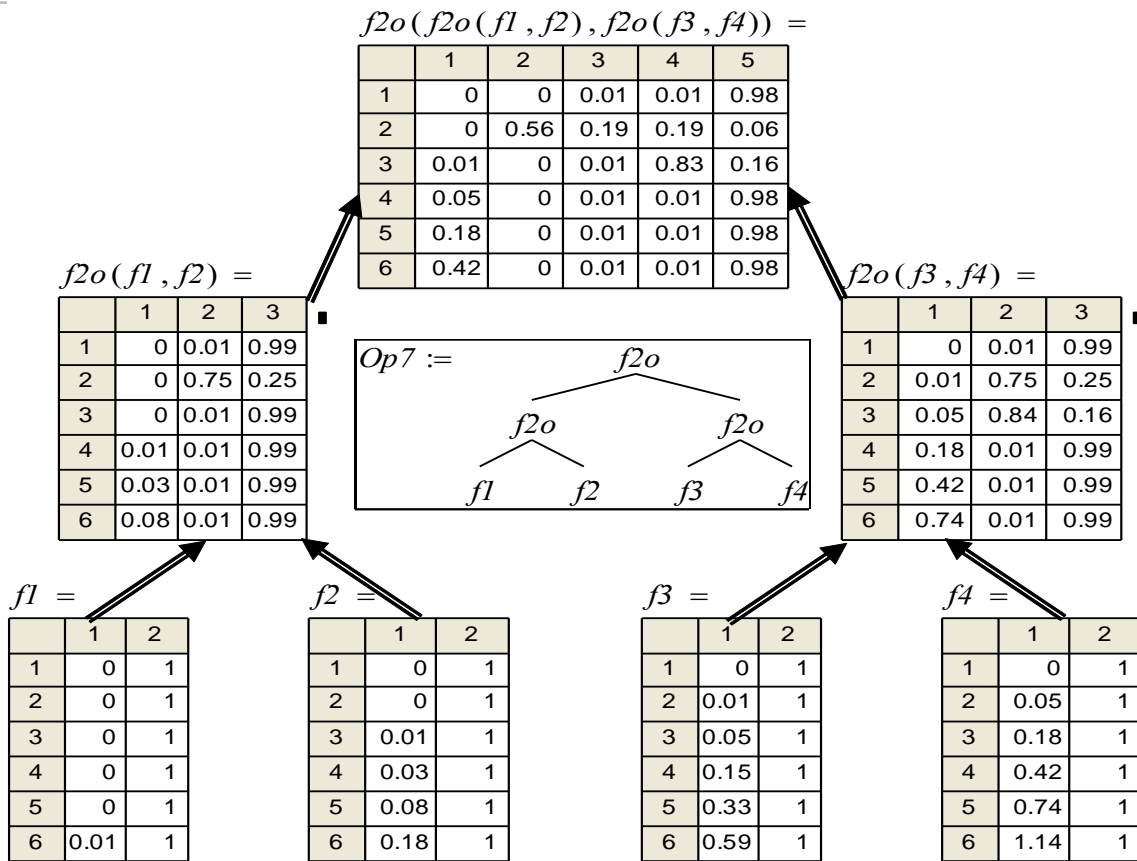


Рис. 2.19. Схема визначення оптимальної виробничої функції системи за методом агрегування. Приклад

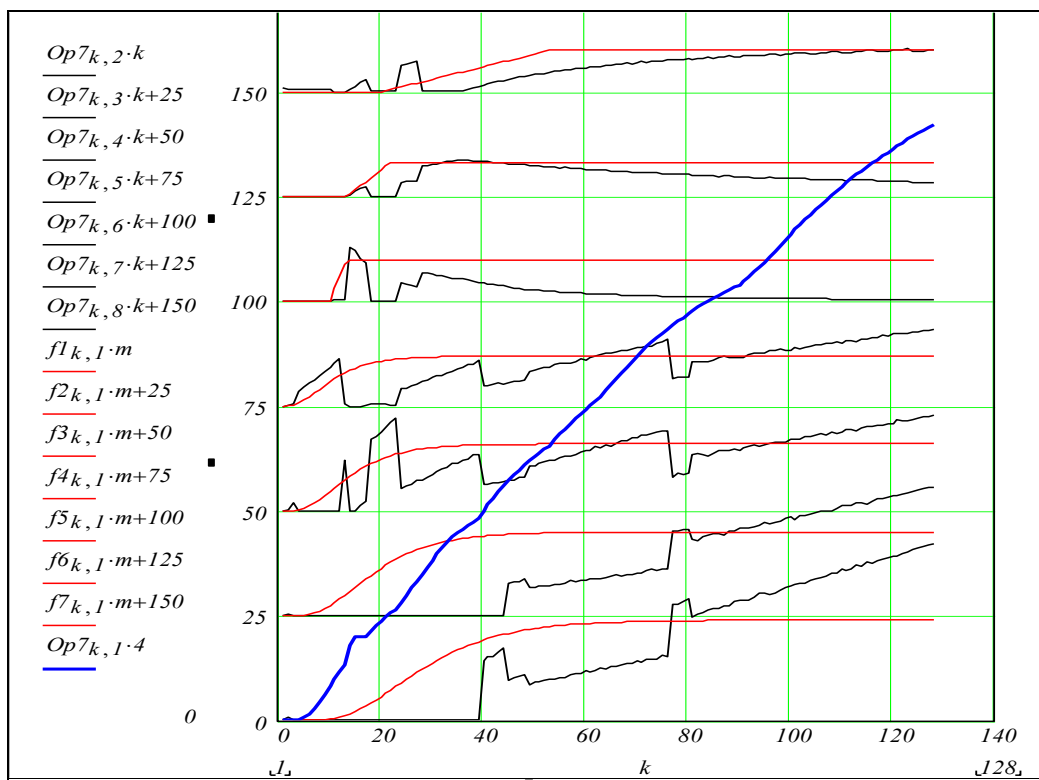


Рис. 2.20. Приклад розрахунку оптимального розподілу ресурсу

На рис. 2.20 для кожного елемента побудовано ВФ (вхідні дані) та відповідний компонент функції оптимального розподілу ресурсу в розмірному вигляді (вихідні дані). Також побудовано оптимальну виробничу функцію системи. Час розрахунку – 15 секунд. Така швидкодія досягнута за рахунок векторизації та агрегуванням – заміною багатовимірної задачі послідовністю одновимірних.

2.7. Порівняльний аналіз точності і ефективності методу оптимального агрегування

Згідно з стандартами наукової роботи необхідно довести адекватність використаних моделей відомим еталонам. Ці еталони слід вибрати з відомих обчислювальних методів нелінійного програмування. Тут виникає незначне ускладнення: саме в основі розробленого методу оптимізації покладено еталон – метод прямого перебору, який знайде екстремум з гарантованою точністю на будь-якій цільовій функції, якщо задати достатню кількість точок. На рис. 2.21 подано "контрольний експеримент" – результат розрахунку оптимального розподілу ресурсу для системи з трьох елементів – найкращим з вбудованих методів оптимізації математичних пакетів – "minerr".

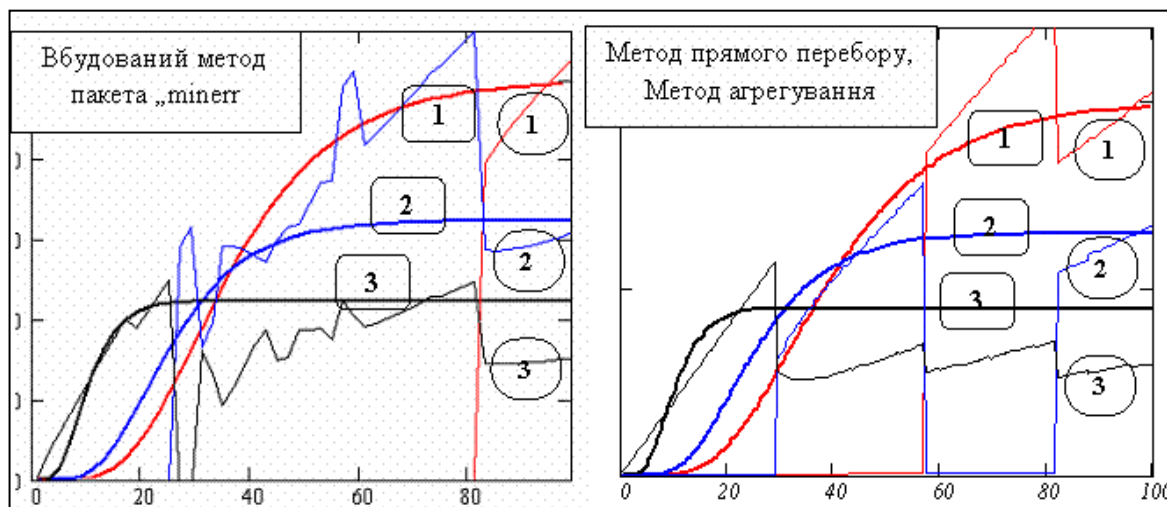


Рис. 2.21. Порівняння методів обчислення оптимального розподілу методом "minerr" та запропонованим методом

Було випробувано більше десяти відомих та розроблених програм оптимізації. Еталоном була програма з прямим перебором і без агрегування – точна, але з малою швидкістю для систем з чотирьох і більше елементів. Для обчислення еталонних функцій розподілу ресурсу для систем з 4 елементами витрачалося 20 – 30 хвилин. Результати розрахунків для тих же даних з використанням методу

оптимального агрегування виявилися, як і повинно було бути при умові коректності програми, повністю ідентичними еталонним даним.

Можна бачити, що метод "miner" працює в середині інтервалів неперервності і видає суттєво некоректні результати в околах розривів. Інші методи взагалі видають повідомлення типу "розв'язання не знайдено, спробуйте змінити обмеження і точність". Похибки методу оптимального агрегування обумовлені тільки похибками дискретизації. Для задач розподілу ресурсу в технічних системах потрібна точність не краще 0,1%. Оцінимо складність задачі побудови K точок оптимальної виробничої функції для системи з N елементів, що мають довільні виробничі функції. Будемо вважати, що положення точки екстремуму визначається з точністю $d\%$, тобто на сітці в $vs = 100/d$ значень.

Загальна логіка алгоритмів безумовної оптимізації і оптимізації при обмеженнях – оцінити структуру цільової функції, використати її властивості так, щоб максимально збільшити величину кроку і точно вибрати напрямок цього кроку. Найкращі існуючі методи в найкращому випадку дозволяють знайти екстремум функції N змінних не більше, ніж за N кроків. Але така швидкість гарантується тільки для квадратичних цільових функцій, при існуванні других похідних. Слід пам'ятати, що обсяг обчислень на кожному кроці зростає з ростом розмірності задачі. До таких класичних алгоритмів відносяться: алгоритм змінної метрики Девідона–Флетчера–Пауелла, алгоритм спряжених градієнтів, алгоритм Левенберга–Марквардта, квазі-Ньютонівський та ін. [4, 5, 6, 43, 47]. Причому найбільш ефективні методи нелінійного програмування взагалі непридатні для випадку невіпуклих функцій [78].

Розрахунок функції оптимального розподілу вимагає розв'язання K задач визначення екстремуму функції N змінних при обмеженні. Виконаємо порівняльну оцінку обчислювальної складності для відомих методів нелінійного програмування і для запропонованого методу на базі агрегування ВФ. Кількість обчислювальних операцій буде пропорційна:

$$OOp1 = K \cdot (vs)^{vN},$$

де vN – розмірність задачі; vs – кількість точок сітки, або кількість кроків пошуку екстремуму. Обсяг обчислень за відомими методами можна зменшити при врахуванні властивостей оптимальної виробничої функції та функції оптимального розподілу ресурсу. Додатково обсяг обчислень можна зменшити за рахунок використання ефективних алгоритмів пошуку екстремуму [47]. Однак, проблема розмірності системи не зникає і ці методи для невіпуклих задач обмежено працездатні. З урахуванням цих можливостей оптимістична оцінка

кількості обчислювальних операцій буде:

$$Op1(vN, vs) \sqrt{vN}$$

При використанні методу на базі агрегування оптимальних виробничих функцій треба виконати $K \cdot \log(N) \div \log(2)$ задач визначення екстремуму функції однієї змінної на сітці в $(vs)^1$ значень, тобто кількість обчислювальних операцій буде пропорційною:

$$Op2 = K \cdot (vs) \cdot (vN - 1)$$

Порівняємо для випадку обчислення екстремуму на сітці в $K := 100$ значень кожної змінної. Така сітка забезпечує достатню для нашого класу задач точність $d = 1-2\%$. Будуємо графіки (рис. 2.22). При рівних умовах реалізації процедур пошуку екстремуму метод агрегування домінує для усіх розмірностей системи N , в найгірших умовах порівняння він має перевагу для $N > 6$.

Головні переваги методу оптимального агрегування – універсальність і гарантованість результатів по точності і часу обчислень, простота застосування, "прозорість" (рис. 2.19) кожного кроку обчислень.

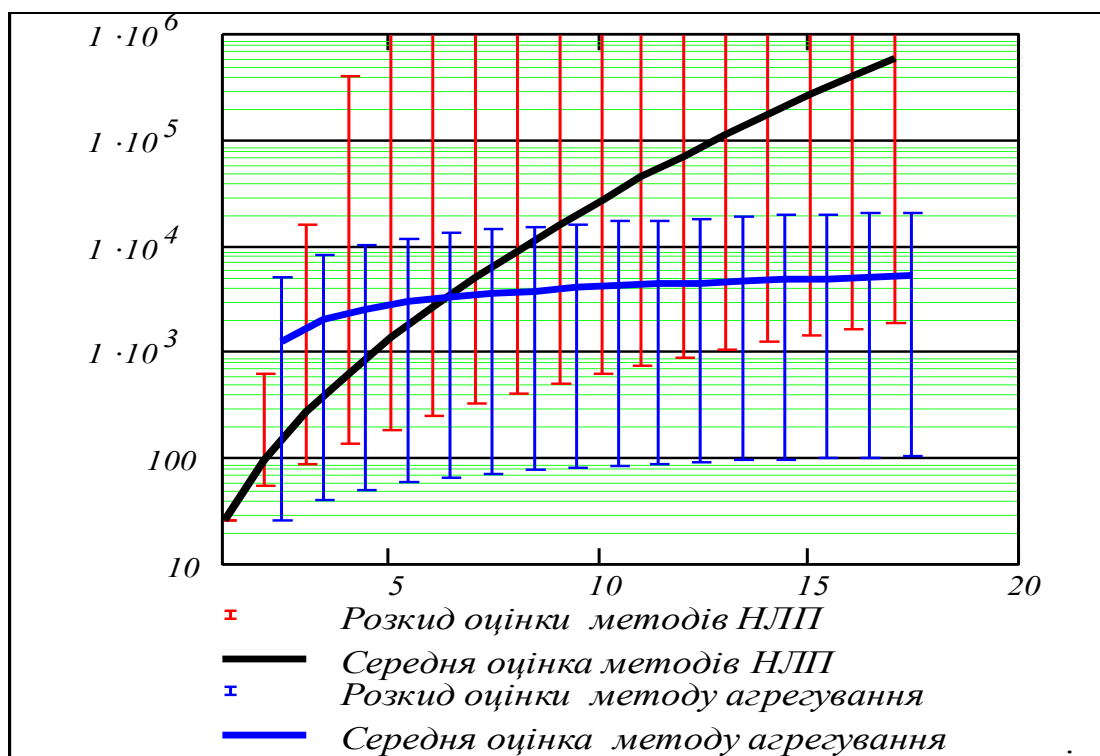


Рис. 2.22. Порівняння складності методів оптимізації

В розроблених версіях програм оптимального агрегування залишено великий резерв підвищення швидкодії: на нижньому рівні – знаходженні екстремуму однієї змінної – використано метод прямого

перебору. На сьогодні напрацьовано велику кількість методів знаходження екстремуму функції однієї змінної (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 Існуючі алгоритми оптимізації при обмеженнях

Базова одновимірна задача:	
максимізувати (мінімізувати) $f(x)$ при обмеженні $a \leq x \leq b$	
1.1	Алгоритм золотого перерізу та алгоритм Фібоначчі – збіжність лінійна, та "суперлінійна"
1.2	Алгоритм перерізів – збіжність лінійна
1.3	Алгоритм змінної метрики (Девідона– Флетчера–Пауела) – збіжність більш ніж лінійна.
1.4	Алгоритм спряжених градієнтів – збіжність – за N кроків (N – число змінних функції) при умові наявності першої і другої похідних у цільової функції – алгоритми Флетчера–Рівса, та Поляка–Полака–Ріб’єра.
1.5	Асимптотичний внутрішній алгоритм штрафних функцій
1.6	Зовнішній алгоритм штрафних функцій
1.7	Алгоритм штрафних функцій зі строго локалізованим екстремумом
1.8	Алгоритм штрафних функцій на базі розширеного лагранжіана
1.9	Алгоритм припустимих напрямків
1.10	Алгоритм проекції градієнта
1.11	Квазіньютонівський для задач з нелінійними обмеженнями

На рис. 2.23 подано класифікацію алгоритмів оптимізації за складністю [59]. Метод оптимального агрегування не вписується в логіку поданої класифікації – він нечутливий до "квадратичності" цільової функції, лінійності чи нелінійності обмежень.

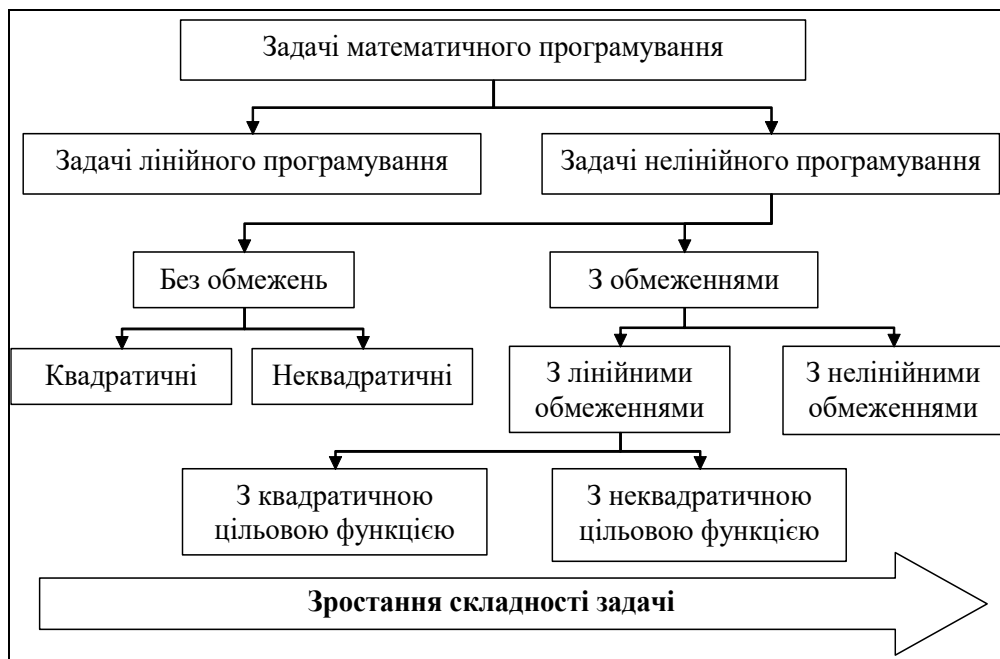


Рис. 2.23. Класифікація існуючих алгоритмів оптимізації за складністю

Щоб зробити різницю між класичними методами і методом оптимального агрегування очевидною (в прямому сенсі) побудуємо тривимірні графіки, для тестових задач оптимізації. Найбільш ефективні для реалізації і надійні обчислення з фіксованим кроком обчислень на певній багатовимірній сітці. Відомі "інтелектуальні" алгоритми з вибором величини кроку обчислень і напрямку руху до екстремуму "провалюються" на розривних і багатоекстремальних цільових функціях. Для оптимізаційних задач з невіпуклими цільовими функціями і обмеженнями можна побудувати новий клас „інтелектуальних” алгоритмів, що враховують властивості функцій оптимального розподілу ресурсів (підрозділи 2.4, 2.5). На рис. 2.24 подано послідовність "зрізів" цільової функції на яких послідовно знаходиться точка екстремуму, що визначає оптимальний розподіл ресурсу між двома елементами. Бачимо, що обсяг операцій для обчислення функції оптимального розподілу росте **лінійно** з ростом розмірності системи.

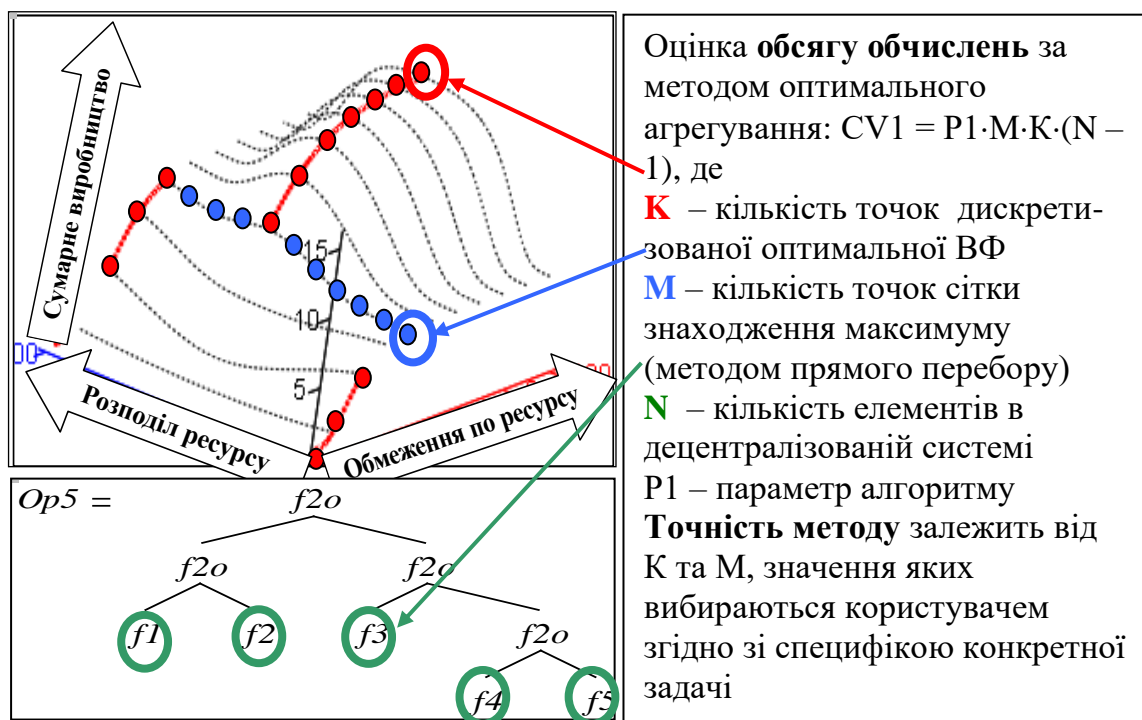


Рис. 2.24. Оцінка обсягу обчислень за методом оптимального агрегування

На рис. 2.25 подано вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу для системи з трьох елементів. В основі класичних алгоритмів лежить пошук точки в багатовимірному просторі, тобто більш, чи менш повний перебір. Тому в загальному випадку кількість

обчислювальних операцій зростає експоненційно.

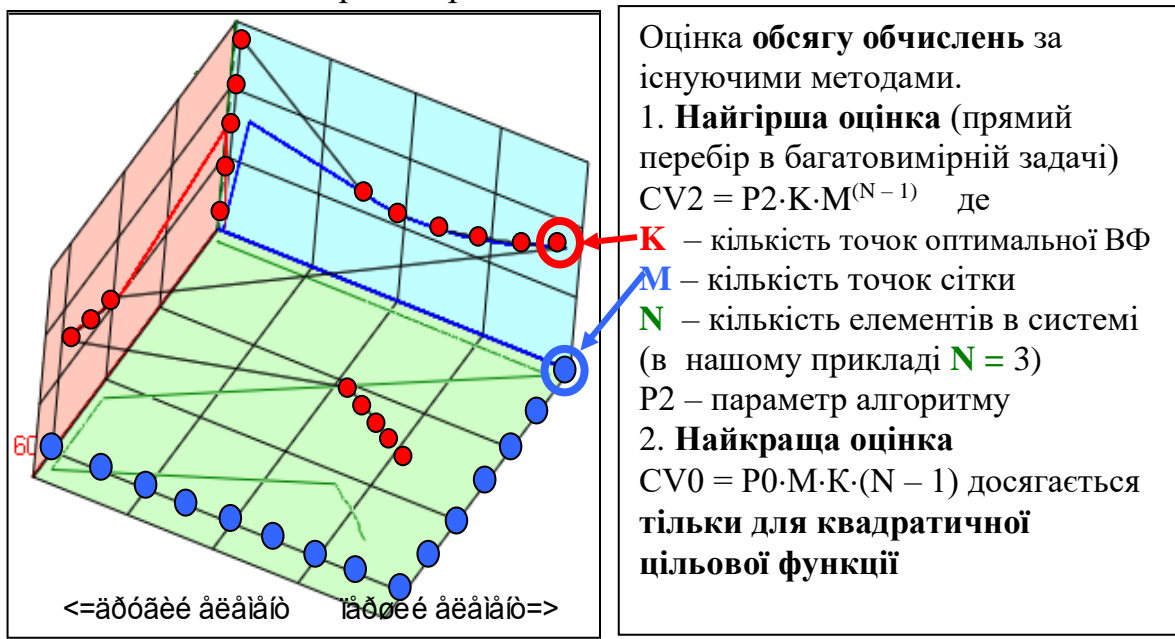


Рис. 2.25. Оцінка обсягу обчислень за існуючими методами

На рис. 2.26 для порівняння з розподілом на рис. 2.25 подано вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу для випуклих ВФ.

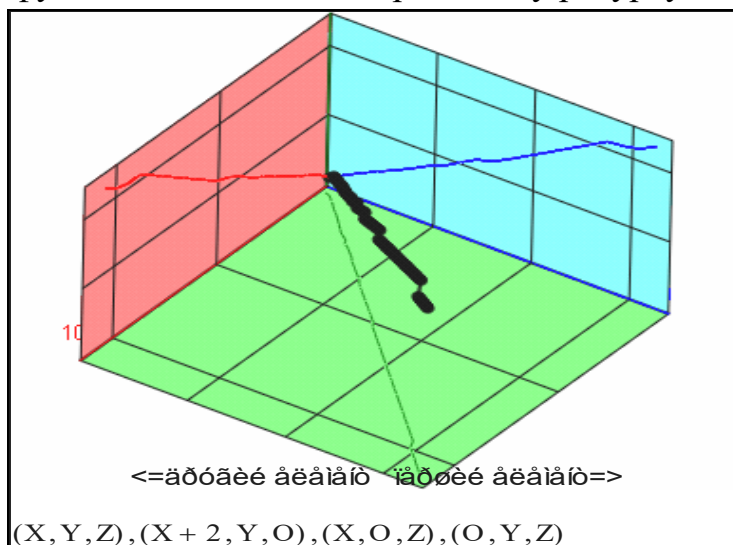


Рис. 2.26. Розподіл ресурсу в системі з трьох елементів для випуклих виробничих функцій

На закінчення розділу ще раз порівняємо вектор-функції оптимального розподілу ресурсу для випадків увігнуто-випуклих і випуклих ВФ. Для випуклих ВФ функції розподілу ресурсу – неперервні і гладкі, а для ВФ одного параметричного класу – лінійні. Головна перевага методу оптимального агрегування не в обчислювальній ефективності, а в «нечутливості» до виду виробничих

функцій елементів і гарантованості часу і результату обчислень функції оптимального розподілу ресурсу.

Висновки

Використання технологій на базі інтегрування можливостей сучасних математичних пакетів і пакетів для моделювання і класичних аналітичних методів дозволило побудувати і обґрунтувати новий підхід до задачі нелінійного програмування з адитивними обмеженнями і критерієм.

Запропоновано узагальнення задачі оптимального розподілу обмеженого ресурсу, де на відміну від існуючих постановок задачі введені вектор-функція оптимального розподілу ресурсу та оптимальна виробнича функція системи, що зменшує загальний обсяг обчислень оптимального розв'язку. Зменшення обсягу обчислень обумовлене використанням властивостей введеної функції оптимального розподілу ресурсу. Проведено дослідження властивостей функцій оптимальних розподілів ресурсу при невиконаних виробничих функціях елементів.

На базі виявлених властивостей вперше розроблено і досліджено математичну модель оптимізації розподілу ресурсу на базі оптимального агрегування виробничих функцій елементів, що, на відміну від існуючих, дозволяє замінити багатовимірну задачу оптимізації послідовністю одновимірних задач, що забезпечує працездатність при довільних виробничих функціях.

Особливістю отриманих наукових результатів в тому, що єдиними конструктивними прототипами були роботи Р. Беллмана з дослідження задачі розподілу [9-11] та робота Е.А. Берзіна [12]. На базі розгляду задачі оптимального розподілу навантаження між циліндрами двигуна запропоновано систему k -функцій, а потім – множину α -функцій. Ці функції стали інструментом і для строгого обґрунтування методу і для розробки програмної реалізації оптимального агрегування.

Розроблено програмні модулі для реалізації методу оптимального агрегування. Фактично задача нелінійного програмування для користувача зведена до алгебраїчної задачі з гарантованим результатом. Метод оптимального агрегування не має обмежень на вид узагальнених виробничих функцій елементів, які можуть бути невиконаними і негладкими.

Проведено порівняльний аналіз точності та обчислювальної складності методу оптимального агрегування та аналогів. Головна перевага дослідженого методу – повна універсальність: витрати часу і точність не залежать від виду ВФ. Ще одна, потенційна перевага – широкий спектр можливих застосувань.

РОЗДІЛ 3.

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОКРОКОВИХ ПРОЦЕСІВ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

В розділі 2 були розглянуті теоретичні і практичні аспекти задачі моделювання однокрокових процесів розподілу ресурсу в децентралізованих системах при довільних узагальнених виробничих функціях (ВФ) елементів системи. В цьому розділі ставимо за мету створення теоретичних основ і комплексу робочих моделей, які охоплювали б усі актуальні для практики задачі багатокрокового розподілу ресурсу в децентралізованих системах. Суть багатокрокових задач в тому, що оптимізується сумарний ефект системи за декілька кроків функціонування системи. Управління в таких задачах називається стратегічним, на відміну від тактичного управління в однокрокових задачах.

В математичному аспекті оптимізаційні задачі стратегічного управління є варіаційними задачами. В такій задачі шукається не одна точка – координати екстремуму цільової функції, а певна функція часу, що дає екстремум цільовій функції – звичайно інтегральному функціоналу. На першому етапі ми відтворимо в середовищі математичного пакета результати Беллмана – зробимо програмні модулі для обчислення оптимальних управлінь. На другому етапі виконаємо ряд модифікацій цієї базової задачі і запропонуємо засоби розв’язання. На третьому етапі застосуємо, розглянутий в розділі 2 метод агрегування в задачах моделювання процесів розвитку систем великої розмірності.

3.1. Постановка і розв’язання базової задачі

Задача максимізації виробництва за декілька кроків (періодів) функціонування децентралізованої виробничої системи є природним продовженням розглянутої в розділі 2 задачі моделювання однокрокового процесу і має ще більше інтерпретацій в техніці і технології. Наприклад, задачу максимізації виробництва певного продукту за рік можна трактувати так: в перші півроку витратимо ресурси на технологічне вдосконалення процесу виробництва (змінимо виробничу функцію), а в останні півроку витратимо ресурси тільки на виробництво і отримаємо в результаті більше продукції, ніж за умови виробництва протягом року за стару технологією.

Однак головна причина розгляду багатоперіодних задач у тому, що сучасні вироби і технології мають дуже короткий життєвий цикл і ми повинні розглядати технічні і технологічні системи, саме в динаміці їх розвитку – від появи до морального старіння.

Враховуємо ще один момент, який наближує задачу оптимального розподілу ресурсів до реальності: зворотні зв'язки "вихід–вхід". В розділі 2 обмеження по ресурсу було екзогенним. Тепер ми будемо розглядати ресурси ендогенними – результатом функціонування виробничої системи.

Сьогодні головним аспектом функціонування виробничих систем стає інноваційна діяльність. Це також єдиний шлях розвитку для України в цілому. Однак, "типові підходи і методи прогнозування, орієнтовані на дослідження еволюційного, поступового розвитку, не можуть виявити і передбачити зміни процесів, стрімких у часі і стрибкоподібних за властивостями" [44].

Високі наукомісткі технології, глобалізація вимагають високих темпів розвитку виробничих систем. Задача оптимізації стратегічного управління такими нестаціонарними, нелінійними, невизначеними організаційно-виробничими системами вимагає високого рівня математичних моделей і практичного досвіду який в значній мірі буде набиратись через моделювання – на віртуальній реальності. [44].

Ще одна причина – методологічна: саме задача такого класу є наскрізною моделлю і прикладом в роботах Р. Беллмана, в яких досліджуються динамічне програмування, функціональна апроксимація, адаптивне управління [7–9]. Застосування і розвиток результатів Р. Беллмана дозволило отримати головні результати цього розділу.

3.1.1. Одновимірна задача Марковиця–Беллмана

Розглянемо спочатку одновимірну (однопродуктову) задачу розподілу. Задано: диференціальне рівняння процесу розширення виробництва

$$\frac{d}{dt}x(t) = a_{11} \cdot y(t), \quad a_{11} > c; \quad (3.1)$$

початкове значення темпу виробництва $t = 0$: $x(0) = c1$;

критерій оптимізації (функціонал) $J = \int_0^T (x(t) - y(t))dt$; (3.2)

ціль оптимізації: максимум функціоналу (3.2);

змінна управління $y(t)$, обмеження управління $y(t) \leq x(t)$; (= розвиток за рахунок власних поточних ресурсів).

Розв'язання задачі. Розв'яжемо диференціальне рівняння процесу відносно x :

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = a_{1,1} \cdot y(t)_i; \quad dx_1 = a_{1,1} \cdot y(t)_1 \cdot dt; \text{ інтегруємо і отримуємо}$$

$$x(t)_1 = c1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t)_1 dt. \quad (3.3)$$

Підставимо (3.3) у функціонал (3.2)

$$J1 = \int_0^T \left(c1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t1)_1 dt1 - y(t)_1 \right) dt \quad (3.4)$$

де $y(t)_1$ задовольняє умову

$$0 \leq y(t)_1 \leq c1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y(t1)_1 dt. \quad (3.5)$$

Очевидно, права частина нерівності – це вираз для $x1$ (3.3).

Змінюємо порядок інтегрування у (3.5) і отримуємо

$$J1 = c1 \cdot T + \int_0^T [a_{1,1} \cdot (T - t) - 1] \cdot y(t1)_1 dt1. \quad (3.6)$$

Проаналізуємо інтеграл (3.6). Щоб функціонал був максимальним, підінтегральний вираз в кожний момент часу повинен бути максимально можливим. Як цього досягнути? Бачимо – підінтегральний вираз – це добуток виразів $[a_{1,1} \cdot (T - t) - 1]$ та $y(t1)_1$. Перший множник – функція часу, на яку ми не маємо впливу, другий множник $y(t1)_1$ – це управління, яке потрібно знайти, – обсяг ресурсу витрачений на розширення виробництва.

Множник $[a_{1,1} \cdot (T - t) - 1]$ в (3.6) – функція часу. При умові: $t = 0$, та $a_{1,1} \cdot T > 1$, ця функція спочатку є додатною, але в певний момент $t = T1$ стає меншою нуля. Незавжно визначити момент переключення управління

$$a_{1,1} \cdot (T1 - t1) - 1 = 0 \text{ solve, } t1 \rightarrow \frac{a_{1,1} \cdot T1 - 1}{a_{1,1}}, T1 = \frac{(a_{1,1} \cdot T - 1)}{a_{1,1}}.$$

При заданих нами додаткових умовах відносно $a_{1,1}$ і T , що є природними, функція $y(t)_1$ повинна бути максимально можливою на інтервалі, де перший множник додатний, і нульовою, там де він від'ємний. Тобто, в момент часу $T1$ має місце "переключення" управління з стратегії "усе в розвиток виробництва" в стратегію "усе в накопичення". Записуємо вираз для оптимального управління

$$y1(t) = \begin{cases} \left(c1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y1(t) dt \right) & \text{if } 0 \leq t \leq T1 \\ 0 & \text{if } T1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.7)$$

Отримаємо явний вираз для $y1(t)$. Продиференціюємо (3.7):

$$y1(t) = c1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y1(t) dt ; \frac{d}{dt} y1(t) = a_{1,1} \cdot y1(t) ; \frac{d}{dt} y1(t) - a_{1,1} \cdot y1(t) = 0 ;$$

Розв'язання цього рівняння $y1(t) = c1 \cdot e^{a_{1,1} \cdot t}$ до моменту

переключення $T1$. Після того, як оптимальне управління знайдено, його реалізація та моделювання процесів розвитку є тривіальними.

3.1.2. Двовимірна задача Марковиця–Беллмана

Розв'язання багатовимірних задач такого класу має ту ж структуру і властивості, але відповідно воно більш трудомістке і складне. Оцінимо вплив розмірності на конкретному прикладі двовимірної задачі.

Задано: систему диференціальних рівнянь процесу розширення виробництва

$$\frac{d}{dt}x_1 = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2; \quad \frac{d}{dt}x_2 = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2; \quad (3.8)$$

коефіцієнти якої задовольняють обмеження $a_{ij} \geq 0, i=1,2, j=1,2$; початкові значення темпів виробництва $t = 0$ $x(0)_1 = c_1; x(0)_2 = c_2$;

критерій оптимізації (функціонал) $J_2 = \int_0^T (z_1 + z_2) dt$, (3.9)

де $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2$; ціль оптимізації: максимум функціоналу (3.9); змінні управління $y(t)_1, y(t)_2$, обмеження управління $y(t)_1 \leq x(t)_1, y(t)_2 \leq y(t)_2$. Далі за замовчуванням записуємо x_1, y_1 , замість $x(t)_1, y(t)_1$.

Розв'язання задачі. Розв'яжемо систему диференціальних рівнянь процесу розвитку (3.8). Інтегруємо і отримуємо

$$x(t)_i = c_i + a_{i,1} \cdot \int_0^t y(t)_1 dt + a_{i,2} \cdot \int_0^t y(t)_2 dt, \quad i=1,2 \quad (3.10)$$

Підставимо (3.10) у функціонал (3.9) :

$$J_2 = \int_0^T \left(c_1 + a_{1,1} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{1,2} \cdot \int_0^t y_2 dt - y_1 \right) dt + \int_0^T \left(c_2 + a_{2,1} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{2,2} \cdot \int_0^t y_2 dt - y_2 \right) dt \quad (3.11)$$

де $y(t)_i$ задовольняє умову:

$$0 \leq y(t)_i \leq c_i + a_{i,1} \cdot \int_0^t y(t)_i dt, \quad i=1,2 \quad (3.12)$$

Праві частини нерівностей (3.12) – це вирази (3.10) для x_1, x_2 .

Змінюємо порядок інтегрування у (3.11) і отримуємо

$$J_2 = (c_1 + c_2) \cdot T \cdot \left[\int_0^T [(a_{11} + a_{12})(T-t) - 1] \cdot y_1 dt + \int_0^T [(a_{12} + a_{22})(T-t) - 1] \cdot y_2 dt \right].$$

У цьому виразі множники

$$[(a_{11} + a_{12})(T-t) - 1], \quad [(a_{12} + a_{22})(T-t) - 1]$$

є функціями часу, що не залежать від управління. Тому для максимізації функціоналу потрібно управління y_1 та y_2 вибирати так, щоб величина

їх була максимально можливою, коли вирази у дужках додатні, і нульовими, коли – від’ємні. Таким чином, стратегія управління має бути такою: спочатку всі ресурси системи йдуть на розширення виробництва, після певних моментів $T1$, $T2$ все вже йде у накопичення, а виробничі потужності залишаються постійними. Визначимо моменти переключення управління за допомогою символного блока розв’язання систем рівнянь "Given–Find".

Given – початок блока, вводимо систему рівнянь

$$(a11 + a21)(T - T1) - 1 = 0; \quad (a12 + a22)(T - T2) - 1 = 0$$

– кінець блока, виводимо розв’язання у символному вигляді

$$Find(T1, T2) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{(12 \cdot a11 + 12 \cdot a21 - 1)}{(a11 + a21)} \\ \frac{(12 \cdot a12 + 12 \cdot a22 - 1)}{(a12 + a22)} \end{array} \right],$$

звідки маємо

$$T1 = \frac{(a11 + a21) \cdot T - 1}{a11 + a21}, \quad T2 = \frac{(a12 + a22) \cdot T - 1}{a12 + a22}. \quad (3.13)$$

За рахунок перестановки рівнянь можна зробити $T2 > T1$. В [8] доведено, існування моменту переключення другого управління $T3$: $T1 \leq T3 \leq T2$. Визначити аналітично цей момент для систем вище третього порядку майже неможливо. Однак для практики досить знання про інтервал для $T3$. У підсумку ми можемо побудувати систему оптимального управління, де на кожному кроці процесу знаходяться $y1$ та $y2$, що забезпечують максимум критерію (3.11). На рис. 3.1 подано схему системи управління розвитком, на рис. 3.2 – результати моделювання оптимального процесу розвитку.

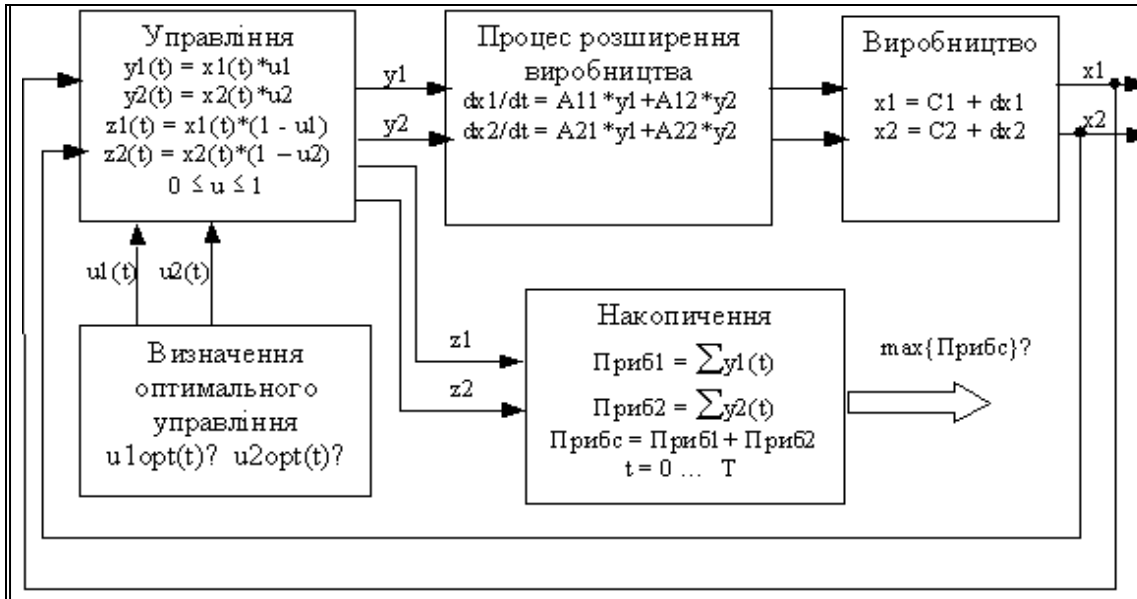


Рис. 3.1. Схема системи оптимального управління розвитком

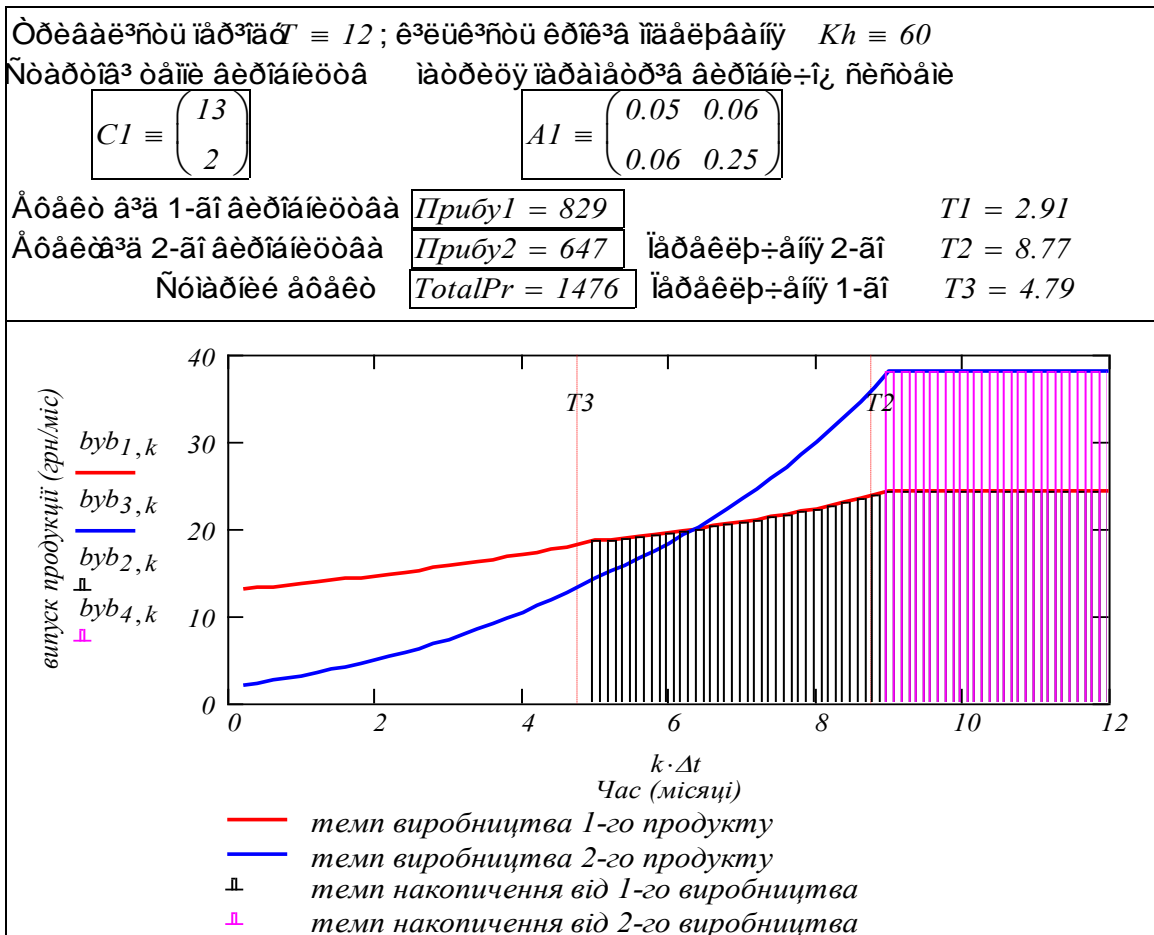


Рис. 3.2. Оптимальний процес розвитку виробничої системи

Таким чином, максимум критерію за період часу T при заданих обмеженнях досягається при такій стратегії (рис. 3.2):

накопичення першого продукту $z1=0$ при $0 \leq t \leq T3$;

накопичення другого продукту $z_2=0$ при $0 \leq t \leq T_2$;
витрати на розширення першого виробництва $y_1=0$ при $T_3 \leq t \leq T$;
витрати на розширення другого виробництва $y_2=0$ при $T_2 \leq t \leq T$.

3.2. Узагальнення задачі моделювання розвитку розподіленої системи

Розглянутий в підрозділі 3.1 метод розв'язання задачі оптимізації розвитку базується на заміні порядку інтегрування у виразі для критерію – інтегрального функціонала. Такий прийом можливий тільки у випадку лінійної моделі динаміки росту виробничої системи. Потрібен універсальний метод для випадку довільних нелінійних моделей динаміки. Однак детальний розгляд процесу одержання розв'язань, отриманих Беллманом, має конкретну мету – проаналізувати структуру оптимального розв'язку. Зокрема у розв'язаннях присутній множник $(T-t)$ – це ключова складова наближеного розв'язання варіаційної задачі.

Узагальнимо задачу – будемо розглядати довільні залежності між темпом витрат ресурсу в розширення виробництва і прирощенням темпу виробництва. Можна знайти безліч прикладів нелінійних залежностей такого плану на будь-яких рівнях виробництва – від окремого хімічного реактора до підприємства в цілому. Для побудови загальних методів оптимізації і моделювання є принциповим те, що залежності такого виду теж відносяться до виробничих функцій. Різниця тільки в тому, що результатом витрат ресурсу є не продукт, а зміна темпу виробництва продукту. В математичному плані виробничі функції і залежності прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу відносяться до одного класу математичних об'єктів. Однак на рівні конкретних прикладних задач це різні функції. Щоб відрізнити їх назвемо виробничі функції "другого порядку" функціями розвитку (ФР). Розмірність виробничих функцій (ВФ) "(одиниць вимірювання продукту)/(одиниць вимірювання ресурсу)", розмірність функцій розвитку (ФР) – "(одиниць вимірювання продукції за одиницю часу)/(одиниць вимірювання ресурсу за одиницю часу)". Формально одиниці часу скорочуються, але суть ФР – прирощення виробничої потужності.

Виробничий елемент є технологічним перетворювачем ресурсу у продукт. Найпростішим способом зміни темпу виробництва є кількісна зміна в технологічному перетворювачі – збільшення кількості окремих агрегатів, збільшення об'єму чи поверхні реактора та ін. Можливі і якісні зміни технологічного перетворювача, що ведуть до прирощення

темпу випуску продукції: підвищення температури і тиску, використання високих технологій.

Залежність прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу звичайно є результатом дії багатьох імовірнісних і детермінованих "механізмів". Однак, саме наявність багатьох причин і факторів певним чином уніфікує і згладжує ці залежності – вони сходяться до функцій S-класу [46, 47, 96, 101, 95]. Однак, ми будемо шукати метод розв'язання узагальненої задачі для довільних ФР, в тому числі і "негладких", таких що не мають неперервної похідної.

Сформулюємо узагальнену задачу. Маємо децентралізовану систему, де виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x1(t), x2(t), \dots, xN(t)$ (одиниць вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt} x(t)_i = \text{fin}(y(t)_i, i) = \text{fin}(xs(t) \cdot u_i, i) , \quad (3.14)$$

де $\text{fin}(y(t)_i, i)$ – функція розвитку для i -го виробництва, що належить до класу нестрого монотонно зростаючих функцій;

$$xs(t) = \sum_{j=1}^N x(t)_j \quad \text{– сумарне виробництво в момент } t;$$

$0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управління – частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей по i -му продукту. Для управлінь виконується умова нормування:

$$\sum_{j=1}^N u(t)_j + unak(t) = 1 , \quad (3.15)$$

де $unak(t)$ – частка ресурсів, що йде в накопичення.

Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку, що максимізує сумарний накопичений випуск за певний плановий період T

$$NJ = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N x(t)_j \right) \cdot unak(t) dt . \quad (3.16)$$

Типова інтерпретація планового періоду T – момент зміни технології і конструкції виробу i , відповідно, засобів виробництва.

Розглянемо спочатку одновимірну задачу з одним виробництвом.

3.2.1. Наближене розв'язання узагальненої задачі розподілу

Ми будемо шукати розв'язання для довільних функцій розвитку з позицій практика, якому потрібно на кожному кроці процесу приймати рішення про розподіл поточного ресурсу між накопиченням і розвитком виробництва так, щоб максимізувати прирощення критерію (3.16) на момент закінчення процесу T .

На рис. 3.3 подано схему розподілу ресурсу на поточному кроці на фоні графіка зміни виробничих потужностей. На цій схемі $S1 = x(t) \cdot (1 - u(t))$ – це та частина поточного ресурсу, що йде в накопичення; $S2$ – те, що йде в інвестиції. Згідно з рівнянням динаміки виробничих потужностей частина $S2 = x(t) \cdot u(t)$ створює прирощення $\Delta x = fin(x(t) \cdot u(t))$ виробничих потужностей.

Оцінимо прирощення продукції, що можна отримати до кінця процесу $S3 = \Delta x \cdot (T - t) = fin(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t)$.

Це додатковий ресурс, який можна на наступних кроках використати для накопичення і розвитку. Розподіл ресурсу повинен бути теж оптимальним. Якщо продовжити ці міркування ми прийдемо до методу динамічного програмування. Однак параметри сучасних виробничих систем є суттєво невизначеними, метаморфозними (такими що залежать від наших дій та ін.). Точність моделі повинна відповідати точності даних, тому обмежимося досить грубою оцінкою майбутнього прирощення критерію. Далі ми отримаємо точне розв'язання задачі і порівняємо його з наближенням.

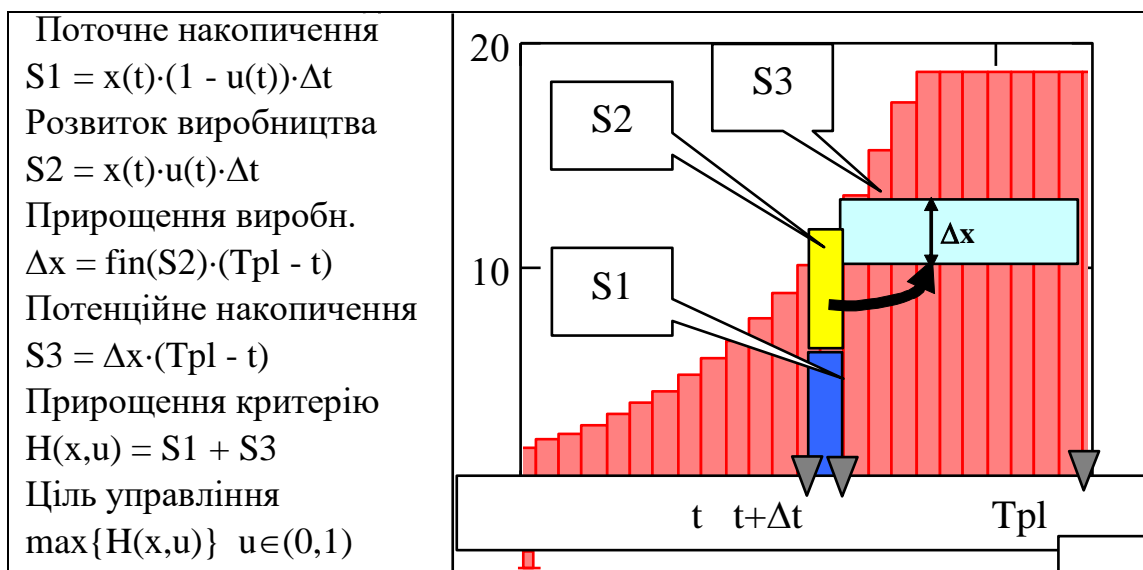


Рис. 3.3. Схема розподілу ресурсу на поточному кроці

Будемо вибирати управління $u(t)$ так, щоб отримати максимум функції $H(x, t) = S1 + S3$, яка є оцінкою (індикатором) приросту значення критерію

$$H(x, u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + fin(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t) \rightarrow \max(H(x, u))_{u \in (0, 1)} \quad (3.17)$$

Наше припущення про конвертованість ресурсів, з одного боку, робить задачу більш реалістичною, з іншого боку – суттєво спрощує її. Дійсно, кожна функція інвестицій тепер явно залежить тільки від

одного управління. Спрощується також підінтегральна функція критерію оптимальності. Слід пам'ятати, що в реальних системах виділений ресурс сам по собі ще не гарантує певного прирощення виробничої потужності. Для реального розширення виробництва часто бувають необхідні десятки ресурсів і робіт, і все це повинно бути оптимізоване і скоординоване. Однак, відносно стратегічної задачі розвитку, – це незалежні задачі субоптимізації.

3.2.2. Точне розв'язання узагальненої задачі розподілу

На підставі тільки логічних міркувань ми сконструювали деяку функцію-індикатор $H_i(x, u)$, яка є оцінкою залежності прирощення критерію J від поточного управління $u(t)$ та поточного стану $x(t)$.

Отримаємо точний розв'язок (прототипів не знайдено). В нашій задачі управління має місце обмеження, тому вибираємо метод принципу максимуму. Задано:

$$J = \int_0^{T_p} x(t) \cdot (1 - u(t)) dt \quad \text{– критерій оптимальності;}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) \quad \text{– дифрівняння динаміки темпу}$$

виробництва;

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{– обмеження на управління.}$$

Подаємо задачу в канонічному вигляді – додаємо ще одну змінну стану – критерій і записуємо відповідні рівняння:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) = f_x; \quad \frac{d}{dt} J(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) = f_J. \quad (3.18)$$

Запишемо вираз для функції Гамільтона [11, 65]

$$H(x, u) = \sum_{i=0}^N \Psi_i \cdot f_i = \Psi_J \cdot f_J + \Psi_x \cdot f_x, \quad (3.19)$$

де f_J, f_x – праві частини рівнянь (3.18). Підставимо їх у (3.19)

$$H(x, u) = \Psi_J \cdot [x(t) \cdot (1 - u(t))] + \Psi_x \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (3.20)$$

Записуємо рівняння для визначення спряжених функцій [11, 65]

$$\frac{d}{dt} \Psi_J(t) = -\frac{\partial}{\partial J} H(x, u); \quad \frac{d}{dt} \Psi_x(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, u); \quad (3.21)$$

Знаходимо відповідні окремі похідні від $H(x, u)$ (3.19) і підставляємо їх в (3.21)

$$\frac{\partial}{\partial J} H(x, u) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} H(x, u) = \Psi_J \cdot (1 - u) + \Psi_x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x)$$

Розв'язуємо отримані дифрівняння. Перше – елементарне:

$$\frac{d}{dt} \Psi J(t) = 0; \quad \Psi J(t) = \text{const} = 1.$$

Друге теж елементарне, для числових методів, але безнадійне для отримання аналітичних розв'язків:

$$\frac{d}{dt} \Psi x(t) = -\Psi J \cdot (1-u) - \Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(x) = -\Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x) - (1-u) .$$

Напишемо програму інтегрування цього дифрівняння. На рис. 3.4 подано цю програму і графіки зміни в часі спряженої функції $\phi x(t)$ та її "замінника" в наближеному виразі (3.17) спільне у цих функцій – монотонне зменшення з часом. Між іншим "фізичний зміст" цієї спряженої функції – "ціна" виробничих потужностей відносно критерію оптимальності. Ми включили в критерій тільки накопичення, тому "ціна" фондів з часом спадає до нуля .

Підставимо розв'язок диференціальних рівнянь для спряжених функцій у (3.19) і отримаємо остаточний вираз для функції Гамільтона

$$H(x, u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + \Psi n(u, x, dFr, k) \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (3.22)$$

3.2.3. Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язків

Головні наукові результати роботи отримані на основі послідовного і, по можливості, розумного використання методології Р. Беллмана, що дозволяє описати широкий клас процесів управління в точних математичних термінах. Між іншим, Беллман називав динамічне програмування не методом, а "станом розуму". Саме керуючись методологією Беллмана, ми використали для розв'язання узагальненої задачі розвитку методу метод принципу максимуму, а не динамічне програмування. Однак, на базі аналізу аналітичних результатів Беллмана (підрозділ 3.1) для випадку лінійних функцій розвитку ми отримали наближене розв'язання. Природно проаналізувати точність наближеного методу порівняно з точним методом. На першому етапі таке порівняння було виконано просто засобами обчислювальних експериментів – порівнянням точних і наближених процесів. Для типових задач розвитку отримано точність:

- за значенням критерію – сумарного накопичення – в межах 3–5%;
- за середнім відхиленням наближеної функції управління від точної (оптимальної стратегії) – в межах 2–5%.

На другому етапі виконано аналітичне дослідження питань точності і збіжності за методологією Беллмана [7–9]. Класичний метод послідовних наближень заснований на ідеї вирішення послідовності рівнянь чи задач, які збігаються до бажаного рівняння чи задачі.

Однак у багатьох випадках легко встановити якщо не збіжність наближення, то його монотонність. Беллман пропонує при постановці варіаційних задач розглядати два різних типи питання. Одне з них –

питання про визначення оптимального управління, інше – про одержання квазіоптимального управління, що приводить до кращих результатів, ніж при використанні загальноприйнятого управління (типу лінійних регуляторів по вектору стану).

Дискретизуємо функцію Гамільтона (3.22) і порівняємо її з наближеною (3.17).

Точна: $H(x_k, u_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot \Psi n(u_k, x_k, dFr, t).$

Наближена: $Hi(u_k, x_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot (T - t).$

Можна бачити, що вирази відрізняються тільки останнім множителем – маємо структурне наближення. Це дало нам право назвати вираз наближенням функції Гамільтона. Можна було прийти до цього наближення і канонічним формалізованим шляхом – отримати точний вираз для $\varphi x(t)$, розкласти цю функцію в ряд і взяти перше лінійне наближення, що саме і показано на рис. 3.4.

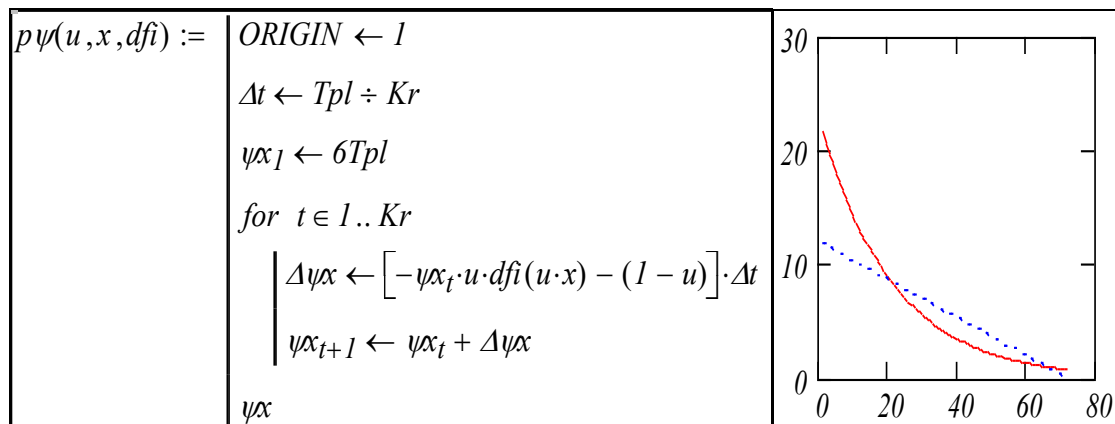


Рис. 3.4. Порівняння складової функції Гамільтона для точного і наближеного розв'язків

Проведемо кількісне порівняння функцій $H(x_k, u_k)$ та $Hi(x_k, u_k)$. На рис. 3.5 подано дві проекції тривимірного графіка, де побудовано еволюцію в часі функції Гамільтона – точної і наближеної.

На графіку 3.5б побудовано максимуми цієї функції – вони значно відрізняються, однак положення цих максимумів – значення оптимального управління є досить близькими і однаковими за структурою: спочатку "все в розвиток", потім гладкі – "Ейлерові" за класифікацією Беллмана, ділянки, а в кінці процесу – "все в накопичення".

Для нас функція Гамільтона є лише засобом отримання оптимального розв'язання і нам достатньо того, що наближена функція дає досить точне наближення оптимального управління – стратегії

розвитку. Тривимірні графіки еволюції функції Гамільтона дають ефективну можливість наочно побачити причини виникнення розривів оптимального управління.

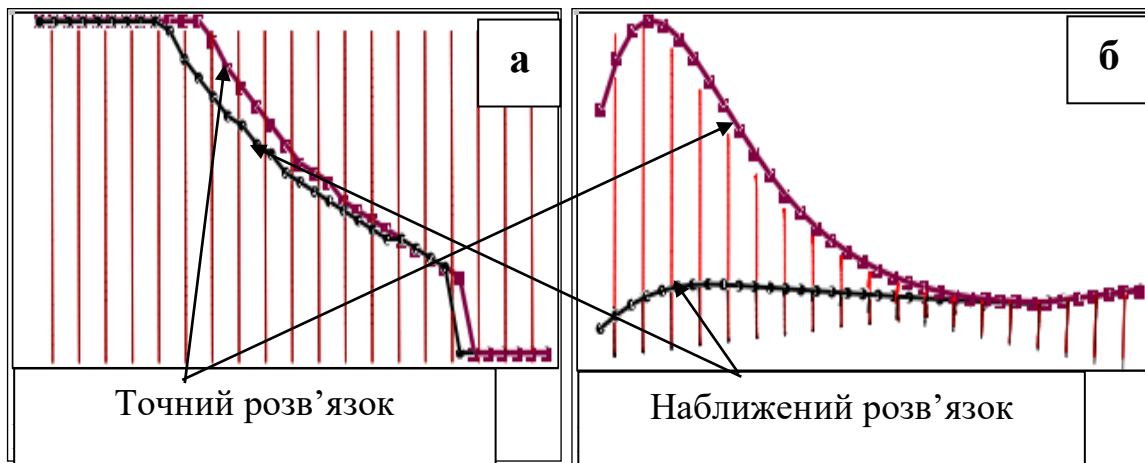


Рис. 3.5. Залежність максимуму функції Гамільтона від часу процесу для: а) оптимальні стратегії; б) величина максимуму функції

На рис 3.6 подано два таких графіки для випадків невикуклої і викуклої функцій розвитку. На цих графіках подано для кожного кроку процесу залежності функції Гамільтона від управління – розподілу поточного ресурсу між розвитком і накопиченням. Серія таких графіків утворює тривимірну поверхню.

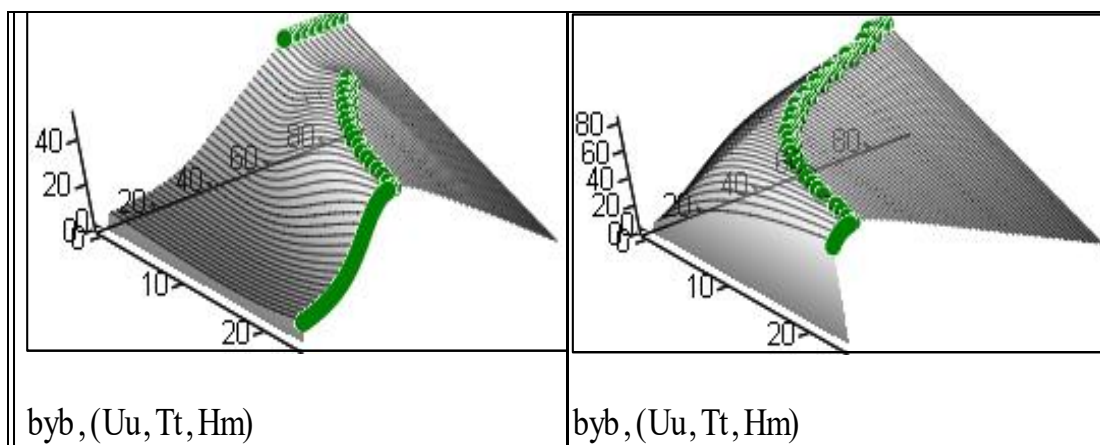


Рис. 3.6. Еволюція функції Гамільтона для невикуклої і викуклої ФР

На цю поверхню накладені траєкторії максимумів поточних функцій Гамільтона. Можемо бачити ділянки "все в розвиток", "ейлерова ділянка", "все в накопичення". Отримано корисний інструмент візуального аналізу, але такі графіки можна побудувати тільки для однопродуктових систем. Однак метод оптимального агрегування дає можливість замінити багатопродуктову систему однопродуктовою (підрозділ 3.5). В підрозділі 4.4 подано аналогічні

графіки еволюції функції Гамільтона для агрегованих виробничих систем.

3.3. Розв'язання узагальненої задачі розподілу для випадку використання зовнішніх ресурсів

Сучасне виробництво – це ланцюг виробів, технологій, ринкових вікон. Високі технології, глобалізація економіки вимагають високих темпів розвитку виробничих систем. Для потенційно ефективного виробництва критичне значення має швидкість його розвитку – від лабораторного експерименту до масового виробництва. В сучасних організаціях паралельно виконуються десятки проектів. Ці проекти звичайно знаходяться на різних стадіях розвитку життєвого циклу. В таких умовах є можливість залучати тимчасово ресурси одного виробництва для розвитку іншого. Такі процеси тимчасового залучення зовнішніх ресурсів призведуть до тривіальних обчислювальних і нереалістичних техніко-економічних результатів, якщо не ввести правила повернення тимчасово залучених ресурсів.

Задача такого типу має безліч інтерпретацій – від обміну ресурсами між енергосистемами, до перерозподілу ресурсів розробників, який застосовувався при розробці мікропроцесорів в корпорації Intel.

Особливістю розвитку сучасних технічних систем є необхідність прецизійного розрахунку оптимальних управлінь. Малі помилки на початкових етапах через певний час призводять до провалу процесу розвитку нового виробництва.

Для сучасних динамічних, нестационарних і нелінійних виробничих систем оптимальна стратегія розвитку не може бути визначена на базі досвіду та інтуїції. Модифікуємо задачу оптимізації розвитку поставлену і розв'язану в розділі 3.2. Введемо можливість тимчасово використовувати зовнішні ресурси. Додаємо ще одну змінну управління – темп зовнішніх ресурсів $xkr(t)$ – обсяг ресурсів за одиницю часу. Тоді наявні поточні ресурси в системі будуть

$$xv(t) = xs(t) + xkr(t).$$

Математичні моделі тимчасового використання зовнішніх ресурсів. На перший погляд поставлена задача є дуже подібною до задач фінансово-кредитної діяльності. Але це набагато складніші задачі системного аналізу розвитку технічних систем, більше подібні до задач математичної екології. Фінансово-кредитні аспекти діяльності виробничої системи є важливими, однак вторинними, такими, що обслуговують технічні і технологічні інновації. Тимчасове використання зовнішніх ресурсів настільки поширене в технічних

системах, що ми його не помічаємо, наприклад: двигун автомобіля "бере в кредит енергоресурс акумулятора", а потім "повертає його акумулятору", звичайно "з процентами".

Задачі моделювання і оптимізації процесів розвитку можуть виявитись високоефективними для планування і прогнозування в фінансово-кредитних установах, але за умови серйозної професійної доробки і адаптації під норми і реалії цієї діяльності. Згадаємо метод декомпозиції Данціґа–Вулфа [46] для задач лінійного програмування високої розмірності. В цьому методі використовується агрегування і координація розв'язання підзадач за допомогою системи цін. Однак ціни там – просто назва певних параметрів обчислювального алгоритму. Використання ж цього методу як моделі макроекономічного регулювання буде скоріше за все спекулятивним.

Головна мета цієї роботи – розробка ефективних числових методів оптимізації і моделювання технічних систем. Розглядаємо такі прості моделі використання зовнішніх ресурсів:

а) "онлайнове повернення ресурсу": взятий в момент t ресурс $xkr(t)$ повертається до кінця планового періоду Tpl в розмірі $xkr(t)[1 + pr \cdot (Tpl - t)]$ рівними частками, починаючи з моменту t ;

б) "відкладене повернення ресурсу": взятий в момент t ресурс $xkr(t)$ повертається до кінця планового періоду Tpl в розмірі $xkr(t)[1 + pr \cdot (Tpl - t)]$ рівними частками, починаючи з моменту $Tpl/2$.

Зауважимо, що ці моделі не відповідають кредитним стандартам економіки, де використовуються складні проценти. Далі буде показано, що запропонований метод оптимізації дозволяє включати довільні моделі повернення і оплати ресурсів.

В математичному аспекті, схема повернення ресурсу трансформує функцію темпу залучення зовнішніх ресурсів у відповідну функцію темпу їх повернення. Цей темп зі знаком мінус додаємо в підінтегральний вираз для критерію (3.16) і отримуємо критерій оптимальності процесу розвитку з використанням зовнішніх ресурсів

$$J = \int_0^{Tpl} [xv(t) \cdot (1 - u(t)) - xkr(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)]] dt . \quad (3.23)$$

Наближене розв'язання. Розглянемо як і в розділі 3.2 наближене і точне розв'язання задачі. На рис. 3.7 показано схему розподілу ресурсу, подібну до схеми на рис. 3.3.

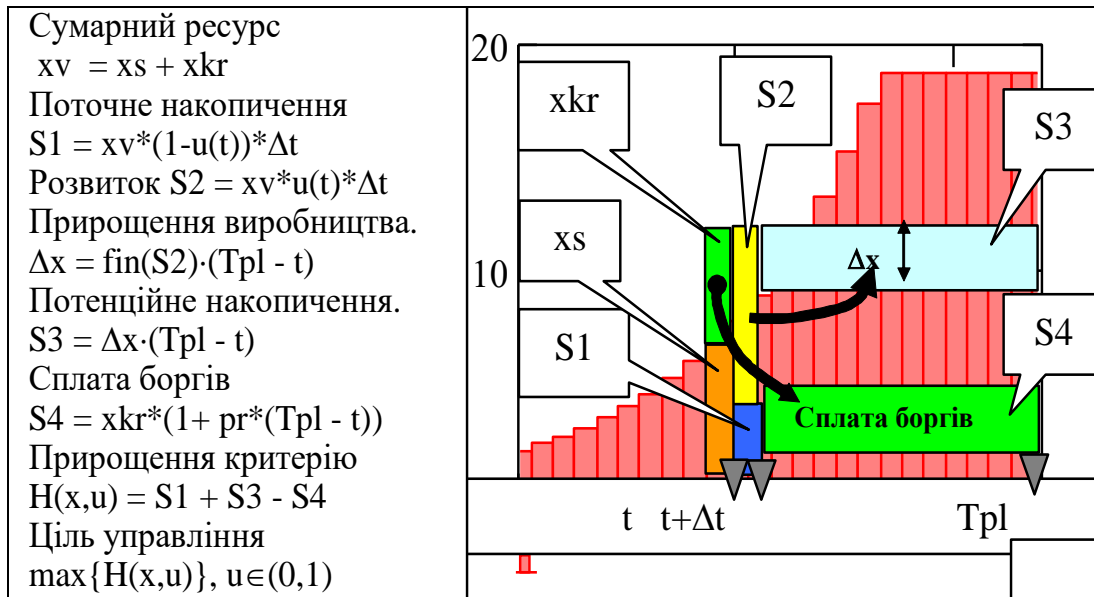


Рис. 3.7. Схема розподілу ресурсу на поточному кроці при використанні зовнішніх ресурсів

Дотримуємось тієї ж, що і в підрозділі 3.2 логіки спрощення: додатковий продукт, отриманий від розширення виробництва на поточному кроці процесу, на наступних кроках повинен розподілятися оптимально, щоб протягом часу $(Tpl - t)$ дати максимальний приріст критерію. Щоб уникнути складностей і великих обсягів обчислень за методом динамічного програмування, вважаємо цінність продукції постійною протягом процесу. Згідно зі схемою на рис. 3.7 записуємо вираз для оцінки приросту критерію в результаті поточного управління. Для порівняння подаємо вираз (3.17)

$$H_p(xv, u, xkr) = xv(t) \cdot (1 - u(t)) + fin(xv(t) \cdot u(t)) \cdot (Tpl - t) - xkr(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)],$$

$$H_p(x, u) = S1 + S2 = x(t) \cdot (1 - u(t)) + fin(x(t) \cdot u(t)) \cdot (Tpl - t),$$

$$\text{де } xv(t) = x(t) + xkr(t).$$

Система оптимального управління повинна на кожному кроці процесу вибирати: розподіл ресурсу $u(t)$ та розмір зовнішнього ресурсу $xkr(t)$ так, щоб отримати максимум функції $H_p(x, u, xkr)$.

Точне розв'язання. Порядок отримання точного розв'язання є подібним наведеному в розділі 3.2, тому подаємо тільки постановку задачі і кінцевий результат. Записуємо розширену систему рівнянь динаміки системи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \text{fin}[(xv(t)) \cdot u(t)] = \text{fx}(\cdot) \\ \frac{d}{dt}J(t) &= (xv(t)) \cdot (1 - u(t)) - xkr(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)] = \text{fJ} \end{aligned} \right\} (3.24)$$

де $xv(t) = x(t) + xkr(t)$.

Зауваження. Далі, для скорочення формул будемо писати відповідні функції часу без аргументу: x , xv , xkr замість $x(t)$, $xv(t)$, $xkr(t)$.

Для функції $\psi x(t)$ отримуємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dt}\psi x(t) = -\psi x(t) \cdot u \cdot \frac{d}{dx} \text{fin}(x + xkr) - xv \cdot (1 - u) + xkr \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)].$$

Його розв'язок неважко отримати числовими методами і оформити як функцію поточних значень змінних: $\psi x(u_k, xkr_k, x_k)$. Порівняємо наближений і точний розв'язок. Запишемо дискретні – робочі вирази для точної і наближеної функцій Гамільтона, що використовуються в програмах моделювання та оптимізації:

$$Hk(x_k, xkr_k, u_k) = xv_k \cdot (1 - u_k) + \text{fin}(x_k \cdot u_k) \cdot \Psi x(t) - xkr_k \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)];$$

$$Hp(x_k, xkr_k, u_k) = xv_k \cdot (1 - u_k) + \text{fin}(x_k \cdot u_k) \cdot (Tpl - t) - xkr_k \cdot [1 + pr \cdot (Tpl - t)].$$

Точна і наближена функції Гамільтона відрізняються тільки одним множником: $(Tpl - t)$ в наближеному виразі замість $\psi x(t)$ в точному. Порівняльний аналіз точних і наближених розв'язків показує задовільний збіг. Відносно типових розкидів характеристик виробничих елементів відхилення від оптимальності є несуттєвими.

3.4. Аналіз результатів моделювання оптимальних процесів розвитку

Отримані результати розв'язку оптимізаційної задачі багатокрокового розподілу ресурсу були використані для розробки комплексу програм оптимізації і моделювання. Ці програми виявились досить новим і зручним засобом розв'язання актуальних задач розвитку і були включені в електронні книги – посібники [14–24, 55–60].

Створений комплекс може бути основою персональної системи підтримки рішень на базі відкритих моделей. Тому, крім розробки

власне програм моделювання і оптимізації, розроблялись інтерфейси, орієнтовані на відповідні категорії користувачів.

Для довільних функцій розвитку ми можемо отримати результати тільки числовими методами. Проаналізуємо результати обчислювальних експериментів, а потім порівняємо їх з теоретичними результатами Беллмана відносно існування і структури оптимального розв'язку для цього класу задач.

3.4.1. Дослідження моделі однопродуктової системи

На рис. 3.8 показано схему базової програми для оптимізації і моделювання процесу розвитку однопродуктової системи з урахуванням використання зовнішніх ресурсів. Термін "однопродуктова" означає, що розглядається виробнича система, що випускає монопродукт, або система з агрегованою узагальненою виробничою функцією.

Наприклад, теплоенергетична система витрачає паливо і виробляє та постачає електроенергію і тепло (гаряче водопостачання). Продукти такої системи можна агрегувати в один умовний продукт. Основи для такого агрегування можуть бути природними: екологічними, термодинамічними і не зовсім – економічними (спекулятивні коливання цін та ін.).

Термін "базова" в цьому випадку означає, що програма:

- завжди точно знаходить оптимальне управління – в ній використано "безвідмовний" метод перебору на підмножині припустимих управлінь;
- програму легко модифікувати для задач більшої розмірності, задач з урахуванням нових факторів.

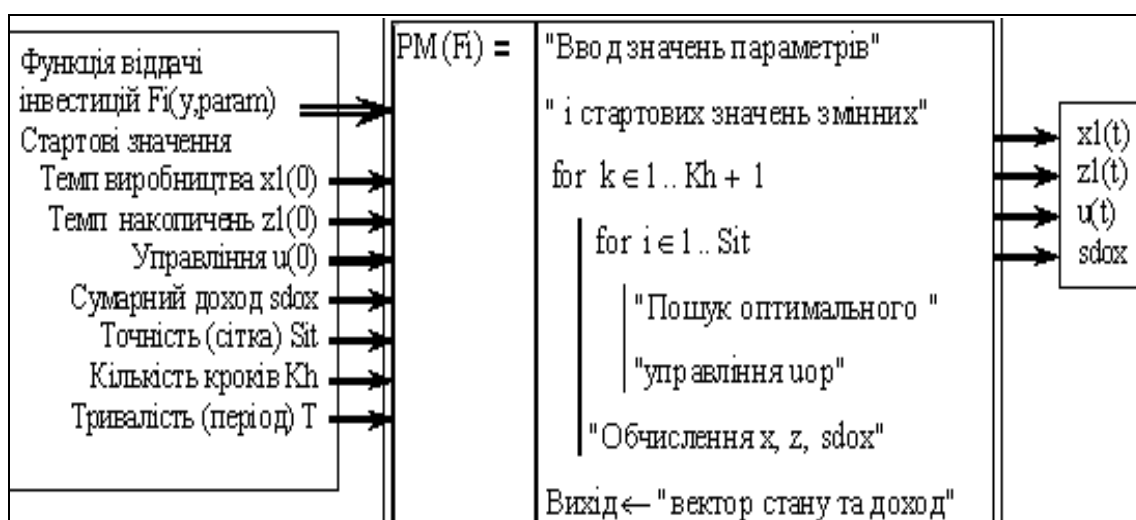


Рис. 3.8. Схема базової програми моделювання та оптимізації

Власне, програма є елементарною і може бути реалізована в будь-якому середовищі програмування. На рисунку 3.9 подано версію реалізації базової програми в середовищі математичного пакета [15, 18, 54, 59, 60]. В такому вигляді програма є інтерфейсом для користувача і заміником реліктової "схеми алгоритму". Головна особливість програми – вона працездатна при будь-яких довільних функціях розвитку (ФР).

На рис. 3.9 подано об'єкт, в якому інтегровані: математична модель, алгоритм, програма, інтерфейс для введення, а поряд – виведення. Це фактично і є один з елементів "нових інформаційних технологій" в дослідницькій роботі. На рис. 3.10 подано процес розвитку виробничої системи для випадку невипуклої ФР і високої ціни зовнішнього ресурсу.

Особливості процесу:

- витрати на розвиток приблизно постійні;
- темп росту – лінійний;
- зовнішніх ресурсів береться стільки, щоб доповнити власні ресурси до оптимального рівня.

Оптимальне управління має три інтервали:

- "все в розвиток";
- ейлерова ділянка;
- "все в накопичення".

<pre> <i>PM</i>(<i>Fi</i>) := Δ<i>t</i> ← <i>T</i> ÷ <i>Kh</i> <i>xI</i>₁ ← <i>X</i>₀ <i>u</i>₁ ← 1 <i>zI</i>₁ ← 0 <i>sdox</i> ← 0 for <i>k</i> ∈ 1.. <i>Kh</i> + 1 <i>t</i> ← Δ<i>t</i> · (<i>k</i> - 1) максимум<i>H</i> ← 0 for <i>i</i> ∈ 1.. <i>Sit</i> Δ<i>u</i> ← 1 ÷ <i>Sit</i> <i>us</i> ← Δ<i>u</i> · (<i>i</i> - 1) сьогодні ← <i>xI</i>_{<i>k</i>} · (1 - <i>us</i>) завтра ← <i>Fi</i>(<i>xI</i>_{<i>k</i>} · <i>us</i>) · (<i>T</i> - <i>t</i>) <i>H</i> ← сьогодні + завтра if <i>H</i> > максимум<i>H</i> максимум<i>H</i> ← <i>H</i> <i>uop</i> ← <i>us</i> <i>u</i>_{<i>k</i>+1} ← <i>uop</i> <i>xI</i>_{<i>k</i>+1} ← <i>xI</i>_{<i>k</i>} + <i>Fi</i>(<i>xI</i>_{<i>k</i>} · <i>u</i>_{<i>k</i>+1}) · Δ<i>t</i> <i>zI</i>_{<i>k</i>+1} ← <i>xI</i>_{<i>k</i>+1} · (1 - <i>u</i>_{<i>k</i>+1}) <i>sdox</i> ← <i>sdox</i> + <i>zI</i>_{<i>k</i>+1} стан^{<<i>k</i>>} ← $\begin{pmatrix} u_k \\ xI_k \\ zI_k \end{pmatrix}$ <i>Вихід_програми</i> ← $\begin{pmatrix} \text{стан} \\ sdox \end{pmatrix}$ </pre>	<p>Програма зроблена функцією від функції віддачі інвестицій <i>Fi</i>.</p> <p>Програма повертає структуру з масива і скаляра:</p> $PM(Fi) = \begin{pmatrix} \{3, 73\} \\ 1413 \end{pmatrix}$ <p>Розпаковуємо вихід програми, виділяємо масив векторів стану</p> $VS := PM(Fi)_1$ <p>виводимо його:</p> $VS =$ <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td>1</td> <td>0.98</td> <td>0.98</td> </tr> <tr> <th>2</th> <td>6</td> <td>6.14</td> <td>6.29</td> </tr> <tr> <th>3</th> <td>0</td> <td>0.15</td> <td>0.16</td> </tr> </tbody> </table> <p>Виділяємо сумарний прибуток</p> $SP := PM(Fi)_2$ $SP = 1413.35$ <p>На кожному кроці обчислюється функція Гамільтона <i>H</i>(.)</p> <p>Складова "сьогодні" цієї функції – поточне накопичення, складова "завтра" – майбутнє накопичення, спричинене інвестиціями.</p> <p>Для знаходження максимуму функцій Гамільтона принципово використовується метод прямого перебору. Це обумовлено складною структурою функції Гамільтона, що вимагає</p>		1	2	3	1	1	0.98	0.98	2	6	6.14	6.29	3	0	0.15	0.16
	1	2	3														
1	1	0.98	0.98														
2	6	6.14	6.29														
3	0	0.15	0.16														

Рис. 3.9. Текст базової програми оптимізації і моделювання процесу розвитку однопродуктової системи. Копія екрана

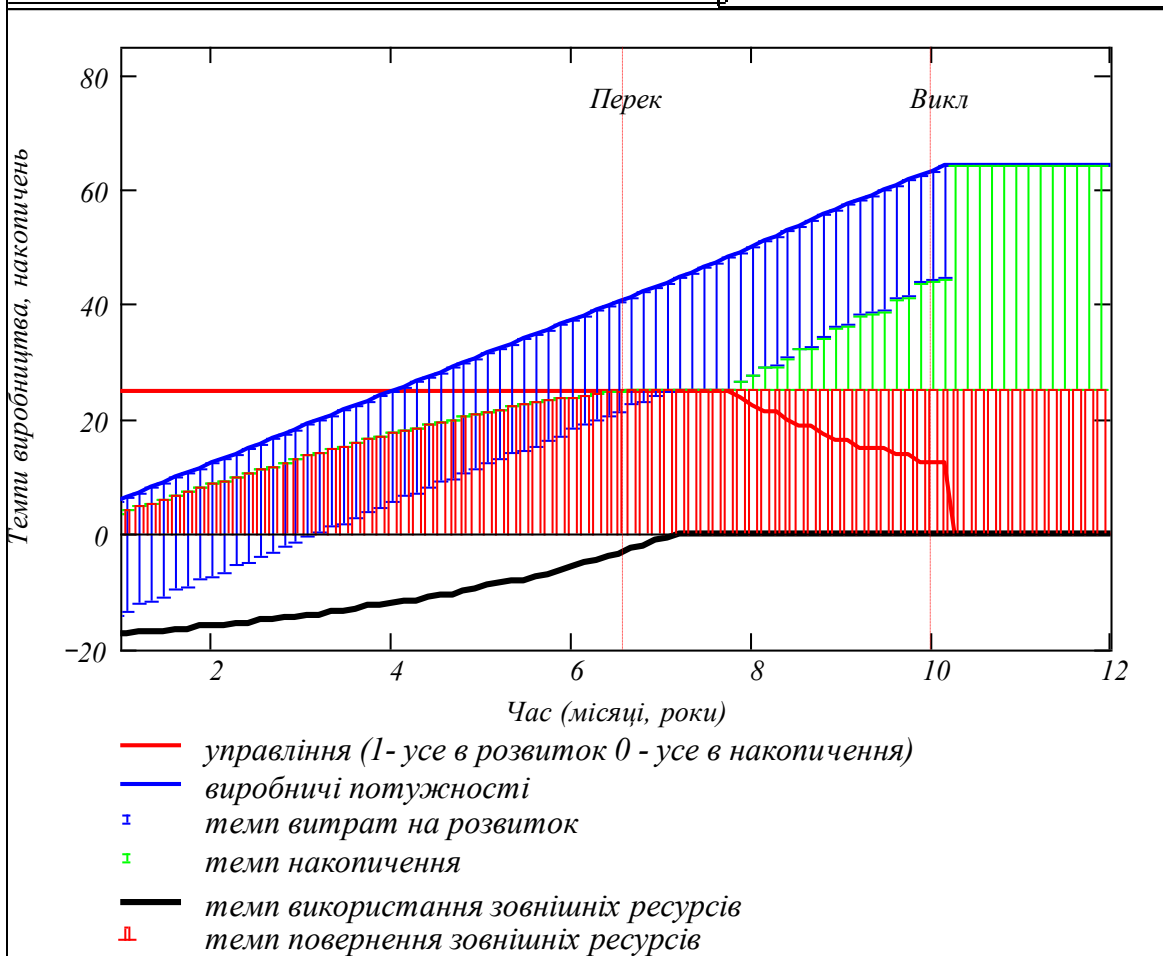
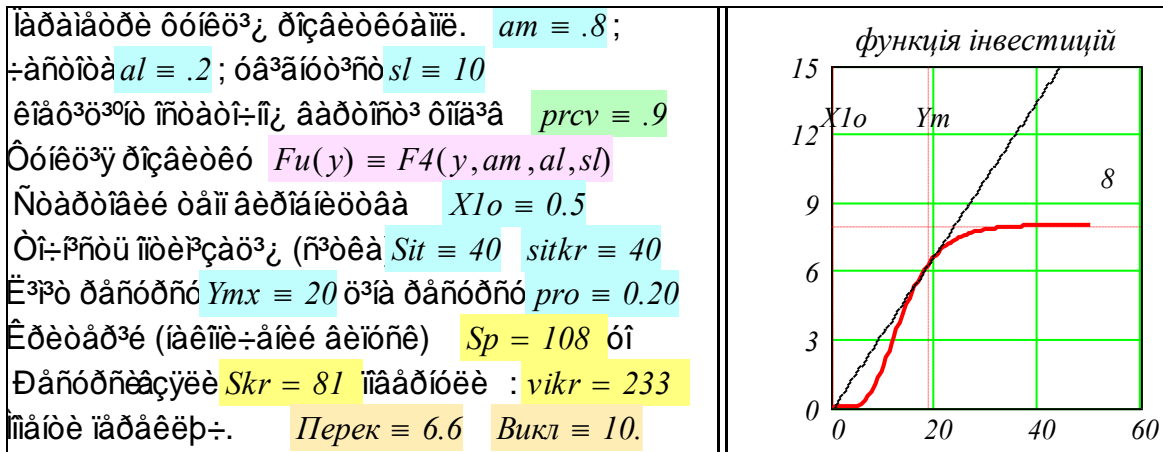


Рис. 3.10. Версія інтерфейсу базової програми. Копія екрана

На рис. 3.11 подано оптимальний процес для випадку малої ціни зовнішнього ресурсу. Характер процесу порівняно з попереднім (див. рис. 3.10) не змінюється. Різниця тільки в значно меншому обсязі використання зовнішнього ресурсу і в більшому значенні критерію - накопиченого доходу. На рис. 3.12 – відповідь на питання: "Що буде, якщо не брати зовнішні ресурси?". Додатково подано дві проекції тривимірного графіка "еволюція функції Гамільтона в часі".

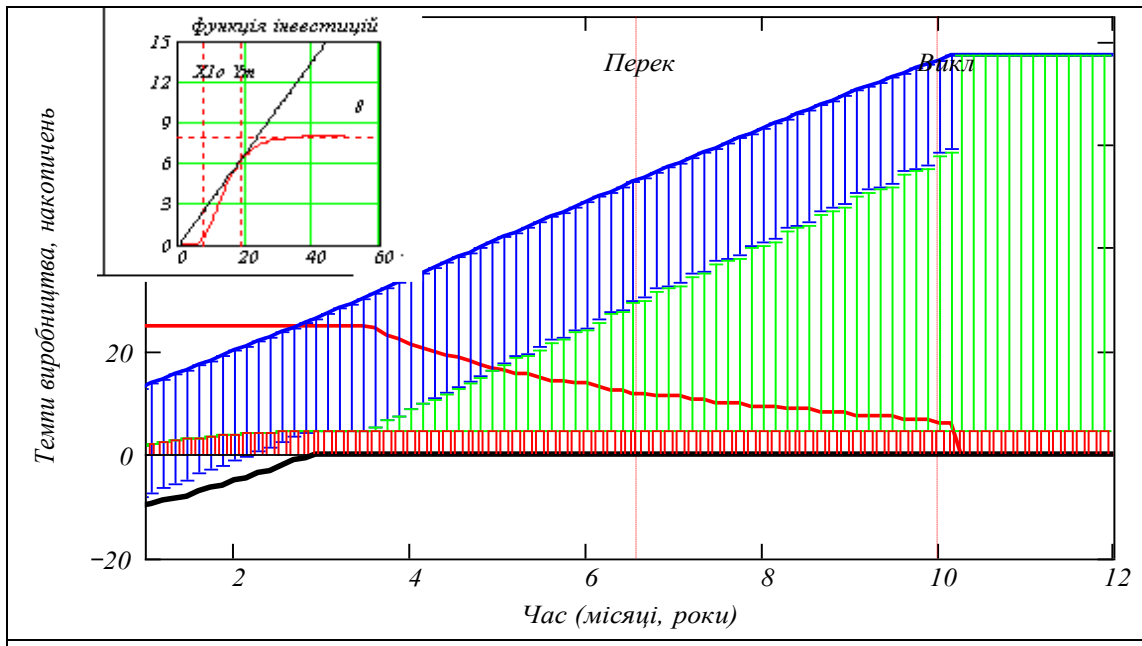


Рис. 3.11. Оптимальний процес розвитку при малій ціні ресурсів

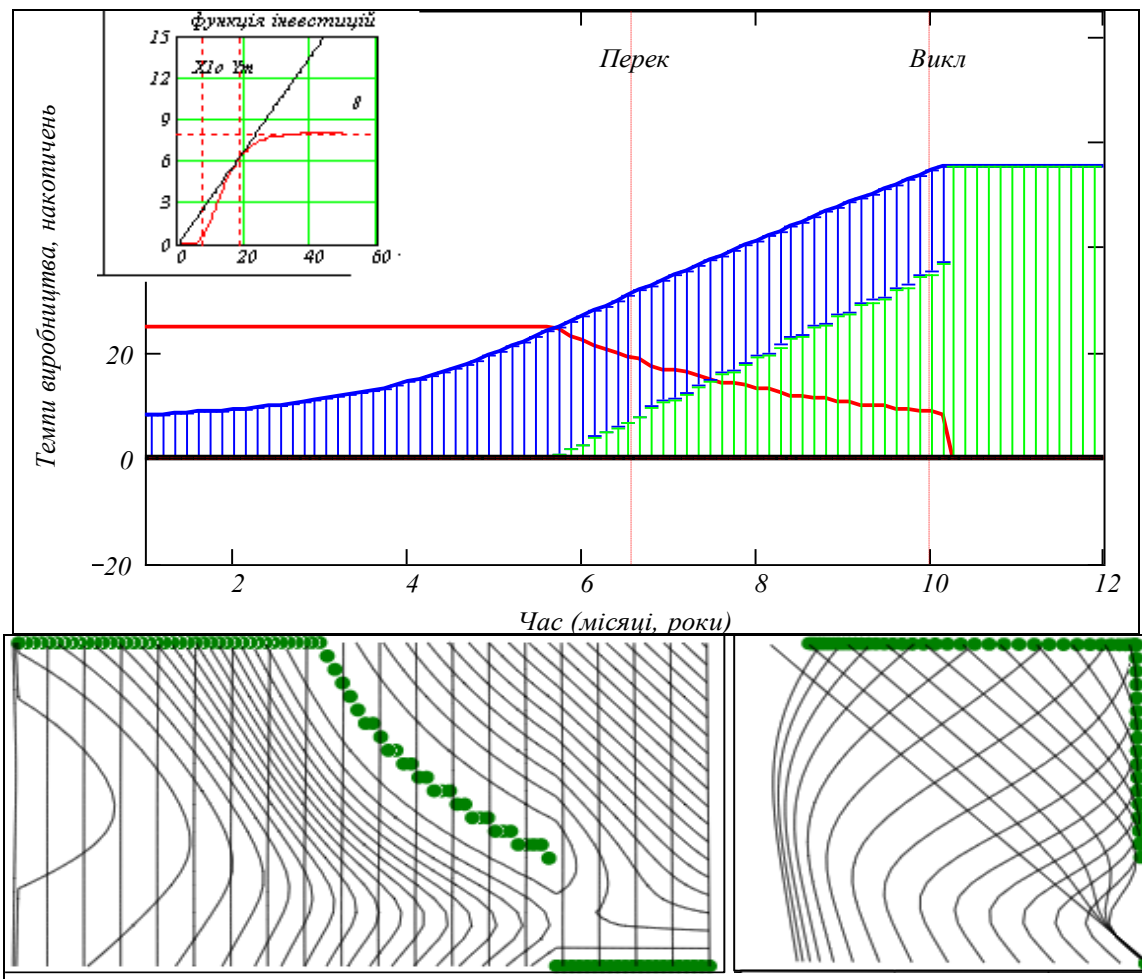


Рис. 3.12. Оптимальний процес розвитку за рахунок власних ресурсів

Під графіком процесу (рис. 3.12) подано дві проєкції системи

функцій Гамільтона. Процес розвитку на початковому інтервалі має експоненціальний характер. Можна чітко бачити не тільки оптимальне управління, але і структуру функцій Гамільтона, на яких воно визначається і три інтервали – "все в розвиток", ейлерова ділянка і "все в накопичення".

Для системи з випуклою ФР (рис. 3.13) оптимальний процес є простим для числових методів пошуку екстремуму і більш складним для практичної реалізації. Оптимальне управління не має інтервалу "все в накопичення" – до кінця періоду все в меншому обсязі нарощуються виробничі потужності. Такий розвиток неможливо реалізувати для системи котлоагрегатів, хімічних реакторів.

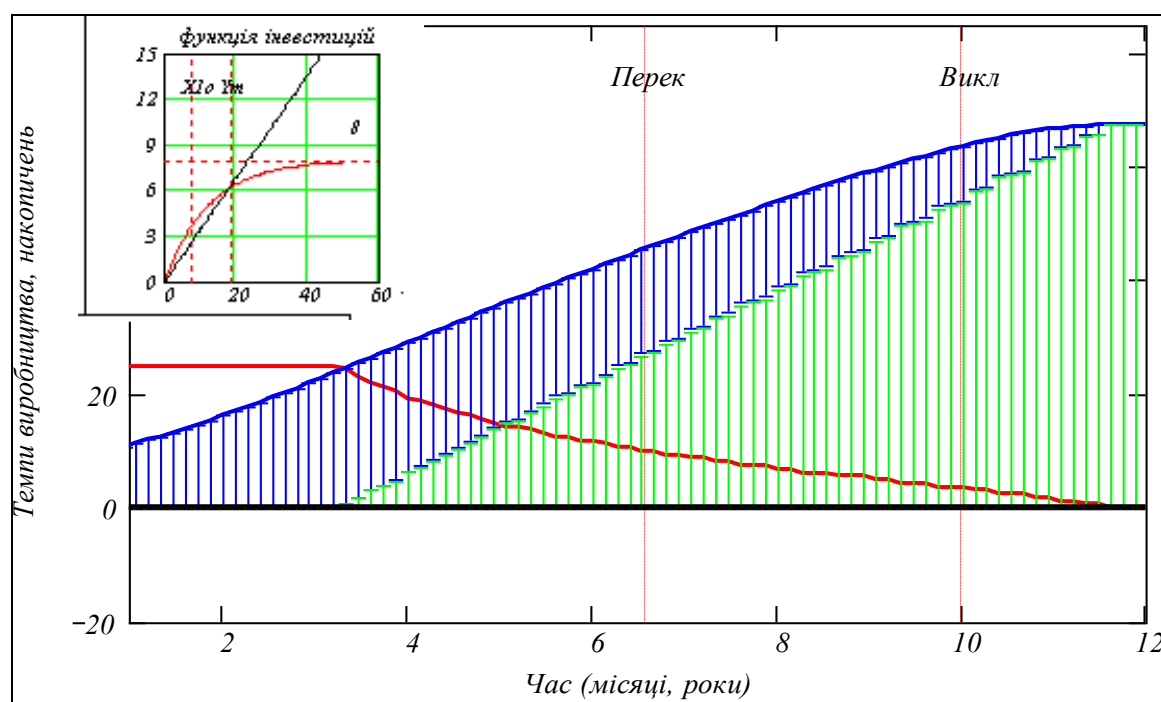


Рис. 3.13. Оптимальний процес розвитку за рахунок власних ресурсів для випадку випуклої ФР

3.4.2. Дослідження моделі двопродуктової системи

Неважко зробити програму для оптимізації двопродуктової системи, потім для М-продуктової. Число змінних управління буде збільшуватись, відповідно (як K^M , де K – розмір сітки визначення координати максимуму) буде збільшуватись обсяг обчислень. Базова програма для оптимізації і моделювання двопродуктової системи є модифікацією програми з підрозділу 3.4.1. Ця програма тільки еталон для контролю еквівалентної оптимально агрегованої системи. На рис. 3.14 подано інтерфейс програми моделювання двопродуктової системи.

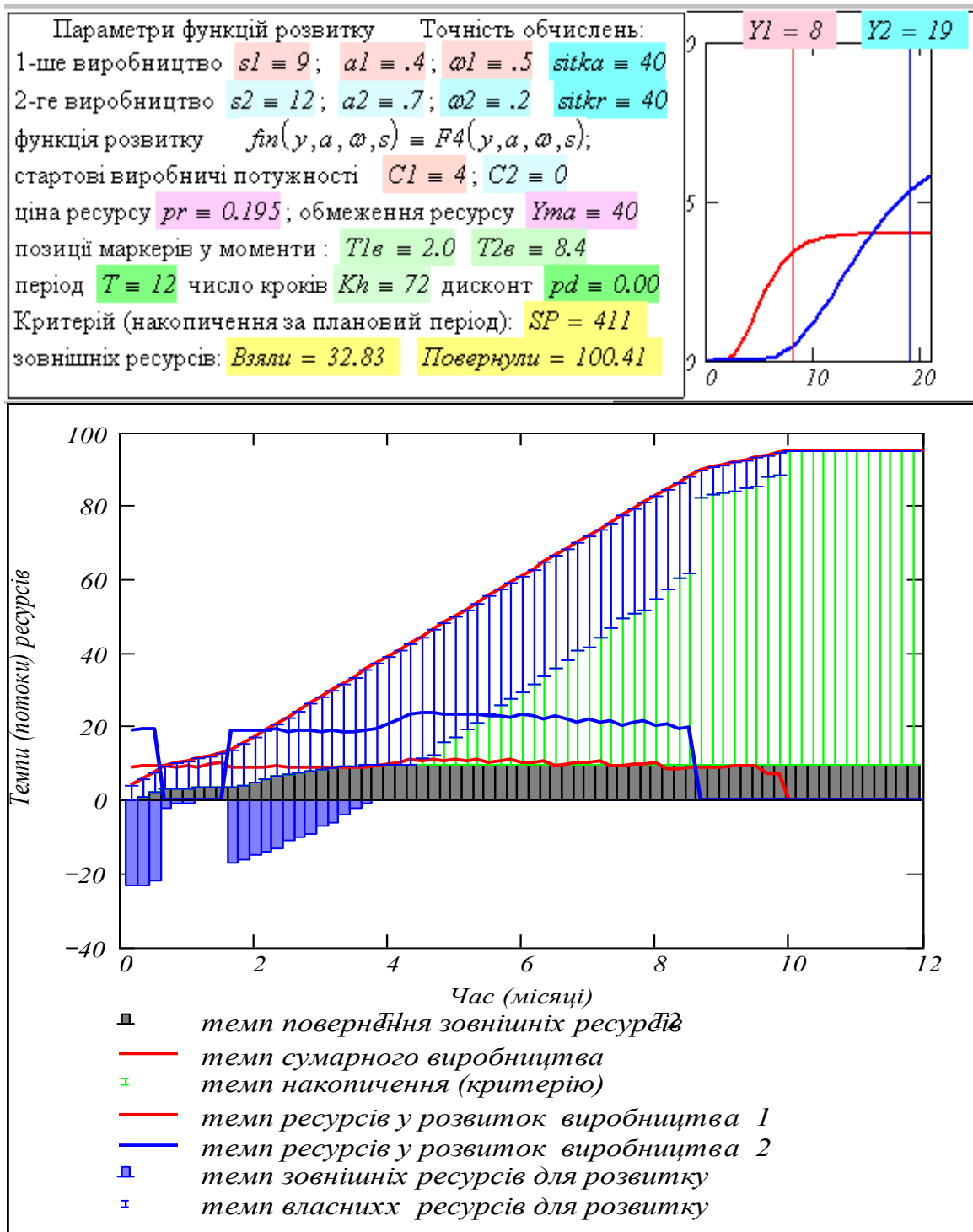


Рис. 3.14. Інтерфейс програми моделювання і оптимізації процесу Розвитку (копія екрану)

На рис. 3.14 подано критичний режим, коли незначна зміна параметрів приводить до раптової – "катастрофічної" (в математичному плані, згідно з теорією катастроф) зміни оптимальної стратегії розвитку – це наслідок невивуклості функцій розвитку. На рис. 3.15 подано результати моделювання процесу, що незначно відрізняється "ціною"

ресурсу. Бачимо, на рис. 3.15 все як і для однопродуктової системи: на розвиток виробництв витрачаються постійні частки загального ресурсу. Зовнішній ресурс береться в такому обсязі, щоб забезпечити оптимальний темп розвитку (на малому графіку маркери вказують на оптимальні рівні витрат ресурсів на розвиток). Маємо три інтервали управління – "все в розвиток", ейлерова ділянка і "все в накопичення".

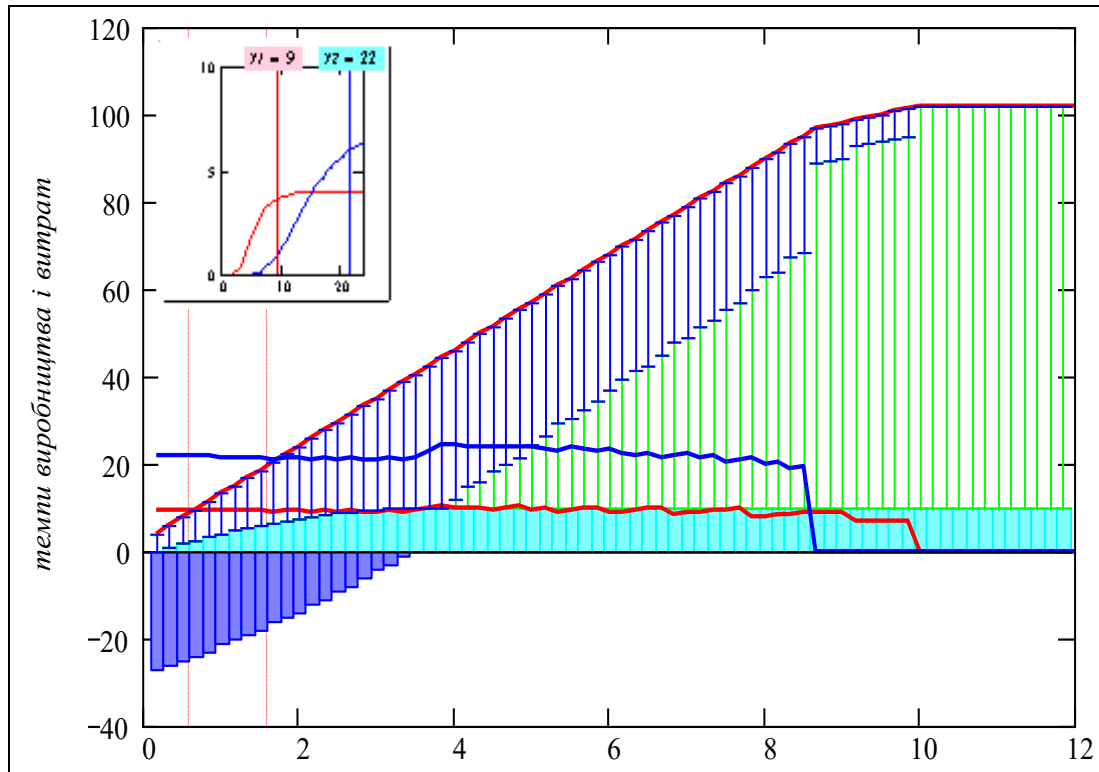


Рис. 3.15. Процес розвитку для випадку невиконаних функцій розвитку і використання зовнішніх ресурсів

Процеси, подані на рис. 3.14, 3.15 демонструють важливу рису сучасних технічних систем: ними неможливо керувати без вищої математики на базі інтуїції та лінійного програмування і штучних нейронних мереж. Згідно з обчисленою стратегією управління в момент $T1в$ потрібно раптово відмовитись від зовнішніх ресурсів і розширення одного з виробництв, а в момент $T2в$ відновити використання зовнішніх ресурсів. Логіка тут проста: приріст рівня виробництва на інтервалі ($T1в$, $T2в$) менший, ніж витрати на зовнішніх ресурсів.

На рис. 3.16 подано для тих же умов процес розвитку за рахунок тільки власних ресурсів. Процес подано в двох альтернативних формах. Друга форма (див. рис. 3.16б) – балансна: вгору відкладені темпи витрат і накопичення, вниз – темпи виробництва.

Оптимальне управління має складну структуру: з декількома розривами. Можемо бачити, що управління є також антиінтуїтивним: на певному інтервалі на початку процесу має місце накопичення, яке

раптово припиняється і відновлюється пізніше. Це обумовлено "пороговим" ефектом невіпуклих функцій розвитку. Виникає практичний висновок – в системі повинні бути елементи з широким спектром функцій розвитку, тоді не буде ситуацій, коли наявні ресурси не можуть бути ефективно використані.

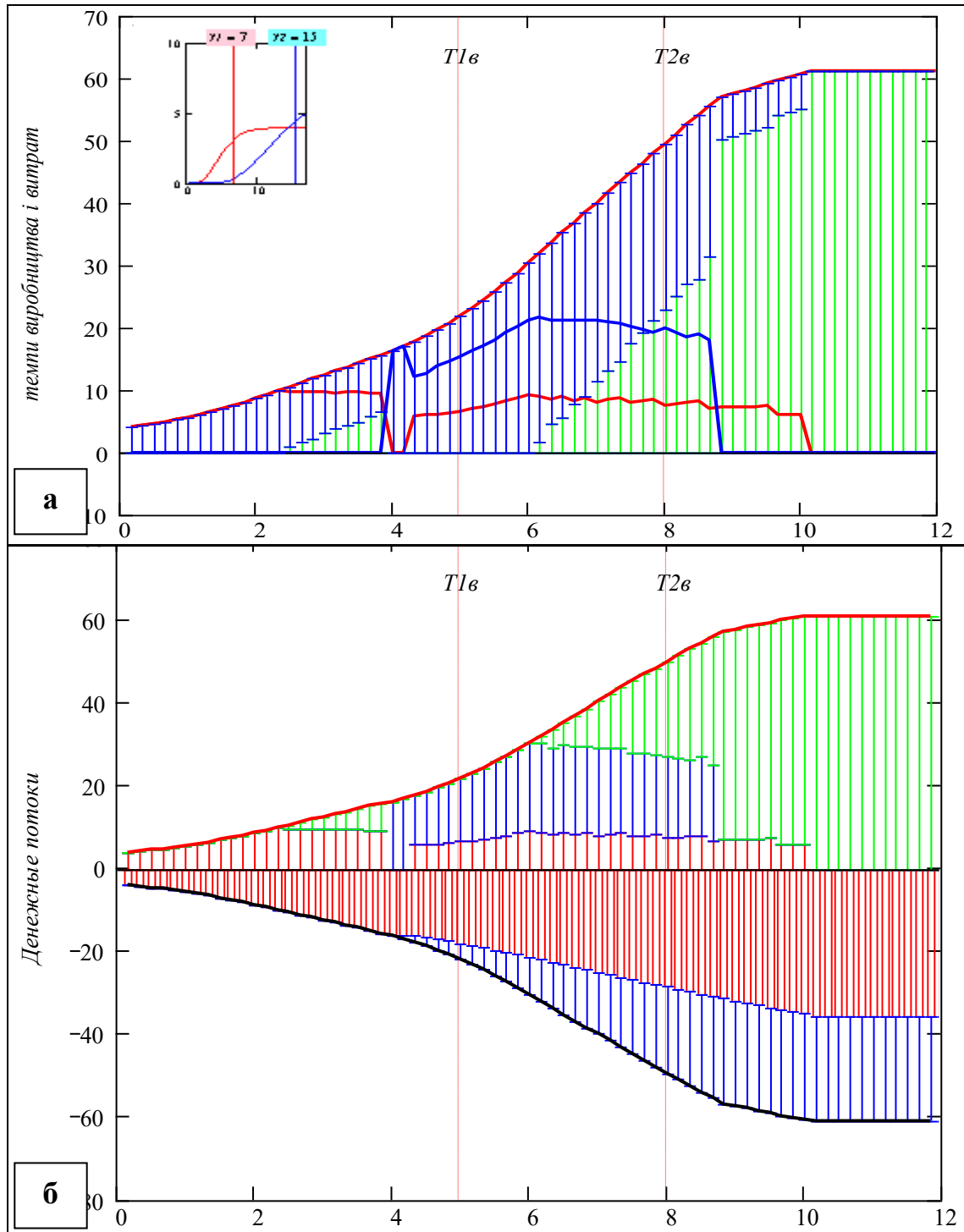


Рис. 3.16. Процес розвитку без використання зовнішніх ресурсів

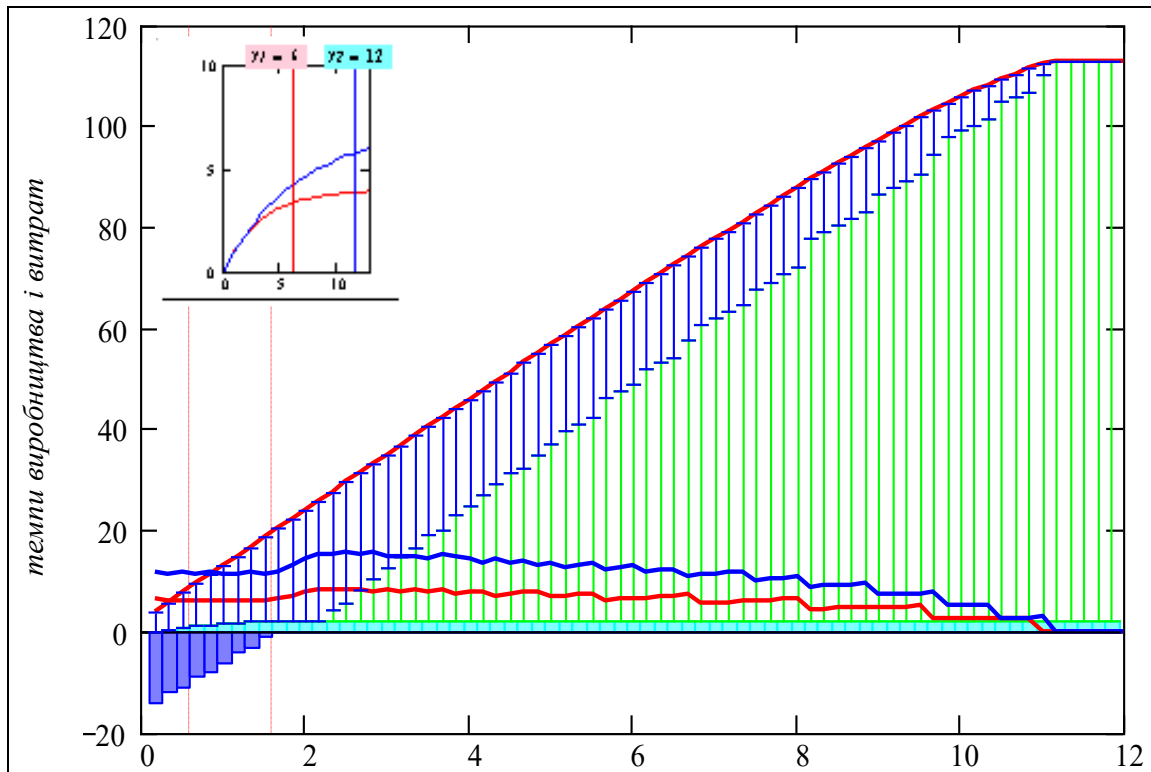


Рис. 3.17. Процес розвитку для випадку випуклих ФР

Оптимальний процес розвитку для випадку випуклих ФР (рис. 3.17) за структурою не відрізняється від оптимального процесу для однопродуктової системи (3.13). В основі цього лежить розглянута в розділі 2 можливість агрегування – заміни декількох виробництв еквівалентним виробництвом з певною оптимальною виробничою функцією.

Ми розширили поставлену Беллманом задачу розподілу – допустили використання зовнішніх ресурсів. Щоб задача не втратила математичний і практичний зміст, ми прийняли припущення, що зовнішні ресурси мають ненульову ціну. Тому очевидною властивістю оптимальних управлінь зовнішніми ресурсами є те, що темп накопичення і темп використання зовнішніх ресурсів не можуть бути одночасно ненульовими. Це дає можливість нам окремо розглядати і оптимізувати інтервал оптимального управління "все в розвиток".

Проведемо деталізований порівняльний аналіз впливу вартості зовнішніх ресурсів на оптимальне управління (стратегію розвитку). Для проведення такого аналізу базова програма була модифікована – зроблена функцією вартості зовнішнього ресурсу. Обчислювались серії процесів при зміні ціни 1% до 30% (від кількості ресурсів за одиницю часу). Те, що подано на рис. 3.18, розраховано на системного аналітика, який займається питаннями технологічного прогнозування в інноваційній діяльності і стратегічним плануванням [44].

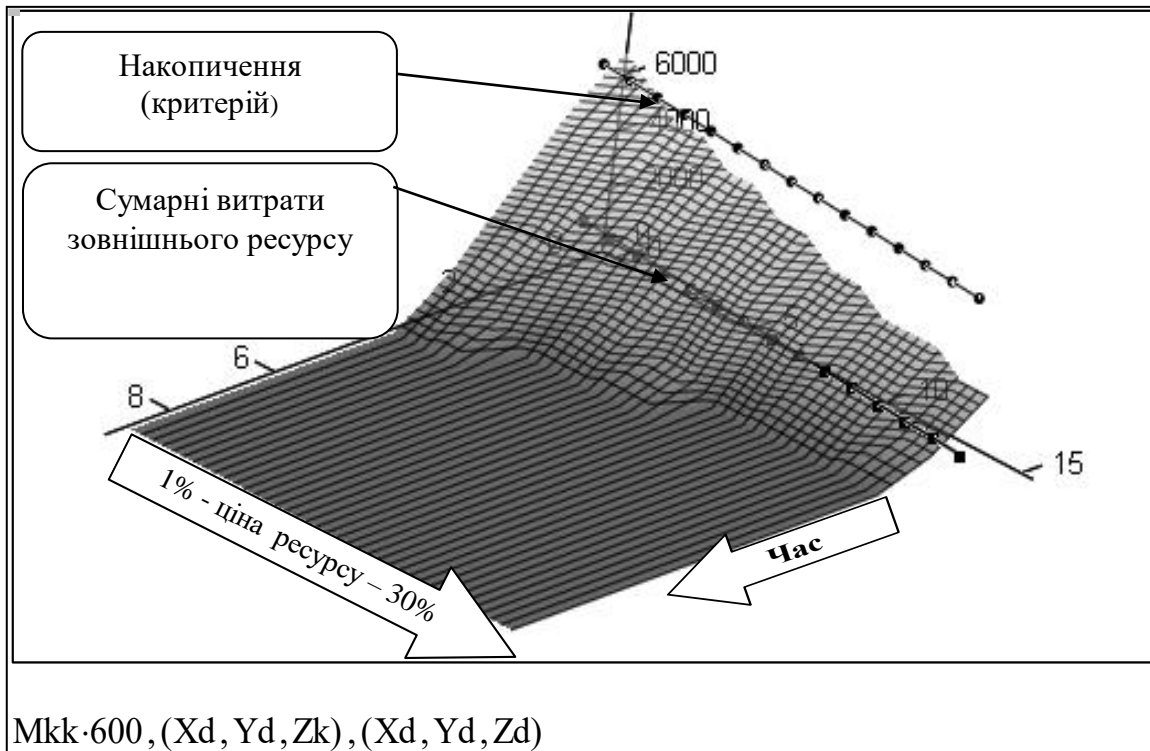
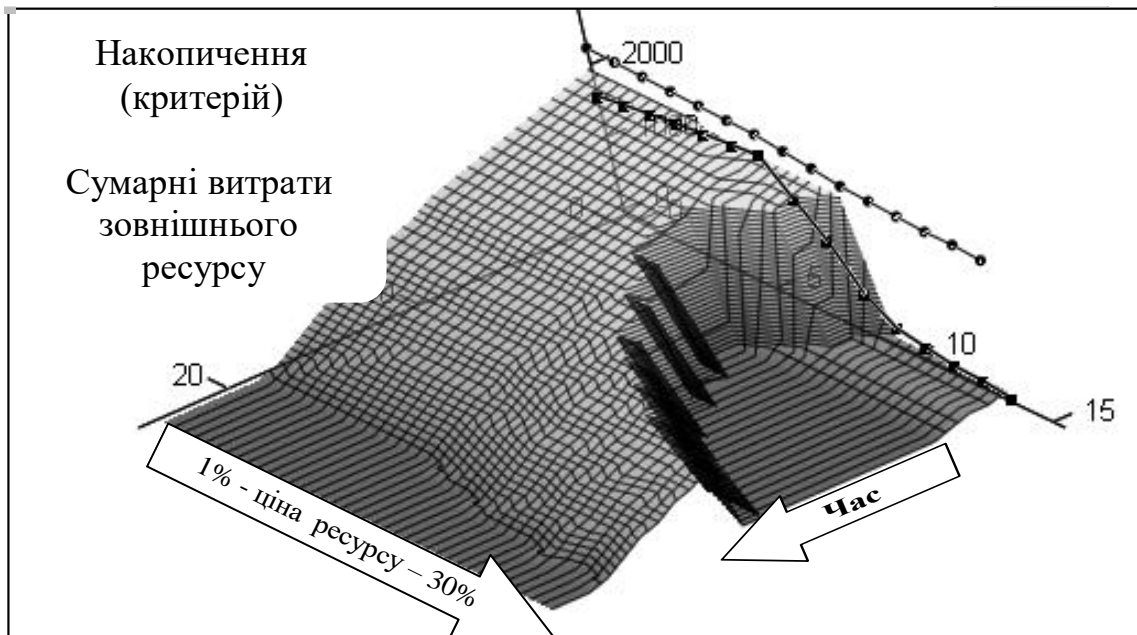


Рис. 3.18. Залежність оптимальних стратегій використання зовнішнього ресурсу від його ціни. Випадок випуклих функцій розвитку

На рис. 3.18 подано комплексні графіки для двопродуктової системи з випуклими функціями розвитку. На цьому ж тривимірному графіку подані залежності сумарного накопичення і сумарних витрат на зовнішній ресурс від ціни ресурсу. Бачимо, що при зростанні ціни ресурсу, структура оптимального управління не змінюється – це функція часу, що приблизно монотонно зменшується до нуля. Стартовий темп використання зовнішніх ресурсів і сумарні витрати зовнішніх ресурсів зменшуються при збільшенні ціни ресурсу.

Якщо функції розвитку невивуклі (рис. 3.19), загальна картина ускладнюється. До критичної ціни ресурсу (18,4% для даних на рис. 3.14) оптимальне управління – функція часу, що монотонно зменшується – як і у випадку випуклих ФР. Сумарний обсяг зовнішніх ресурсів залишається приблизно постійним з ростом ціни ресурсу до критичного значення.

Після досягнення критичного значення ставки виникає "провал" в оптимальному управлінні (див. рис. 3.14, 3.19). При подальшому збільшенні ціни ресурсу сумарний обсяг зовнішніх ресурсів зменшується раптово. Оптимальне управління розпадається на два інтервали: стартове прискорення розвитку одного виробництва, потім, через певний час, – другого.



$M_{kk} \cdot 70, (X_d, Y_d, Z_k \cdot 2.5), (X_d, Y_d, Z_d)$

Рис. 3.19. Залежність оптимальних стратегій використання зовнішнього ресурсу від його ціни. Випадок невіпуклих ФР

Результати моделювання оптимальних процесів розвитку виробничих систем дозволяють зробити висновок, що залучення зовнішніх ресурсів у процесі розвитку не тільки підвищує значення критерію – сумарне накопичення за плановий період (життєвий цикл проекту), але й спрощує управління процесом. Дешеві зовнішні ресурси знімають багато проблем управління розвитком, в тому числі і обчислювальних. Отримані безумовно цікаві для теорії процесів розвитку результати, що мають також великий потенціал практичних застосувань: практики знають, що подорожчання нафти чи електроенергії на 2–5% в певних умовах може вимагати переходу до зовсім іншої стратегії розвитку. Для систем з невіпуклими ФР залучення зовнішніх ресурсів це не засіб певного покращення показників, а принципово інша необхідна умова "виживання" певної виробничої системи. Принципово іншою є і структура оптимального управління. Принципово іншим повинен бути і підхід до оцінки ризиків розвитку і управління ризиками.

3.5. Застосування методу оптимального агрегування для систем високої розмірності

Розглянуті задачі і методи оптимізації процесів розвитку для систем з одного або двох елементів не потребують великого обсягу обчислень – типовий розрахунок потребує не більше 2 хвилин на

стандартному ПК. Для системи з трьома елементами звичайні пошукові методи не забезпечують припустимої для систем підтримки рішень тривалості обчислень в межах 1–2 хвилин. Відомі методи пошуку екстремуму функції декількох змінних звичайно не враховують специфіку задачі.

В розділі 2 запропоновано підхід, що враховує специфіку задачі – адитивність критерію і обмеження та властивості виробничих функцій. Цей підхід на базі агрегування дозволяє замінити задачу пошуку екстремуму функції N змінних рядом задач меншої розмірності, зокрема, задачами пошуку екстремуму функції однієї змінної.

Розглянемо можливості подібних спрощень задачі оптимізації розвитку децентралізованих систем. Урахування використання зовнішніх ресурсів збільшує число змінних управління на одиницю. Неважко показати і підтвердити обчислювальними експериментами (див. рис. 3.10, 3.11, 3.14, 3.15, 3.18, 3.19), правило: якщо темп використання зовнішніх ресурсів $xkr(t)$ ненульовий, то темп накопичення $z(t)$ – нульовий і навпаки: $(xkr(t) > 0) \wedge (z(t) > 0)$.

Тому на відповідних інтервалах можна брати відповідну змінну управління нульовою і так зменшити розмірність задачі. Ускладненням для цієї схеми оптимізації може бути розривність оптимального управління $xkr(t)$ (рис. 3.14, 3.19, 3.20). На рис. 3.20 можемо бачити ситуацію, коли послідовно йдуть інтервали "зовнішні ресурси", "тільки власні ресурси", "накопичення", "зовнішні ресурси", "тільки власні ресурси".

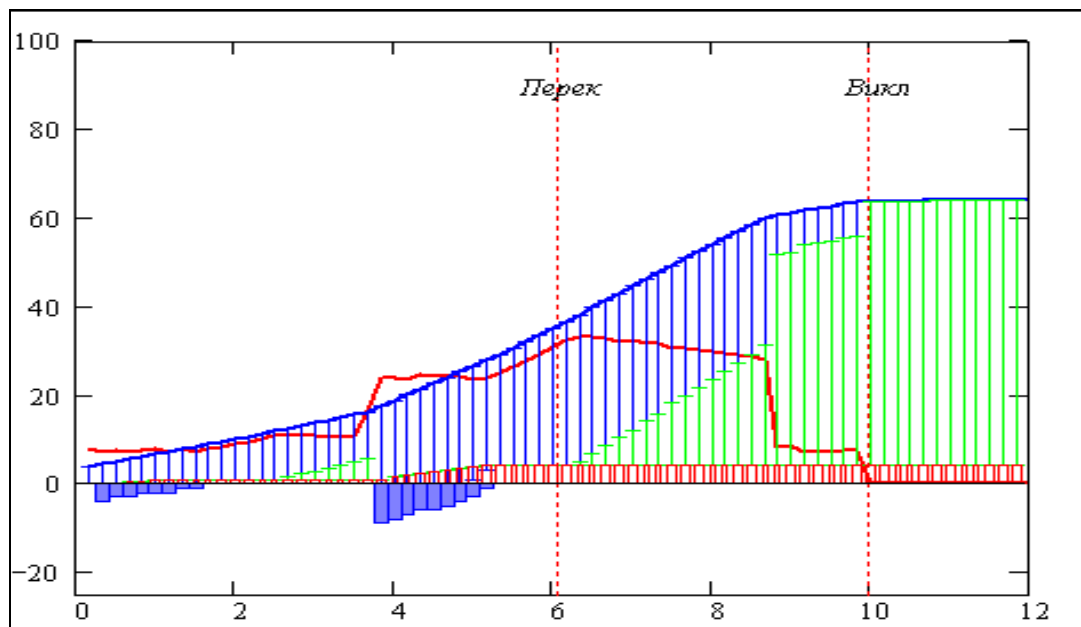


Рис.3.20. Оптимальний процес розвитку при високій ціні ресурсу

Радикального зменшення обсягу обчислень для багатовимірних задач можна досягти застосуванням методу агрегування, запропонованого і обґрунтованого в розділі 2 для однокрокових задач розподілу обмеженого ресурсу. Аналіз і обчислювальні експерименти дозволяють стверджувати, що цей метод є придатним, як мінімум, для ефективного наближення оптимальних розв'язків децентралізованих систем високої розмірності. На рис. 3.21, 3.22 подано приклад розрахунку оптимального процесу розвитку для системи з двох елементів із залученням зовнішніх ресурсів за двома методами – класичним і методом на базі агрегування. Бачимо, що структура розв'язань є ідентичною. Різниця в числових значеннях обумовлена використанням малої точності пошуку екстремуму – 2–5%. Однак, точність вхідних даних – 10–30%.

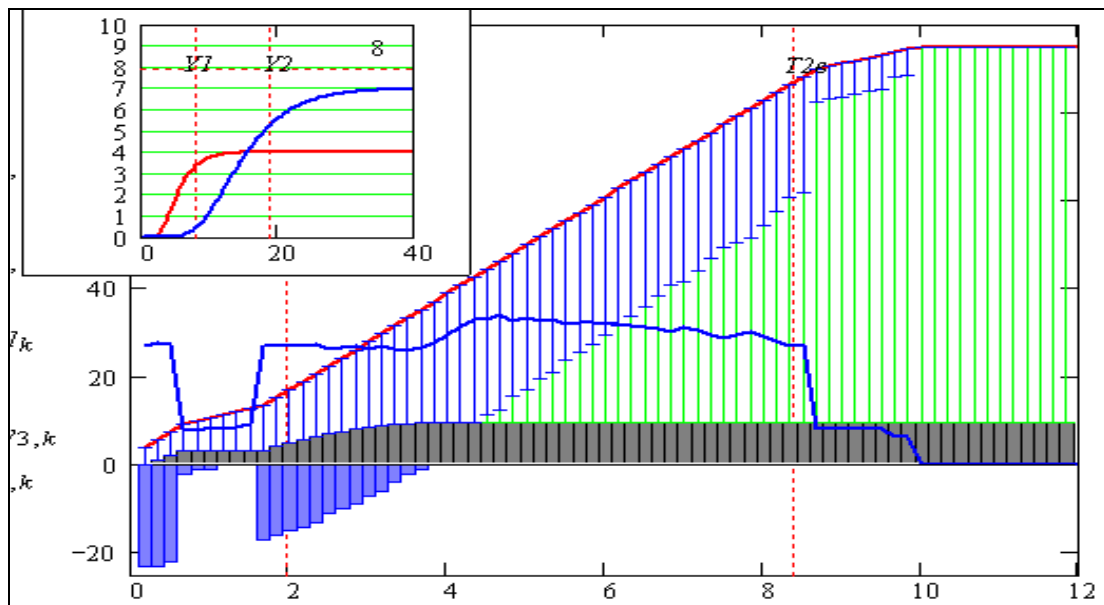


Рис. 3.21. Оптимальний процес розвитку системи з двох елементів

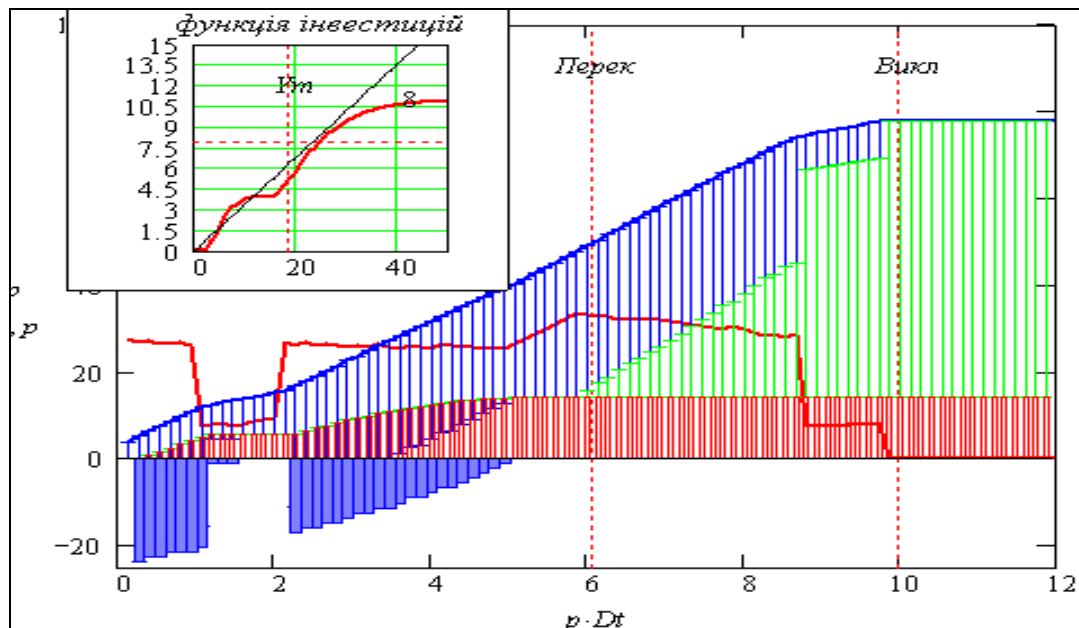


Рис. 3.22. Оптимальний процес розвитку еквівалентної агрегованої системи

Перший процес (див. рис. 3.21) розраховано програмою для оптимізації двовимірних систем, другий процес (див. рис. 3.22) розраховано програмою оптимізації одновимірних систем. Попередньо за методикою агрегування розраховано оптимальну функцію розвитку системи.

Висновки

Необхідність розгляду сучасних виробничих систем як складних процесів неперервного вдосконалення конструкцій, технологій і процесів паралельного випуску продуктів одного класу обумовила необхідність розгляду задачі оптимального розподілу ресурсів як багатокрокової, варіаційної.

Вперше розроблено метод розв'язання варіаційної задачі оптимізації розподілу ресурсу в децентралізованих системах, елементи яких мають довільні моделі виробничих функцій, де на відміну від існуючих методів використовується наближення функції Гамільтона в просторі оптимальних стратегій, що спрощує обчислення оптимального розв'язку. Коректність наближення обумовлена тим, що при лінійних функціях розвитку воно стає ідентичним точному розв'язанню.

Застосування оптимального агрегування дозволило розробити новий метод – еквівалентне перетворення багатовимірної задачі розвитку виробничої системи в одновимірну. Згідно з цим методом спочатку знаходиться оптимальна функція розвитку виробничої

системи і визначається функція обмеження по ресурсу з урахуванням внутрішніх і зовнішніх ресурсів. Потім знаходиться розв'язання еквівалентної одновимірної задачі розвитку. Це суттєво зменшує обсяг обчислень без втрати точності.

Отримано великий обсяг результатів обчислювальних експериментів. Детальне порівняння з реальними процесами неможливе за відсутністю надійних і систематичних даних, але результати порівняння з розмитими і розсіяними по різних джерелах статистичними даними свідчать, що ефективність сучасних децентралізованих виробничих систем, де одночасно на різних стадіях життєвого циклу і в різних територіальних підрозділах знаходяться десятки виробів і продуктів, визначається саме оперативним і оптимальним перерозподілом ресурсів. Отримані наукові і практичні результати дозволяють побудувати систему для технологічного прогнозування в інноваційній діяльності.

РОЗДІЛ 4

ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

В цьому розділі розглядаємо приклади практичного застосування результатів досліджень. Вирішальний фактор в практичному застосуванні розроблених математичних моделей і методів оптимізації розподілу ресурсів – урахування невизначеностей і випадкових збурень. Також ставиться мета на конкретних прикладах показати придатність результатів цієї роботи для практичних застосувань, в першу чергу – для створення вбудованих систем автоматичного керування, систем підтримки рішень в умовах невизначеності та автоматизованих систем для навчання.

Центральне питання монографії – дослідження оптимальних розподілів обмеженого ресурсу при невикликаних виробничих функціях елементів. Загальні теоретичні аспекти проблеми невизначеності виходять за межі нашої роботи. В цьому розділі ми розглядаємо їх на рівні конкретних практичних прикладів. З точки зору можливостей прогнозування існуючі невизначеності можна класифікувати так:

1. Стохастична невизначеність;
 - 1.1 гаусівська статистика,
 - 1.2 негаусівська статистика;
2. Невизначеність систем з хаотичною поведінкою;
3. Неповні знання про об'єкт і навколишнє оточення;
 - 3.1 неточне знання параметрів моделі об'єкта,
 - 3.2 нееквівалентність моделі об'єкта реальності,
 - 3.3 статистична невизначеність зовнішніх збурень,
 - 3.4 модель об'єкта чи зовнішнього середовища потенційно може бути визначена, але для цього немає часу і ресурсів,
 - 3.5 потрібна інформація про моделі об'єкта і зовнішнього середовища існує, але недоступна (конфіденційна та ін.) – сьогодні математичні моделі і методи – стратегічний ресурс, тому дійсно цінне і нове звичайно зникає з доступних публікацій.

Охарактеризуємо стисло ці класи невизначеностей.

Головні ознаки стохастичних невизначеностей: закони великих чисел і можливість отримати частотні розподіли – агреговані характеристики, невизначеність яких менша, ніж невизначеність неагрегованих даних.

Практично важливим результатом є асимптотичні властивості частотних розподілів з кінцевою дисперсією: згортка таких розподілів досить швидко сходиться до гаусівського розподілу.

Існування досить стабільних частотних розподілів і зменшення (за імовірністю) невизначеностей з ростом обсягу вибірки (статистичних

даних), дозволяють будувати досить ефективні системи управління і прийняття рішень в умовах невизначеності [46, 9]. Однак, слід пам'ятати, що всі ці інтервали довіри, точкові оцінки та ін. стоять на сумнівному ґрунті, припущенні, що об'єкт і середовище мають гаусівську статистику [26, 27].

Сучасні наукові, технічні, інформаційні системи відносяться до класу так званих активних систем, які мають зовсім іншу – негаусівську статистику [80, 83, 98, 107, 114]. Частотні розподіли для таких систем мають нескінчену дисперсію, вони краще виконуються на малих вибірках і гірше – на великих.

Негаусівські частотні розподіли не є більш важкими для ідентифікації і прогнозування порівняно з гаусівськими – вони просто інші. Такі частотні розподіли мають гіперболічні асимптоти, в логарифмічних масштабах – прямі з певним нахилом, тому ідентифікація таких розподілів і механізмів, що їх породжують, досить проста. Механізми, що породжують негаусівські (гіперболічні) частотні і рангові розподіли, – випадкові процеси з розгалуженнями і додатними зворотними зв'язками – прискорювачами розвитку і зростання.

Існує клас детермінованих систем, які не прогнозуються, – хаотичних. Склалася два наукових напрями, що стосуються таких систем – теорія катастроф і теорія хаосу [2]. Хаотичну систему визначають як детерміновану систему, що веде себе випадково. Зовнішньо процеси у хаотичних системах бувають схожими на стохастичні, однак цим процесам не можна приписувати математичні очікування і частотні розподіли.

Для нових технічних систем типовими є невизначеності незнання або неповного знання. Наприклад, програма може мати помилку, що не виявлена тестуванням і проявляється тільки в особливих умовах. В даному випадку можна винайти якісь імовірнісні характеристики – "засіяти" програму помилками, частка невиявлених тестуванням штучних помилок може бути оцінкою імовірності невідомих помилок. Генеральний практичний напрям в цьому випадку – робити прості за структурою і тому безпомилкові програми.

Якими б не були невизначеності, визнаний розумний підхід в таких ситуаціях – організація системи безпечних експериментів і навчання за результатами цих експериментів [8, 26, 100, 77]. Такі процеси називають процесами регулювання з адаптацією або навчанням. Ці терміни і поняття не можуть бути точно визначені [8, 100]. Слід відзначити новий послідовний і конструктивний підхід до класифікації та узагальнення невизначеностей в системах управління [33, 41, 42].

В практичних задачах не слід поспішати будувати інтелектуальні системи для ідентифікації, прогнозування і оптимального управління.

Поряд завжди існують можливості просто усунення, елімінації невизначеності.

Наприклад, існують два підходи до надійності: а) ритуальні розрахунки імовірнісних показників – частоти відмов, часу безвідмовної роботи, оптимального резервування; б) пошук конструкторських і технологічних засобів усунення джерел відмов. Ефективним засобом усунення невизначеностей є збільшення розмірів системи – інтеграція, і одночасно декомпозиція системи в незалежні підсистеми, що працюють паралельно, – децентралізація.

В практичних задачах не слід також поспішати усувати шуми, збурення – в системах з адаптацією збурення генерують перехідні процеси в системі, на базі яких і виконується адаптація. Часто випадковість вводиться спеціально, згадаємо випадковий пошук. Усі ці аспекти роботи з невизначеностями і випадковими збуреннями краще розглядати на конкретних прикладах, базових задачах.

4.1. Моделювання процесів оптимального розподілу ресурсу на базі принципу відкритого управління

Для виробничих систем не є штучною ситуація, коли виробничі функції елементів не є точно відомими і визначеними. Якщо ВФ елементів відомі із значними можливими похибками, то розрахунки оптимальних розподілів ресурсів втрачають сенс. При повній невизначеності, згідно з принципом недостатніх підстав, слід просто поділити ресурси між елементами порівну. В іншій галузі – фінансах, є аналогічна задача оптимального розподілу фінансових ресурсів між акціями з суттєво невизначеною доходністю – так звана задача формування оптимального портфелю цінних паперів. Теорія оптимального портфелю акцій розглядається в сотні робіт, з них не менше десяти – роботи нобелівських лауреатів. В останні роки виявилась така обставина: якщо випадково вибрати з першої сотні фірм і корпорацій десять і розподілити капітал (фінансовий ресурс) рівно між акціями цих організацій, то такий портфель ймовірно не буде гірший оптимального. Причина тут в тому, що біржі через тисячі інформаційних зворотних зв'язків постійно уточнюють ефективності акцій.

Подібна процедура багатокрокових проб і помилок, в процесі яких невизначені параметри виробничих функцій уточнюються широко використовується в технічних системах як:

1) обчислювальний метод для задач нелінійного програмування високої розмірності;

2) метод оптимального управління розподілом ресурсів з адаптацією в децентралізованих виробничих системах.

В підрозділі 1.2.3 розглянуто метаігрові методи визначення оптимальних розподілів ресурсу, а в підрозділі 2.3 розглянуто приклад системи оптимального управління розподілом навантаження системи хімічних реакторів, характеристики яких змінюються з часом. Суть метаігрових методів визначення оптимальних розподілів ресурсу:

- розпаралелювання N -вимірної задачі в N одновимірних задач;
- організація ітеративної процедури розподілу (метагри) ресурсу.

В цьому розділі поставимо практичну ціль – створення зручної програмної системи для безпосереднього моделювання, випробування і налаштування алгоритмів метаігрової оптимізації для систем, елементи яких мають довільні ВФ – увігнуто-випуклі, кусочно-лінійні та ін. Призначення програмної системи:

- дослідження;
- навчання;
- вбудовування в автоматизовані системи управління і підтримки рішень.

На рис. 4.1. подано схему метаігрової оптимізації, яку можна інтерпретувати і як схему алгоритму, і схему системи управління, що подібна до схеми управління системою хімічних реакторів (див. рис. 2.2).

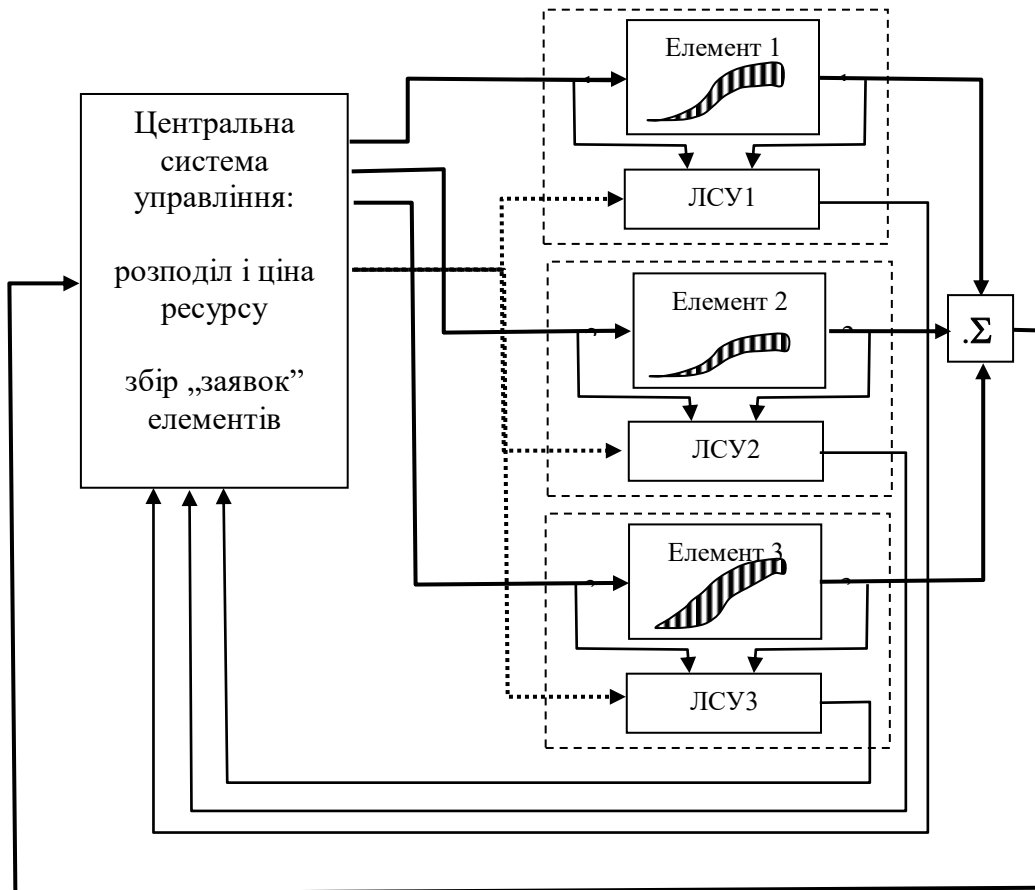


Рис. 4.1. Схема метаігрової оптимізації розподілу ресурсу при невизначених виробничих функціях елементів

На цій схемі ЛСУ – локальна система управління. Застосуємо до цієї задачі методику конструювання моделей [9, 16, 19, 57, 79, 89]. Сформуємо словесну модель задачі, орієнтуючись на схему (див. рис. 4.1).

Суть відкритого управління:

- на кожному кроці процесу елементи подають "заявки" z (антропоморфна термінологія) на ресурс;
- певний "арбітр" вважає заявку параметром критерію ефективності елемента і ділить ресурс так, щоб кожний елемент досягав максимуму свого критерію.

Ця процедура повторюється (метагра).

Особливості відкритого управління:

- при виконанні певних умов в стані рівноваги досягається приблизно і максимум критерію системи – "сумарного виробництва";
- елемент досягає максимуму свого критерію, коли повідомляє точну величину свого параметра ефективності;

- оптимізація "сумарного виробництва" – функція N змінних "розпаралелюється" в N одновимірних задач оптимізації (обумовлюється двома попередніми особливостями).

Запишемо тепер алгоритм методу у "псевдокодах". На рис. 4.2 подано схему цього алгоритму в стандартній формі пакета. На відміну від "стандартних" схем алгоритмів, цю схему можна простим і природним способом перетворити у робочу програму: слід тільки замінити назви процедур (подані в лапках) на імена відповідних робочих процедур. Тексти робочих програм подані в додатках.

Робоча програма, що відповідає схемі на рис. 4.2 дозволяє моделювати систему:

- довільної розмірності;
- з довільними правилами розподілу ресурсу;
- з довільними ВФ;
- з довільними алгоритмами прийняття рішень елементами.

Для цього достатньо замінити відповідні підпрограми.

Програма дозволяє досліджувати і налаштовувати відомі та конструювати нові:

- а) правила розподілу ресурсу,
- б) алгоритми поведінки елементів.

Простіша стратегія елемента в послідовності "ігор", що повторюється (метагри = гри з серії ігор): якщо значення K зросло на цьому кроці – продовжити зміну заявки x_i в попередньому напрямі, якщо ні, то змінити напрям зміни заявки. Така стратегія називається індикаторною поведінкою.

RS1 =	<pre> "Початкові умови і параметри" for k ∈ 1 .. Кроків_моделювання sumzaj ← 0 – "обнулення суми заявок" smprd ← 0 – "обнулення сумарного виробництва" for i ∈ 1 .. Кількість_елементів sumzaj ← sumzaj + поточна_заявка smprd ← smprd + поточна_продукція λ ← "ТП: Визначення ціни рівноваги" for i ∈ 1 .. Кількість_елементів r_i ← "Підпрограма "оптимальний розподіл"" D2_i ← "визначення локального критерію" ΔD_i ← D2_i – D1_i – "прирощення критерію" dd_i ← "визначення індикаторної функції" вихід ← stack(r, xx, D1) – "вектор стану" D1_i ← D2_i – "попереднє значення критерію" xx_i ← "ТП: заявка елемента" S^{<k>} ← вихід </pre>
	S

Рис. 4.2. Схема програми відкритого управління

На рис. 4.3 подано серію результатів моделювання процесу розподілу ресурсу. Це фактично перехідні процеси в нелінійній системі з багатьма прямими і зворотними зв'язками. На рис. 4.3а подано процеси для однакових стартових заявок. Бачимо, що кращі елементи збільшують заявки, а гірші – зменшують, в усталеному стані розподіл ресурсу близький до оптимального. На основний процес накладені автоколивання, обумовлені логікою алгоритму локального управління. Локальне управління різних елементів належить до одного класу і відрізняється тільки значеннями параметрів.

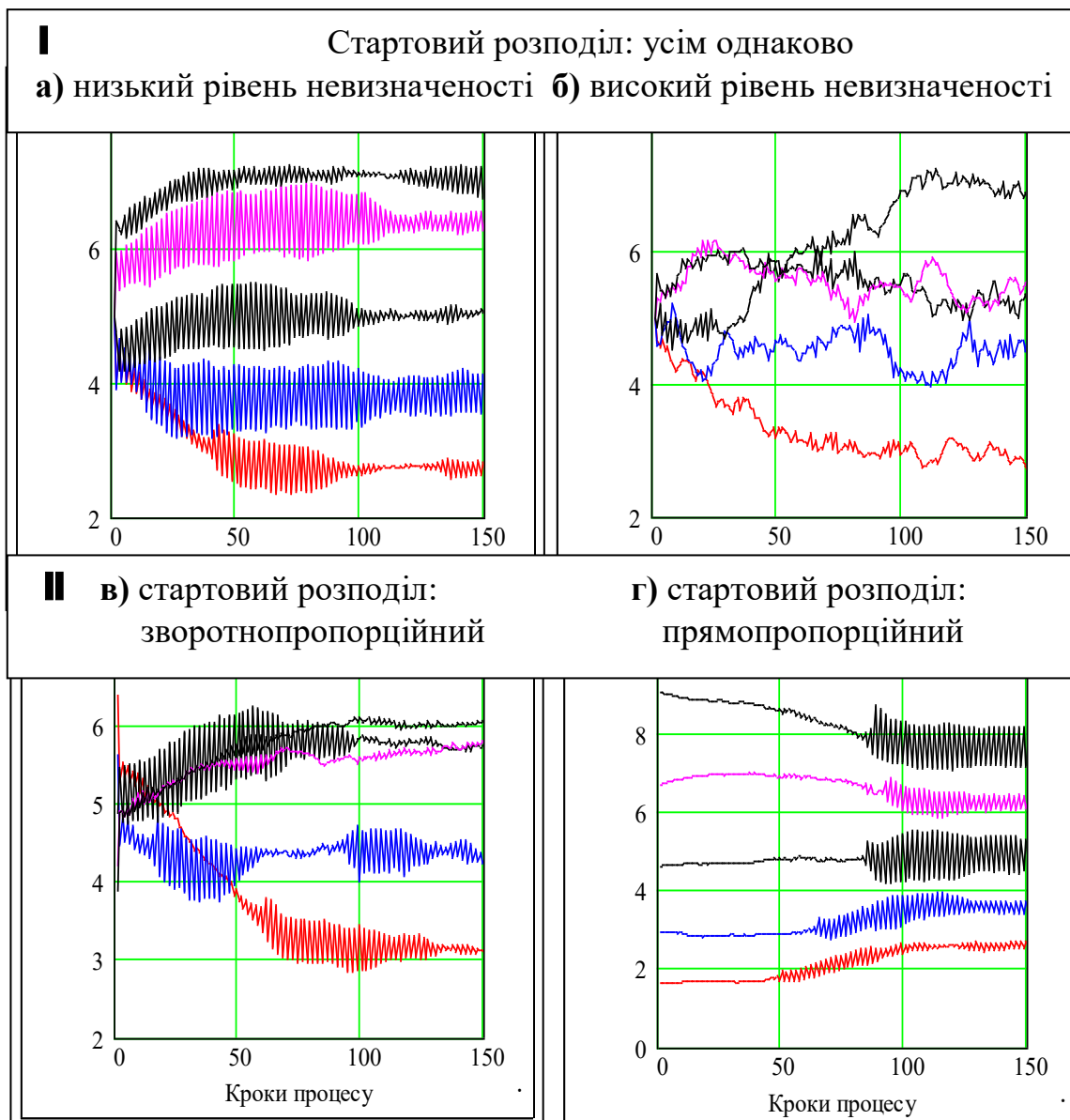


Рис. 4.3. Перехідні процеси розподілу ресурсів методом відкритого управління. Алгоритм управління 1 (без усереднення)

На рис. 4.3б подано процеси для рівних стартових заявок, але при високому рівні невизначеності (дисперсія даних 20%). Математичні очікування розподілу ресурсу задовільно сходяться до оптимального розподілу, однак окремі реалізації процесу можуть бути досить далекими від оптимальних.

На рис. 4.3в та 4.3г подано перехідні процеси для стартових заявок зворотно- і прямо-пропорційних параметрам ВФ (ефективностям) елементів. Для системи відкритого управління ситуація 4.3в – найважча, а ситуація 4.3г – найлегша. Бачимо, що навіть у випадку 4.3в система працює задовільно.

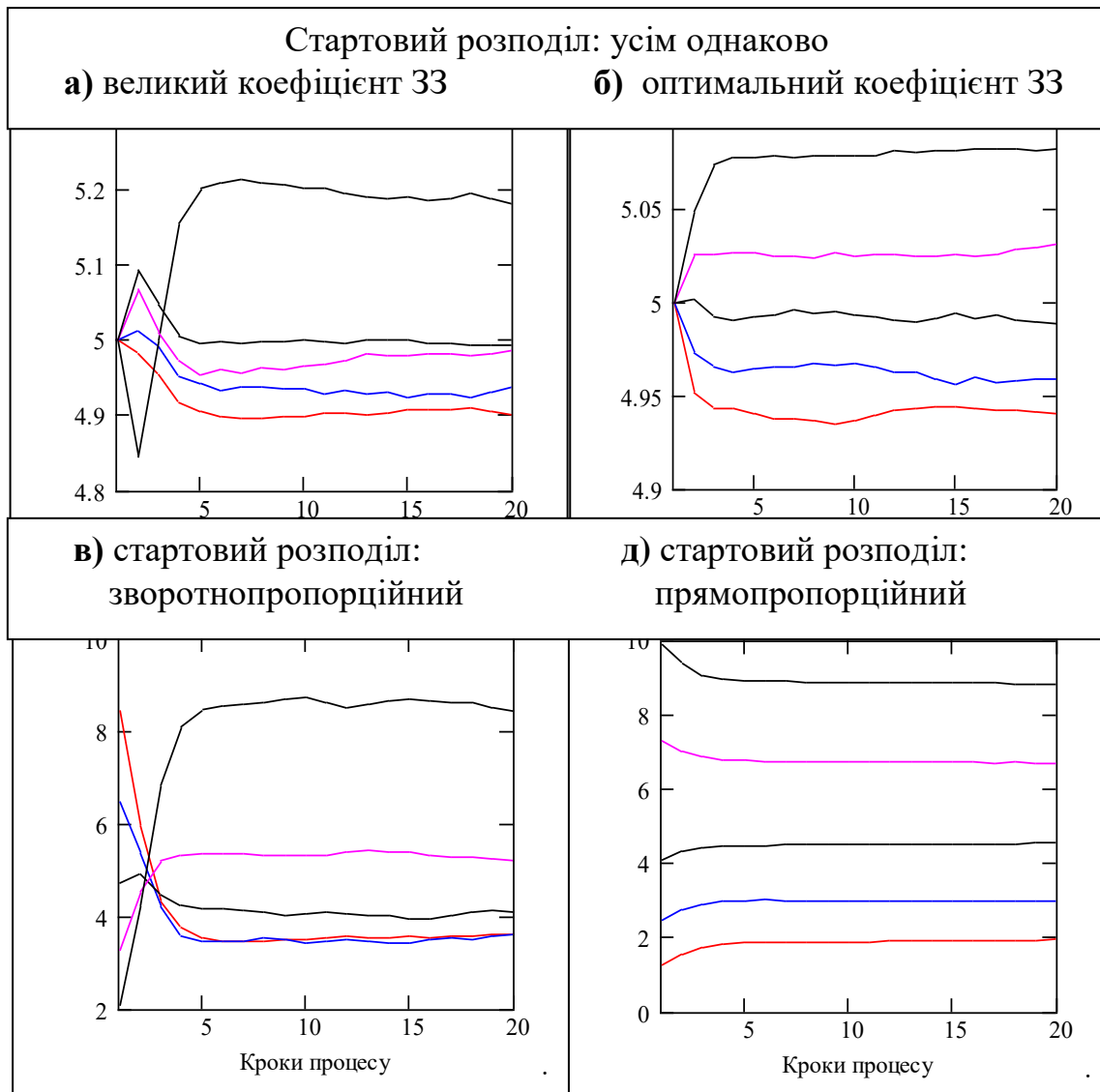


Рис. 4.4. Перехідні процеси розподілу ресурсів методом відкритого управління. Алгоритм управління 2 (з усередненням)

Зауваження. Автоколивання в перехідних процесах – не проблема, просто метою моделювання був аналіз критичних режимів. Для спеціаліста з теорії управління неважко змінити алгоритм локального управління так, щоб усунути автоколивання – ввести демпфування та ін. На рис. 4.4 подано серію перехідних процесів в системі розподілу ресурсу при модифікованому алгоритмі локального управління. Перехідні процеси отримані для тих же початкових умов: однакових, пропорційних і зворотно-пропорційних заявок.

Система розподілу ресурсу на базі відкритого управління – суттєво нелінійна, тому стійкість її і стани рівноваги залежать не тільки від значень параметрів алгоритму управління, але і від початкових умов. Тому моделювання необхідне і на перших і на останніх кроках. Був розроблений зручний інтерфейс для моделювання розподілених систем,

елементи яких мають довільні ВФ. На рис. 4.5 подано фрагмент інтерфейсу – виробничі функції елементів і процес оптимізації розподілу методом відкритого управління.

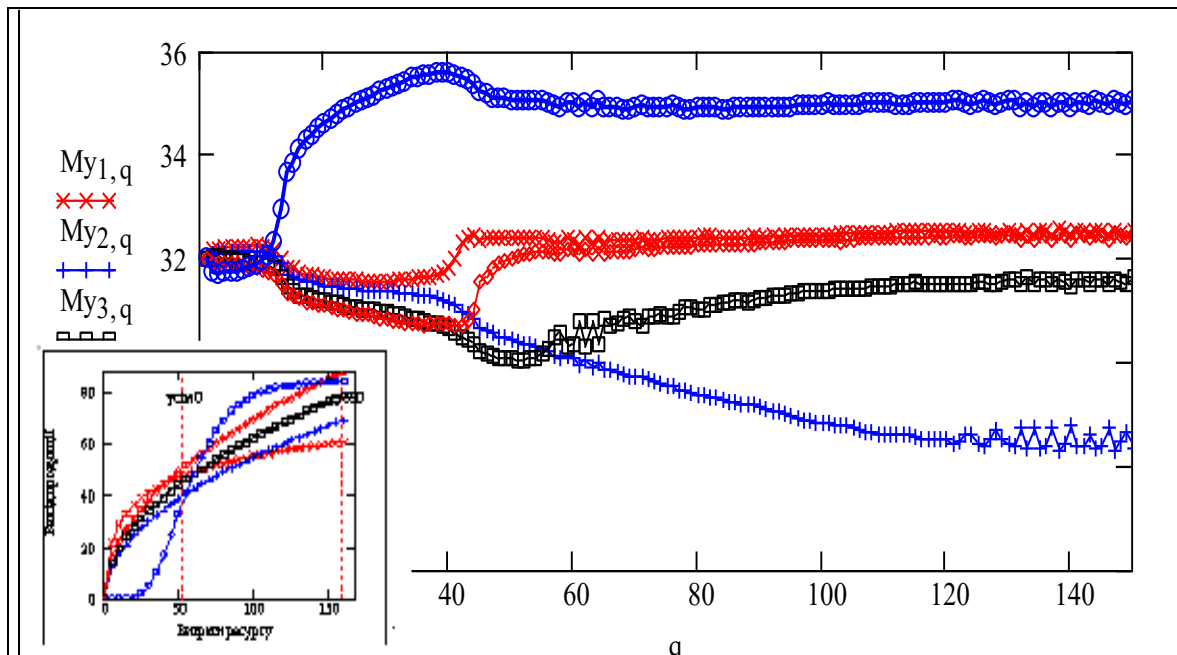


Рис. 4.5. Перехідні процеси розподілу ресурсів. Елементи з довільними ВФ

Для задач цього класу єдина альтернатива ефективного конструювання і дослідження – комплексне використання моделювання і аналітичних методів. Розглянутий вище комплекс програм моделювання був доповнений зібраними і перенесеними в середовище математичного пакету відомими аналітичними результатами [9, 25, 77]. Проаналізуємо властивості принципу відкритого управління на конкретному прикладі. Потім узагальнимо результати.

Центральна система управління (ЦО) (див. рис. 4.1) отримує від елементів заявки – x_i , вважає, що це показники ефективності a_i . ЦО також вважає, що цільові функції елементів є такими:

$$D_{\mathcal{E}_i} = x_i \cdot \sqrt{r_i} - \lambda \cdot r_i, \quad i = 1..N. \quad (4.1)$$

Інтерпретація цього виразу: Прибуток = Доход – Витрати, однак це тільки параметри обчислювального алгоритму. Зауважимо, що елемент (локальна система управління) "знає" алгоритм розподілу ресурсу і може теж обчислювати розподіл для прогнозування і планування. ЦО розраховує розподілення ресурсу, що дає максимум цільової функції кожного елемента оптимальне, а ціну ресурсу λ вибирає так, щоб ресурс розподілявся точно – без залишку чи дефіциту. У випадку випуклих виробничих функцій елементів задача розв'язується

прирівнюванням похідних від цільових функцій D_{λ_i} по r_i до нуля; отримуємо систему рівнянь, до якої додаємо рівняння обмеження.

$$\frac{\partial}{\partial r_i} D_{\lambda_i} = \frac{x_i}{2 \cdot \sqrt{r_i}} - \lambda = 0; \quad \sum_i r_i = R; \quad i = 1..N. \quad (4.2)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (4.2). В даному випадку це можна зробити так: визначаємо r_i , підставляємо у обмеження, знаходимо λ і підставляємо у вирази для r_i . Виконуємо все це за допомогою символьного процесора.

$$\frac{x_i}{2 \cdot \sqrt{r_i}} - \lambda \text{ solve, } r_i \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{x_i^2}{\lambda^2}, \quad r_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_i)^2}{\lambda^2},$$

$$\sum_{i=1}^N r(i) = R \text{ substitute, } r(i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x(i)^2}{\lambda^2} \rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{1}{4} \cdot \frac{x(i)^2}{\lambda^2} = R,$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{4} \cdot \frac{x(i)^2}{\lambda^2} = R \text{ solve, } \lambda \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2 \cdot R} \cdot \left(R \cdot \sum_{i=1}^N x(i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2 \cdot R} \cdot \left(R \cdot \sum_{i=1}^N x(i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right];$$

$$\lambda u = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{R} \cdot \sum_{j=1}^N (x_j)^2};$$

$$r(i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x(i))^2}{\lambda^2} \text{ substitute, } \lambda = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{R} \cdot \sum_{j=1}^N (x(j))^2} \rightarrow r(i) = x(i)^2 \cdot \frac{R}{\sum_{j=1}^N x(j)^2};$$

$$r u_i = \frac{(x_i)^2}{\sum_{j=1}^N (x_j)^2} \cdot R. \quad (4.3)$$

Вище подано процес отримання виразів для ціни та розподілу ресурсів згідно з заявками елементів, для цього використано символьний процесор. Визначимо заявку, що максимізує локальний критерій елемента. Підставимо у цільові функції управління (4.2) оптимальну ціну і заявку (4.3)

$$D_{\partial_i} = a_i \cdot \sqrt{r_i} - \lambda \cdot r_i = a_i \cdot \sqrt{\frac{(x_i)^2}{\sum_{j=1}^N (x_j)^2} \cdot R} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{R} \cdot \sum_{j=1}^N (x_j)^2} \cdot \left[\frac{(x_i)^2}{\sum_{j=1}^N (x_j)^2} \cdot R \right].$$

Після спрощень отримуємо аналітичний вираз для локальних критеріїв елементів:

$$D_{\partial}(x)_i = x_i \left(a_i - \frac{x_i}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{R}{\sum_{j=1}^N (x_j)^2}} = \left[a_i \cdot x_i - \frac{(x_i)^2}{2} \right] \cdot \sqrt{\frac{R}{\sum_{j=1}^N (x_j)^2}}. \quad (4.4)$$

Аналіз виразу (4.4) показує, що при кількості елементів $N > 4$ і відсутності великої переваги одного з елементів, реально впливати на значення локального критерію $D_{\partial}(x)_i$ елемент може змінюючи вираз у дужках. Тут все залежить тільки від параметрів x_i та a_i – показника ефективності елемента.

Визначимо x_i , що максимізує вираз

$$x_i \cdot (a_i - 0.5 \cdot x_i) = x_i \cdot a_i - 0.5 \cdot (x_i)^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [x_i \cdot a_i - 0.5 \cdot (x_i)^2] \rightarrow a_i - 1.0 \cdot x_i, \quad \text{хор}_i = a_i.$$

Маємо "гармонію": якщо елементи повідомляють $\text{хор}_i = a_i$, то досягають максимуму своїх локальних критеріїв; одночасно глобальний критерій – сумарне виробництво в системі теж стає максимальним. Звичайно, всі ідилії та гармонії виявляються незахищеними, це стосується і відкритого управління [77].

Розглянемо все це безпосередньо в числах і на графіках. Візьмемо для прикладу систему з трьох елементів. Обчислимо розподілення ресурсу та ціну – оптимальні і ті, що відповідають алгоритму відкритого управління для певних заявок елементів. Подамо це все на графіку разом з цільовими функціями елементів (рис. 4.6). При заявках рівних ефективностям елементів сумарне виробництво максимальне, і локальні критерії досягають максимумів.

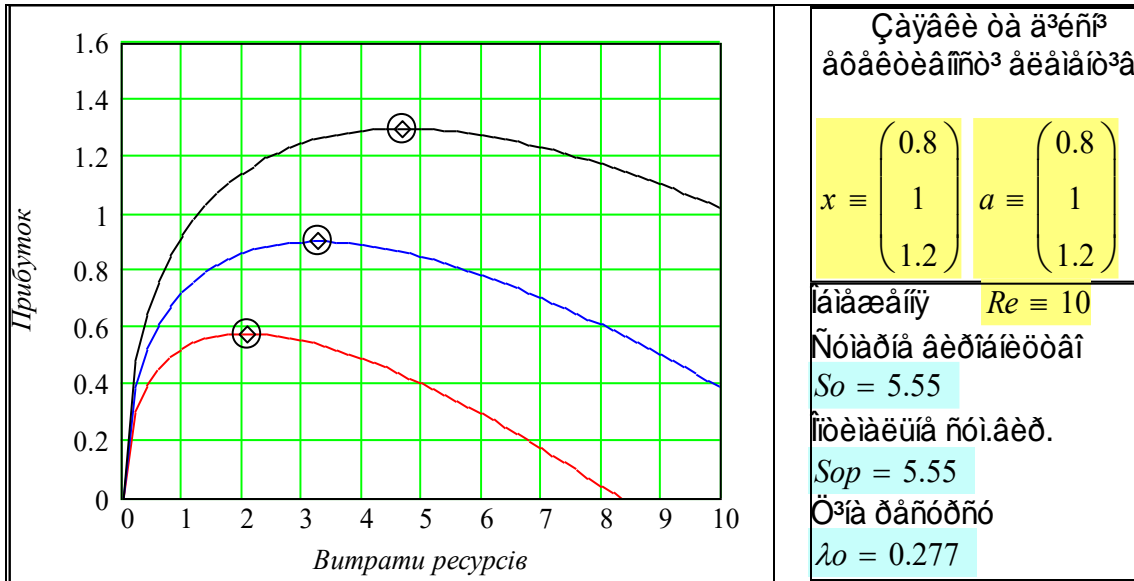


Рис. 4.6. Перевірка оптимальності стану рівноваги

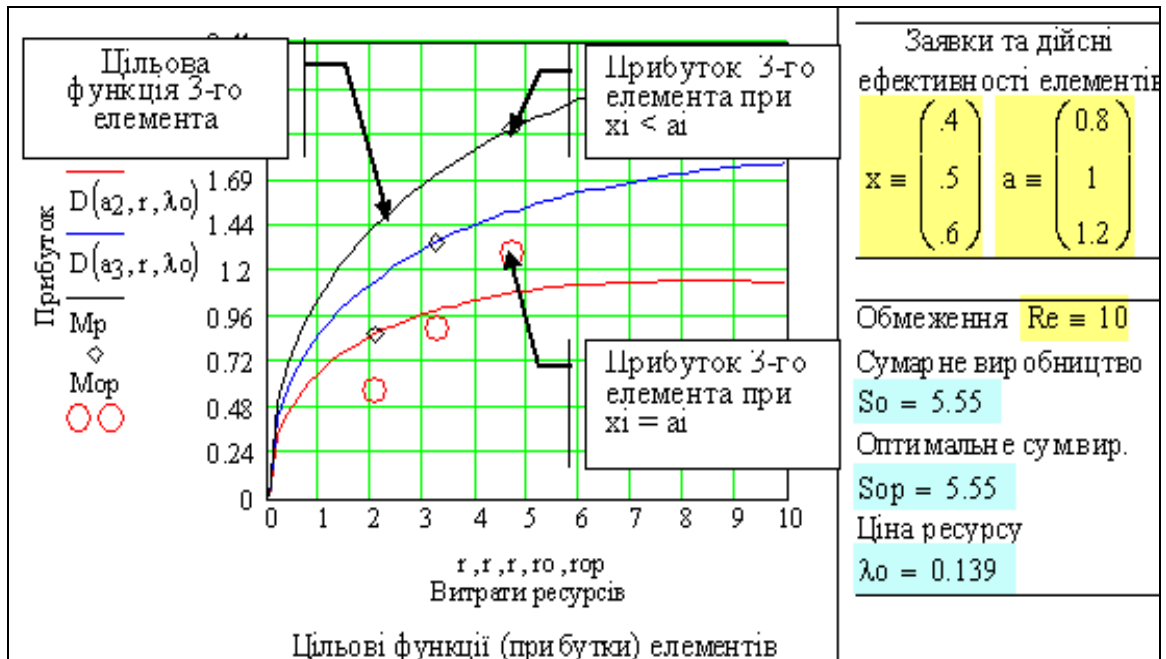


Рис. 4.7. Особливість відкритого управління при корельованих діях елементів

Якщо певний елемент подає заявку більшу чи меншу оптимальної (при незмінних інших) – він програє більше усіх. Тобто це дійсно точка Неша для метагри. Проаналізуємо ситуацію, коли елементи одночасно зменшують свої заявки. Відкрите управління має занадто багато інтерпретацій. Ми розглядаємо відкрите управління як алгоритми оптимізації, де слід ввести певну рандомізацію поведінки елемента – ввести випадковість в алгоритми локального управління.

Таким чином, методи розподілу ресурсу на базі відкритого управління працюють коректно, якщо кількість елементів досить велика, а елементи діють незалежно. Система приходиться до стану рівноваги, що називається точкою Неша. В цій точці виконується умова

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_{\mathfrak{D}}(x)_i = 0, \quad i = 1..N.$$

Розглянемо на конкретному прикладі системи з 3-ох елементів питання досяжності точки Неша при відкритому управлінні. Знаходимо похідні від (4.4) за допомогою символьного процесора (рис. 4.8).

$$\frac{d}{dx_2} \left[\left[a_2 \cdot x_2 - \frac{(x_2)^2}{2} \right] \cdot \sqrt{\frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} \right] \rightarrow (a_2 - x_2) \cdot \left[\frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\left(a_2 \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2 \right)}{\left[\frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2} \cdot x_2$$

$$(a_2 - x_2) \cdot \frac{\left[\frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right]^1}{2} - \frac{\left(a_2 \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2 \right)}{\left[\frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right]^1} \cdot \frac{Rr}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2} \cdot x_2 \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 \cdot Rr \cdot a_2 - 2 \cdot Rr \cdot x_2 - 2 \cdot x_2^2 \cdot a_2 + x_2^3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

Рис. 4.8. Знаходження похідної від локального критерію. Приклад символьних обчислень

Отримуємо систему рівнянь для визначення заявок у стані рівноваги.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} D_{\mathfrak{D}}(x)_1 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 \cdot Rr \cdot a_1 - 2 \cdot Rr \cdot x_1 - 2 \cdot x_1^2 \cdot a_1 + x_1^3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} D_{\mathfrak{D}}(x)_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 \cdot Rr \cdot a_2 - 2 \cdot Rr \cdot x_2 - 2 \cdot x_2^2 \cdot a_2 + x_2^3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} D_{\mathfrak{D}}(x)_3 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 \cdot Rr \cdot a_3 - 2 \cdot Rr \cdot x_3 - 2 \cdot x_3^2 \cdot a_2 + x_3^3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Можна бачити, що ця система розпадається на три незалежних рівняння (для кожної змінної)

$$2 \cdot Rr \cdot a_i - 2 \cdot Rr \cdot x_i - 2 \cdot x_i^2 \cdot a_i + x_i^3 = 0, \quad i = 1..N. \quad (4.5)$$

Знайдемо рішення за допомогою символьного процесора. Аналітичні вирази для x_i є занадто складними, тому подаємо одразу числові значення коренів. Формально ми отримуємо три корені, з яких тільки один відповідає задачі. Задаємо $Rr := 30$, $a_1 := 0.6$

$$2 \cdot Rr \cdot a1 - 2 \cdot Rr \cdot x1 - 2 \cdot x1^2 \cdot a1 + x1^3 \Big|_{\substack{\text{solve, } x1 \\ \text{float, } 3}} \rightarrow \begin{pmatrix} -7.47 \\ .596 \\ 8.08 \end{pmatrix}, \quad a1 = 0.6.$$

Бачимо, що значення заявок елементів достатньо збігаються (дещо менші) з їх ефективностями. $a2 := .9$

$$(a1 = 0,6; x1 = 0,596, a2 = 0,9; x2 = 0,896).$$

$$2 \cdot Rr \cdot a2 - 2 \cdot Rr \cdot x1 - 2 \cdot x1^2 \cdot a1 + x1^3 \Big|_{\substack{\text{solve, } x1 \\ \text{float, } 3}} \rightarrow \begin{pmatrix} -7.61 \\ .896 \\ 7.92 \end{pmatrix}, \quad a2 = 0.9.$$

Головна особливість конструювання математичних моделей і програм і власне моделювання – це можливість робити малі помилки, що не є помітними в результатах. Звичайно це банальні помилки типу: пропущена складова, некоректний знак. Сьогодні математичні моделі не тільки інструмент наукових досліджень, але і засіб управління літаком чи банком. Світові стандарти забороняють виконувати проектні алгебраїчні перетворення вручну.

Особливістю метаігрових методів є те, що різні алгоритми приводять до цілі – стійкості і оптимальності усталеного стану. Принцип відкритого управління може бути узагальненим – це так зване узгоджене управління [26, 75]. Підведемо підсумки відносно стійкості і оптимальності стану рівноваги – точки Неша. Корисність запропонованого методу оптимізації буде невеликою, якщо точка рівноваги буде далеко від точки екстремуму. Подаємо результати аналізу оптимальності точки рівноваги. Для випадку елементів з однаковими виробничими функціями координати точки рівноваги x_0 визначаються у явному вигляді: $x_{0i} = \frac{2 \cdot N - 2}{2 \cdot N - 1} \cdot a$. Для нашого прикладу

$N = 3$ маємо $x_{0i} = \frac{4}{5} \cdot a$. Наведемо ще раз, для порівняння, вирази для оптимального розподілу та усталеного розподілу при відкритому управлінні. При однакових елементах маємо

$$rop_i = \frac{(a_i)^2}{\sum_{j=1}^3 (a_j)^2} \cdot Re; \quad x_{0i} = \frac{2 \cdot N - 2}{2 \cdot N - 1} \cdot a; \quad ro_i = \frac{(x_i)^2}{\sum_{j=1}^N (x_j)^2} \cdot Re.$$

Можна показати, що подібна залежність $x_i \Rightarrow a_i$ при $N_i \Rightarrow \infty$ зберігається і при різних ВФ елементів [25, 77], при умові, що параметри ефективності елементів не можуть значно відрізнятись, тобто немає монопольних ефектів. Таким чином, при $0 < a_{min} \leq a_i \leq a_{max}$

враховуємо рівняння (4.5) і отримуємо $0 < a_{\min} \leq x_{oi} \leq a_{\max}$, звідки маємо

$$0 < \lim(a_i - x_{oi}) = \lim \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_{oi})^3}{(\sigma_i)^2} \right] \leq \lim \left[\frac{(a_{\max})^3}{(N-1) \cdot (a_{\min})^2} \right] \leq 0.$$

При великому N і відсутності монопольного ефекту усталене розподілення практично не відрізняється від оптимального.

Розглянемо умови "мінімального розумного управління" (МРУ) [65]. Будемо розглядати систему з довільними виробничими функціями елементів класу "монотонно зростаючі, строго випуклі". Тобто, замість $D_{\partial_i} = a_i \cdot \sqrt{r_i} - \lambda \cdot r_i$ беремо $D_{\partial_i} = \phi(x_i) - \lambda \cdot r_i$. Процедура управління узагальнюється так. Кожний елемент повідомляє певну величину заявки x_i – самооцінку ефективності виробництва. На базі вектора таких заявок центр розподіляє ресурс $\{r(x)_i\}$ і призначає його ціну $\lambda(x)$. Елементу теж відомі алгоритми обчислення цих функцій, і він сам при формуванні заявки може обчислити (якщо знатиме заявки інших елементів) те, що може отримати. Тобто, кожний елемент може визначити залежність своєї цільової функції від вектора заявок $(x_1, x_2, \dots, x_{IN})$.

Задача центру тепер – вибір із деякої множини альтернатив такого закону управління $r(x)$, $\lambda(x)$, що дає центру в стані рівноваги максимальний виграш. Цю задачу можна вирішити при додаткових припущеннях. Для кожного елемента x_i – єдина управляюча дія для впливу на ціну та кількість отриманого ресурсу. Тому природно вимагати монотонності відповідних залежностей.

$$\text{Для усіх } i \text{ та } x \quad \frac{\partial}{\partial x_i} r_i > 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_i > 0. \quad (4.6)$$

Це інтерпретується так: більша заявка – більше ресурсу, одночасно – вища ціна (якщо інші заявки незмінні). Для центру природно розподіляти весь ресурс без залишків та дефіцитів при будь-якому векторі заявок x . Тому додаємо і таке обмеження для усіх x :

$$\sum_{i=1}^N r(x)_i = R. \quad (4.7)$$

Припустимо також, що існують функціональні залежності

$$r(x)_i = \chi(x_i, \lambda(x))_i. \quad (4.8)$$

Це інтерпретується так: можливо подати залежність ресурсу, що отримає i -й елемент у більш структурованому вигляді – як функцію

заявки цього елемента і ціни ресурсу, як функції вектора заявок усіх елементів. Порушення умов (4.6)–(4.8) має неприємні наслідки – нестійкість, відсутність розв'язку та ін. Закони управління, що задовольняють умови (4.6)–(4.8) називаються законами мінімально розумного управління (МРУ), або законами узгодженого управління. Мається на увазі узгодженість в точці екстремуму інтересів елементів і центра. Можна стверджувати, що при будь-якому законі МРУ і великій кількості учасників розподіл ресурсу збігається до оптимального

$$\sum_{i=1}^N \phi(r_i)_i \Rightarrow \max, \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^N r_i = R. \quad (4.9)$$

Така нечутливість стану рівноваги (в просторі векторів x) до законів управління може здаватись парадоксальною. Але, в точці рівноваги по Нешу повинна виконуватись умова

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_{\lambda_i} = 0, \quad \text{де} \quad D_{\lambda_i} = \phi(x_i) - \lambda \cdot r_i.$$

Тому:
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(r_i) - \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} r_i - r_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda = 0.$$

Виконуємо перетворення
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(r_i) = \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \phi(r_i) \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} r_i \right).$$

Приводимо вираз до вигляду
$$\frac{\partial}{\partial r_i} \phi(r_i) - \lambda = r_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \right) \div \left(\frac{\partial}{\partial x_i} r_i \right). \quad (4.10)$$

При великій кількості учасників похідна $\frac{\partial}{\partial x_i} \lambda$ мала, тому

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \phi(r_i) - \lambda = 0. \quad (4.11)$$

Нагадуємо, що цей вираз – умова екстремуму номінальної задачі розподілу ресурсу. Дійсно: критерій і обмеження – (4.9), тоді функція Лагранжа та похідні від неї будуть

$$L(r, \lambda) = \sum_{i=1}^N \phi(r_i)_i + \left(R - \sum_{i=1}^N r_i \right); \quad \frac{\partial}{\partial x_i} L(r, \lambda) = \frac{\partial}{\partial r_i} \phi(r_i) - \lambda = 0.$$

Таким чином, дійсно усі МРУ сходяться до екстремуму номінальної задачі.

Назвемо (4.11) умовою слабого впливу [65]. Для строгого доведення цієї умови необхідні припущення про відсутність монопольних ефектів, кінцеву середню кількість ресурсу на одного елемента, про наявність похідних усіх функцій. Наслідком цих припущень буде обмеженість x_0, r_0, λ у стані рівноваги. Подаємо відповідні теореми [77].

Теорема 1 (про слабкий вплив). Будь-який закон МРУ задовольняє умову слабого впливу.

Теорема 2. При досить великому N будь-який закон МРУ у рівновазі дає розподілення ресурсу, скільки завгодно близьке до оптимального (4.9).

Спробуємо оцінити можливості побудови законів МРУ. Оскільки функції $r(x)_i = \chi(x_i, \lambda(x))_i$ (4.8) є монотонними по λ то вони є такими, що мають зворотні функції, і замість (4.8) можна записати $\lambda = \xi(x_i, r_i)_i$. Тоді майже очевидно, що закон МРУ це відкрите управління при умові, що ЦО приймає за цільові функції елементів функції

$$D_{\mathcal{E}_i} = \int_0^{x_i} \xi(\tau, r_i)_i d\tau - \lambda \cdot r_i.$$

На базі цього висновку можна дати відповідь на питання, що буде, якщо ЦО при використанні принципу відкритого управління, помилиться у виборі виду виробничих функцій елементів? В цьому випадку рівноважне розподілення буде все одно близьким до оптимального.

Пояснимо ці результати. В оптимальних і близьких до оптимальних режимах розподілу ресурсу як в однокрокових задачах (розділ 2), так і в багатокрокових задачах (розділ 3) усі елементи працюють в режимах близьких до максимальної продуктивності (для S-функцій – це дотична проведена з початку координат). Має значення тільки окіл точки максимальної продуктивності. Вид виробничих функцій поза цими околами впливає тільки на перехідні процеси до стану рівноваги.

4.2. Розв'язання задачі оптимального розподілу навантаження для системи котлоагрегатів

Введення оптимального управління розподілом навантаження між елементами системи теплопостачання може дати 2–7% економії порівняно з кваліфікованим ручним управлінням суттєвих капіталовкладень. В масштабах регіональної чи національної економіки це може окупити кошти, що виділяються на науку та інноваційний розвиток. Як було відзначено в розділі 1, оптимальне управління розподілом навантаження сьогодні починає широко використовуватись в автомобільних двигунах із змінним числом працюючих циліндрів. Розглянемо можливості застосування результатів досліджень цієї роботи для підвищення ефективності систем котлоагрегатів, що працюють паралельно.

4.2.1. Математична модель системи котлоагрегатів

Сучасна котельна установка складається з котельного агрегату і допоміжного котельного обладнання, призначеного для виробництва пари необхідних параметрів або для приготування гарячої води, або для того і іншого одночасно. В склад котельного агрегату входять: паровий або водогрійний котел, топка, паропідігрівач, водяний економайзер, повітропідігрівач, теплоізоляція і арматура. До допоміжного обладнання відносяться: системи подачі повітря і води, обладнання водопідготовки, паливopодачі, контрольно-вимірювальні прилади, система управління.

Технологічний процес одержання пари здійснюється у такій послідовності. Паливо з допомогою газо-мастильних пристроїв вводиться в топку, повітря, необхідне для згорання палива, подається в топку вентилятором. Для покращення процесу горіння палива і підвищення економічності роботи котлоагрегату повітря перед подачею в топку підігрівається димовими газами.

Димові гази віддають частину тепла радіаційним поверхням нагріву, а потім конвективним поверхням. Пройшовши по поверхнях нагріву вода випаровується і під робочим тиском збирається в верхньому барабані, з котла пара подається в загально котельний паровий колектор і звідти – споживачам (рис 1.5, 1.6).

Тепловий баланс котлоагрегату. При спалюванні в котлоагрегаті не вся кількість тепла, що виділилась в топці, використовується для нагрівання води або одержання пари. Частина тепла втрачається з газами, що відходять, хімічним і механічним недопалом та ін. Основне завдання при експлуатації – зниження цих втрат до мінімуму. Тепловим балансом котлоагрегату називається розподілення тепла використаного палива на корисно використане тепло і теплові втрати. Тепловий баланс складається на 1 кг твердого (рідкого) палива або на 1 м³. газоподібного палива. Значення коефіцієнта корисної дії існуючих котлоагрегатів знаходиться в межах 70–93%.

Автоматизація котельних може бути повною, комплексною, частковою. При повній автоматизації функції персоналу зведені до періодичного нагляду за роботою обладнання. При комплексній автоматизації обслуговуючий персонал постійно наглядає за роботою обладнання. При частковій автоматизації автоматизовано окремі агрегати. Функції системи управління: вимірювання і контроль, сигналізація, управління, безпека і захист. Звичайно, вимірюються: температура, тиск, різниця тисків, витрати, кількості і рівні рідини, склад продуктів згорання (газоаналізатори, киснеміри та ін.).

Автоматичне регулювання котлів. Об'єм автоматики регулювання котла визначається проектною організацією в кожному конкретному випадку, в залежності від продуктивності, технології і режиму роботи.

Як правило, на котлах регулюються процес горіння і живлення котла водою. Автоматичне регулювання процесу горіння включає:

- регулювання подачі палива в залежності від продуктивності котла;
- підтримання оптимального співвідношення палива і повітря;
- підтримання заданого розрідження в топці.

Автоматичне регулювання живлення парового котла водою полягає в підтриманні рівня в барабані котла. Рівень в барабані котла підтримується від нижнього робочого рівня (НРР) до вищого робочого рівня (ВРР). Досвід автоматизації котельних показує, що автоматичне регулювання котла дозволяє: досягти економії палива; збільшити ККД котла; зменшити витрату електроенергії на тягу і дуття; зменшити об'єм ремонтних робіт; полегшити роботу і зменшити кількість обслуговуючого персоналу.

Особливість роботи котла як об'єкта регулювання в наявності двох режимів горіння палива: режиму "малого" горіння і режиму "великого" горіння. В простих системах регулювання, досягнення верхнього заданого значення температури нагріву води викликає перехід в режим "малого" горіння, з падінням температури води нижче нижнього заданого значення включається режим "великого" горіння. Таким чином, якщо температура знаходиться в заданому діапазоні, то включені разом клапани "малого" і "великого" горіння. Регулювання теплової потужності пальника виконується в діапазоні від 40% до 100%. Стандартна система автоматики котла виконує команди:

- сигнал на зупинку котла;
- сигнал на пуск котла;
- сигнал відкриття регулюючих органів на "велике" горіння;
- сигнал відкриття регулюючих органів на "мале" горіння.

4.2.2. Математична модель оптимізації розподілу навантаження

В розділах 2, 3 розглянуті, запропоновані і досліджені методи розподілу ресурсу або навантаження між паралельно працюючими елементами і певні підходи до реалізації систем управління розподілом. Застосуємо тепер ці методи і підходи до задачі оптимального управління системою котлоагрегатів.

Використовуємо метод оптимального агрегування – замінюємо систему паралельно працюючих елементів еквівалентним елементом. Оптимальну виробничу функцію та функцію оптимального розподілу ресурсу знаходимо за допомогою методу агрегування (підрозділ 2.6). На рис. 4.9 та 4.10 подано схеми вихідної та еквівалентної систем управління.

Декомпозиція задачі оптимального управління на задачі управління

при високих навантаженнях і управління при малих навантаженнях. Розподіл задачі між регулятором стабілізації заданого навантаження і регулятором оптимального розподілу навантаження. Такий підхід застосовано для задачі розподілу навантаження між хімічними реакторами (підрозділ 2.3).

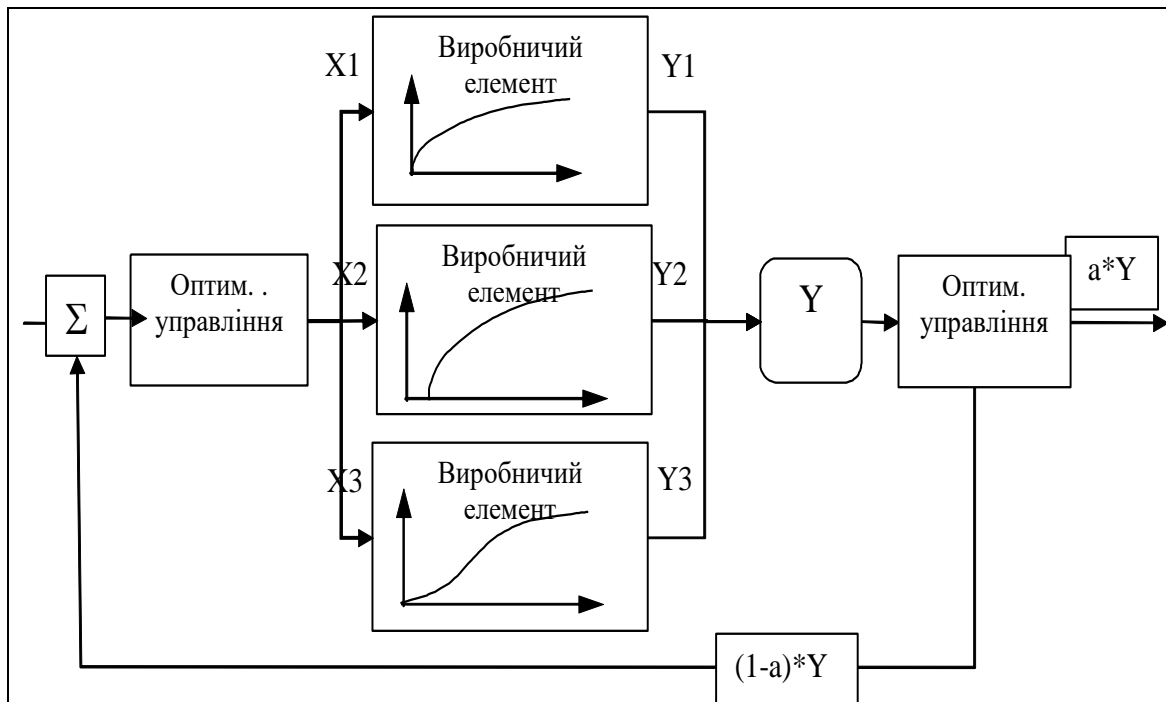


Рис. 4.9. Схема системи з елементами, що працюють паралельно

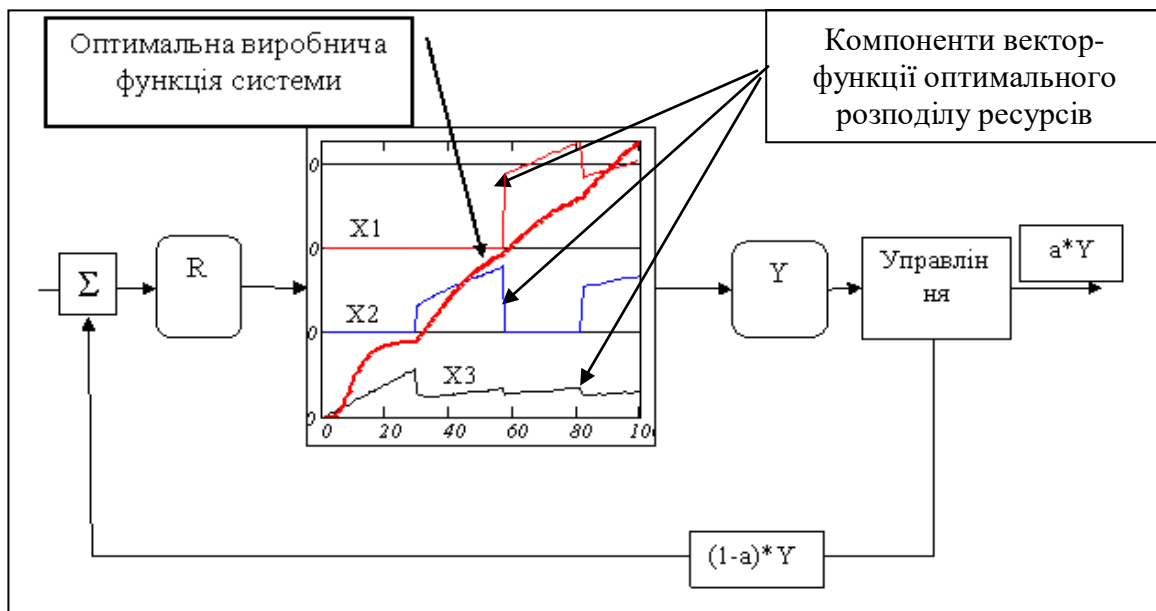


Рис. 4.10. Схема еквівалентної оптимальної системи

Вбудовування контура ідентифікації. Вибір системи з двома регуляторами фактично створює умови для роботи такого контура –

регулятор стабілізації заданого сумарного навантаження – генерує тестові, а регулятор оптимізації розподілу оцінює поточні реакції елементів на тестову дію. Базова модель узагальненої виробничої функції (ВФ) котлоагрегату. Характерна особливість залежності "подача палива – теплова потужність" – наявність режиму малого горіння і конструктивні обмеження максимальної подачі палива.

В першому наближенні вважаємо, що існує мінімальна подача палива, нижче якої котлоагрегат непрацездатний та максимальна припустима подача палива. В діапазоні між цими значеннями вважаємо ВФ випуклою (вгору). В цілому, за рахунок "зони нечутливості" в області малих потрібних навантажень узагальнена виробнича функція котлоагрегату буде невивуклою. Тому функція оптимального розподілу ресурсу для системи котлоагрегатів буде розривною. Саме тому ми розбиваємо задачу оптимального управління на дві задачі.

Задача управління при високих (номінальних) навантаженнях виконується в повністю автоматичному режимі, ВФ котлоагрегатів в цьому діапазоні є випуклими – функція оптимального розподілу неперервна. В цьому режимі, можлива точна ідентифікація параметрів ВФ, прецизійний розподіл навантаження між котлоагрегатами і отримання економії палива порядку 1–2% але протягом тривалих періодів.

Задача управління при малих навантаженнях пов'язана з відключеннями та включеннями окремих котлоагрегатів, що потребують досить великих експлуатаційних витрат та витрат часу. Наприклад, при короткочасному падінні навантаження нерационально повністю відключати певний котлоагрегат. Тому розумно, щоб в цих випадках система працювала в режимі порадника оператора, який на базі свого досвіду, інтуїції та нормативних документів приймає рішення про включення/виключення. В цьому режимі можна отримати теж помітну економію, що залежить від характеру коливання навантаження на систему теплопостачання.

Однак, в підрозділі 2.3 розглядається підхід до моделювання розподілу на базі нечіткої логіки з введенням функції штрафу за раптові переключення елементів. На базі цього підходу можна побудувати чисто автоматичну систему.

Для поданої вище постановки задачі розроблено програмне забезпечення для моделювання системи оптимального управління.

На рисунках 4.11–4.14 подано приклади розрахунку оптимальних моделей виробничих функцій та функцій оптимального розподілу ресурсу для системи з чотирьох котлоагрегатів.

Можемо бачити потенційну економію при малих і середніх навантаженнях. Для оцінки реальної економії потрібно знати

тривалості режимів з малими навантаженнями. При коротких спадах навантаження витрати на відключення та включення котлоагрегату можуть перевищити економію. Це окрема задача, що базується на збиранні та інтерпретації статистики навантаження, виявленні добових, тижневих, сезонних трендів та ін.

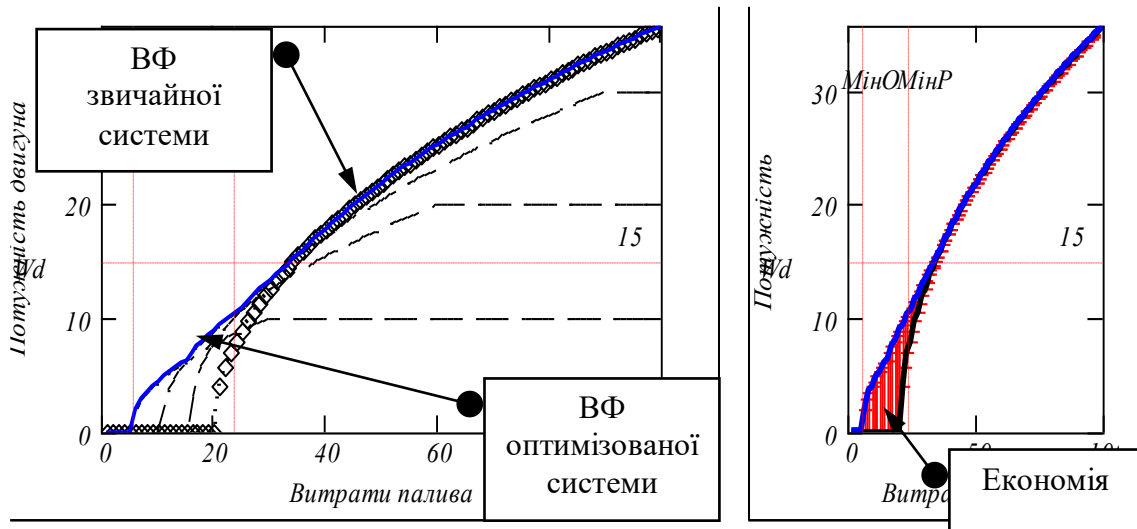


Рис. 4.11. Порівняння виробничих функцій системи при рівномірному і оптимальному розподілах ресурсу

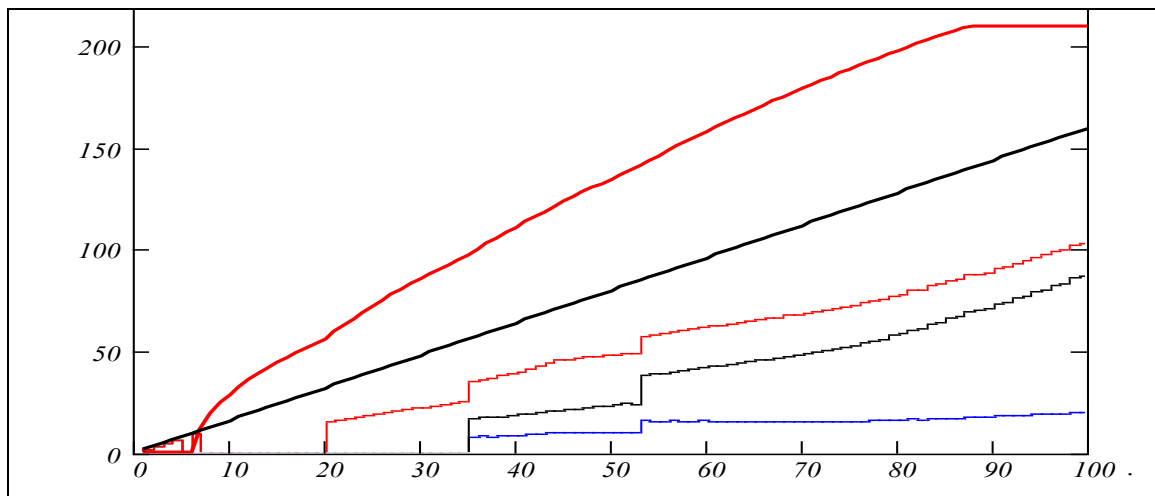


Рис. 4.12. Функція оптимального розподілу ресурсів для системи котлоагрегатів. Приклад

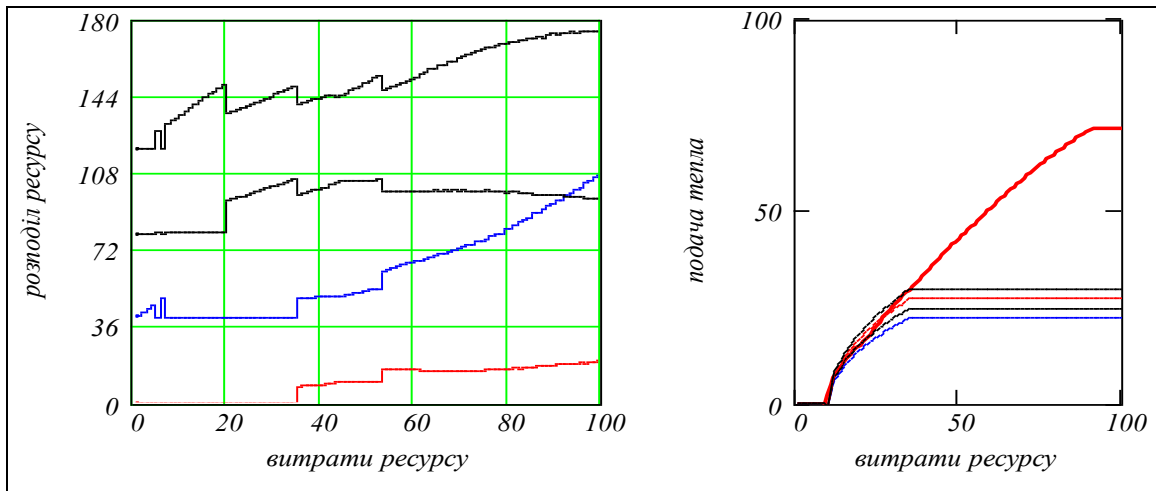


Рис. 4.13. Оптимальний розподіл для системи з невіпуклими функціями

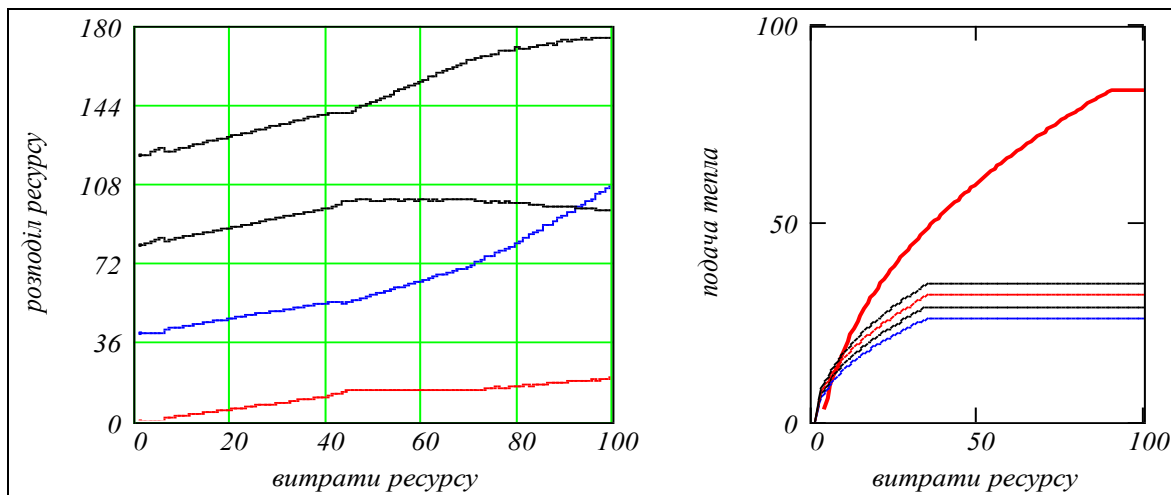


Рис. 4.14. Оптимальний розподіл для системи з випуклими функціями

Проведено дослідження на моделі системи управління розподілом навантаження для різних режимів динаміки навантаження, невизначеностей ВФ елементів.

Оптимальне управління майже не вносить додаткових ускладнень в існуючі системи регулювання котлів і потенційно може бути узгоджене з вимогами безпеки котельних агрегатів і систем. Оптимальне управління для випадку невіпуклих і негладких функцій виробництва (ФВ) має розриви. Обчислення таких управлінь не створює проблем для метода оптимального агрегування.

Проблеми виникають при спробах реалізації оптимальних управлінь. Яскравий приклад ускладнень – п'ятдесят років спроб ввести двигуни із змінним числом працюючих циліндрів. Однак це не означає, що задовільного способу реалізації оптимального розподілу ресурсу при невіпуклих ФВ не існує. В наступному розділі розглянуто введення

нечіткої логіки для обмежень за рівнем і розподілом навантаження для "пом'якшення" негативних ефектів розривних управлінь.

4.3. Розробка системи програм для аналізу впливу невизначеностей

В попередніх підрозділах ми розглянули теоретичні основи і практичні аспекти задачі розподілу ресурсу. В цьому розділі будемо робочі модулі системи для комплексного дослідження задач розподілу на базі методу оптимального агрегування при наявності невизначеностей.

Мета цього розділу – розробка робочих модулів для швидкого і зручного виконання операції знаходження оптимальної виробничої функції та функції оптимального розподілу ресурсу для виробничих систем з довільними елементами, що працюють паралельно та комплексний аналіз впливу розкидів параметрів (що буде якщо аналіз, what if analysis).

Цей підрозділ є відображенням відповідного документа електронної книги. Там для зручності користувача, крім посилань і гіперпосилань, подано цілісний – лінійний текст з стислим викладенням основ методу оптимального агрегування.

4.3.1. Теоретичні основи задачі оптимізації розподілу ресурсу

Пряма задача – максимізація сумарного виробництва при обмеженні ресурсів. Розглядається система з N виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількості x_i і виробляють продукцію у кількостях: $y_i = f_i(x_i); i = 1..N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу.

Треба розподілити ресурс R так, щоб максимізувати сумарне виробництво:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \Rightarrow \max ; \text{ при умові}$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i - R = 0 . \text{ Змінні управління – } x_i$$

Спряжена задача – мінімізація сумарних витрат при обмеженні рівня сумарного виробництва. Розглядається та ж система з N виробничих елементів. *Треба розподілити навантаження Y_s так, щоб мінімізувати сумарні витрати:*

$$Gs(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow \min; \text{ при умові}$$

$$Fs(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N fi(x_i) - Ys = 0.$$

Змінні управління – x_i , або $y_i = fi(x_i)$.

Методи розв'язання. Подаємо список альтернативних методів визначення оптимального розподілу ресурсу.

1. Метод невизначених множників Лагранжа.
2. Метод виключення змінних.
3. Пошукові методи, в тому числі "штучні нейронні мережі" та ін.
4. Методи на базі нечіткої логіки.
5. Методи на базі відкритого управління (метаігровий синтез).
6. Методи на базі агрегування виробничих функцій.

Кожен з цих методів має свої переваги і недоліки. Якщо вибирати з цих методів кращий, то слід вибрати усі методи і застосовувати комплексно. Однак, метод оптимального агрегування має унікальну особливість – він малочутливий до розмірності задачі і придатний для довільних виробничих функцій елементів.

Розширення задачі. Перший крок в методі оптимального агрегування – розширення класичної задачі. Введемо вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$, $0 \leq R \leq Rmax$, де $Rmax$ – максимальне значення обмеження. Це вектор-функція, компоненти якої задають оптимальний за критерієм сумарного виробництва розподіл заданої кількості ресурсу. Функція $Dop(R)$ для припустимих виробничих функцій має такі очевидні властивості:

$$\sum_{i=1}^N Dop(R)_i = R - \text{баланс ресурсу}; Dop(R)_i \geq 0; i \in 1, \dots, N.$$

Введемо *оптимальну виробничу функцію* системи

$$Yop(R) = \sum_{i=1}^N fi(Dop(R)_i).$$

Функція $Yop(R)$ для кожного значення обмеження по ресурсу R задає максимальну продуктивність перетворення ресурсу в продукт. Тепер ми можемо записати формулювання розширеної оптимізаційної задачі. *Задано N виробничих функцій, адитивне обмеження по ресурсу і адитивний критерій – сумарне виробництво; треба знайти оптимальну виробничу функцію системи $Yop(R)$ і вектор-функцію оптимального*

розподілу ресурсу $Dop(R)$.

Що дає нам це ускладнення задачі? – Потрібний рівень сучасних виробництв може суттєво і швидко змінюватись (попит, конкуренція, технічний прогрес та ін.), тому бажано завчасно обчислити оптимальні розв'язки для всіх можливих значень обмеження R . Обчислювальні ресурси сьогодні дешеві.

Суттєва перевага розширення задачі нелінійного програмування – зменшення загального обсягу обчислень: функції оптимального розподілу мають певні закономірності і для їх побудови буває досить обчислити декілька "обломних" точок. Однак, розширення задачі тільки перший крок до радикального зменшення обсягу обчислень.

Наступний крок: перехід до безрозмірних змінних управління. Замість змінних управління x_1, x_2, \dots, x_N введемо безрозмірні змінні

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$:

$$\alpha_1 = x_1 \div R; \quad \alpha_2 = x_2 \div R.$$

Змістовно, ці змінні – частки ресурсу для відповідних елементів, очевидно, що сума цих часток дорівнює одиниці. Нагадаємо, що одну змінну управління завжди можна виключити з урахуванням обмеження на сумарну витрату ресурсу. На рис. 4.15 для випадку системи з двох елементів подано графіки для двох альтернативних наборів змінних.

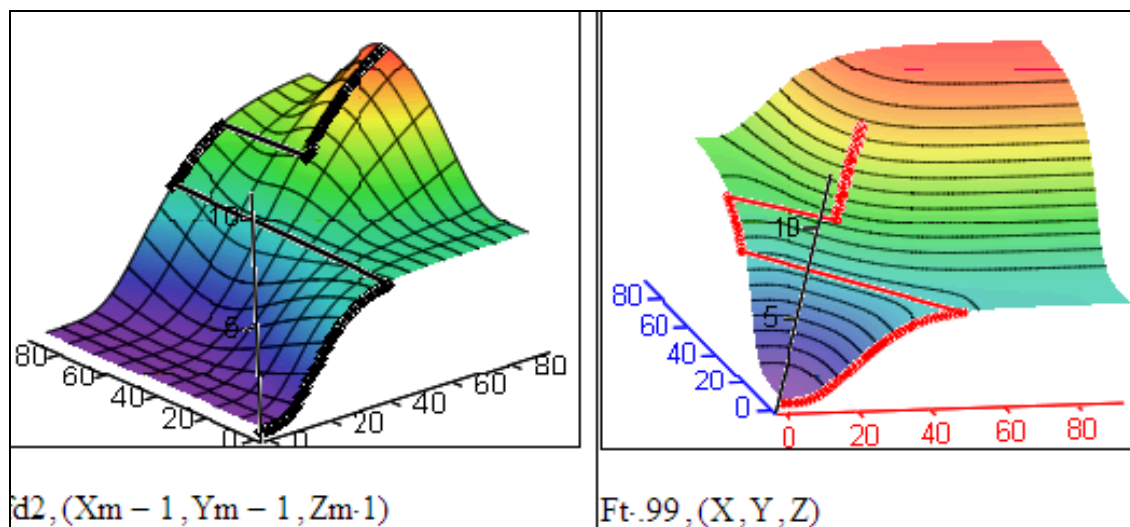


Рис. 4.15. Два варіанти вибору змінних управління

Ліворуч в координатах "обсяг ресурсу" – "пропорція розподілу" подано цільову функцію системи та годограф точок оптимального розподілу; праворуч подано ті ж самі функції, але в координатах "ресурсів 1-му" – "ресурсів 2-му".

Така формальна заміна дозволяє довести, що оптимальна виробнича функція буде підмножиною Парето певних виробничих функцій

елементів системи.

Бібліотека типових виробничих функцій. Створюємо "бібліотеку" (математичних моделей) типових виробничих функцій. $ORIGIN := 1$;

Ступенева $F1(x, A, w, s) \equiv 1A \cdot x^{10w}$

Логарифмічна $F2(x, A, w, s) \equiv 1.5A \cdot \ln(x + 1)$

Експоненційна $F3(x, A, w, s) \equiv 10 \cdot A \cdot (1 - e^{-w \cdot x})$

Увігнуто-випукла (S-функція) $F4(x, A, w, s) \equiv 10 \cdot A \cdot (1 - e^{-w \cdot x})^s$

Лінійна з обмеженням, лінійна з обмеженням і порогом витрат функції:

$$F5(x, A, w, s) := \begin{cases} 10w \cdot x & \text{if } 10w \cdot x < 10A \\ 10A & \text{otherwise} \end{cases} ;$$

$$F6(x, A, w, s) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 2s \\ 10Aw \cdot (x - 2s) & \text{if } 0 \leq x - 2s < 1 \div w \\ 10A & \text{otherwise} \end{cases} ,$$

Ступінчаста (прирошення виробничих потужностей дискретними одиницями)

$$F7(x, A, es, ls) := 10 \min(\text{trunc}(x \div ls) \cdot es \cdot ls, A)$$

де x – обсяг ресурсу; $Ar := 8$; $wr := 0.04$; $sr := 10$ – параметри функцій $F1$ – $F6$; A – максимальне значення амплітуди; es – ефективність інвестиції; ls – величина "кванта інвестування" (вартість "верстата") – параметри ступінчастої функції.

4.3.2. Логіка методу оптимального агрегування

Введемо множину α -функцій (див. підрозділи 2.4, 2.6)

$$f\alpha(f1, f2, \alpha, x) := f1(\alpha \cdot x) + f2[(1 - \alpha) \cdot x]$$

Оптимальна виробнича функція системи з двох елементів буде підмножиною Парето системи функцій $f\alpha(f1, f2, \alpha, x)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, тобто результатом застосування операції $\max(\dots)$, яка є асоціативною і комутативною. Майже очевидно, що для виробничої системи з критерієм "сумарне виробництво", оптимальна виробнича функція $FopN(f1, f2, \dots, fN)$ має властивість

$$Fop3(f1, f2, f3) = Fop2(f1, Fop2(f2, f3)),$$

що є наслідком виконання принципу оптимальності (у Беллмана принцип оптимальності застосовується в часі – по кроках процесу, а в нашому випадку – в просторі, по елементах системи).

Модуль оптимального агрегування двох елементів.

Спеціальності для вищої освіти і дисертацій нарізані дрібно і

жорстко. Програмування відрізано від моделювання, інформаційні технології – від прикладного системного аналізу. Сьогодні більшість актуальних теоретичних і практичних задач вимагають занадто повної інтеграції, не тільки на рівні творчих колективів, але і на рівні індивіда. В інших галузях діяльності людини це називається "тримати козири в одній руці". В методі оптимального агрегування неможливо розділити за окремими завданнями, задачами, підсистемами теоретичні і практичні аспекти. Модуль оптимального агрегування – центральний елемент методу. На рис. 2.18 подано версію модуля. В цьому підрозділі розглянемо стисло логіку функціонування модуля як перетворювача інформації з урахуванням обмежень і можливостей сучасних програмно-апаратних засобів.

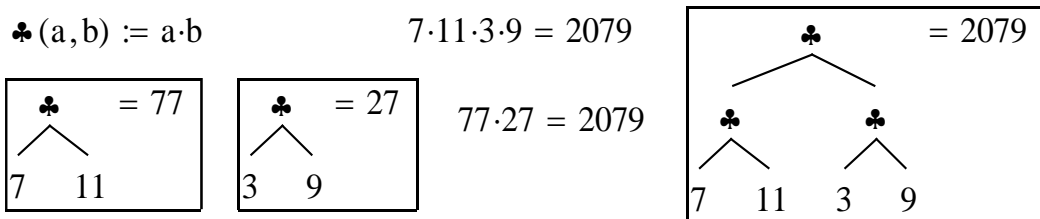
Бачимо такі альтернативи передачі вхідних даних в модуль агрегування:

а) модуль бере пару неперервних функцій і повертає неперервні функції;

б) бере пару дискретних функцій і повертає дискретні функції.

Орієнтація на векторизацію обчислень диктує вибір повністю дискретного варіанту б). Цей вибір, в свою чергу диктує вибір форми подання виробничих функцій елементів у вигляді матриць, стовпці яких послідовно подають значення ВФ і оптимальний розподіл ресурсу між елементами, що "породжують" цю ВФ. Існує декілька альтернатив організації передачі даних в модуль оптимального агрегування: виробничих функцій елементів, кількості точок дискретизації, діапазону значень ресурсу.

Нагадаємо що загальнозрозумілою, очевидною і коректною аналогією бінарної операції оптимального агрегування є множення декількох чисел:



В методі оптимального агрегування робиться теж саме (з точки зору алгебри), однак над складнішими об'єктами.

Отримання оптимальної функції розвитку системи. Подаємо приклад побудови інтерфейсу. Для вибраної версії реалізації методу оптимального агрегування необхідно подати ВФ в дискретному вигляді як певні масиви. Робимо це. Задаємо:

- діапазон зміни обмеження по ресурсу $R_{ma} := 150$;
- кількість точок обчислення ФР $K_{to} := 200$;

- крок квантування ресурсу $dx := Rma \div Kto$;
- ранжовану змінну $n := 1..Kto$;
- формальну функцію оптимального розподілу ресурсу в одноелементній системі $r0_n := 1$ (очевидність: в системі з одного елемента весь ресурс віддається цьому елементу).

Зона введення параметрів елементів системи (для прикладу – шість елементів)

$$\begin{array}{llll}
 A1 := 1. ; & W1 := 0.3 ; & S1 := 6 ; & A2 := 1.2 ; & W2 := 0.16 ; & S2 := 6 ; \\
 A3 := 1.4 ; & W3 := 0.10 ; & S3 := 6 ; & A4 := 1.6 ; & W4 := 0.06 ; & S4 := 6 ; \\
 A5 := 1.6 ; & W5 := 0.03 ; & S5 := 8 ; & A6 := 1.7 ; & es := 0.03 ; & ls := 1
 \end{array}$$

Формуємо відповідні масиви. Спочатку дискретизуємо виробничі функції – подаємо їх векторами значень

$$\begin{array}{ll}
 fo1_n := F4(n \cdot dx, A1, W1, S1); & fo2_n := F4(n \cdot dx, A2, W2, S2); \\
 fo3_n := F4(n \cdot dx, A3, W3, S3); & fo4_n := F4(n \cdot dx, A4, W4, S4); \\
 fo5_n := F4(n \cdot dx, A5, W5, S5); & fo6_n := F4(n \cdot dx, A6, W6, S6).
 \end{array}$$

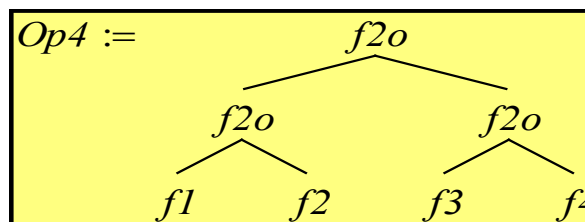
"Приклеюємо" до векторів значень ВФ вектори з пропорціями розподілу

$$\begin{array}{ll}
 f1 := augment(fo1, r0); & f2 := augment(fo2, r0); \\
 f3 := augment(fo3, r0); & f4 := augment(fo4, r0); \\
 f5 := augment(fo5, r0); & f6 := augment(fo6, r0).
 \end{array}$$

Можна в це дерево додавати функції розвитку – скільки потрібно. Якщо треба. Запишемо формулу агрегування в звичайній формі:

$$Ops3 := f2o(f1, f2o(f2, f3))$$

і в структурній:



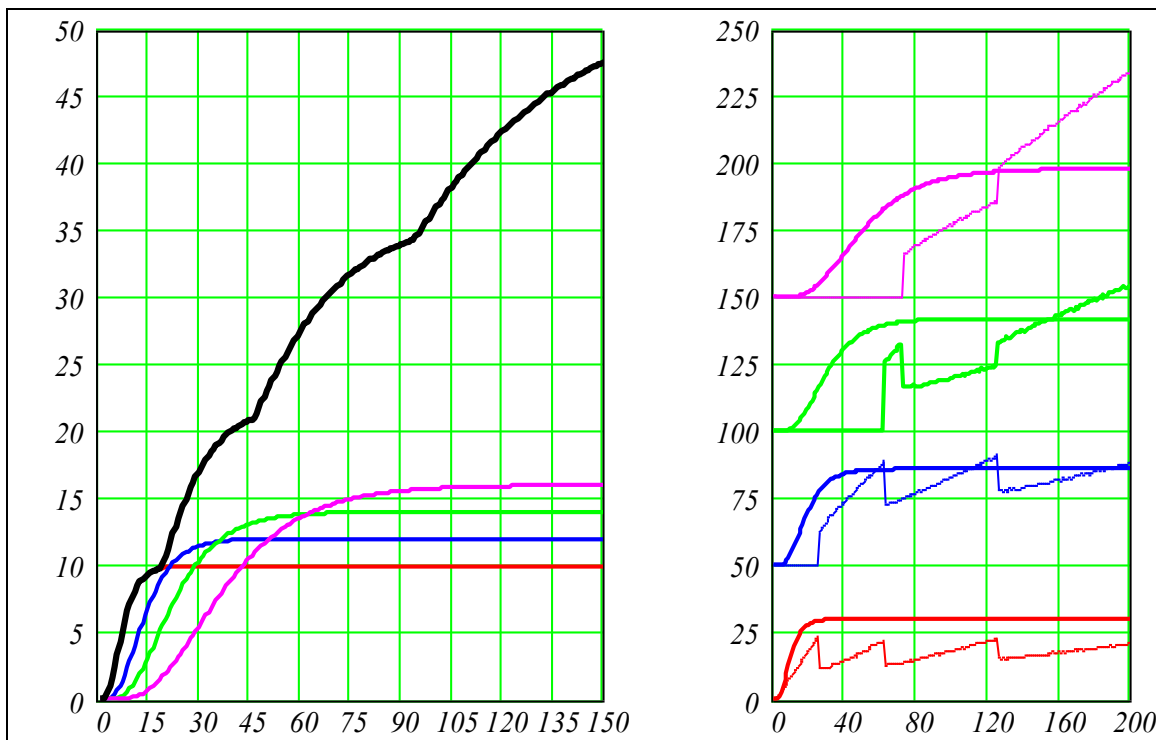
Працюючи в середовищі математичного пакета документ легко доповнювати і редагувати. Якщо треба змінити число елементів у виробничій системі додаємо розгалуження, для зменшення – видаляємо.

Обчислимо необхідні дані для побудови графіків в прирощеннях

$$\begin{array}{l}
 Re1_n := Op4_{n,3} \cdot n \cdot dx; \\
 Re2_n := (Op4_{n,2} + Op4_{n,3}) \cdot n \cdot dx; \\
 Re3_n := (Op4_{n,2} + Op4_{n,3} + Op4_{n,4}) \cdot n \cdot dx.
 \end{array}$$

Дивимось на структурну формулу (Op4) і виводимо її компоненти. Бачимо, що оператор оптимального агрегування – бінарний, він бере пару ВФ і повертає ВФ і масив функцій оптимального розподілу, теж заданих векторами. Будуємо оптимальну виробничу функцію та виробничі функції окремих елементів. Такий підхід має, крім конкретних переваг в обсязі обчислень, *методологічну перевагу*: ми замінюємо складну, багатовимірну, систему еквівалентною одновимірною. Такий підхід застосовується в теорії управління (еквівалентні передаточні функції), електротехніці (еквівалентні чотирьохполюсники).

Головний пункт в моделюванні, без якого все інше нічого не варте – довести задачу до рівня робочої моделі, що дозволяє отримувати результати в числовому чи символічному вигляді. На рис. 4.16 подана заключна частина інтерфейсу – графічна. Компоненти вектор-функції оптимального ресурсу подані в двох варіантах – в абсолютних і відносних величинах (нижній графік).



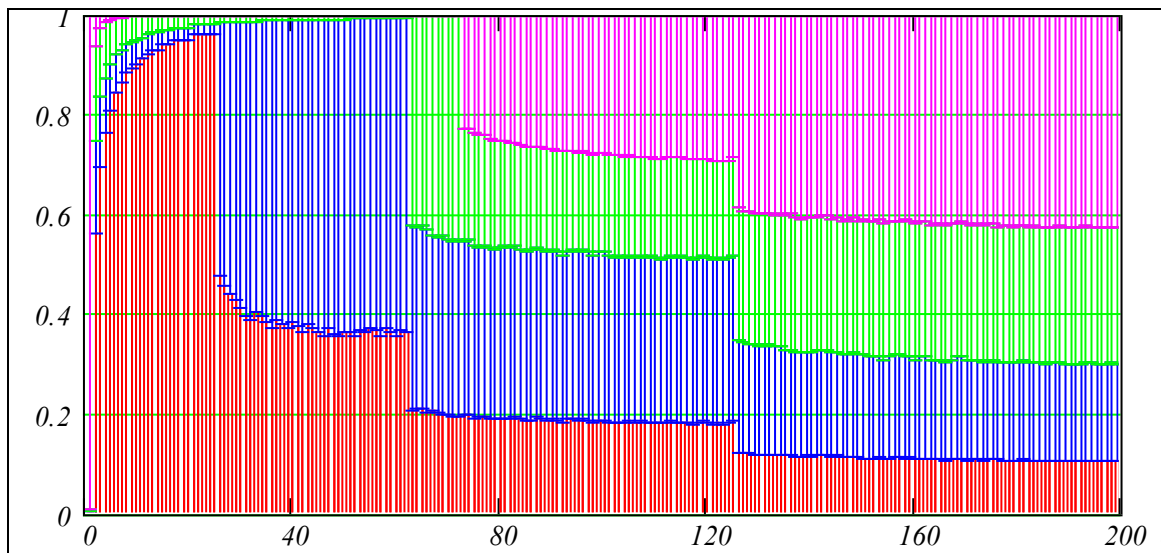
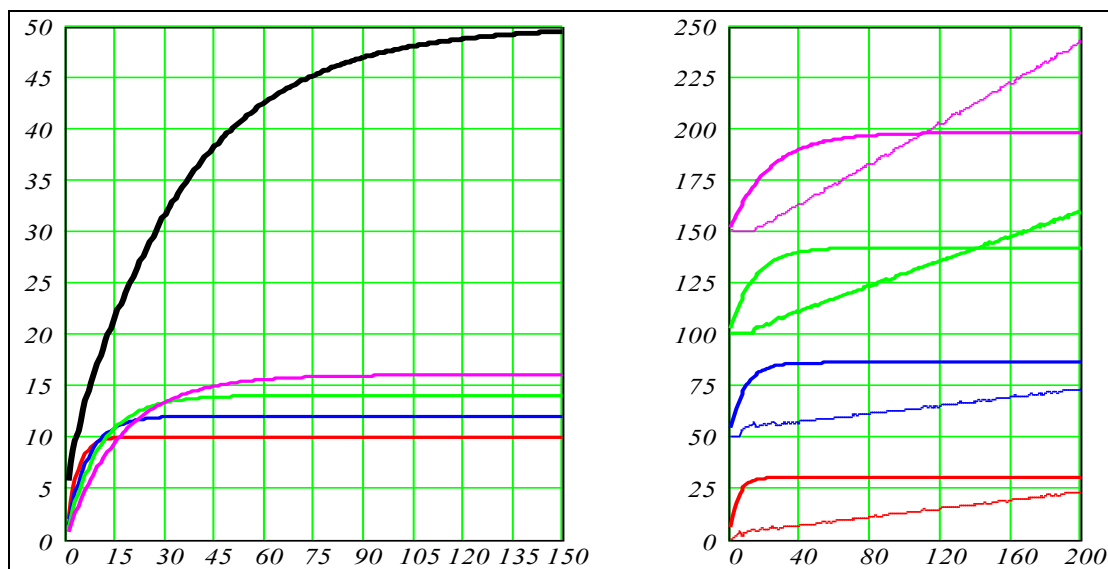


Рис. 4.16. Стенд – оптимальне агрегування виробничих функцій елементів виробничої системи. Приклад невіпуклих ВФ

Підсистема для оптимального агрегування дозволяє оперативно отримувати відповіді на будь які "синтаксично коректні запитання" – обчислювати оптимальні розподіли ресурсу для довільних наборів узагальнених виробничих функцій. Наприклад, можливо швидко дослідити властивості класів виробничих систем, розглянутих в підрозділі 1.3. Змінюємо параметри $S1 = 1$, $S2 = 1$, $S3 = 1$, $S4 = 1$ і отримуємо оптимальний розподіл для системи з випуклими функціями (рис. 4.17).

Графічне подання оптимальних розв'язків для задач лінійного програмування з випуклими функціями вражає диспропорцією між обсягом наукових досліджень в цьому секторі науки і простотою результатів.



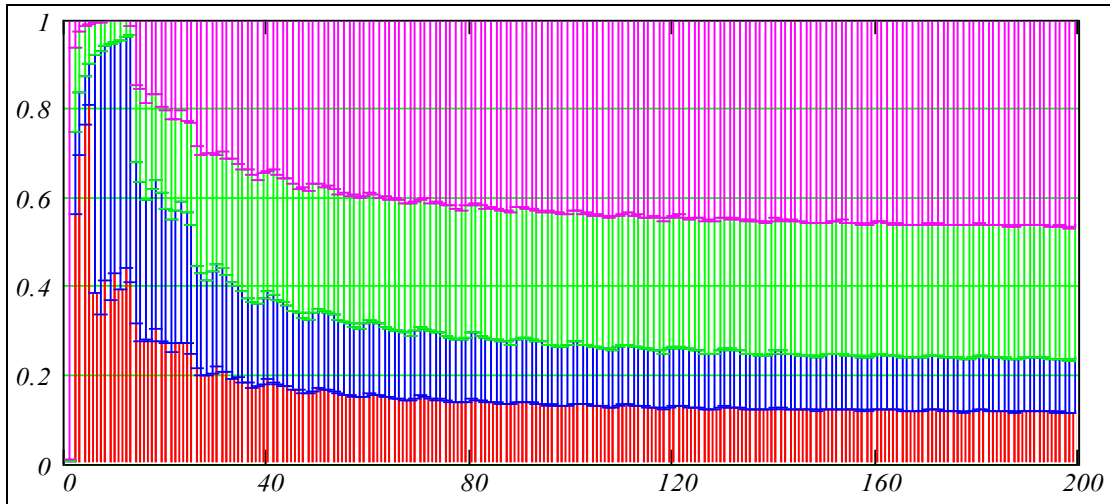


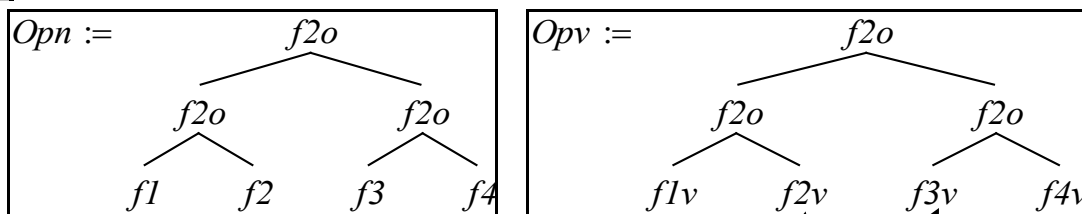
Рис. 4.17. Стенд – оптимальне агрегування виробничих функцій елементів виробничої системи. Приклад випуклих ВФ

Між іншим, головне в застосуванні математичних пакетів в розробці математичних моделей і моделюванні не підвищення продуктивності, а можливості захисту від помилок. Нижче подано приклад (тривіальний) контролю коректності виразів (формул, систем рівнянь, програм). Перше „=” – логічне, друге „=” – виведення результату – пропозиція про еквівалентність двох виразів – істина.

$$\left(f2o(f2o(f1, f2), f2o(f3, f4)) = \begin{array}{c} f2o \\ / \quad \backslash \\ f2o \quad f2o \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ f1 \quad f2 \quad f3 \quad f4 \end{array} \right) = 1$$

Неважно тепер модифікувати попередній модуль для аналізу впливу розкиду параметрів. На рис. 4.18 подано приклад побудови модуля що буде якщо аналізу.

Вводимо варіації "амплітуди": $VA := 0.9$ та "увігнутості": $VS := 1.5$ ціни ресурсу $Cin := 0.00$ обмеження по ресурсу $resurs = 100$ (там нижче).



142
Такі ВФ елементів і розкиди породжують саме такі оптимальні ВФ

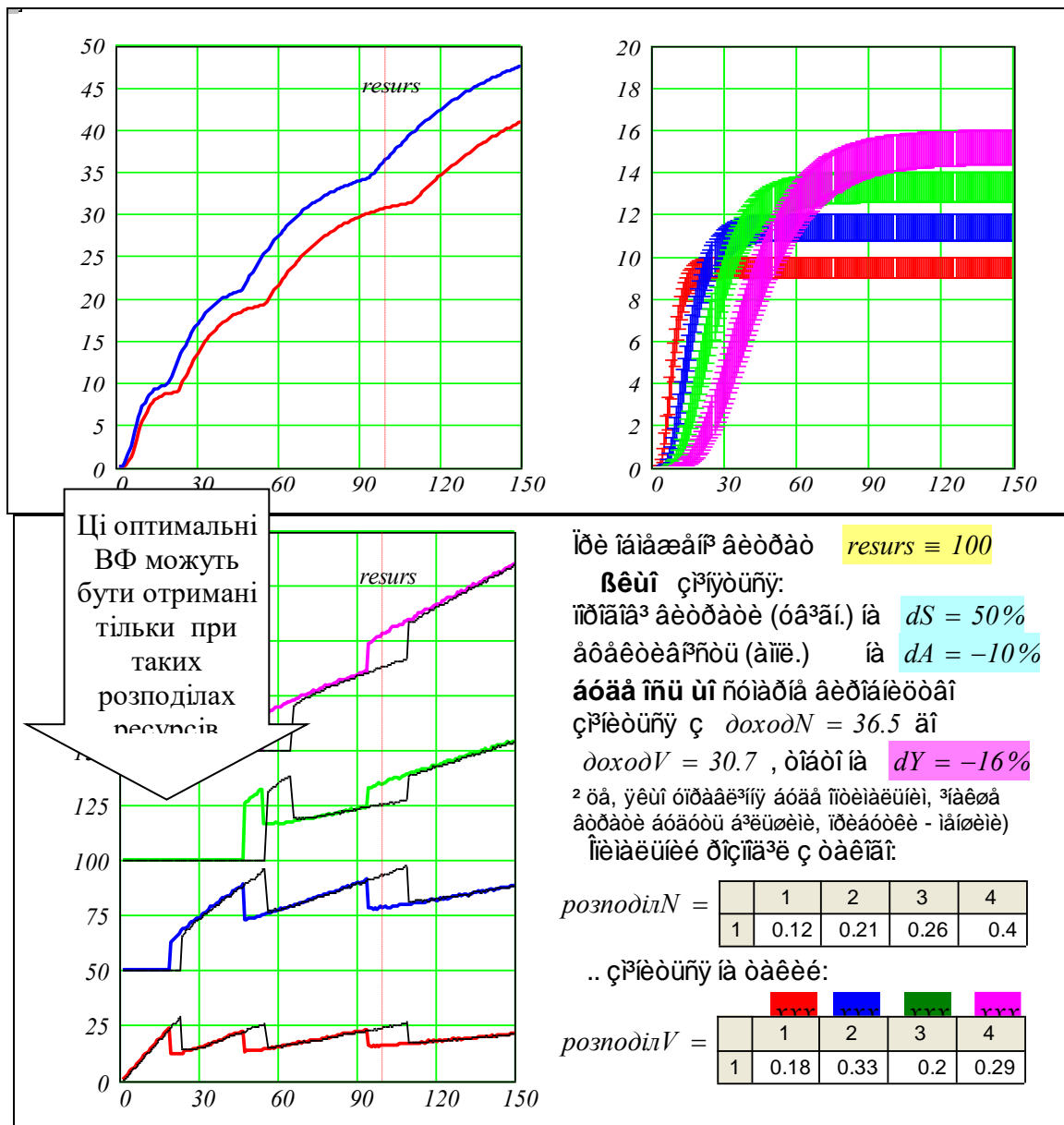


Рис. 4.18. Стенд – аналіз впливу розкидів ВФ елементів на оптимальні розподіли ресурсу. Приклад

Звернемо увагу на те, що розкид вихідних показників обчислювався при умові, що для збуреного процесу відхилення параметра відоме, що дає можливість розраховувати оптимальний розподіл. Висока обчислювальна ефективність методу дозволяє безпосередньо обчислювати вплив розкидів. Аналогічно можна побудувати документ для ризик-аналізу – оцінки впливу випадкових відхилень параметрів з відомими частотними розподілами.

4.4. Розробка системи програм для аналізу оптимальних процесів розвитку

Сучасні виробничі системи майже не мають стаціонарних режимів – вони знаходяться в неперервних процесах розвитку, в умовах глобальних конкуренції і співробітництва. Ці зміни вимагають адекватних засобів – математичних моделей і методів для прогнозування і планування процесів розвитку.

Тому сьогодні актуальні задачі оптимізації процесів розвитку виробничих систем. Задачі управління розвитком, де шукається не одна точка оптимального управління, а певна функція – оптимальна стратегія відноситься до класу варіаційних задач. Метод оптимального агрегування дозволяє побудувати ефективні методи розв'язання задач такого класу.

Постановка проблеми. Сучасна виробнича система випускає одночасно декілька груп виробів. Життєві цикли виробів досить короткі. Тому природно оперативно розподіляти ресурси багатопродуктового виробництва так, щоб до кінця життєвого циклу – "планового періоду" отримати максимум накопиченого доходу. Цю задачу поставив фінансист Г. Марковиц, а ретельно дослідив математик Р. Беллман. Глибока помилка класифікувати цю задачу як економічну – це задача проектування технічних систем і теорії управління, тому що сьогодні проектування певного виробу повинно включати проектування його життєвого циклу.

Дійсно, у свій час почав стрімко рости ринок мобільного зв'язку. Корпорації пропорційно нарощували виробничі потужності. Сьогодні головна частка незаповненого ринку мобільних телефонів залишилась в Китаї. Ринки в розвинених країнах існують тільки за рахунок гонки певного частки користувачів за швидкоплинною модою на мобільники. Подобається нам, чи ні, оптимальне управління процесами розвитку і складовою проектування виробничих систем і виробів.

Р. Беллман досліджував задачу розподілу тільки як задачу розвитку за рахунок власних ресурсів. Однак, для урахування жорстких реалій коротких життєвих циклів та "ринкових вікон" необхідне розширення класичної задачі Марковиця–Беллмана – урахування тимчасового використання зовнішніх ресурсів. Також необхідні методи оптимізації певним чином інваріантні до розмірності виробничої системи та виду узагальнених виробничих функцій – *функцій розвитку* (ФР), що характеризують віддачу інвестицій в розвиток певного виробу.

Відомі розв'язки варіаційної задачі розвитку є неефективними у випадку системи високої розмірності з довільними функціями віддачі інвестицій елементів системи – окремих виробництв. Відомі спрощення моделі – лінійні, випуклі, гладкі функції розвитку є фактично "прокрустізацією" практичної задачі до можливостей існуючих аналітичних і числових методів оптимізації.

Цілі розробки – створення ефективних моделей і методів для оптимізації і моделювання задач розвитку – точних і одночасно "нечутливих" до розмірності задачі і виду ФР. Під ефективними моделями розуміються працездатні і відлагоджені програми та інтерфейси, що дають правдоподібні результати.

Постановка задачі. У виробничій системі виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$. Задано: рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = \text{fin}(y(t)_i, i), \quad i = 1.. N; \quad \text{критерій} \quad JN = \int_0^T xs(t) \cdot unak(t) dt,$$

де $xs(t) = \sum_j x(t)_j$ – сумарний темп виробництва; $\text{fin}(y(t)_i, i)$ – функція

розвитку i -го виробництва, що характеризує ефективність перетворення ресурсу у виробничі потужності; $unak(t)$ – управління, що визначає частку ресурсів виділену в накопичення, в розвиток йде

$urzv(t) = (1 - unak(t))$ частка ресурсу; $y(t)_i$ – об'єм ресурсів на розвиток i -го виробництва.

Потрібно визначити стратегію розвитку, що максимізує критерій. Це варіаційна задача з $N+1$ змінними (якщо врахувати ще кредити).

Розв'язання задачі. Задача була радикально спрощена без втрати адекватності моделі за рахунок:

- введення безрозмірних змінних управління;
- розширення обмеження $urzv(t) + unak(t) \leq 1$ функцією штрафу, що враховує кредити;
- агрегування функцій розвитку елементів в *оптимальну функцію розвитку виробничої системи*;
- декомпозиція оптимізаційної задачі на:
 - а) задачу розподілу ресурсу між інвестиціями і накопиченням;
 - б) задачу розподілу інвестицій між окремими виробництвами;
- вибір методу принципу максимуму Л. Понтрягіна для розв'язання варіаційної задачі розподілу ресурсу між інвестиціями і накопиченням.

Обчислювальна суть методу принципу максимуму в тому, що задача знаходження екстремуму інтегрального функціоналу замінюється задачами знаходження екстремуму (максимуму) функції Гамільтона на кожному кроці процесу. Тобто, для дискретизованої задачі розвитку, ми замінюємо задачу знаходження екстремуму функції N змінних (N – число кроків процесу розвитку) на N задач знаходження екстремуму функції однієї змінної

Відзначимо, що задача б) – заміна розподіленої виробничої системи еквівалентною одновимірною, може виконуватись незалежно

від задачі а). В підрозділі 3.3 ми розглянули практичні аспекти оптимального агрегування. Розглянемо коротко розв'язання варіаційної задачі розвитку методом принципу максимуму.

Розв'язання задачі оптимізації розвитку. Маємо розподілену виробничу систему, де виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ (одиниць вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = \text{fin}(y(t)_i, i) = \text{fin}[x_s(t) \cdot (\alpha \cdot u)_{i,i}], \quad (4.12)$$

де $\text{fin}(y(t)_i, i)$ – функція розвитку (ФР) для i -го виробництва, що належить до класу нестрого монотонно зростаючих функцій; $x_s(t) = \sum_j x(t)_j$ – сумарне виробництво в момент t ; $0 \leq \alpha \leq 1$ –

управління, що визначає розподіл ресурсу між розвитком і накопиченням; $0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управління, що визначають частку ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей по i -му продукту. Для управлінь виконується умова нормування: $\sum_j u(t)_j = 1$. Вибрані нами управління безрозмірні.

Виходячи з можливості агрегування, розглядаємо далі одновимірну задачу. Розмірні управління будуть:

$$y(t)_i := x_s(t) \cdot \alpha \cdot u_i - \text{ресурс в розвиток};$$

$$z(t) := x_s(t) \cdot (1 - \alpha) - \text{ресурс в накопичення}.$$

Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку, що максимізує сумарний накопичений випуск за певний плановий період T

$$JN = \int_0^T x_s(t) \cdot (1 - \alpha) dt. \quad (4.13)$$

Інтерпретація параметра T – плановий період, момент переходу на інший виріб, іншу технологію виробництва. Формально маємо варіаційну задачу із змінною управління α .

Точне розв'язання задачі розвитку. В [16, 18, 24] наведено точне розв'язання оптимізаційної задачі методом принципу максимуму. Головна перевага принципу максимуму в тому, що він працює при довільних обмеженнях на управління.

Наближене розв'язання задачі. Варіаційні методи не є повсякденним інструментом для більшості спеціалістів. Певні моменти там є дійсно важкими, доступними вузькому колу математиків. Однак, на підставі чисто логічних міркувань можна сконструювати функцію-

індикатор $H_i(x, \alpha)$, яка є оцінкою залежності прирощення критерію J від поточного управління $\alpha(t)$ та поточного стану $x(t)$ виробничих потужностей. Частка ресурсу виділена в накопичення дасть прирощення критерію

$$S1 = x(t) \cdot (1 - \alpha).$$

Оцінка прирощення продукції, що можна отримати до кінця процесу буде

$$S2 = \Delta x \cdot (T - t) = \text{fin}(x(t) \cdot \alpha(t)) \cdot (T - t)$$

Це додатковий ресурс, який можна на наступних кроках використати для накопичення і розвитку. Адекватна точності вхідних даних оцінка прирощення критерію J критерію буде $S2$. Тоді маємо

$$H(x, \alpha) = S1 + S2 = x(t) \cdot (1 - \alpha(t)) + \text{fin}(x(t) \cdot \alpha(t)) \cdot (T - t) \quad (4.14)$$

Узагальнення задачі оптимізації розвитку – використання зовнішніх ресурсів. Високі технології, глобалізація економіки вимагають високих темпів розвитку виробничих систем. Для потенційно ефективного виробництва критичне значення має швидкість його розвитку від лабораторного експерименту до масового виробництва, від початку будівництва до початку випуску продукції. В сучасних організаціях паралельно виконуються десятки проектів. Ці проекти звичайно знаходяться на різних стадіях розвитку життєвого циклу. В таких умовах є можливість залучати тимчасово ресурси одного виробництва для розвитку іншого. Такі процеси тимчасового залучення зовнішніх ресурсів призведуть до тривіальних обчислювальних і нереалістичних техніко-економічних результатів, якщо не ввести правила повернення зовнішніх ресурсів. Введемо додаткову змінну управління – темп "кредитів" $xkr(t)$, тоді доступний обсяг поточних ресурсів буде $x_s(t) = x(t) + xkr(t)$ (потім додамо з мінусом сплату боргу).

Функція Гамільтона для випадку використання "кредитів" (коротка назва зовнішніх ресурсів) приймає вигляд:

$$Hki(x_s, xkr, \alpha) = x_s \cdot (1 - \alpha) + \text{fin}(x_s \cdot \alpha) \cdot (T_p - t) - xkr \cdot [1 + pr \cdot (T_p - t)].$$

Можна подати цей вираз в альтернативній формі

$$Hki(x_s, xkr, \alpha) = [x_s \cdot (1 - \alpha) - xkr] + (\text{fin}(x_s \cdot \alpha) - pr) \cdot (T_p - t).$$

Отримали задачу з двома змінними управління α та xkr .

Агрегування функцій розвитку. Запишемо функцію Гамільтона для випадку багатовимірної виробничої системи

$$Hka(x, \alpha, u) = xs \cdot (1 - \alpha) + \left(\sum_{j=1}^N fin(xs \cdot \alpha \cdot u_j)_j \right) \cdot (Tp - t) + zp(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tp - t)]$$

Вираз у великих дужках визначає сумарне поточне прирощення темпу виробництва. Незалежно від того, якою буде частка ресурсу для розвитку, розподіл ресурсу між окремими виробництвами повинен бути оптимальним.

Запишемо локальну задачу оптимізації в стандартному вигляді. Введемо означення: $R = xs \cdot \alpha$, $r_i = R \cdot u_i$, $i = 1..N$. Задаємо:

– обмеження на управління $0 \leq u_j \leq 1$;

– цільову функцію N змінних $F(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{j=1}^N fin(r_j)_j$;

– обмеження по ресурсу $G(r_1, r_2, \dots, r_N) = R - \sum_j r_j = 0$.

Треба знайти розподіл (r_1, r_2, \dots, r_N) , що дає максимум цільової функції та задовольняє обмеження. Будемо шукати не одне розв'язання для конкретного значення обмеження R , а функціональну залежність $Dop(R)$ – функцію оптимального розподілу ресурсу. Деякий компонент вектор-функції $Dop(R)_j$ визначає залежність оптимального для i -го елемента системи обсягу ресурсу від загального обмеження по ресурсу.

Визначимо оптимальну функцією розвитку

$$Fop(R) := \sum_{j=1}^N fin(Dop(R)_j)_j.$$

Числовими методами оптимізації завжди можна обчислити функції $Fop(R)$ та $Dop(R)$:

$$Hka(x, \alpha) = xs \cdot (1 - \alpha) + Fop(xs \cdot \alpha) \cdot (Tp - t) + zp(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tp - t)].$$

Чи отримуємо ми якісь переваги, від того, що попередньо обчислюємо функції $Fop(R)$ та $Dop(R)$. Припустимо, що для задовільної точності треба обчислити ці функції в $K1$ точках діапазону визначення функцій розвитку. Тобто нам необхідно $K1$ раз розв'язати задачу знаходження екстремуму функції $(N - 1)$ змінної. Екстремум функції Гамільтона знаходиться для $K2 = Tp \div \Delta T$ моментів часу процесу, де Tp – плановий період; ΔT – крок обчислень.

Розробка програмної системи для оптимізації і моделювання. Програмна система складається з модуля оптимального агрегування

(розглянутого в підрозділі 3.3) та модуля оптимізації і моделювання процесу розвитку.

Модуль оптимального агрегування бере ФР усіх елементів і повертає оптимальну ФР системи і відповідний розподіл ресурсу.

Модуль оптимізації і моделювання бере оптимальну функцію розвитку та параметри процесу моделювання (плановий період, кількість кроків, ставка кредиту та ін.) і повертає масив векторів стану системи. Модуль визначення оптимальної стратегії розвитку вбудований в програму моделювання процесу розвитку виробничої системи. На кожному кроці процесу обчислюється стан системи:

управління – u_k (частка ресурсу в розвиток);

темп виробництва – x_k (одиниць продукції за одиницю часу);

темп накопичення – z_k (одиниць накопичень за одиницю часу).

Запишемо рівняння для визначення компонентів вектора стану

$$1) x_{k+1} = x_k + \text{fin}(x_k \cdot u, \text{параметри}) \cdot \Delta t ;$$

$$2) z_{k+1} = x_{k+1} \cdot (1 - u_{k+1}) ;$$

$$3) sn_{k+1} = sn_k + z_{k+1} \cdot \Delta t ;$$

$$4) ud_k = \frac{x_k + sn_k}{x_k} ; 0 \leq u \leq \text{"без обмеження"}$$

$$5) ex_k = (u_k - ud_k) \cdot x_k \cdot [(u_k - ud_k) > 0]$$

$$6) u_{k+1} = \max_u(H(x, u)) ;$$

$$7) H(x_k, u_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + \text{fin}(x_k \cdot u_k) \cdot (Tp - t) - ex(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tp - t)]$$

На кожному кроці управління визначається із умови максимуму функції $H(x, u)$. В програмну систему входять сервісні модулі – дезагрегування, обчислення інтегральних показників процесу та ін.

Базовий інтерфейс (рис. 4.19) побудовано як відображення логічної структури задачі: вхідні дані, результат агрегування, оптимальний процес розвитку, показники оптимального процесу розвитку.

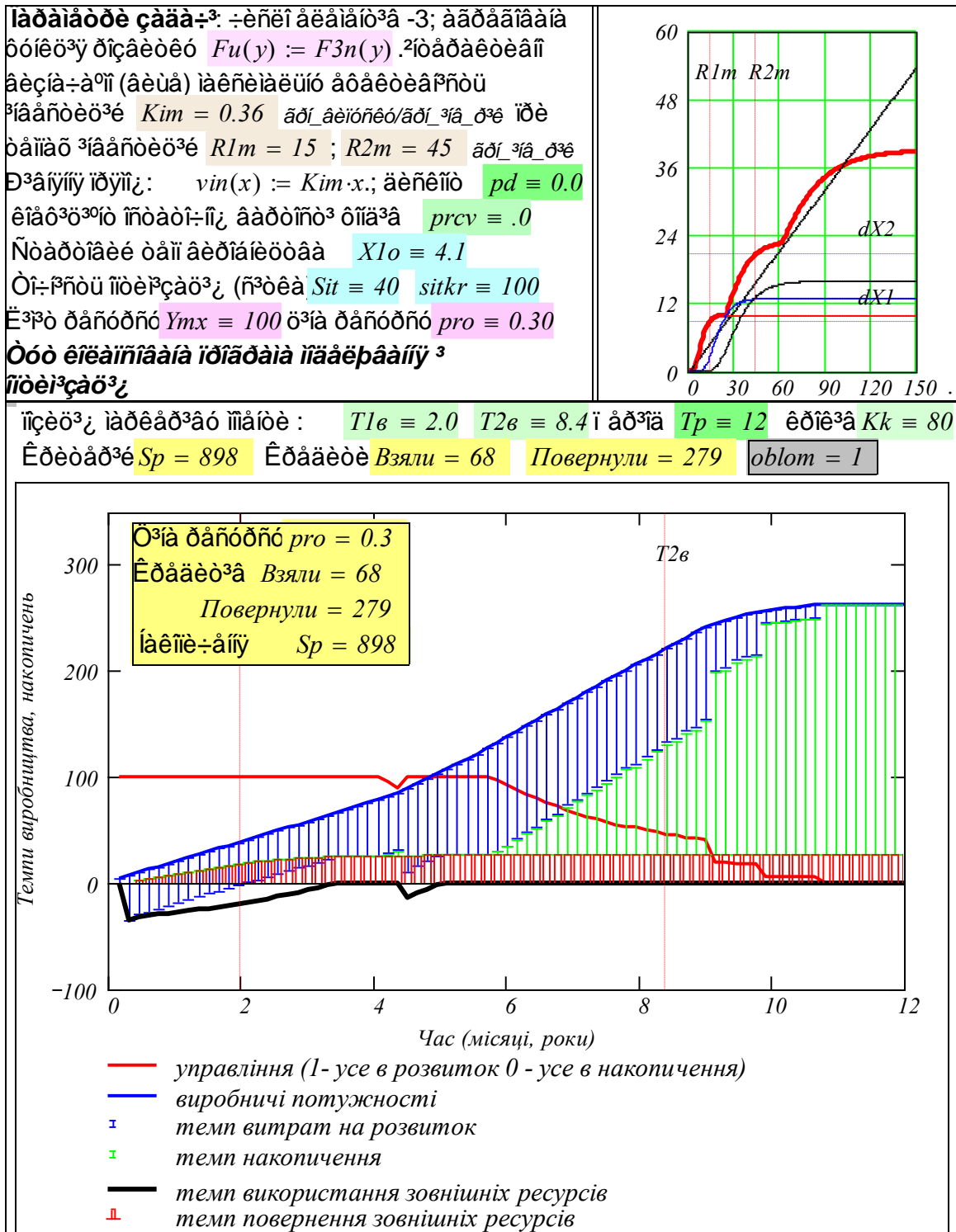


Рис. 4.19. Головний інтерфейс програми моделювання та оптимізації процесу розвитку

Крім основного інтерфейсу (рис.4.19) сформовані модулі для аналізу розподілу ресурсу, що виділений для розвитку, між окремими виробництвами, і для аналізу динаміки окремих виробництв.

Ми вибрали таку схему розв'язання задачі оптимального розвитку:

1) визначаємо оптимальну функцію розвитку системи і відповідну вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу (метод оптимального агрегування);

2) визначаємо оптимальний процес розвитку для еквівалентної одновимірної системи (метод принципу максимуму);

3) визначаємо оптимальний розподіл поточного ресурсу, виділеного для розвитку, між елементами системи.

Назвемо останню операцію дезагрегуванням. Ця операція порівняно з першими є чисто рутинною. На рис. 4.20 подано текст версії модуля дезагрегування. Модуль бере масив *opa* – вихід процедури оптимального агрегування (структура вихідного масиву на рис. 2.19) та вектор інвестицій *invr* – результат роботи програми оптимізації і моделювання, а повертає розподіл ресурсу (розмірний) на розвиток між елементами системи для кожного кроку процесу.

$OpDr(opa, invr) :=$	$N \leftarrow cols(opa)$ $ops \leftarrow submatrix(opa, 1, Kto, 2, N)^T$ $for\ k \in 1..Kk$ $\left \begin{array}{l} ind \leftarrow \min[\max[round[(invr_k \div dx), 0], 1], Kto] \\ rore^{(k)} \leftarrow ops^{(ind)} \end{array} \right.$ $stm \leftarrow invr$ $for\ q \in 2..N - 1$ $stm \leftarrow augment(stm, invr)$ $drdr \leftarrow \overrightarrow{(stm \cdot rore^T)}$ $drdr$
----------------------	--

Рис. 4.20. Текст версії модуля дезагрегування

В програмі дезагрегування максимально використані вбудовані функції пакета. Останній вираз – векторизована операція визначення масиву вихідних даних. На рис. 4.21 подано приклади розподілів для випадків невіпуклих і випуклих ФР елементів, *це кінцевий результат: оптимальні стратегії розвитку розподіленої системи*. Можемо бачити складний характер функцій цього розподілу – з декількома розривами для невіпуклих ФР, і простий розподіл для випадку випуклих ФР. Графіки розподілу мають "зубчастий" характер – це результат

використання примітивних алгоритмів дискретних обчислень кусково-неперервних залежностей.

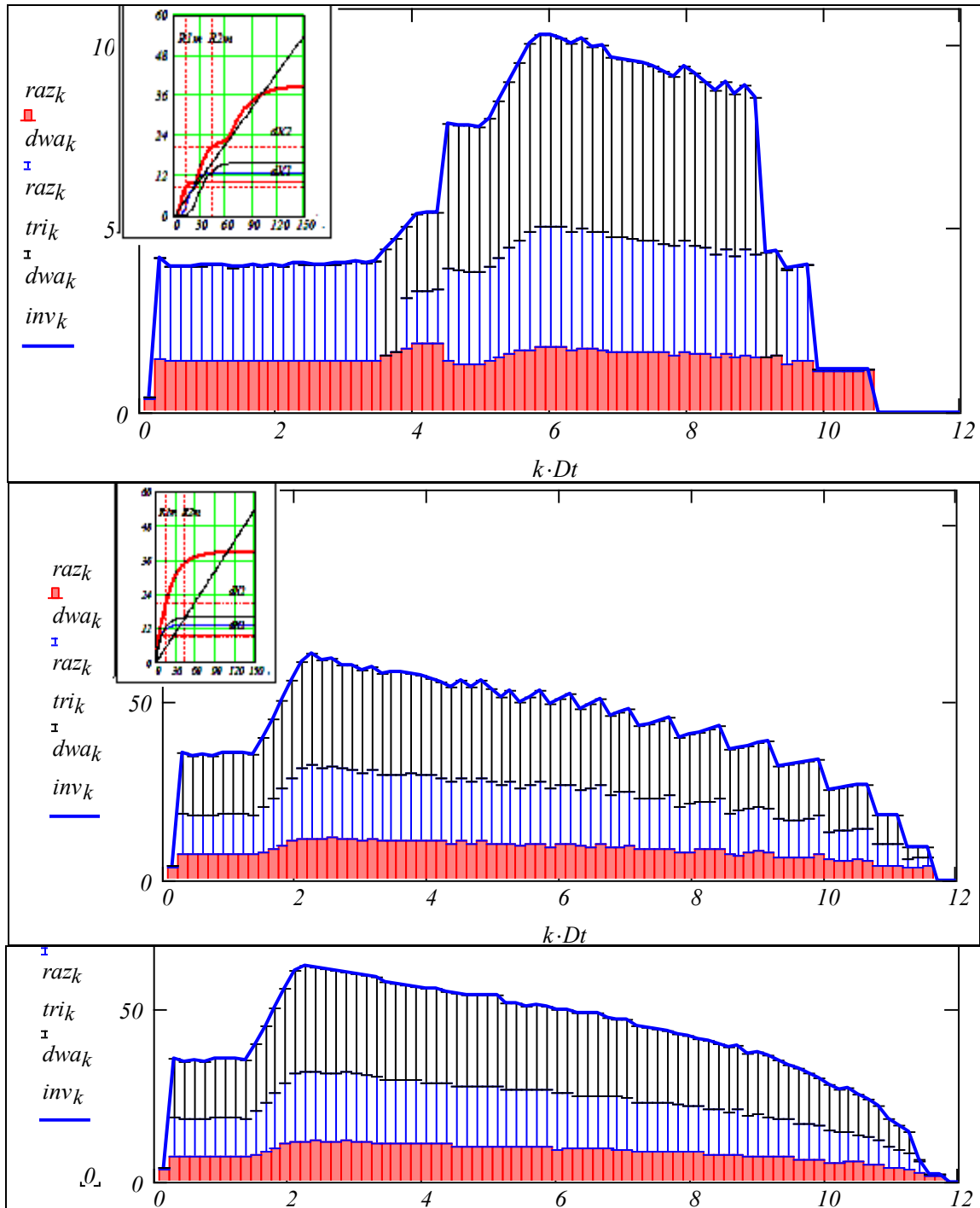


Рис. 4.21. Розподіл ресурсу, виділеного для розвитку, між окремими виробництвами

Можливі три альтернативи усунення цього недоліку:

а) зменшити крок обчислень (на рис. 4.21 подано результат зменшення кроку вдвічі);

б) застосувати апостеріорно, для вже обчислених результатів стандартні методи згладжування, сплайн апроксимації;

в) розробити інтелектуальні алгоритми, пам'ятаючи, що вони скоріше за все будуть непрацездатними в точках розривів і зламів.

Такі оптимальні управління є складними для практичної реалізації. Однак, можна знайти зручні для реалізації "згладжені" наближення управління, гірші від оптимальних всього на 2–5%.

Перший крок до отримання наближених управлінь – візуальний аналіз функції Гамільтона. Для цього розроблено відповідний модуль. На рис. 4.22 подано (тривимірним графіком) еволюцію функції Гамільтона в часі. Також подано траєкторію максимумів та кредитну стратегію (темпи кредитів і повернення боргів). Нижче ті ж самі залежності подано як контурні графіки – це "вид з гори". Бачимо складну структуру функції Гамільтона, що обумовлює складну структуру оптимальних управлінь.

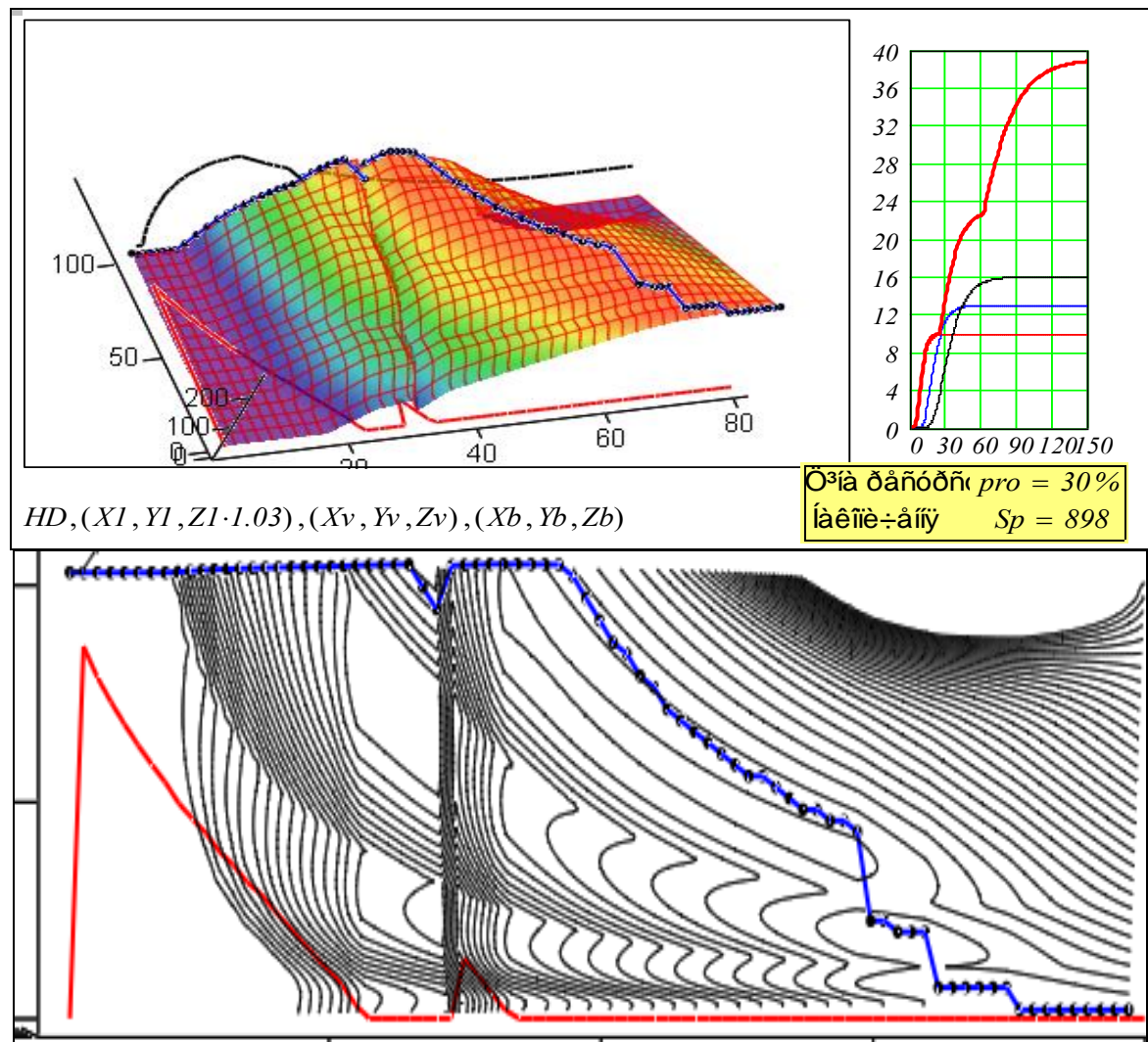


Рис. 4.22. Приклад еволюції функції Гамільтона. Невипуклі ФР

Загальне враження – не віриться, що оптимальна стратегія розвитку така складна? Ми вибрали критичний режим. Між іншим, у відомих книжках з менеджменту і маркетингу, в розділах, де розглядається стратегічне управління все це описано так, як людина без освіти описувала посадку сучасного лайнера, за результатами тривалих спостережень. На рис. 4.23 подано для порівняння еволюцію функції Гамільтона для системи з випуклими ФР елементів.

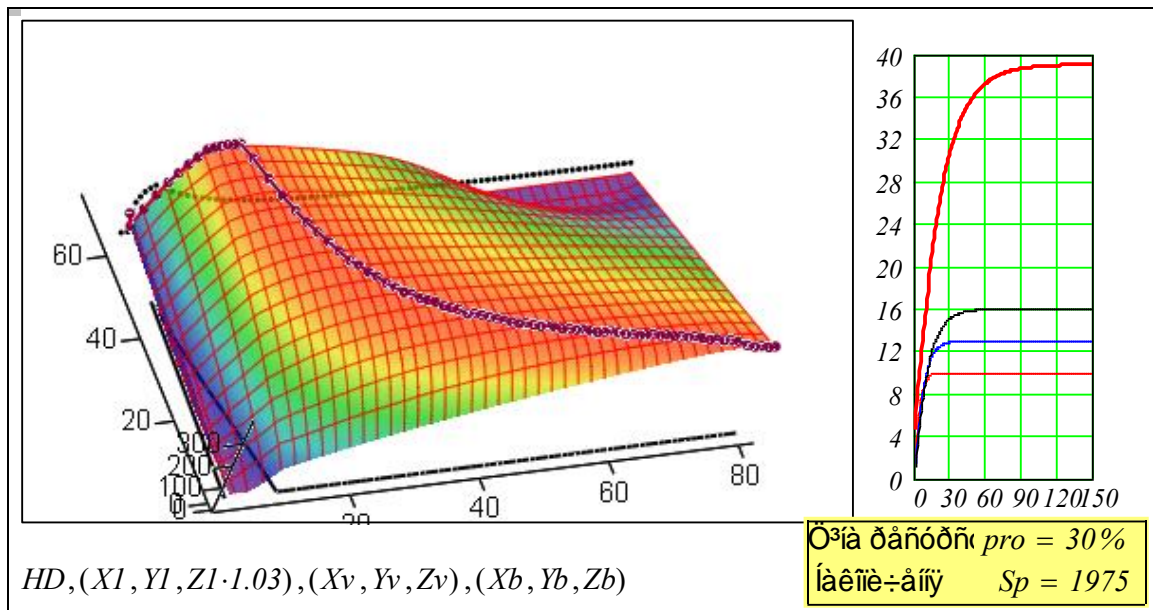


Рис. 4.23. Приклад еволюції функції Гамільтона. Невипуклі ФР

4.5. Розв'язання задачі оптимізації розвитку мережевих систем

Мета наступного прикладу – продемонструвати застосування теоретичних результатів до "незручних" задач. Суть прикладу – розробка програмних систем – "інструментів", за допомогою яких спеціаліст організації зміг би для конкретних даних конкретної задачі отримати розподіл навантаження, стратегію розвитку, промоделювати роботу розподіленої системи при змінному детермінованому чи стохастичному навантаженні.

Ці програмні системи зроблені на базі теоретичних результатів розділів 2 – 3. Функції програмної системи не зводяться до деякого разового розрахунку за деякими даними – "контрольного експерименту". Призначення системи досить зручний і корисний "інструмент" для моделювання і аналізу процесів розвитку системи. Крім очевидних причин, такий підхід має ще одну причину – тотальну конфіденційність даних в умовах глобальної конкуренції. Тому системи для прогнозування, оптимізації і планування повинні бути персональними.

Опис задачі. Сьогодні неможливо розробляти технічні системи без урахування зворотних зв'язків: розширення, модифікації виробництва, створення нових виробів; у підсумку все це виконується за рахунок виробленої продукції чи послуг. Це не економіка: сьогодні, як і завжди, ідеал для технічних систем – замкнені екологічні системи.

Об'єкт практичного запровадження результатів досліджень – фірма "Радіо" була започаткована двома інженерами з нульовими власними ресурсами. Розвиток почався з великого займу на тиждень (під 90% річних) під конкретний проект. В суворих умовах фірма виживає тільки завдяки тому, що постійно шукає нові напрямки діяльності – "проекти". Середня тривалість такого проекту – 2–5 років. Тому для фірми корисною є певна програма для прогнозування і моделювання розвитку проектів. На відміну від продуктів типу Project Expert, ця програма повинна бути орієнтована не на фінансово-юридичні аспекти, а інженерно-технічні, конструкторські. Фактично це задача прикладного системного аналізу, ядром якої є зручна модель процесу розвитку, зручний метод оптимізації і зручний інтерфейс з відкритими математичними моделями і процесами.

Відомі аналоги базуються на неадекватних реальності моделях лінійного програмування чи мережевих графіках. Далі розглядається система підтримки рішень, що побудована на базі результатів цього дослідження. Ця система не є разовим розрахунком для певних вхідних даних, а програмною системою для користувача з гарантованою коректністю математичної моделі. Користувач може не тільки змінювати дані, але й математичні моделі – для своїх конкретних задач. Одразу зауважимо, що така модель може бути застосована і для аналізу та оптимізації процесів розвитку електричних, теплоенергетичних, газових мереж різних масштабів – локальних, регіональних.

Змістова постановка задачі. Розглянемо задачі планування і прогнозування розвитку виробничих систем. Термін "виробництво" сьогодні є досить розмитим – це і матеріальне виробництво, і надання послуг, нарешті, це може бути інформаційне виробництво і виробництво знань. В нашому випадку "виробництво" – це надання інформаційних послуг, "розвиток виробництва" – прокладка комунікацій, встановлення відповідних вузлів інформаційної мережі – підсилювачів, ретрансляторів, комунікаційних модулів та ін.

Об'єкт прогнозування, оптимізації та планування – процеси розвитку мережевих систем типу: кабельне телебачення, телефонна мережа, доставка друкованої продукції та ін. На певній території (місто, регіон). На рис. 4.24 подано схему мережевої системи, як об'єкта розвитку.

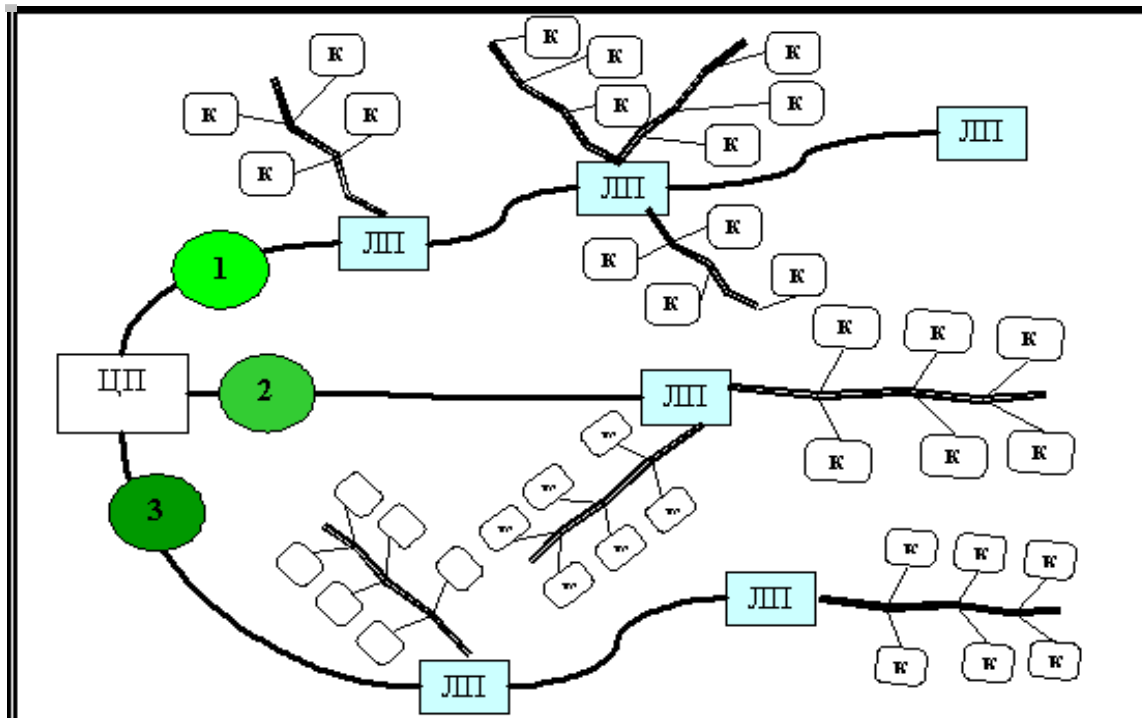


Рис. 4.24. Схема мережевої системи як об'єкта розвитку

Конкретизуємо базові поняття стосовно цієї задачі.

Ресурси – матеріальні, інформаційні, фінансові витрати в процесах виробництва та розширення і модернізації засобів виробництва. Власні і зовнішні ресурси – системно-аналітичні поняття, що залежать від того, як проводяться границі системи: власні ресурси – ті, що створені в межах системи.

Продукт – результат виробництва, що знайшов споживача, або внутрішнє використання: вироби, матеріали, послуги, інформація та ін. Сьогодні чисто виробничий, технологічний підхід, характерний для виробництва цукерок чи підшипників, поширюється на фінансово-економічні організації – банки, страхові, телекомунікаційні компанії вже не "надають послуги", а розробляють і продають певні "продукти" – види кредитування, способи зв'язку та ін. Причина – такий інженерний підхід є природним і конструктивним.

Виробничий елемент – певний територіальний напрямок розвитку мережі, виділена підсистема мережі.

Виробнича функція елемента – залежність між кількістю "продукту" і потрібними для цього ресурсами. Технічні та інші особливості обумовлюють поточну обмеженість максимального значення ВФ елемента (кількість абонентів, яку можна підключити до цього вузла).

Функція розвитку – залежність між обсягом ресурсів, що вкладаються в розширення виробничої потужності (максимального значення ВФ) і прирощенням виходу "продукції" (абонентів, від яких

йде абонентна плата).

Таким чином, "виробничий елемент" мережі має певний потенціал споживання послуги і певну віддачу. Для надання послуг потрібно прокласти комунікаційні лінії, пункти, засоби підключення клієнтів та ін. – створювати узагальнені засоби виробництва. Різні частини території характеризуються різною віддачею інвестицій в створенні фондів. Природна мета будь-якої виробничої системи – максимізація обсягу виробництва за певний "плановий період".

Плановий період – інтервал часу від початку розвитку до моменту, коли дане виробництво вичерпує свої можливості, замінюється принципово іншими за технологією і навіть за призначенням. Приклад: закінчення ери відеомагнітофонів, звичайних фотоапаратів та ін.

Коли визначені технології узагальненого виробництва і технології розширення виробництва, природно поставити задачу максимізації накопиченого прибутку за рахунок оптимального розподілу власних і зовнішніх ресурсів між накопиченням та розширенням виробництв, а також розподілу ресурсів між напрямками розвитку мережевої системи. Перша мета накопичення – створити ресурси для нових виробництв, нових проектів.

Критерій оптимізації – сумарне накопичення ресурсів за плановий період.

Мета розробки – програмна система моделювання процесів розвитку для підтримки рішень. На базі теоретичних моделей варіаційної задачі розподілу розробляємо інструмент, що дозволяє знаходити оптимальну стратегію управління процесом розвитку і одночасно моделювати цей процес розвитку. Моделювання процесу розвитку повинно, в певній мірі, замінити принципово відсутню статистику – сучасне виробництво має горизонт статистичного прогнозування 1–3 роки.

Формалізація задачі. Розглянемо типовий інвестиційний проект створення нового виробництва. Одним з вирішальних моментів проекту є початок виробництва: починається потік доходів. На етапі від початку виробництва до закінчення планового періоду існують дві проблеми – з якого стартового рівня починати виробництво і яку частку виробленого продукту вкладати в розширення виробництва в кожний момент часу? Остання проблема – це визначення оптимальної стратегії розвитку виробничої системи.

Маємо виробничу систему, де виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_l(t), x_N(t)$ (одиниць вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Темп виробництва – це синонім (поки вважаємо, що виробничі потужності

використовуються повністю) терміну виробнича потужність. Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt} x(t)_i = fin(y(t)_i, i) = fin(xs(t) \cdot u_i, i),$$

де $fin(y(t)_i, i)$ – функція інвестицій для i -го виробництва, що належить до класу функцій, що монотонно зростають; $xs(t) = \sum_j x(t)_j$, $j = 1..N$; –

сумарне виробництво (в грошових одиницях) в момент t ; $0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управління, змістовно, це частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється для розширення виробничих потужностей по i -му продукту.

Для управлінь виконується умова нормування: $\sum_j u(t)_j + unak(t) = 1$, де

$unak(t)$ – частка ресурсів, що йде в накопичення. Потрібно визначити стратегію інвестицій, що максимізує сумарне накопичення за певний період.

Модуль агрегування функцій розвитку. Обсяг обчислень швидко зростає з ростом розмірності задачі – кількістю виробничих елементів (або напрямків розвитку). Для зменшення обсягу обчислень можна застосувати інтелектуальні алгоритми – із змінним кроком, навчанням і гарантованим неуспіхом. Причина – дуже незручна функція Гамільтона – невіпукла, з чисельними локальними екстремумами, розривами. Згідно з методикою, запропонованою в розділі 2, виконуємо декомпозицію задачі на дві: а) послідовність одновимірних задач обчислення функції розвитку та відповідної вектор-функції оптимального розподілу ресурсу на базі методу оптимального агрегування, б) одновимірну задачу розподілу ресурсів в часі між розвитком та накопиченням. На рис. 4.25 подано результат агрегування.

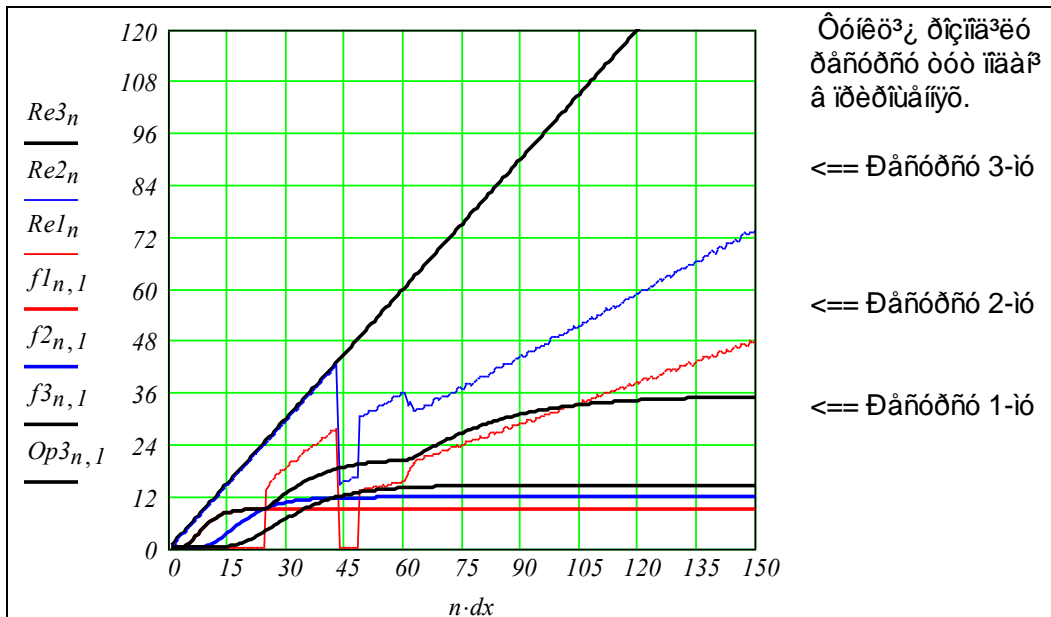
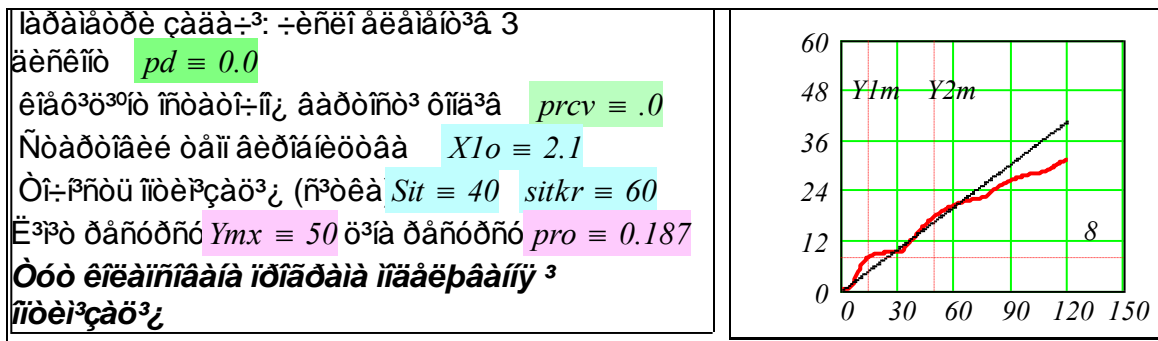


Рис. 4.25. Функції розподілу ресурсу між підсистемами

На рис. 4.26 наведено "стенд" – сторінку, де зібрані всі входи і результати розрахунку оптимального процесу розвитку. На головному графіку подано залежності для оптимального управління та оптимальний розподіл поточних ресурсів між розвитком і накопиченням.



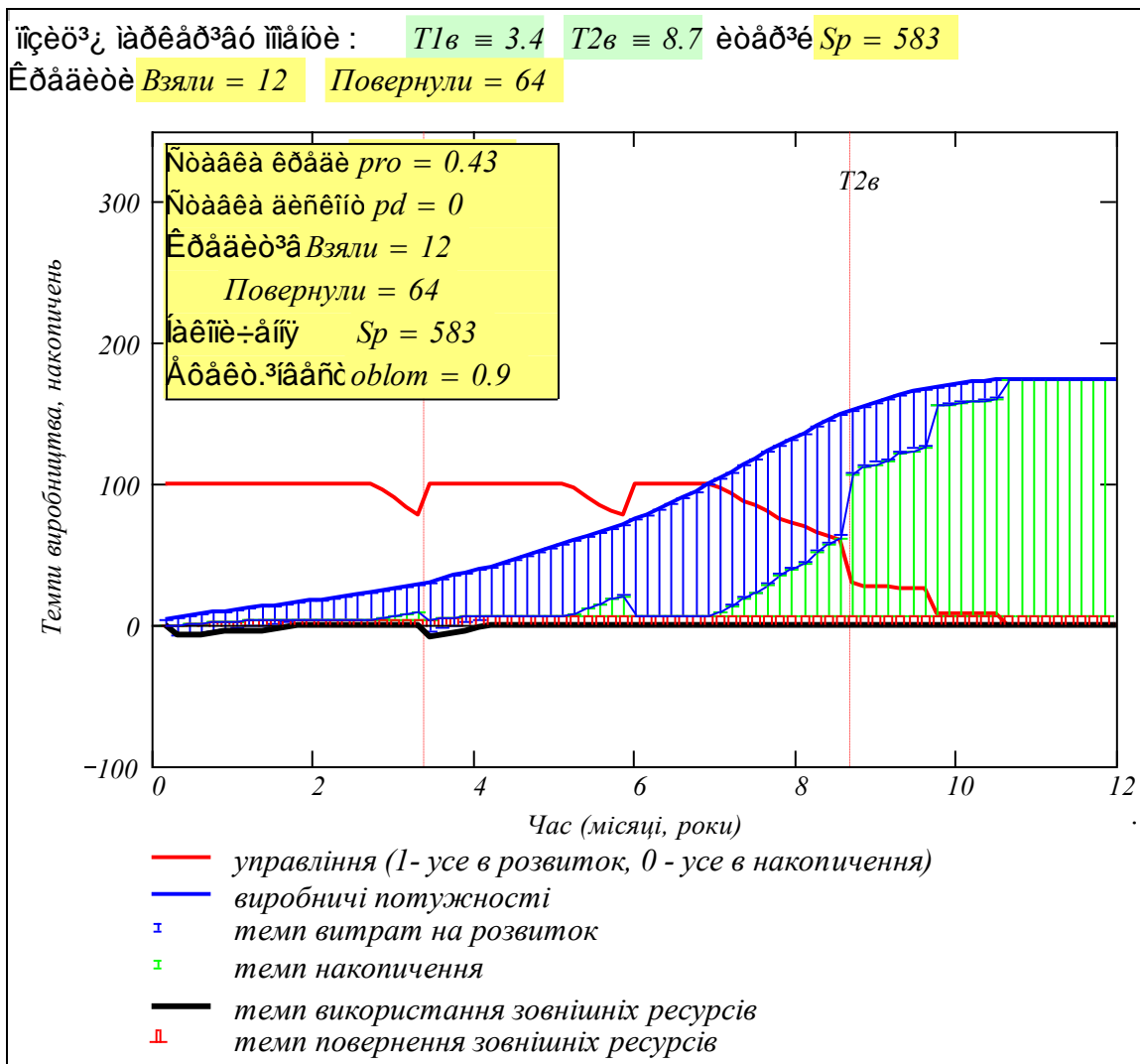


Рис. 4.26. Стенд для аналізу оптимальних процесів розвитку виробничої системи (копія екрану)

Аналіз розподілу ресурсів та динаміки темпів виробництва по окремих елементах виробничої системи. Програмна система обчислює оптимальне управління для еквівалентної агрегованої системи. Після цього виконується зворотна операція – дезагрегування, тобто обчислення розподілу ресурсу виділеного для розвитку по окремих виробництвах чи напрямках діяльності. Також визначається динаміка розвитку по кожному виробництву окремо. На рис. 4.27 подано приклад такого розрахунку.

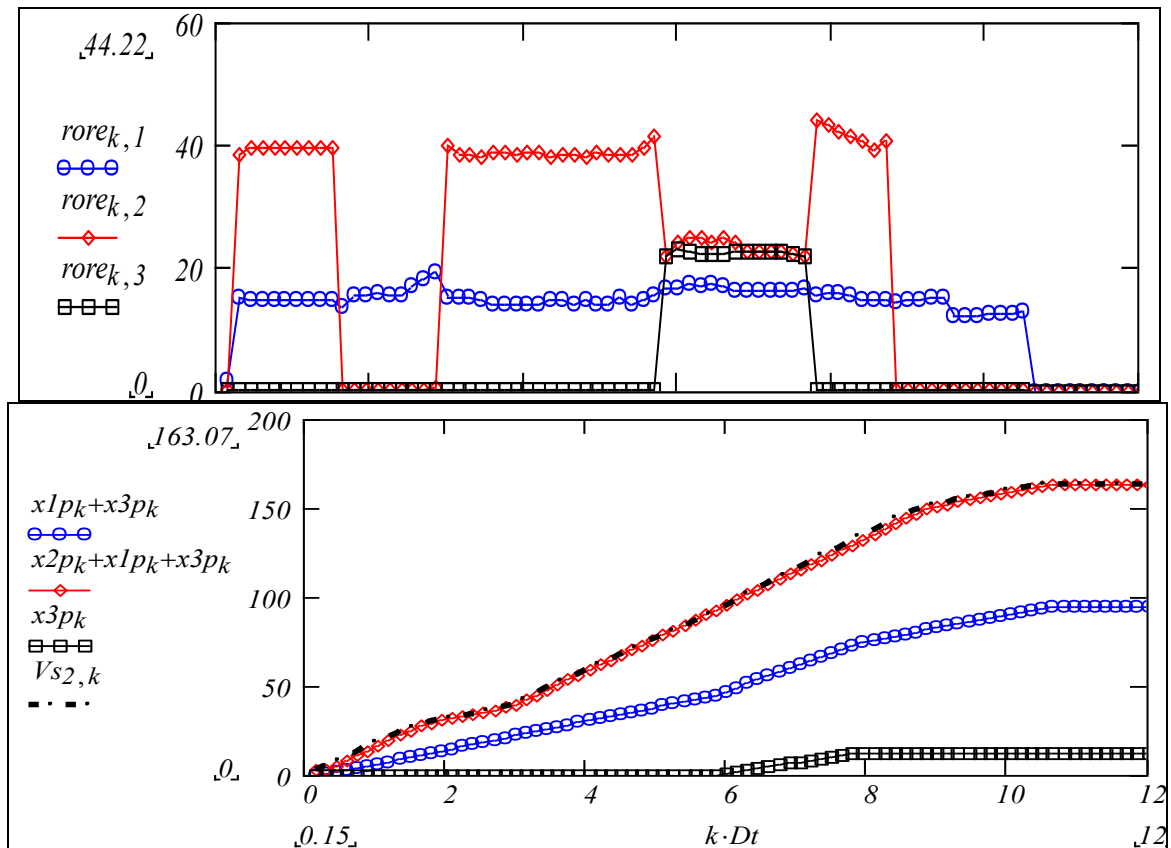


Рис. 4.27. Функції оптимального розподілу ресурсу між елементами системи

Ступінчасті функції розвитку. Запропонована нами система процесів розвитку має радикальну перевагу над аналогами – програмами моделювання та оптимізації – вона працює для довільних виробничих функцій і функцій розвитку. Розроблена для запровадження програмна система має підрозділ налаштований саме на потрібну організації можливість – розрахунок оптимальних процесів розподілу ресурсу при ступінчастих функціях розвитку. На рисунках 4.28. та 4.29. подано графіки оптимальних процесів розвитку. Відібрано складні для числових методів критичні ситуації, коли при малій зміні параметрів маємо великі зміни оптимальних управлінь (стратегій).

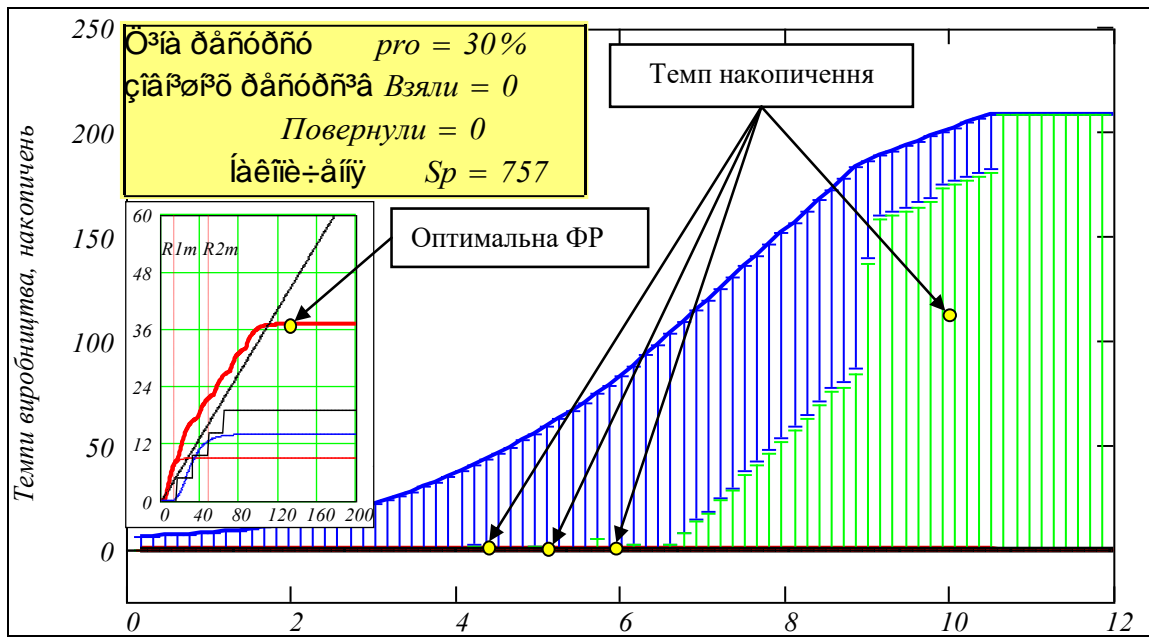


Рис. 4.28. Оптимальний процес розвитку за рахунок власних ресурсів

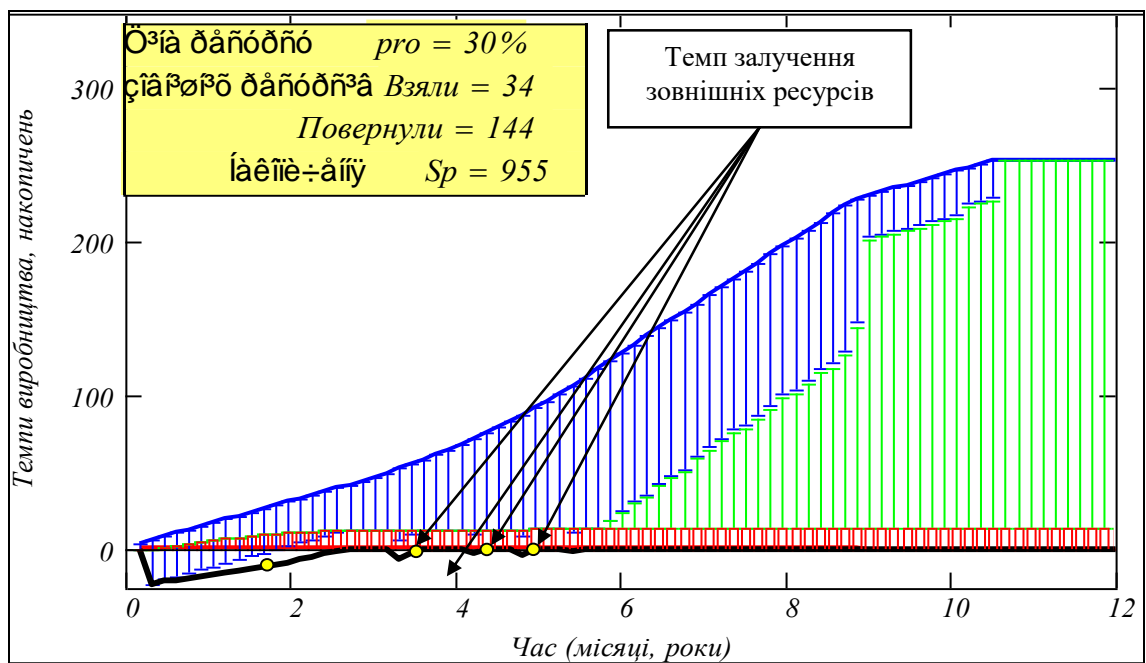


Рис. 4.29. Оптимальний процес розвитку з використанням зовнішніх ресурсів

Як можна бачити з наведених прикладів, оптимальний процес розвитку має складну структуру, однак наш метод точний, він знаходить досить дрібні деталі оптимальної стратегії розвитку.

Висновки

Розглянуто практичні аспекти застосування методу оптимального агрегування на практичному рівні – побудовано базові програмні модулі

- для обчислення функцій оптимального розподілу ресурсу;
- для аналізу впливу розкидів параметрів;
- для дослідження альтернативного методу відкритого управління.

На прикладі системи котлоагрегатів розглянуто застосування методу оптимального агрегування у випадку негладких виробничих функцій з обмеженнями по мінімальній витраті ресурсів і максимальному рівню виробництва.

Головна область застосування методу оптимального агрегування – варіаційні задачі розвитку. Використання принципу оптимальності дозволило розбити задачу оптимізації в послідовність двох задач: оптимізації розподілу ресурсу між елементами виробничої системи ("в просторі") і оптимізацію розподілу ресурсу між накопиченням і розвитком ("в часі"). В свою чергу, задача розподілу ресурсу між елементами виробничої системи розбита в послідовність задач оптимального агрегування для пар елементів, а задача оптимізації розподілу ресурсу в часі, за рахунок використання методу принципу максимуму, розбита в послідовність одновимірних оптимізаційних задач визначення максимуму функції Гамільтона. Таким чином складна варіаційна задача зведена до послідовності одновимірних задач оптимізації, що дозволило використати "безвідмовний" метод оптимізації на базі прямого перебору. В підсумку отримано програмну систему, що є працездатною для довільних функцій розвитку – невивуклих, негладких. Розроблена програмна система дозволяє вести широке коло досліджень інноваційних процесів розвитку і придатна для побудови систем підтримки рішень. Математичні моделі методу оптимального агрегування неважко реалізувати у вигляді монолітної і універсальної програми в кодах з можливістю легко змінювати кількість елементів і виробничі функції. Однак така програма буде незручною для конструювання нових моделей для нових задач та пошукових досліджень класу serendipity, коли знаходиться те, що не шукалося.

Метод оптимального агрегування занадто простий і зручний у використанні, це може приводити до втрати розуміння того, де і як виконується оптимізація. Можуть виникати питання типу:

– "От Ви максимізуєте сумарне виробництво. Виробничі функції елементів Ви не змінюєте, за рахунок чого ж тоді у Вас збільшується сумарне виробництво?"

– "Функції оптимального розподілу розривні. Де у Вас формула, яка визначає, коли саме виконувати цю раптову зміну розподілу?"

Для того, щоб не втратити "бачення згори", слід користуватися документами з відкритими текстами в мовах близьких до природних.

РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ ДЛЯ УСУНЕННЯ РОЗРИВІВ В ФУНКЦІЯХ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

Головний недолік моделей оптимізації розглянутих в розділах 2 і 3 – ігнорування витрат на раптові зміни розподілу ресурсів. Ми отримали функції оптимального розподілу ресурсу для систем з невиконаними виробничими функціями елементів. Ці функції розподілу виявились розривними і вкрай незручними для практичної реалізації: вони вимагають раптових "переключень" навантаження елементів виробничої системи. Тому важливим є дослідження приблизних реалізацій оптимальних управлінь і модифікацій задачі оптимального розподілення, що певним чином "пом'якшують" негативні особливості оптимальних розподілень. Виправданням розривання функцій обмежень і цілей є те, що в реальності вони дійсно є розмитими.

Відомо, що введення нечіткої логіки в задачу розподілу ресурсу знімає обчислювальні проблеми, а в деяких випадках, призводить до іншої постановки задачі, яка більше відповідає реальності [59, 60, 79, 84, 85, 108].

5.1. Математична модель оптимального розподілу ресурсу на базі нечіткої логіки. Адитивний критерій

Нечітка логіка, нечітка оптимізація – ідеальний інструмент для знаходження компромісних рішень. Для конкретного прикладу на моделі виробничої системи з двох елементів продемонструємо методику побудови певного компромісу між цілями окремого виробничого елемента і виробничої системи в цілому.

Постановка задачі. Подаємо постановку задачі розподілу ресурсу і стислий виклад основних властивостей оптимальних розподілів для випадку невиконаних ВФ [15, 90, 91]. Розглядається система з N виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількостях x_i і виробляють деяку продукцію у кількостях $y_i(x_i)$ згідно з ВФ з класу додатних монотонно зростаючих функцій: $y_i = f_i(x_i)$; $i = 1..N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i -му елементу. Потрібно розподілити ресурс R так, щоб максимізувати сумарне виробництво

$$Fo(R) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \rightarrow \max ; \quad \text{при обмеженні} \quad \sum_{i=1}^N x_i = R .$$

Введемо вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$.

Незалежно від виду виробничих функцій кожна складова вектор-функції $Dop(R)$ не є від'ємною: $Dop(R) \geq 0, i = 1..N$. Якщо виробничі функції усіх елементів є випуклими, усі функції $Dop(R)_i$ є неперервними. Для випадку, коли виробничі функції усіх елементів є увігнуто-випуклими, усі функції $Dop(R)_i$ мають розриви. Число цих розривів залежить від класів ВФ, кількості елементів в системі і певних відношень між ВФ елементів. Обмежуємось розглядом ВФ двох класів: випуклих та увігнуто-випуклих (S -функцій).

Поставимо за мету – запропонувати і дослідити методи "пом'якшення" вимог оптимального управління на базі нечіткої логіки. Теорія нечіткості була запропонована для подання задач з розмитими, нечітко визначеними межами, умовами, цілями.

Ефективним є застосування цієї теорії для розв'язання багатокритеріальних задач, де треба якось раціонально "примирити" звичайно суперечливі критерії. Нагадаємо, що для задач такого класу нечітка логіка зручний "протез", що замінює витратну та інтелектуально виснажливу без гарантованих результатів роботу з побудови глобальної критерію системи, аналізу витрат та ефектів.

Цим займаються: системний аналіз, дослідження операцій, геометричне програмування, частково – ризик аналіз. Навіть там, де все чітко визначено, введення штучної нечіткості підвищує ефективність числових методів пошуку екстремуму.

Подаємо викладення основних результатів на прикладі системи з двох елементів. Перехід до задач вищої розмірності не породжує нових проблем. Приклад повністю виконаний в середовищі математичного пакета і є розділом електронної книги [15].

Замінімо "чітке" обмеження на витрати ресурсу $x_1 + x_2 \leq R$ "нечітким" – розмитим. Інтерпретація розмитого обмеження – певна функція штрафу за недо- чи перевитрати ресурсу. Введемо також розмиту функцію штрафу за монопольні розподіли, особливо такі, коли певні елементи взагалі не отримують ресурсу – припиняють роботу.

Комбінуванням критерію (функції належності цілі) і розмитих обмежень (функцій належності обмежень) отримуємо загальну функцію належності цілі системи, потім знаходимо екстремум цієї функції.

Для прикладу візьмемо узагальнену увігнуто-випуклу виробничу функцію

$$F_4(x, A, w, s) = 10 \cdot A \cdot (1 - e^{-w \cdot x})^s. \quad (5.1)$$

За рахунок параметрів A, w, s можна отримати задовільні апроксимації типових ВФ. Записуємо цільову функцію системи

$$FfI(x1, x2) = F4(x1, A1, w1, s1) + F4(x2, A2, w2, s2) \quad (5.2)$$

і "чітке" обмеження по ресурсу

$$Gg(x1, x2, R) := R - x1 - x2. \quad (5.3)$$

Перетворюємо обмеження (5.3) у нечітке – конструюємо функцію належності для обмеження. Для цього використовуємо функцію нормального розподілу $dnorm(.)$ з математичного пакета (для нас мають значення тільки топологічні властивості функції)

$$Gfuz(x1, x2, R, fz) := dnorm(Gg(x1, x2, R), 0, fz). \quad (5.4)$$

Нормуємо цю функцію, щоб при задоволенні чіткого обмеження мати

$$Gfuz(x, R, fuzn) = 1. \quad (5.5)$$

Неважко бачити, що максимальне значення цієї функції досягається при умові $x1 + x2 = R$ і не залежить від конкретних значень $x1, x2$. "Суворість" штрафу за відхилення задається параметром fz .

Конструюємо загальну функцію належності з (5.2), (5.4). Для цього ми виконуємо над усіма нечіткими обмеженнями і цільовою функцією операцію "нечітка кон'юнкція". Ця операція в теорії розмитих множин визначається ситуативно, в залежності від "фізичного змісту" цільової функції і обмежень. Можливі дві альтернативи – мінімум і добуток:

$$fnn(x1, x2, R) := \min(FfI(x1, x2), Gfuz(x1, x2, R)); \quad (5.6)$$

$$fnd(x1, x2, R, fuz) := FfI(x1, x2), Gfuz(x1, x2, R, fuz). \quad (5.7)$$

Визначаємо функцію користувача (підпрограму) $Opr(fnd, fuz)$, що бере функцію належності цілі $fnd(\cdot)$ та параметр розмитості fuz , а повертає масив значень вектор-функції оптимального розподілу ресурсу для заданого діапазону $\{R_{min}, \dots, R_{max}\}$. Для побудови цієї функції можуть бути використані як вбудовані методи оптимізації, так і спеціально розроблені програми.

На рис. 5.1 подані результати розрахунку функції оптимального розподілу ресурсу для трьох значень параметра розмитості – 1, 20, 29. Призначення цього рисунку – **якісний** аналіз еволюції оптимального розподілу при зміні розмитості обмеження по ресурсу. На цих графіках подано також оптимальну ВФ системи. Можемо бачити, що розмивання обмеження по ресурсу не усуває розривів і ситуацій, коли ресурс віддається тільки одному з елементів. Однак при збільшенні розмитості

розриви поступово "витісняються" в зону малих значень R – обмеження по ресурсу.

Введемо ще одне нечітке обмеження – функцію штрафу за простій виробництв. Розглянемо практичні міркування, на основі яких конструюється це обмеження. В реальних умовах зупинка одного виробничого елемента і включення іншого є нетривіальною і витратною операцією. Ці витрати суттєво зростають при зростанні обсягу виробництва.

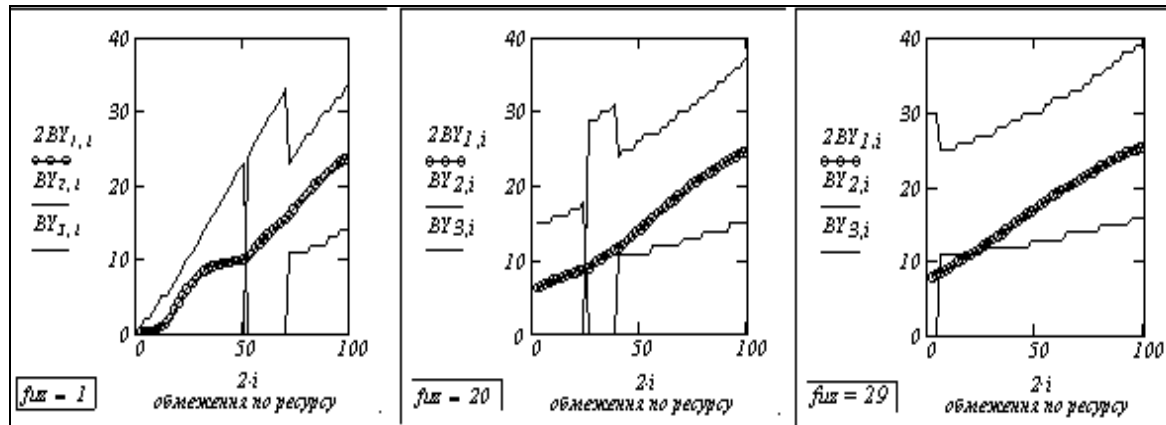


Рис. 5.1. Вплив розмитості на функції оптимального розподілу ресурсу (копія екрану)

Дуже непросто "включити" чи "виключити" потужний енергоагрегат, хімічний реактор, металургійну установку, конвеєр. При великих масштабах виробництва виникають також юридичні і соціальні проблеми, проблеми консервації, налагодження обладнання та ін. Відомо, що виробництво, продукція якого сьогодні непотрібна, а завтра знову стане потрібною, вигідно не зупиняти зовсім – слід залишити розумний мінімум персоналу та працюючого обладнання і випускати поки продукцію на склад, або іншу подібну, неприбуткову продукцію. Таке виробництво запусити на повну потужність буде набагато легше і дешевше, ніж повністю закрити.

Введемо функцію штрафу за зменшення випуску продукції на певному виробництві нижче певного критичного рівня. Визначимо цю функцію так: коли відношення обсягів ресурсів $(x1/x2)$ знаходиться в певному діапазоні, то функція штрафу дорівнює одиниці, коли ж відношення виходить за межі діапазону, то функція штрафу зменшується за певним законом і досягає мінімуму, коли або $x1 = 0$, або $x2 = 0$. Проаналізуємо обмеження і узагальнимо методику постановки нечіткої оптимізаційної задачі. Керівник виробничої системи має три бажання:

- а) щоб сумарне виробництво було максимальним

$$f1(x1) + f2(x2) \Rightarrow \max;$$

б) щоб витрати ресурсу мало відрізнялись від обмеження

$$x1 + x2 - R \Rightarrow \min;$$

в) щоб пропорція розподілу Ka була близькою до бажаної

$$x2 - Ka * x1 \Rightarrow \min.$$

Загальну функцію належності формуємо як добуток функцій належності окремих цілей. Запишемо робочий вираз в двох альтернативних формах:

$$а) \text{Opf } 2_{i,j} = \overrightarrow{Ffl}(X1_i, X2_j) \cdot \overrightarrow{Gfd}_{i,j} \cdot \overrightarrow{G2fd}_{i,j}, \quad (5.8)$$

$$б) \text{Opf } 2 := \left[\overrightarrow{\left(\overrightarrow{Ff2} \cdot \overrightarrow{Gld} \right)} \cdot \overrightarrow{G2fd} \right]. \quad (5.9)$$

Стрілки над виразами означають векторизацію, що значно прискорює виконання обчислень. Робочий вираз – математичний вираз, що виконується в середовищі математичного пакета.

На рис. 5.2 подані контурні графіки для цільової функції та загальної функції належності. Бачимо, що введення нечіткого обмеження на пропорцію розподілу ресурсу між виробничими елементами дійсно зсуває точки екстремуму від граничних розподілів

$$(x1 = R, x2 = 0), (x1 = 0, x2 = R).$$

На рис. 5.3 подані для порівняння функції оптимального розподілу ресурсу при одному розмитому обмеженні – по ресурсу (А) та для двох обмежень – по ресурсу і пропорції розподілу (Б). На цих графіках побудовані також виробничі функції системи – залежності сумарного виробництва від сумарних витрат ресурсу при його оптимальному розподілі. Бачимо (див. рис. 5.3Б), що ця функція вже не має розподілів "переможець отримує все", але "переключення" залишається.

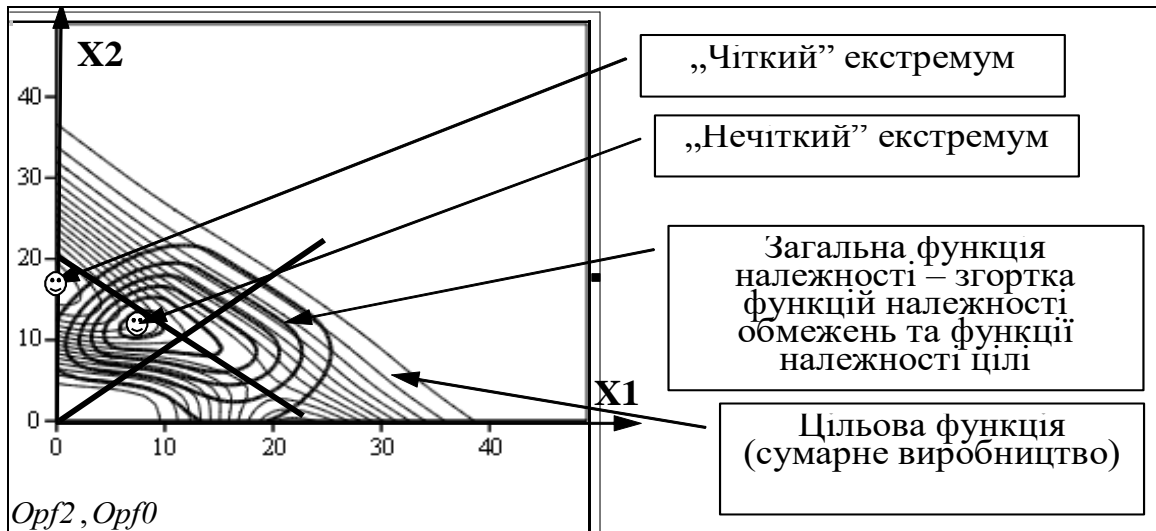


Рис. 5.2. Лінії рівня для "чіткої" цільової функції і "нечіткої" – загальної функції належності цілі (копія екрану)

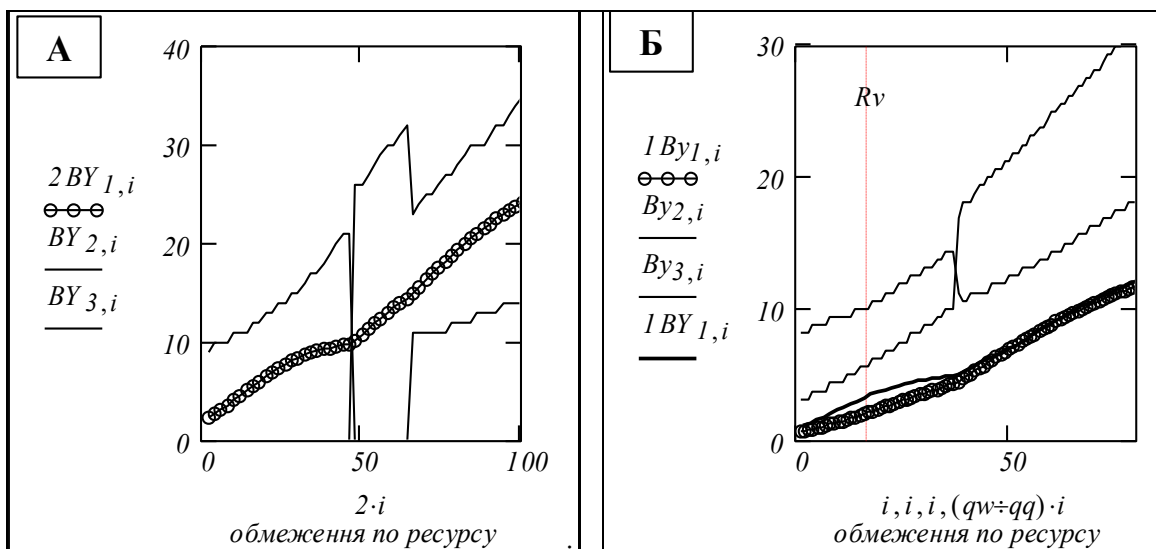


Рис. 5.3 Функції оптимального розподілу ресурсу: а) для випадку нечіткого обмеження по ресурсу; б) для випадку двох нечітких обмежень – по ресурсу і розподілу

В рамках поставленої задачі ми при введенні розмитого обмеження на пропорцію розподілу маємо втрати сумарного ефекту. Але слід порівняти ці втрати з втратами при повній зупинці одного з виробництв. Компоненти функції оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$ при розмитому обмеженні і $R = 0$ не є нульовими: $|Dop(0)| > 0$. Це можна трактувати так: при відсутності власних ресурсів взяти зовнішні, розмиту функцію штрафу за відхилення від обмеження – як плату за ресурси. Властивості задачі розподілу для двоелементної

системи мають місце і для систем більшої розмірності. Задачі малої розмірності дозволяють використати тривимірні графіки для контролю коректності і аналізу задачі.

На рис. 5.4 для двовимірної задачі оптимального розподілу ресурсу побудовано функції обмеження по ресурсу з різними значеннями параметра нечіткості. На першому графіку подано фактично "зріз" цільової функції (сумарного виробництва), на якому і шукається максимум, на другому – обмеження суттєво "розмите".

На рис. 5.5 подано функції належності для обмежень по ресурсу і пропорції розподілу ресурсу між двома виробництвами і результат їх комбінування.

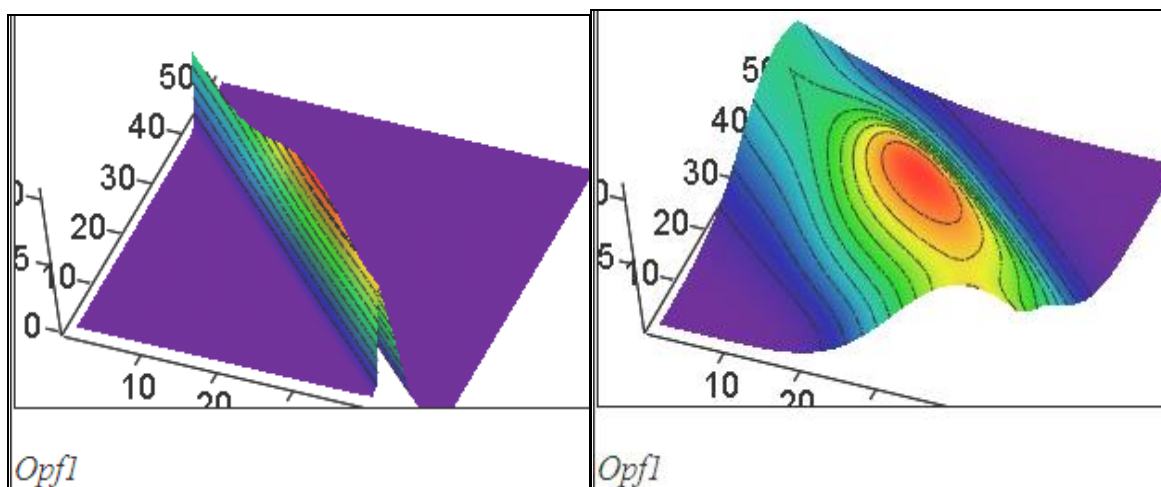


Рис. 5.4. Розмивання обмеження по ресурсу

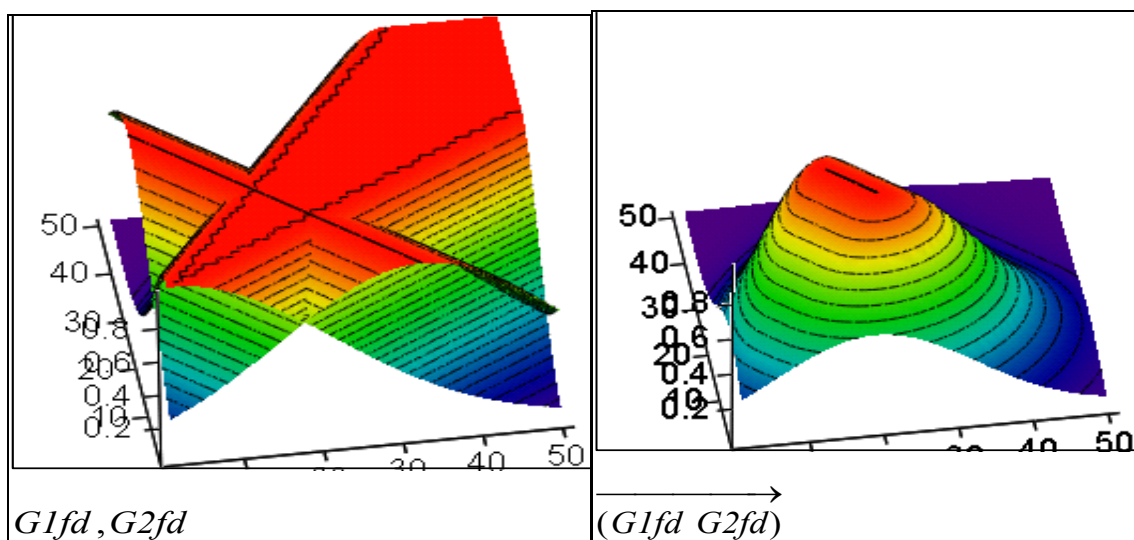


Рис. 5.5. Комбінування обмежень по ресурсу і пропорції розподілу

За результатами дослідження оптимальних розв'язань на базі нечіткої логіки ми приходимо до того ж висновку, що був отриманий у

розділі 3: якщо виробництво гарантовано ефективно, то слід залучати максимум зовнішніх ресурсів на початкових етапах розвитку, і тоді важкі наукові і практичні проблеми розподілу ресурсів на початкових етапах розвитку виробничої системи, при малих обсягах виробництва і власних ресурсів (розривність функцій) зникають.

Таким чином, введення нечіткості – "розмивання" обмежень, виявилось не "корисним штучним прийомом", а першим етапом системного аналізу задачі. Для введених розмитих обмежень знайдено інтерпретації: зовнішні ресурси, витрати на запуск і консервацію виробництв. У підсумку усі штучні атрибути нечіткої оптимізаційної задачі можуть бути замінені реальними технічними параметрами – вартістю зовнішніх ресурсів та ін. Сучасне виробництво само по собі є розмитим і нечітка логіка корисна як концепція і метод ідентифікації виробництва.

В обчислювальних експериментах доведено, що існує граничний рівень нечіткості (розмитості) обмежень по ресурсу, при збільшенні якого розриви в оптимальному управлінні зникають. Тобто отримано висновок, подібний висновку про граничну вартість зовнішніх ресурсів для виробничих систем з невивуклими ВФ.

5.2. Математична модель оптимального розподілу ресурсу на базі нечіткої логіки. Мультиплікативний критерій

Постановка задачі. Розглядається приклад системи з послідовно поєднаних підсистем. Ефективність системи залежить від ефективностей підсистем. Кожна підсистема може мати в своєму складі 1, 2, 3... елементів, що працюють паралельно. Ефективність підсистеми залежить від ефективностей її елементів. Природно припустити, що у випадку непрацездатності усіх елементів підсистеми і підсистема, і система в цілому будуть непрацездатними. Сумарна вартість системи обмежується.

Потрібно вибрати кількість елементів в кожній підсистемі так, щоб максимізувати ефективність системи в цілому. Можлива зворотна задача – мінімізація вартості при обмеженні ефективності. Ця задача є цілочисловою, але неважко поставити аналогічну неперервну задачу. Наведемо можливі інтерпретації задачі.

1. Багатофазна система масового обслуговування, чи виробнича система. Потрібно в рамках обмеження на вартість системи вибрати кількість "верстатів" на кожній фазі обслуговування чи виробництва так, щоб ефективність (це може бути надійність обслуговування, кількість і якість продукції) була максимальною.

2. Технічна система з трьох послідовно поєднаних підсистем.

Потрібно в межах допустимої вартості вибрати кратність резервування для кожної підсистеми так, щоб надійність системи була максимальною. В умовах високих технологій та інтелектуалізації технічних систем теорія, методи істинної надійності все далі відходять від цієї задачі. Візьмемо математичну модель ефективності системи у вигляді

$$R(x, q) := \prod_{k=1}^N [1 - (q_k)^{x_k + 1}],$$

де x – вектор розподілу ресурсу; q – вектор параметрів ефективності елементів (імовірності відмови); N – кількість послідовно поєднаних підсистем. Записуємо математичну модель вартості резервованої системи теж у вигляді функції користувача

$$C(x, c) := \sum_{k=1}^N c_k \cdot (x_k + 1)$$

і визначаємо частку вартості системи, яка може бути використана на резервування в рамках обмеження сумарної вартості

$$CR := C_0 - c_1 - c_2 - c_3.$$

Ця задача була розв'язана чотирма альтернативними методами:

- а) дискретна задача, метод динамічного програмування;
- б) неперервна задача, метод множників Лагранжа;
- в) неперервна задача, метод оптимізації на базі нечіткої логіки;
- г) дискретна задача, метод оптимізації на базі нечіткої логіки.

Розглянемо детально тільки альтернативи б) та в). Програмні модулі для альтернатив а) та г) розглянуті в [24].

Метод невизначених множників Лагранжа. Маємо цільову функцію $R(x, q)$ – ефективність системи і обмеження $C(x, c) = 0$ на вартість системи. Записуємо функцію Лагранжа

$$L(x, q, \lambda) := R(x, q) + \lambda \cdot C(x, c).$$

Необхідна умова екстремуму – похідні від функції Лагранжа по всіх змінних оптимізації повинні бути нульовими. В окремих випадках можна знайти аналітичні вирази для похідних і навіть розв'язання в символічному вигляді, але ми орієнтуємось на методи, які працюють для довільних цільових функцій і обмежень. Використовуємо комплекс вбудованих методів математичного пакета, що містить декілька числових методів розв'язання систем рівнянь і є задовільним для випуклих задач і обмежено задовільним – для невивуклих. Задаємо початкові значення змінних: $x_1 := 1; x_2 := 3; x_3 := 1; \lambda := 1$. Записуємо

систему рівнянь – три похідних, три умови для x_1, x_2, x_3 і обмеження вартості системи: *Given*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Ll \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, q, \lambda \right] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} Ll \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, q, \lambda \right] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} Ll \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, q, \lambda \right] = 0;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$$

$$c_1 \cdot (x_1 + 1) + c_2 \cdot (x_2 + 1) + c_3 \cdot (x_3 + 1) - Co$$

і отримуємо розв'язок

$$Re zLagr := Find(x_1, x_2, x_3, \lambda).$$

Порівнюємо результати: розподіли ресурсу та значення критерію ефективності для дискретної і неперервної задач.

Метод Лагранжа метод динамічного програмування

$$Re zLagrang = \begin{pmatrix} 1.53 \\ 1.84 \\ 1.27 \end{pmatrix} \quad Re zdiskr = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad OpLa = 0.864, \quad OpDisc = 0.864.$$

Компоненти векторів – це додаткові кількості відповідних виробничих елементів понад мінімальну кількість. Тобто, інтерпретація результату така: на першій фазі виробничого процесу поставити 3 одиниці виробничих елементів першого типу, на другій – 3 елементи другого типу і на третій – 2 елементи.

Оптимізація на базі нечіткої логіки. Теорія нечіткості була запропонована для моделювання задач з розмитими, нечітко визначеними границями, умовами і цілями [7, 33, 41, 42, 79, 83, 85]. Ефективним є застосування цієї теорії для розв'язання задач з обмеженнями. Навіть там, де все чітко визначено, введення штучної нечіткості підвищує ефективність числових методів пошуку екстремуму.

Обмеження вартості системи природним чином є нечітким – завжди допускається деяке відхилення від заданої величини. Таким же природно нечітким є обмеження маси та енерговитрат, наприклад, в авіакосмічній техніці конструкторів тільки преміюють/штрафують за зменшення чи збільшення маси розроблюваної системи, і не дотримуються точного значення обмежень.

Записуємо цільову функцію і номінальне обмеження:

$$Rlb(x_1, x_2, x_3) := [1 - (q_1)^{x_1+1}] \cdot [1 - (q_2)^{x_2+1}] \cdot [1 - (q_3)^{x_3+1}]; \quad (5.10)$$

$$Ogr(x1, x2, x3) := c1 \cdot (x1 + 1) + c2 \cdot (x2 + 1) + c3 \cdot (x3 + 1) - Cog. \quad (5.11)$$

Перетворюємо обмеження (5.11) в нечітке (розмите) – конструюємо функцію належності для обмеження. Для цього використовуємо вбудовану функцію нормального розподілу

$$Fpog(x1, x2, x3) := dnorm(Ogr(x1, x2, x3), 0, fuznja). \quad (5.12)$$

Задаємо ранжовані змінні, $X1, X2, X3$, діапазони і крок зміни. Конструюємо загальну функцію належності, або функцію належності цілі. Для цього ми виконуємо над усіма нечіткими обмеженнями і цільовою функцією операцію "нечітка кон'юнкція". Ця операція в теорії нечітких множин визначається ситуативно, в залежності від "фізичного змісту" цільової функції і обмежень.

Розглядаємо дві альтернативи:

а) добуток

$$OPfl_{i,j} := Rlb \geq (Xl_i, X2_j, l) \cdot Fpog(Xl_i, X2_j, l); \quad (5.13)$$

б) мінімум від функцій належності

$$OPfo_{i,j} := \min(Rlb(Xl_i, X2_j, 2), Fpog(Xl_i, X2_j, 2) \cdot 4). \quad (5.14)$$

Функція належності цілі в цьому випадку залежить від трьох змінних. Функції належності для обмежень і цілі ми вибрали такими, що мають першу і другу похідні. Тому ми можемо використати класичні методи пошуку екстремуму функції багатьох змінних. Використовуємо вбудований метод пакета.

Задаємо вираз для функції належності

$$OPf(x1, x2, x3) := Rlb(x1, x2, x3) \cdot Fpog(x1, x2, x3).$$

Записуємо задачу в стандартній формі

$$RezFuz := Maximize(OPf, x1, x2, x3).$$

Вибираємо метод оптимізації, в нашому випадку "квазі-Ньютонівський метод". Подаємо разом результати оптимізації за усіма альтернативними методами: дискретна оптимізація, метод Лагранжа і "нечітка оптимізація"

$$Rezdiskr = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad RezLagrang = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.8 \\ 1.3 \end{pmatrix}; \quad RezFuz = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.9 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з традиційною концепцією "оцінити альтернативи і вибрати кращу" ми тепер повинні провести комплексний аналіз трьох альтернатив і вибрати найкращу. На рис. 5.6 подано чотири "зрізи" функції належності для таких значень третьої змінної: $x_3 = 0, 1(\text{оптимум}), 2, 3$. По осях X та Y відкладені значення змінних x_1 та x_2 , по осі Z – значення критерію. На цьому ж графіку подано положення точок екстремуму функції належності для ряду значень змінної x_3 . Бачимо, що дійсно найбільше значення функція має при $x_3=1$. Природно, що із збільшенням x_3 , в силу обмеження за ресурсом, зменшуються значення x_1 та x_2 – точка максимуму наближається до осі z . При розв'язанні задачі ми використали незначну частину можливостей нечіткої логіки. Це не тільки обчислювальний метод, але також спосіб побачити суть задачі, можливу еволюцію оптимального розв'язання із змінами технологій і масштабів виробництва.

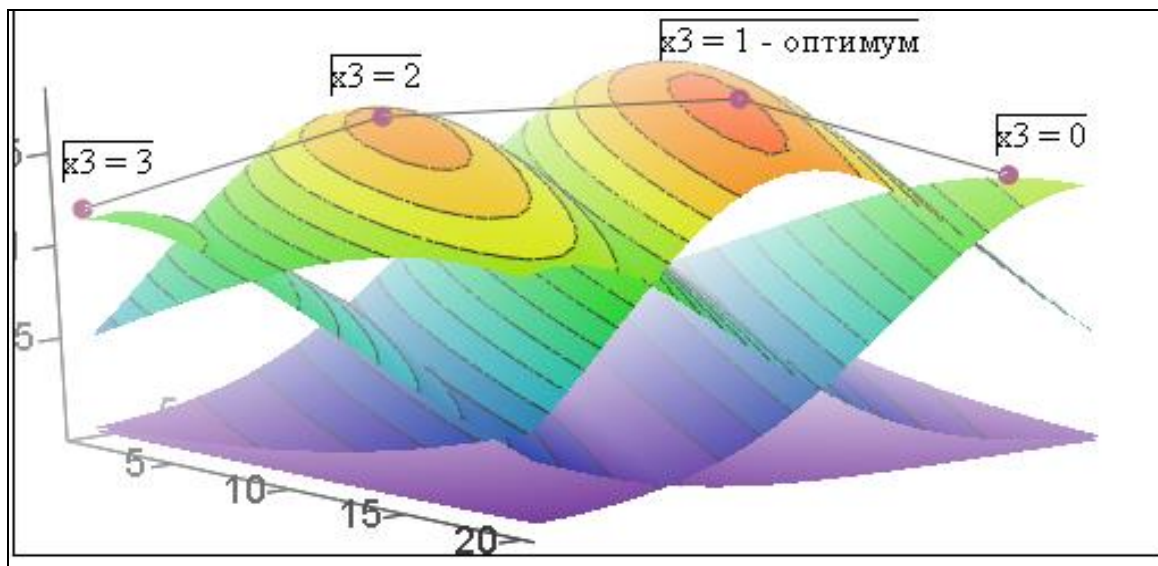


Рис. 5.6. Приклад: чотири "зрізи" цільової функції і точки екстремумів

На рис. 5.7 в просторі конфігурацій системи (x_1, x_2, x_3) побудовано вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу для дискретної і нечіткої задачі. Ми бачимо що нечітка функція оптимального розподілу ресурсу є гладкою, лінійною (наслідок того, що узагальнені виробничі функції елементів належать до одного параметричного класу). Функція розподілу для дискретної задачі лише "стрибає" навколо "генеральної лінії", чітко накресленої нечітким методом.

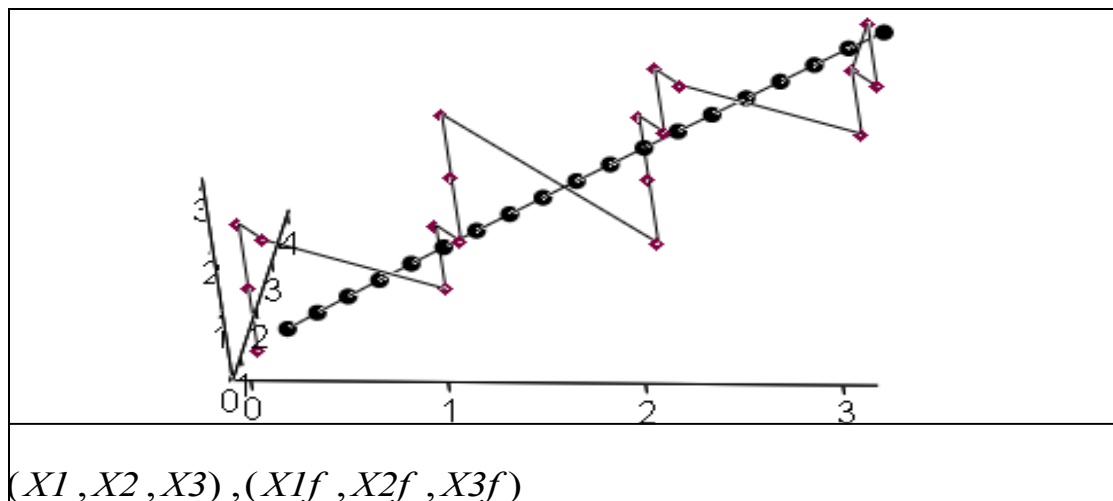


Рис. 5.7. Приклад: функції оптимального розподілу ресурсу для дискретної (ломана лінія) і нечіткої (пряма) задачі

Була також виконана модифікація нечіткої задачі – введення ще одного нечіткого обмеження – "штрафу" за відхилення розподілу від цілочислових значень і проведено аналіз. На рис. 5.8 для порівняння подано поверхні цільової функції для неперервної задачі (це копія рис. 5.6) та цільової функції з урахуванням штрафів за нецілочислові значення змінних оптимізації.

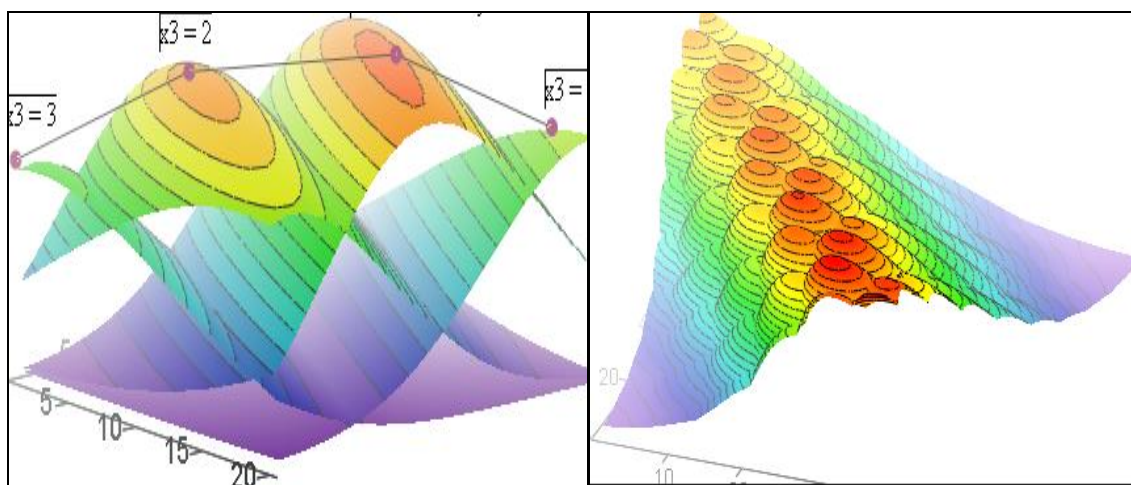


Рис. 5.8. Функція належності при введенні нечіткого обмеження на відхилення від цілочислових значень розподілу ресурсу

5.3. Узагальнення моделі оптимального розподілу ресурсу – урахування витрат на регулювання виробництва

Результатом виконаного "вдосконалення" оптимального розв'язання задачі оптимального розподілу ресурсу між виробничими елементами, що працюють паралельно, на базі нечіткої логіки

отримано практичний результат – робочу модель оптимізації з непрямим урахуванням витрат на зупинку і введення в дію виробничих елементів. Отримано також "побічний", методологічний результат, – уточнення і деталізація базової моделі оптимального розподілу ресурсу, а саме урахування витрат на регулювання темпу виробництва.

Природно спробувати побудувати версію методу оптимального агрегування для більш складного критерію оптимізації розподілу ресурсів і урахування динаміки темпу виробництва. Спочатку зробимо базову робочу модель процесу виробництва.

Зауваження. Те, що подано далі часто помилково вважається "економікою". Подані далі моделі відносяться до класу екологічних і термодинамічних і вимагають відповідних знань. Слід враховувати, що поняття "дохід", "ціна", "ринок" широко використовуються в обчислювальних алгоритмах для означення певних параметрів.

Обсяг виробництва (i -го елемента системи виробників) $X_{i,t}$ зростає експоненційно при необмеженому обсязі попиту ("ринку") $R_{up} = \infty$. Реально, рано чи пізно, сумарне виробництво усіх елементів Su_t заповнить "ринок", тобто $R_{up} - Su_t = 0$. В певних випадках обмеженням росту буде дефіцит ресурсів.

Розширимо поняття "виробництво" на такі етапи, як постачання, реалізація – доведення продукту до кінцевого споживача через певні структури. Неважко довести твердження: для кожного рівня темпу випуску може бути визначений оптимальний розподіл витрат на кожному етапі циклу "постачання – виробництво – постачання – ритейл" на просування продукту до споживача.

На певному етапі розвитку виробництв було незвичним, що розробник повинен проектувати не тільки продукт, але і процес його використання (споживання) кінцевим користувачем. Сьогодні треба звикати до того, що проектувальник повинен проектувати процес вибору і придбання продукту користувачем, в першу чергу.

В нашій моделі припускається, що виробнича система **субоптимізована**, тобто ресурси, виділені на виробництво розподіляються так, щоб узагальнена "пропускна спроможність" усіх етапів процесу узагальненого виробництва була однаковою. Дійсно, якщо виробництво виробляє за одиницю часу 100 одиниць, а роздрібна торгівля (ритейл) забезпечує продаж за одиницю часу 120 одиниць, або навпаки – виробництво має потужності на 120 одиниць, а ритейл може продати тільки 80, то це означає – ресурси треба направляти на розширення вузьких місць. Зберемо емпіричні знання і транслюємо їх в математичний вираз для віддачі інвестицій у виробництво в різницевій формі, що виконується в середовищі математичного пакета

$$\Delta X_{i,t+1} = \left[kr_i \cdot \left(\frac{R_{yn} - Su_t}{R_{yn}} \right) \cdot Inv_{i,t} \right] \cdot krok, \quad (5.15)$$

де kr_i – показник ефективності організаційно-виробничої системи; R_{yn} – місткість ринку (в перших наближеннях – константа); Su_t – сумарне виробництво – заповнення ринку; $Inv_{i,t}$ – розмір інвестицій; $krok$ – крок моделювання (день, рік, ..).

Вираз (5.15) інтерпретується так: протягом року ми вкладаємо в систему $Inv_{i,t}$ коштів і отримуємо з наступного періоду (наприклад, року) можливість виробляти і продавати $\Delta X_{i,t+1}$ одиниць вимірювання продукції. Для урахування запізнення віддачі інвестицій можна ввести розподілений лаг.

Проаналізуємо множник в дужках – змістовно це частка потенційних споживачів, що ще не мають цього продукту. Він може бути позитивним, нульовим і від'ємним. Нульове значення відповідає ситуації, коли інвестиції в систему не дають приросту продажу цього виробу. В літературі розглядаються легендарні ситуації, коли конструктори і маркетологи знаходили спосіб радикально збільшити попит. Це – рідкісна подія. Ми розглядаємо субоптимізоване, стабільне виробництво, де виробляється приблизно стільки, скільки може бути продано. Від'ємний вираз у дужках інтерпретується як перевищення виробничих потужностей відносно існуючої ємності ринку. Згідно з логікою бізнесу (якщо не розглядаються інші альтернативи: зменшення цін, відкриття іншого ринку...) треба згорнути усі ланки виробництва.

В розвинених економіках інвестиції для зменшення темпу виробництва або виходу з бізнесу можуть перевищити інвестиції для розширення виробництва. Змістовно витрати на згортання виробництва складаються з витрат на вихідні виплати скороченому персоналу, консервацію, демонтаж і утилізацію обладнання, виконання екологічних вимог. Іноді це може бути продаж зайвих бізнес одиниць конкурентам, продаж ліквідного обладнання.

Може бути і така альтернатива: виробнича система випускає декілька продуктів. Одні продукти мають зростаючий попит, інші – спадний попит. Тоді персонал і певну частину фондів можна просто переводити на випуск перспективного продукту.

Всі ці ефекти можна в першому наближенні агрегувати і подати компактним виразом (5.15) – першим наближенням. Сьогодні декларується екологічний характер розвитку технічних систем.

Розглянемо приклади зворотного розвитку на конкретному прикладі. Відомо, що проліски, точніше "підсніжники", тому що вони починають розвиток ще під снігом, ростуть 1–2 місяці і зникають без

слід до наступної весни. "Стартують" вони за рахунок ресурсів цибулини, після досягання насіння усі ресурси з надземної частини перекачуються назад – цибулині. Важко побачити сухе листя пролісків – воно просто розсипається в пил – все з нього пішло під землю, в цибулину. Таким чином "виробнича потужність" проліска росте коливально з досить довгими періодами спокою. У звичайних рослин зайві "виробничі потужності" просто стають осіннім листям і повертаються не одразу, непрямо, негарантовано. Можна знайти ще більш яскраві приклади зворотного розвитку в біо- та екосистемах.

Таким чином, для техніко-економічних і біологічних систем процеси росту і скорочення в загальному випадку не є монотонними, а також не є повністю симетричними і оберненими. В моделі першого наближення забезпечуємо можливість зміни характеристик прямого і зворотного розвитку, в тому числі – співвідношення витрат розвитку і згортання виробничих потужностей. На рис. 5.9 подано текст програми. Програма зроблена з "резервом модифікації" для обробки даних по множині виробництв. Саме для цього введено індекс "i", в цьому випадку $i = 1$. Період моделювання $T_{mod} := 40$; $t := 1..T_{mod}$; $i := 1$.

$Vrb(X0, Ryn, eri) :=$	$X_{i,1} \leftarrow X0$ $X_{i,2} \leftarrow X0$ $Inv_{i,1} \leftarrow X0$ for $t \in 2..T_{mod}$ $Su_t \leftarrow X_{i,t}$ $vozm \leftarrow \frac{Ryn - Su_t}{Ryn}$ $likv \leftarrow 2.1 \cdot X_{i,t}$ $\Delta X_{i,t+1} \leftarrow \begin{cases} eri \cdot vozm \cdot likv & \text{if } vozm \leq 0 \\ eri \cdot vozm \cdot Inv_{i,t-1} & \text{otherwise} \end{cases}$ $X_{i,t+1} \leftarrow X_{i,t} + \Delta X_{i,t+1}$ $Inv_{i,t+1} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } vozm \leq 0 \\ 0.8 \cdot X_{i,t-1} + 0.0 \cdot X_{i,t} & \text{otherwise} \end{cases}$ X
------------------------	---

Рис. 5.9. Текст модуля "регулювання виробництва"

В цій програмі прийняті такі позначення: X_0 – стартовий рівень виробництва; R_{yn} – місткість ринку; eri – ефективність інвестицій; Su_t – сумарне виробництво – заповнення ринку; $Inv_{i,t}$ – інвестиції у розширення виробництва; i – індекс фірми; kr – крок моделювання; $\overline{RI} := 5$ – місткість ринку.

На рис. 5.10 подано графіки зміни темпів виробництва при різних початкових відхиленнях від рівня рівноваги. Одна з кривих подає процес, коли виробництво перевищує місткість ринку і тому зменшується. Нагадаємо, що за цим стоїть консервація або розпродаж фондів, звільнення персоналу, виплата компенсацій, можливо перепрофілювання і модернізація. На розширення виробництва потрібні витрати, при скороченні – ці витрати частково можуть повернутись.

Зауваження. Модель першого наближення не враховує такий аспект реальності: розширення виробництва припиняється раніше, ніж вичерпується весь попит, особливо, якщо є альтернативні продукти з більшою доходністю. Математичні моделі розподілу для простої моделі виробництва побудовані і досліджені в розділах 3 і 4.

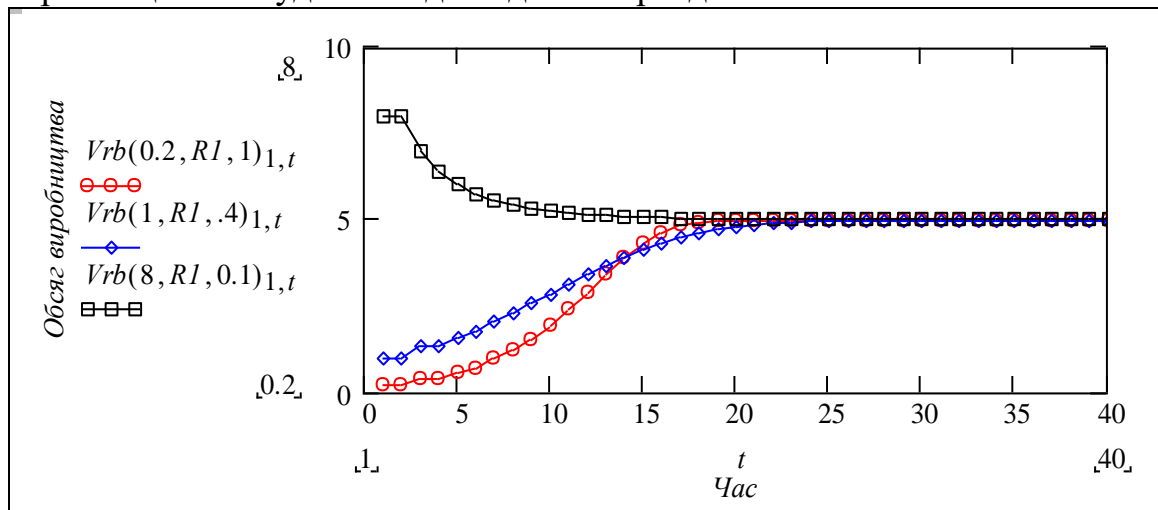


Рис. 5.10. Еволюція рівня виробництва при постійній місткості ринку

На рис. 5.11 подано результати тестування моделі для випадку змінної ємності попиту (сезонний тренд). Задаємо періодичну функцію

$$Ry_t := 5 + 2 \sin[(4 \cdot \pi \cdot t) \div T \bmod].$$

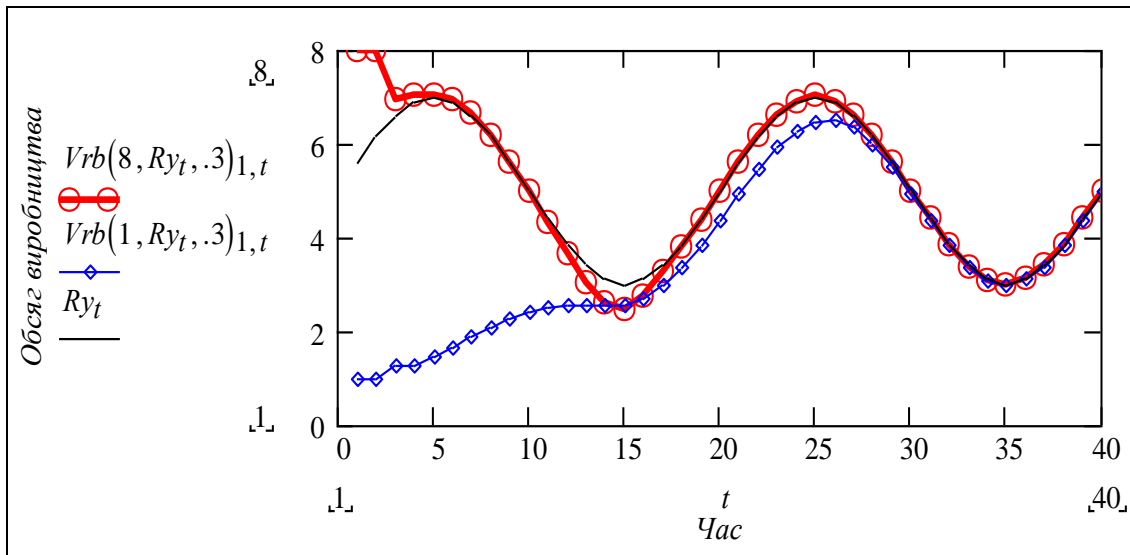


Рис. 5.11. Еволюція рівня виробництва при постійній місткості ринку

Виробничі витрати. Існує два напрямки оцінки і аналізу витрат виробництва – фіскально-ритуальна калькуляція і орієнтований на оптимізацію виробництва. Для сучасного спеціаліста – це оцінка факторів виробництва і темпів освоєння – тобто здешевлення виробництва, постійне вдосконалення конструкції виробу, перехід з ростом обсягів випуску на високі технології масового виробництва та ін. Кінцева ціль стратегічного управління – постійно підвищувати цінність виробу для покупця, в тому числі інтенсивним інформуванням про складові цінності продукту для споживача. Ціль тактичного управління – утримання витрат виробництва на рівні не вище поточної цінності товару для покупця. Цінність певного продукту – ситуативне поняття: скільки міг би заплатити покупець в конкретній ситуації рівня доходів і бажання мати цей продукт для: використання, підвищення престижу, накопичення та ін. Узагальнені виробничі витрати на одиницю продукції і на поточний випуск можна відобразити такою моделлю:

$$\left. \begin{aligned}
 sv(Xs, X, p, vv, vp) &:= vv \cdot p^{\frac{\ln(Xs)}{\ln(2)}} + vp \cdot X^{-1}; \\
 Vytri, t &= sv \left(\sum_{\tau=1}^t X_{i, \tau}, X_{i, t}, p, vv, vp \right) \cdot X_{i, t},
 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

де vv – коефіцієнт "змінних" витрат; vp – коефіцієнт "постійних" витрат; $0 < p < 1$ – коефіцієнт освоєння виробництва (чим він

менший, тим швидше зменшуються витрати); X – темп випуску; X_s – сумарний випуск за весь період виробництва товару. Виробничі витрати (i -ої фірми в момент t) $Vytr_{i,t}$, пропорційні темпу випуску.

Зауваження. Можна бачити, що в математичному плані, навіть спрощені моделі виробничих витрат є складними – витрати залежать від темпу випуску та сумарного випуску. В математичному аспекті це залежність від змінної та інтеграла цієї змінної.

Доход. Для наших цілей – моделювання системи фірм, досить простої моделі:

$$Dox_{i,t} = cp_t \cdot X_{i,t-1}. \quad (5.17)$$

Уся складність моделі доходу схована в cp_t – ціні продажу: ціна продажу впливає на попит, ціна продажу залежить від цін конкурентів, ціна продажу повинна враховувати майбутнє зниження витрат. Для максимізації сумарного прибутку, можливо, ціну потрібно буде встановити спочатку малою, потім обґрунтовано для покупців підвищувати її, а може навпаки. Це окрема тема: "стратегія і тактика ціноутворення".

Прибуток є найбільш невизначеною і нечіткою категорією. "Юридичний" прибутокзначається фінансистами і приводиться до потрібного значення системою бухгалтерії. Але в біологічному сенсі він існує – це баланс функціонування організму – організм росте – значить прирощення енергії і маси організму перевищує витрати організму.

$$Prb_{i,t} = Dox_{i,t} - Vytr_{i,t}. \quad (5.18)$$

На рис. 5.12 подано текст модуля "процес виробництва".

$Vr2(x0, Ryn, efe) :=$	$X_{1,1} \leftarrow x0$ $Xs \leftarrow x0$ $Vytr_{1,1} \leftarrow vv \cdot x0 + vp$ $Inv_{1,1} \leftarrow Kredit$ $SPr_{1,1} \leftarrow 0$ $SmInv_{1,1} \leftarrow 0$ for $t \in 1..TM$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> $Su_t \leftarrow X_{1,t}$ $vozm \leftarrow \frac{Ryn - Su_t}{Ryn}$ $likv \leftarrow 2 \cdot X_{1,t}$ $\Delta X_{1,t+1} \leftarrow \begin{cases} efe \cdot vozm \cdot likv \cdot krok & \text{if } vozm \leq 0 \\ efe \cdot vozm \cdot Inv_{1,t} \cdot krok & \text{otherwise} \end{cases}$ $X_{1,t+1} \leftarrow X_{1,t} + \Delta X_{1,t+1}$ $Xs \leftarrow Xs + X_{1,t+1}$ $Vytr_{1,t+1} \leftarrow \left(vv \cdot p \frac{\ln(Xs)}{\ln(2)} \right) \cdot X_{1,t} + vp$ $Dox_{1,t+1} \leftarrow cpr \cdot X_{1,t+1}$ $Prb \leftarrow Dox_{1,t+1} - Vytr_{1,t+1}$ $Inv_{1,t+1} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } vozm \leq 0.05 \\ vozm \cdot (\max(Prb, Kredit)) & \text{otherwise} \end{cases}$ $PrK_{1,t+1} \leftarrow Prb - Inv_{1,t+1}$ $SPr_{1,t+1} \leftarrow SPr_{1,t} + PrK_{1,t+1}$ $SmInv_{1,t+1} \leftarrow SmInv_{1,t} + Inv_{1,t+1}$ $vyx \langle t \rangle \leftarrow \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ Inv_{1,t} \\ PrK_{1,t} \\ SPr_{1,t} \\ SmInv_{1,t} \\ Prb \end{pmatrix}$ </td> </tr> </table>	$Su_t \leftarrow X_{1,t}$ $vozm \leftarrow \frac{Ryn - Su_t}{Ryn}$ $likv \leftarrow 2 \cdot X_{1,t}$ $\Delta X_{1,t+1} \leftarrow \begin{cases} efe \cdot vozm \cdot likv \cdot krok & \text{if } vozm \leq 0 \\ efe \cdot vozm \cdot Inv_{1,t} \cdot krok & \text{otherwise} \end{cases}$ $X_{1,t+1} \leftarrow X_{1,t} + \Delta X_{1,t+1}$ $Xs \leftarrow Xs + X_{1,t+1}$ $Vytr_{1,t+1} \leftarrow \left(vv \cdot p \frac{\ln(Xs)}{\ln(2)} \right) \cdot X_{1,t} + vp$ $Dox_{1,t+1} \leftarrow cpr \cdot X_{1,t+1}$ $Prb \leftarrow Dox_{1,t+1} - Vytr_{1,t+1}$ $Inv_{1,t+1} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } vozm \leq 0.05 \\ vozm \cdot (\max(Prb, Kredit)) & \text{otherwise} \end{cases}$ $PrK_{1,t+1} \leftarrow Prb - Inv_{1,t+1}$ $SPr_{1,t+1} \leftarrow SPr_{1,t} + PrK_{1,t+1}$ $SmInv_{1,t+1} \leftarrow SmInv_{1,t} + Inv_{1,t+1}$ $vyx \langle t \rangle \leftarrow \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ Inv_{1,t} \\ PrK_{1,t} \\ SPr_{1,t} \\ SmInv_{1,t} \\ Prb \end{pmatrix}$
$Su_t \leftarrow X_{1,t}$ $vozm \leftarrow \frac{Ryn - Su_t}{Ryn}$ $likv \leftarrow 2 \cdot X_{1,t}$ $\Delta X_{1,t+1} \leftarrow \begin{cases} efe \cdot vozm \cdot likv \cdot krok & \text{if } vozm \leq 0 \\ efe \cdot vozm \cdot Inv_{1,t} \cdot krok & \text{otherwise} \end{cases}$ $X_{1,t+1} \leftarrow X_{1,t} + \Delta X_{1,t+1}$ $Xs \leftarrow Xs + X_{1,t+1}$ $Vytr_{1,t+1} \leftarrow \left(vv \cdot p \frac{\ln(Xs)}{\ln(2)} \right) \cdot X_{1,t} + vp$ $Dox_{1,t+1} \leftarrow cpr \cdot X_{1,t+1}$ $Prb \leftarrow Dox_{1,t+1} - Vytr_{1,t+1}$ $Inv_{1,t+1} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } vozm \leq 0.05 \\ vozm \cdot (\max(Prb, Kredit)) & \text{otherwise} \end{cases}$ $PrK_{1,t+1} \leftarrow Prb - Inv_{1,t+1}$ $SPr_{1,t+1} \leftarrow SPr_{1,t} + PrK_{1,t+1}$ $SmInv_{1,t+1} \leftarrow SmInv_{1,t} + Inv_{1,t+1}$ $vyx \langle t \rangle \leftarrow \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ Inv_{1,t} \\ PrK_{1,t} \\ SPr_{1,t} \\ SmInv_{1,t} \\ Prb \end{pmatrix}$		
	vyx	

Рис. 5.12. Текст модуля "процес виробництва"

На рис. 5.13 подано інтерфейс програмного модуля і приклад моделювання. Призначення зробленої моделі – розуміння процесу.

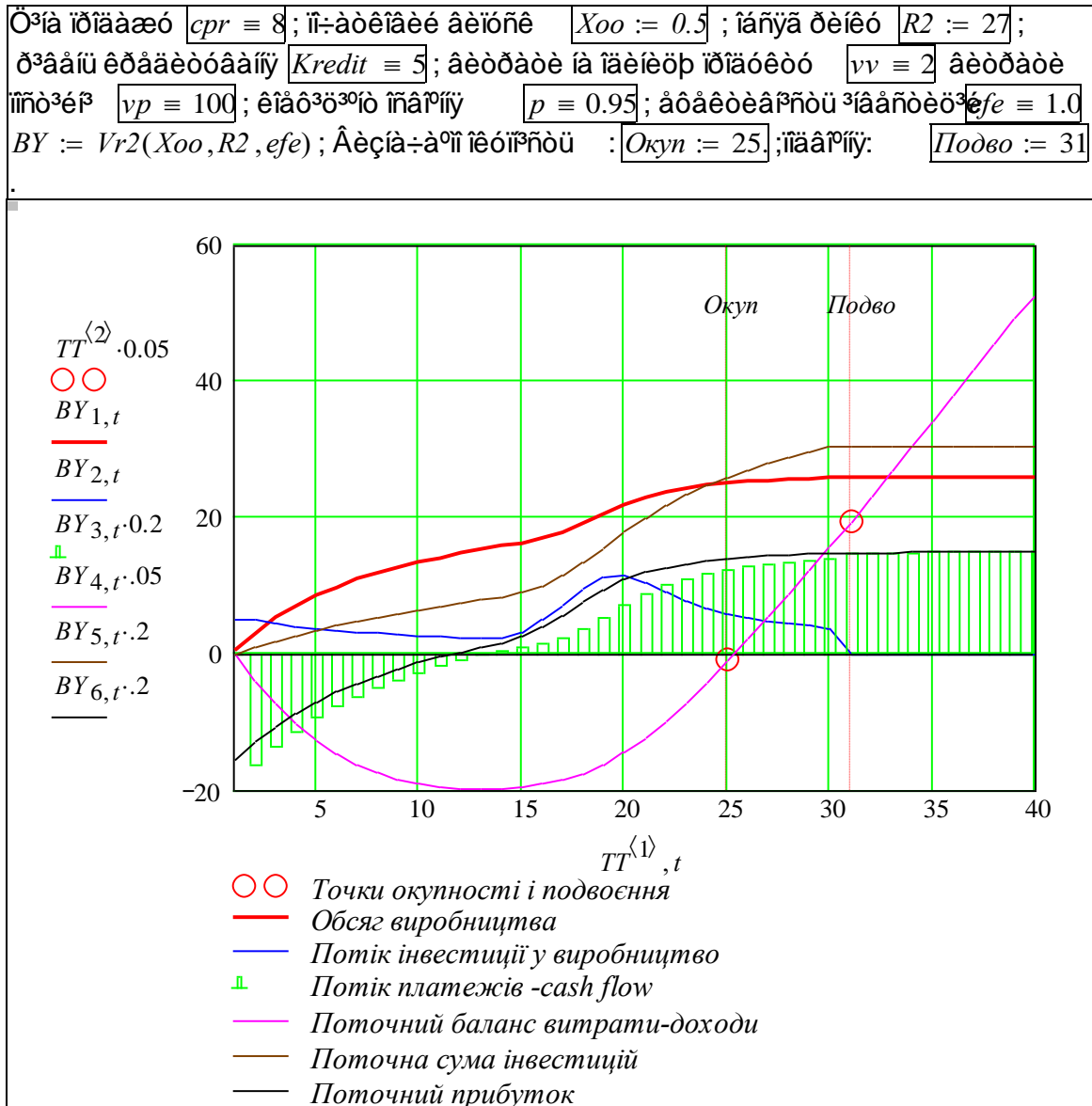


Рис. 5.13. Інтерфейс програми "процес виробництва"

Висновки

Побудовані робочі моделі для задач оптимального розподілу обмежених ресурсів з використанням нечіткої логіки. Це фактично стало першим кроком в розширенні і уточненні базової моделі оптимізації розподіленої виробничої системи. Другий крок – побудова базової робочої моделі функціонування виробництва з урахуванням таких реалій: обмежений попит на продукт, витрати на регулювання виробничих потужностей і витрати на виробництво продукції з урахуванням ефектів освоєння. Це в підсумку дає можливість побудувати модифіковані моделі агрегування виробництв.

РОЗДІЛ 6.

ПОБУДОВА РОБОЧИХ МОДЕЛЕЙ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ "ПРИРОДНОАГРЕГОВАНИХ СИСТЕМ"

В попередніх розділах розглядалися переважно моделі централізованої оптимізації розподілу узагальнених ресурсів між елементами деякої розподіленої системи. Розглянуто класичні методи відкритого управління, що дозволяють децентралізувати задачу оптимізації. З часу появи моделей відкритого управління виникло багато нових актуальних задач управління в розподілених системах, одночасно якісно і кількісно зросли можливості комп'ютерних систем. В цьому розділі будуються і досліджуються моделі агрегування у випадках, коли елементи певних розподілених систем, на відміну від ситуацій торгів, аукціонів, конкурсів, свідомо не ставлять конкретних цілей, не взаємодіють явно і цілеспрямовано з іншими елементами, але під впливом природних, неусвідомлених "механізмів" утворюють певні цілісні системи з певними властивостями. В цьому останньому розділі розглядаємо моделі попиту, тому що в сучасних умовах саме потенційні структура і динаміка попиту обумовлюють задачі проектування, стратегії розвитку виробничої системи і стратегії доведення продукту до споживача.

Можна припустити, що ці стратегії для різних класів продуктів мають багато спільного. Тобто головні проблеми однакові і для молочних і банківських продуктів.

Поданий далі підрозділ є прикладом конструювання математичної моделі, що не має прямих прототипів. Друге призначення прикладу – показати, що спеціаліст з теорії управління повинен формалізувати і розв'язувати задачі синтезу систем управління довільними об'єктами незалежно (це не значить: не вивчаючи, не використовуючи детальних даних про властивості об'єкта управління) від специфіки об'єкта: банківської системи, літального апарата, установки для виробництва біогазу, ринку послуг вищої освіти (останній об'єкт, на жаль, занадто складний і примітивний одночасно).

6.1. Розробка робочої моделі формування кредитного портфеля

Маємо дві альтернативи побудови робочої моделі портфелю кредитів:

- 1) модель на базі класичної теорії портфелю Марковиця і Тобіна;
- 2) модель на базі нелінійного програмування.

Припустимо, що відомі такі параметри по окремих групах кредитів:

$$ByBy := \begin{pmatrix} \text{"термін"} & \text{"ставкаПр"} & \text{"ризНПВ"} & \text{"частка"} \\ 1 & 0.15 & 0.10 & 0.17 \\ 2 & 0.12 & 0.08 & 0.22 \\ 3 & 0.10 & 0.06 & 0.10 \\ 4 & 0.09 & 0.05 & 0.05 \\ 5 & 0.09 & 0.04 & 0.05 \\ 6 & 0.08 & 0.04 & 0.05 \\ 7 & 0.08 & 0.06 & 0.06 \\ 8 & 0.08 & 0.06 & 0.07 \\ 9 & 0.07 & 0.08 & 0.09 \\ 10 & 0.06 & 0.10 & 0.14 \end{pmatrix}$$

$\sum_{i=2}^{\text{rows}(ByBy)} ByBy_{i,4} = 1$

На базі такого типу даних можна побудувати модель в основі якої залежність "ризик – дохідність".

Другий підхід до побудови моделей кредитного портфеля: система споживачів кредитів → система функцій попиту, або моделей "доступних і бажаних кредитів". Виділимо типові класи позичальників і кредитів:

- кредити на споживання: побутова техніка, житло, земля;
- кредити для бізнесу: кредити при відсутності у позичальника власних ресурсів, кредити на розвиток оптимізовані за сумою, тривалістю, стратегіями кредитування і повернення кредитів.

Вважаємо, що існує двовимірний розподіл кількості кредитів в залежності від тривалості та розміру. В доступній літературі відсутні аналоги підходу до формування портфеля кредитів на базі системних властивостей розподілених об'єктів – споживачів кредитів. Те, що подано далі – приклад конструювання робочої моделі в ситуації "нова модель для нової задачі".

Зробимо такі функції:

- обсяг кредитів (розмір окремого кредиту);
- обсяг кредитів (тривалість повернення кредиту);
- тривалість повернення кредиту (розмір кредиту);
- кількість кредитів (розмір, тривалість).

На множині споживачів повинен існувати певний розподіл частоти кредитів від розміру кредиту. Можливі альтернативи: пуассонівський розподіл, нормальний розподіл, логнормальний розподіл, розподіл Юла. Вибираємо, в першому наближенні, логнормальний, як узгоджений з емпіричними даними. В другому наближенні треба шукати механізми породження попиту на кредити. Це нетривіальна

задача, якою займається маса організацій, що вимірюють і прогнозують: "індекс виробничої активності", "індекс активності в сфері послуг", "індекс настроїв споживачів". На ці "соціо-психологічні" індекси впливають більш об'єктивні за процедурами вимірювання індекси :

- "USD index" – стан долара,
- "Dow Jones" – стан індустрії,
- "NASDAQ" – стан високотехнологічної індустрії.

Причини змін названих індексів котирування акцій лише частково обумовлені об'єктивними факторами, друга частина причин – настрої, очікування, наміри споживачів. Тобто дві групи індексів взаємопов'язані. Специфіка механізмів, що обумовлюють поведінку виробників і споживачів в тому, що типовий індивід в економічно розвиненому суспільстві – є "триєдиним": виробником, споживачем та інвестором одночасно. Власне ця триєдність, а не рівень доходів є головною ознакою "середнього класу".

Бачимо, що проблема виявлення діючих в соціумі механізмів, що визначають те, що цікавить виробника – попит на його продукцію, є масштабною і складною. Відомо, що у великих децентралізованих системах велика кількість складних взаємодій між елементами приводить до простих усталених станів. Відомо, що нормальний розподіл є результатом великої кількості незалежних випадкових подій. Результатом взаємодії активних елементів є негаусівські розподіли з нескінченими дисперсіями, зовнішня ознака яких – "довгий хвіст" великих елементів.

Все це в підсумку дозволяє використати просту модель системи споживачів кредитів.

6.2. Розробка моделі розподіленого попиту на кредити для споживання

Приймаємо такі припущення:

- залежність середньої тривалості повернення кредитів від розміру кредитів – лінійна;
- розкид тривалості повернення кредитів певного розміру має нормальний розподіл;
- при зростанні середнього доходу в системі споживачів попит на кредити зростає;
- розподіл частоти споживацьких кредитів є монотонним відображенням розподілу доходів.

Робимо модель залежності частоти кредитів від розміру кредиту. Задаємо значення параметрів: максимальний кредит $NN := 100$ угод (умовних грошових одиниць, не прив'язуємо модель до якоїсь

конкретної ситуації); $x := 0.1, 0.6 \dots NN$; середнє $\mu := 3.3$; розкид $\sigma := 0.5$

$$doxpom(x, nd) := dlnorm(x - nd, \mu + 0.1nd, \sigma), \quad (6.1)$$

де x – рівень доходу; nd – параметр типу "дохід на душу населення".

На рис. 6.1 представлені графіки розподілів частоти кредитів за розміром кредиту для малого, середнього та великого середніх доходів.

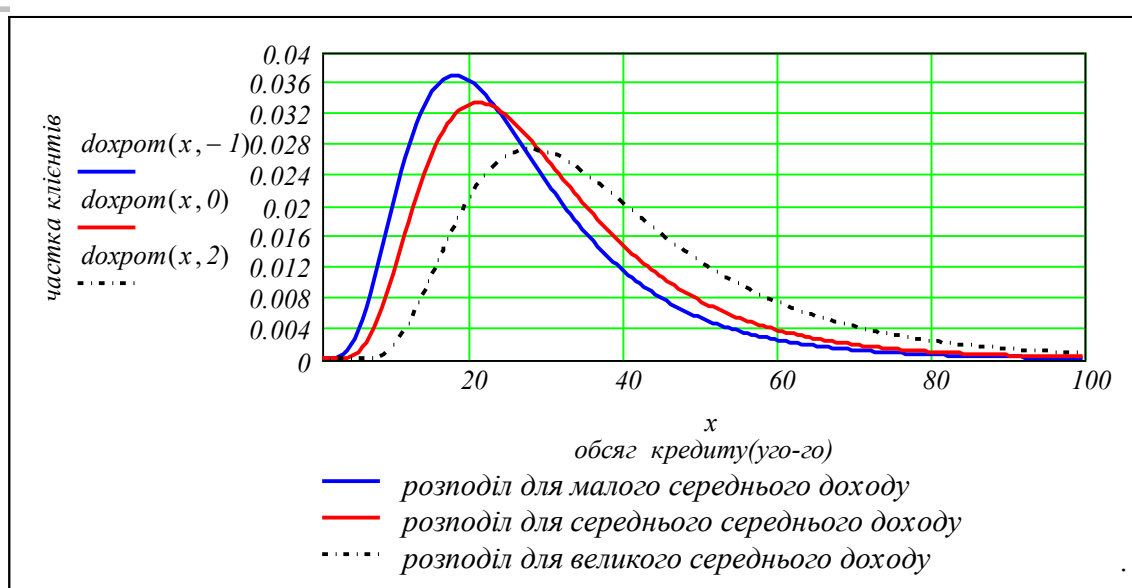


Рис. 6.1. Розподіл частоти кредитів за розміром кредиту

Найбільша небезпека в конструюванні нових моделей – пропустити "несмертельну" помилку, коли робоча модель синтаксично коректна, видає певні правдоподібні результати. Тому невід'ємна складова конструювання робочих моделей – контроль кожного кроку:

$$\int_0^{NN} doxpom(x, -1) dx = 1 ; \quad \int_0^{NN} doxpom(x, 2) dx = 1 .$$

Вирішальна помилка – вибір неадекватної гіпотези відносно механізмів, що породжують поведінку системи, що спостерігається. В нашому випадку критичним є припущення про монотонний характер відображення розподілу споживачів за доходами у розподіл кредитів за розміром.

Проаналізуємо на рівні конструювання робочих моделей згідно з словесними твердженнями – лінгвістичними моделями.

На рис. 6.2 подано дві схеми відображення розподілу доходів у розподіл кредитів.

Відображення на рівні розподілів має смисл тільки в штучній ситуації, коли елементи одного інтервалу в розподілі доходів відображаються в один інтервал розподілу попиту.

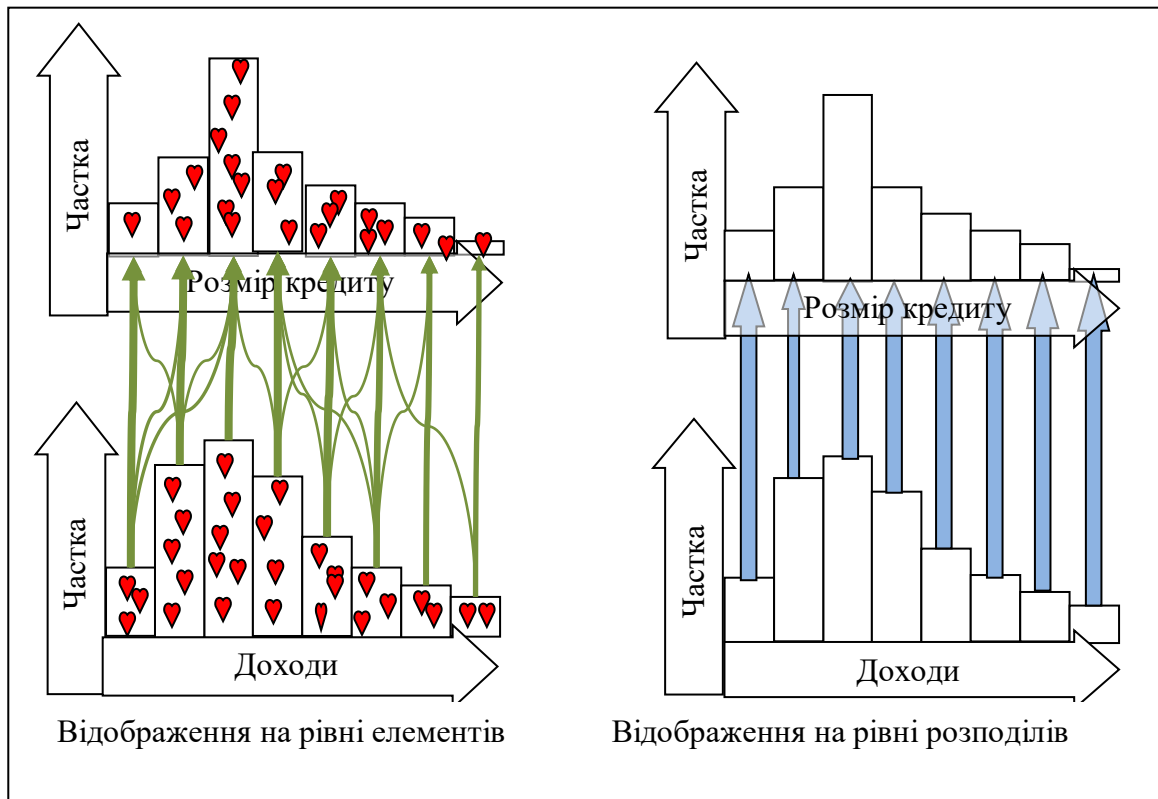


Рис. 6.2. Дві схеми відображення розподілу доходів в розподіл кредитів

Відображення на рівні імітації поведінки окремих споживачів не має штучних обмежень і дозволяє точно відтворювати механізми розподілу, що виникають в реальних системах. Саме "виникають", тому що на глобалізованому, перенасиченому ринку поведінка споживача може бути динамічною і метаморфозною.

На рис. 6.3, 6.4 подано приклад імітації перерозподілу споживачів на основі дворівневої моделі вибору споживача [31, 54]. В основі моделі формалізація емпіричних даних про поведінку споживача: нечіткий вибір цінового діапазону продукту, потім вже випадковий вибір продукту з підмножини доступних за ціною і бажаних за цінністю, з навчанням за результатами власного і чужого досвіду.

В побудові моделі застосовано компоненти методології оптимального агрегування, а саме – алгебраїзацію складних залежностей та векторизацію обробки структур даних.

Подамо логіку конструювання агрегованих моделей на "очевидних" прикладах:

$x_{k+1} = A \cdot x_k + B \cdot u_k$ – лінійна система, об'єкти – вектори стану;

$Mu_{k+1} = Mu_k + Nast(Mu_k, dMu_k)$ – адитивно-нелінійна система, об'єкти – матриці стану;

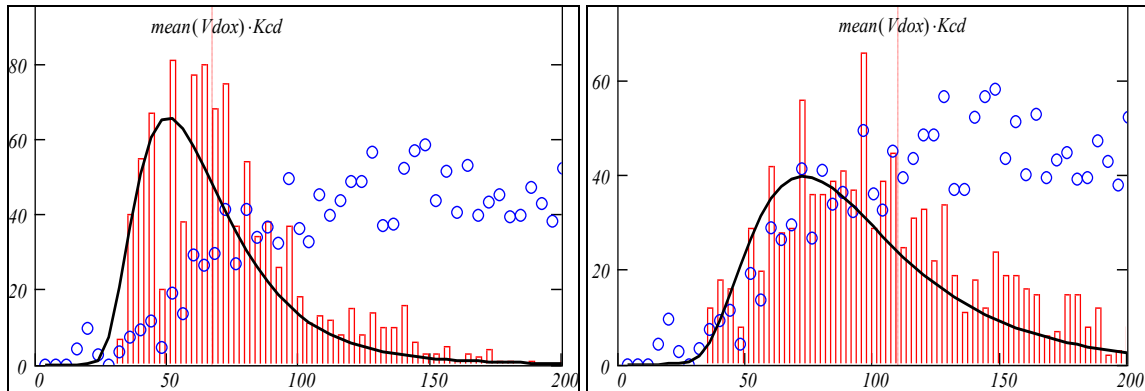
$Mu_{k+1} = Op(M_k, U_k, P)$ – довільна нелінійна система, об'єкти – матриці стану; U_k, P – поточне управління і масив параметрів.

Основа моделі імітації вибору системи споживачів, упорядкованих за доходами, на системі продуктів певного класу, упорядкованих за ціною (лінійці продуктів), – оператор, що визначає наступний стан системи споживачів і наступний стан темпів продаж системи продуктів:

$$Mf_{k+1} \leftarrow vp10 \left[\begin{pmatrix} Mf_k \\ Misci \\ Nevy \end{pmatrix}, Al \right]_2, \quad (6.2)$$

де: Mf_1 – значення матриці оцінок продуктів споживачами; $Misci$ – матриця "істинних" оцінок продуктів; $Nevy$ – матриця невизначеностей оцінок продуктів споживачами; Mf_{k+1} – наступне значення матриці оцінок продуктів; Al – критичний параметр – швидкість навчання.

Оператор $vp10$ повертає також $KolKur^{(k)}$ – вектор темпів продажів продуктів.



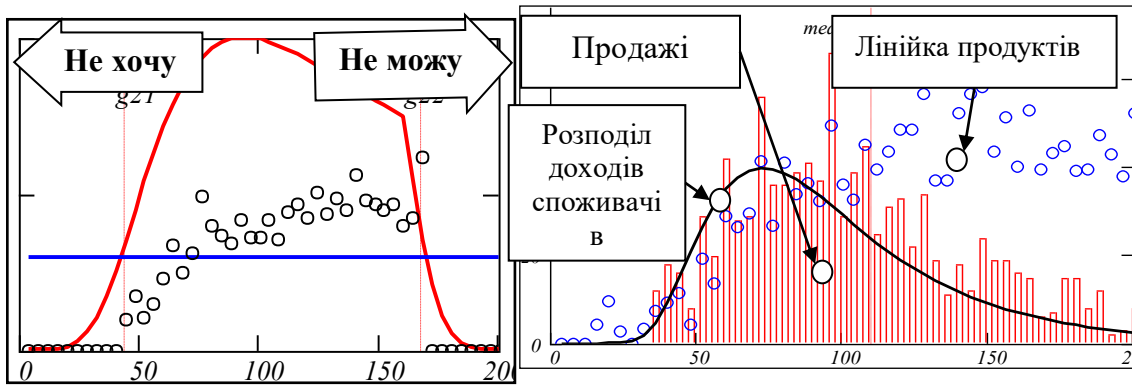


Рис. 6.3. Моделювання процесу розподілу попиту на лінійці продуктів

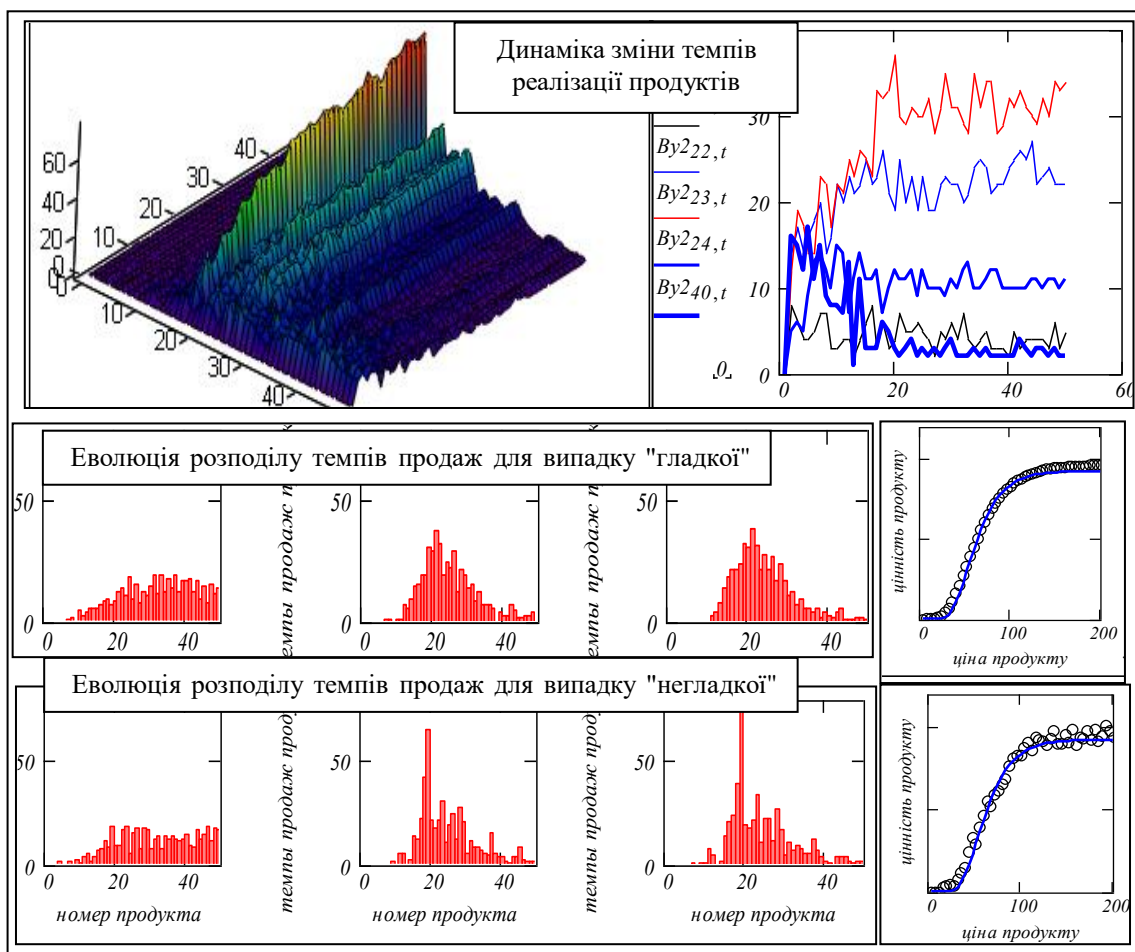


Рис. 6.4. Особливості відображення розподілу доходів в розподіл попиту

Подивимось на графіки на рис. 6.3, 6.4 і перекладемо результати з мови графіків на природну мову:

– задано систему споживачів з певним розподілом доходів (див. рис. 6.1);

– споживачі з більшим доходом мають можливість вибирати продукти в більш широкому діапазоні цін, заданому в моделі нечітким індивідуальним обмеженням граничної ціни, яке залежить також від цільового призначення продукту і масштабу цін;

– вибір конкретного продукту конкретним споживачем виконується з множини доступних і бажаних продуктів (див. рис. 6.3) випадково з розподілом імовірностей, що змінюється за результатами власного досвіду та інформаційного обміну в системі споживачів;

– в підсумку, в усталеному стані, *розподіл темпів продажів є відображенням* (див. рис. 6.3, 6.4) *розподілу доходів* споживачів (див. рис. 6.1);

– однак це відображення є "гладким" тільки у випадку – монотонної залежності "ціна – цінність" (див. рис. 6.3), для негладкої лінійки маємо негладкий розподіл темпів продажів.

Назвемо, те що отримуємо у випадку "негладкої лінійки" **"локальною нестійкістю некерованої лінійки продуктів до збурень монотонності"**.

Таким чином, моделювання дозволяє обґрунтувати гіпотезу про відображення розподілу доходів в розподіл попиту на лінійці продуктів, однак при цьому виникає розгалужене "дерево" нових проблем. Перейдемо до розгляду простої задачі побудови розподіленої функції попиту на продукти класу "споживацькі кредити".

Банк цікавить не тільки частка клієнтів, що бажають взяти кредит певного обсягу, але і загальна сума кредитів цього розміру. Побудуємо ще одну серію графіків – залежність суми потенційних кредитів в певному регіоні від величини доходу. Нормований розподіл часток кредитів певного рівня може мати такі інтерпретації:

– імовірність для конкретного індивіда взяти кредит певного розміру;

– імовірність того, що на вибірці в K потенційних клієнтів, частки можна трактувати як ймовірності, що певна кількість клієнтів візьме саме такі кредити. Для цього потрібно кожне значення частоти (частки всіх потенційних клієнтів регіону) помножити на відповідний дохід

$$doxsum(x, nd) := doxpom(x, nd) \cdot x; \quad (6.3)$$

$$qq(nd) := \int_0^{NN} doxsum(x, nd) dx; \quad (6.4)$$

$$\psi\chi(nd) := \int_0^{NN} doxprom(x, nd) dx. \quad (6.5)$$

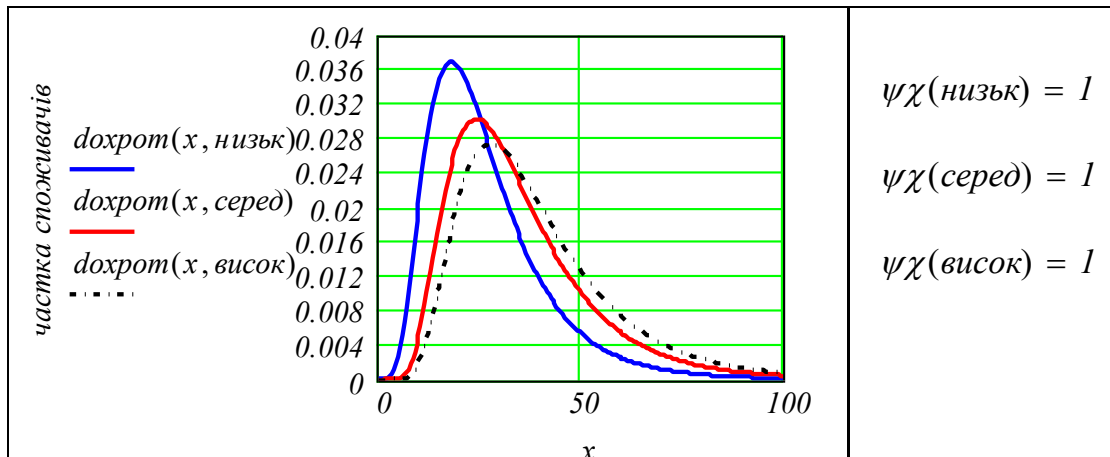


Рис. 6.5. Розподіл числа кредитів за розмірами кредиту

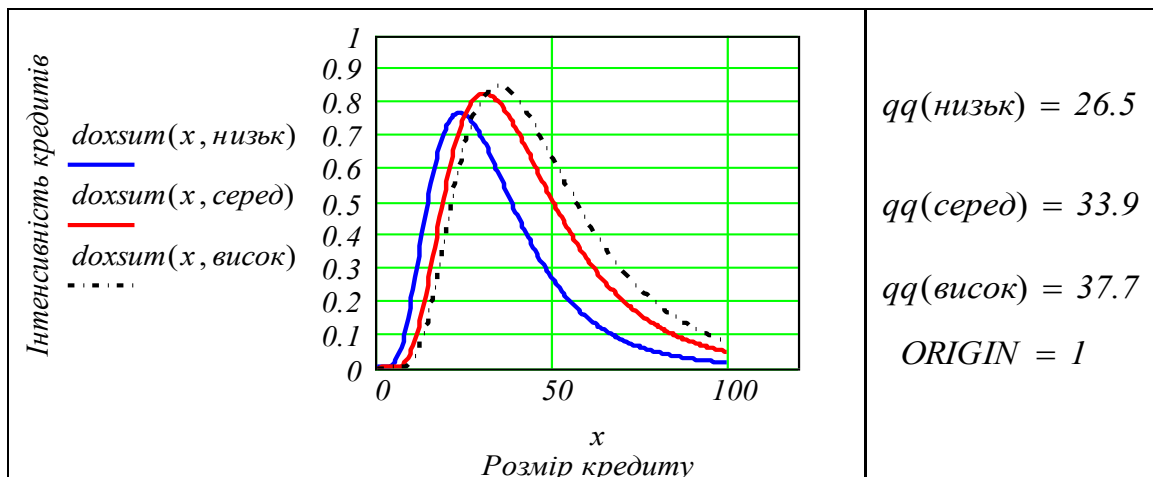


Рис. 6.6. Розподіл обсягів кредитів за розмірами кредиту

6.3. Залежність темпу кредитів від розміру і тривалості повернення

Робимо модель залежності "тривалість кредитів (розмір кредитів)". Спочатку беремо чітку залежність:

$kor := 0.3$ років/1уго, наприклад 3 тис. грн повертаються за рік, 300 тис. грн – за 10 років $Трок(x) := kor \cdot doxprom(x, I)$.

Розмиваємо залежність – вважаємо, що вище подано чітку залежність, – для середнього терміну повернення. Інші описи операції:

– вважаємо залежність нечіткою і вводимо для кожного значення аргумента функції не одну точку значення функції, а "функцію

належності", що звичайно трактується як розподіл ймовірностей можливих значень функції;

– "фаззіфікуємо функцію" (від fuzzy) – якщо Ви чітко освоїли методи та інструменти нечіткої логіки, вбудованої в деякі пакети, наприклад, Matlab.

Зробимо підпрограму для залежності параметра нечіткості від значення незалежної змінної. Ця залежність є формалізацією такої словесної формули: "при малих і великих значеннях ставки кредитів клієнт веде себе чітко (безумовно бере, безумовно не бере кредит), а при середніх значеннях ставки кредитів має коливання, який банк вибрати.

$$\text{sigm}(yp, Amax) := \min[(Amax - yp), (yp - 0)] + 0.1,$$

де $yp \in (0..Amax)$; $\text{sigm}(90, 100) = 10$; $\text{sigm}(53, 100) = 47$.

Робимо програму, що робить двовимірну розмиту залежність попиту від натуральних витрат (годин праці на продукт). Задаємо: кількість точок сітки (узгоджуємо з попереднім) $Kts := NN$; $Kts = 100$ індекс для розміру кредиту: $i := 1..Kts$; індекс тривалості кредиту $j := 1..Kts$; масштаби: $kx := 0.3$; $ky := 0.35$; параметр нечіткості, що характеризує розкид планових термінів повернення кредитів $fuzn := 4$.

Записуємо неперервну модель розподілу кількостей кредитів в двовимірному просторі "обсяг–тривалість"

$$\text{rozpKilkistKred}(x, y) := \text{doxpom}[(x + y), 1] \cdot \text{dnorm}(y, x, \text{fuzn}) \quad (6.6)$$

Записуємо дискретизовану модель розподілу

$$\text{rKilk}_{i,j} := \text{doxpom}[(i \cdot kx + j \cdot ky), 1] \cdot \text{dnorm}(j \cdot ky, i \cdot kx, \text{fuzn}) \quad (6.7)$$

Записуємо нормовану дискретну модель розподілу і тут же перевіряємо

$$\text{rKilnrm}_{i,j} := \frac{\text{rKilk}_{i,j}}{\sum_{i=1}^{Kts} \sum_{j=1}^{Kts} \text{rKilk}_{i,j}}; \quad \sum_{i=1}^{Kts} \sum_{j=1}^{Kts} \text{rKilnrm}_{i,j} = 1. \quad (6.8)$$

Помножимо кожне значення дискретної нормованої функції на обсяг кредиту $x = i \cdot kx$

$$\text{rSum}_{i,j} := \text{rKilnrm}_{i,j} \cdot (i \cdot kx) \quad (6.9)$$

отримуємо розподіл попиту на кредитні кошти по дискретних точках простору "обсяг кредиту–тривалість повернення кредиту". Що тоді означає вираз

$$Udoj1 := \sum_{i=1}^{Kts} \sum_{j=1}^{Kts} rSum_{i,j}, \quad (6.10)$$

де $Udoj1 = 15$ уго/клієнта (умовних грошових одиниць, наприклад, євродінарів, юанів). Неважко відповісти на це питання тому, хто вивчав квантову теорію – там електрони та інші елементарні частинки "розмазані" по простору...

Припустимо, що в зоні обслуговування банку знаходиться $Kfi := 10000$ фізичних осіб з певним, введеним в наші моделі розподілом доходів і відповідною функцією попиту при нульовій ставці. Тоді відповідний максимум попиту на всі можливі кредити буде $Kredpot(Udo1, Kfi) := Udo1 \cdot Kfi$; $Kredpot(Udoj1, Kfi) = 153994$ юанів.

На рис. 6.7 подано тривимірні графіки функції розподілу кредитів в залежності від розміру і тривалості повернення кредиту у вигляді проєкцій на відповідні площини ("обсяг кредиту–щільність темпу кредитів" та "тривалість повернення кредиту–щільність темпу кредитів").

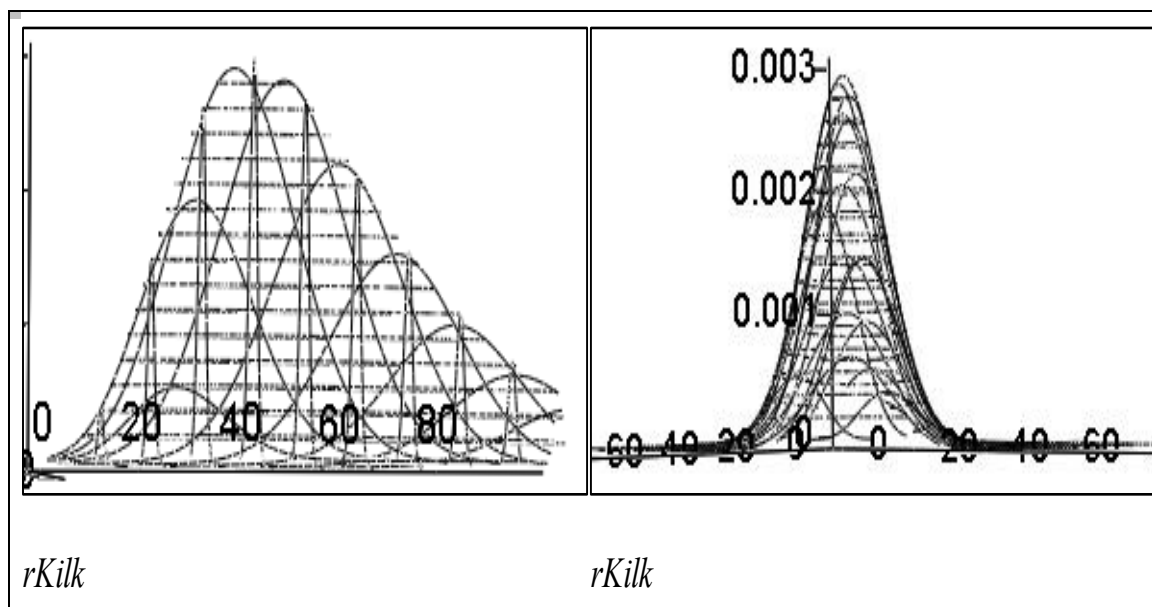


Рис. 6.7. Тривимірні графіки нечіткої функції належності кредитів

На рис. 6.8 подано тривимірні графіки розподілу щільності кількості кредитів і щільності суми кредитів від розміру і тривалості.

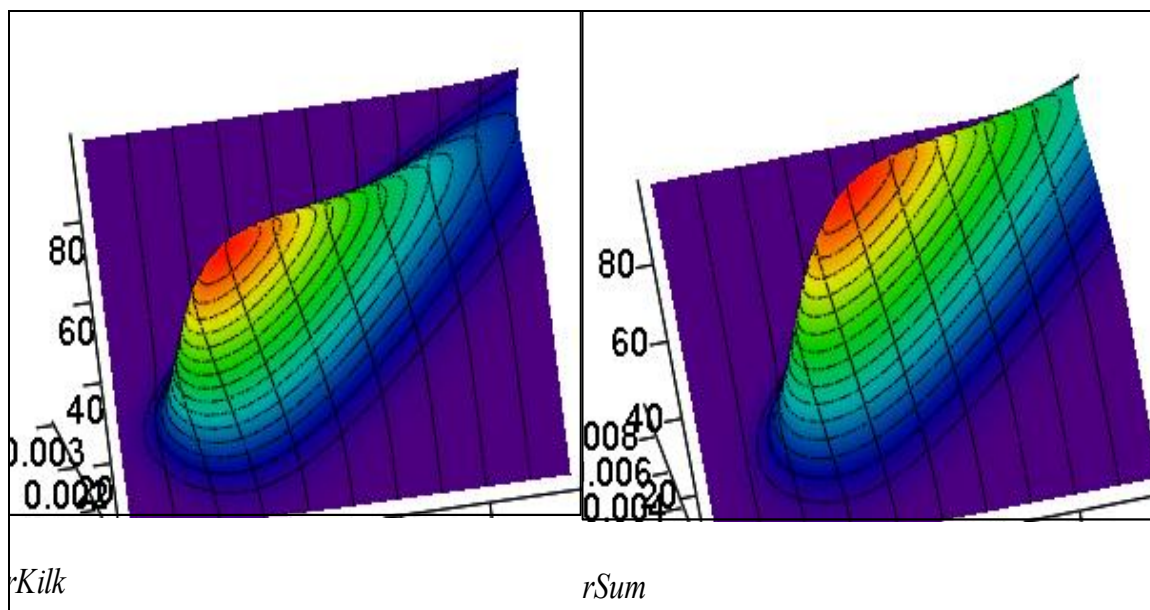


Рис. 6.8. Модель розподілу частоти кредитів і обсягу в просторі "обсяг–тривалість повернення"

У користувача, орієнтованого на практичне застосування, повинно виникнути два питання:

а) в яких одиницях вимірюються обсяг кредиту і тривалість повернення;

б) наскільки коректна модель, тобто наскільки обгрунтовані: залежність тривалості повернення від обсягу, логнормальний розподіл кількостей кредитів за обсягом, нормальний розподіл для розкиду тривалості повернення кредитів одного обсягу.

Відповіді:

а) в цій роботі ставиться задача розробки програмного продукту, розробляється скоріше не автоматизована система, а метасистема, фрейм, що може бути настроєний на будь-яку конкретну задачу;

б) модель відповідає базовим механізмам (більший кредит довше повертається, частота малих і великих кредитів мала) і є тому структурно коректна. При наявності бажання або необхідності, модель можна настроїти на інші детерміновані та ймовірнісні зв'язки.

Визначимо ряд параметрів потенційних обсягів кредитів, що будуть використані в моделях портфеля кредитів, частка і кількість кредитів цього розміру (в інтервалі сітки, елементи сум визначені в (6.8), (6.9))

$$\left. \begin{aligned}
 Part(xk, dxk) &:= \sum_{i=xk}^{xk+dxk} \sum_{j=1}^{Kts} rKilnrm_{i,j} \\
 Kpart(xk, dxk) &:= Part(xk, dxk) \cdot Kfi.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

$Part(40,0) = 0 ; Part(40,5) = 0 ;$
 $Kpart(40,0) = 187 ; Kpart(40,5) = 1125$ одиниць.

Сумарний обсяг кредитів цього розміру

$$\left. \begin{aligned} Dengl(xk, dxk) &:= \sum_{i=xk}^{xk+dxk} \sum_{j=1}^{Kts} rSum_{i,j}; \\ DengSum(xk, dxk) &:= Dengl(xk, dxk) \cdot Kfi. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Розглянемо суть показників на прикладі. Для Номеру Дискретної Сітки $НДС := 40$ і діапазону $Діап := 5$ тобто для обсягів кредитів в діапазоні: від $НДС \cdot kx = 12уго$ до $НДС \cdot kx + Діап \cdot kx = 14уго$ маємо таку

щільність кредитного потенціалу: $Dengl(НДС, Діап) = 1.435уго$, що для клієнтської бази в $Kfi = 10000$ бізнес-одиниць (фізичні, юридичні особи) дає такий кредитний потенціал вибраного сегменту кредитів:

$$DengSum(40, Діап) = 14347уго.$$

Для користувача зручніше оперувати з натуральними розмірами кредитів, для програми зручно брати номер інтервалу дискретизації. Робимо програмний модуль (функцію) (рис. 6.9), що бере початок nd та ширину $diap$ діапазону розміру кредитів, індекс середнього доходу на душу населення в регіоні $sdox$ – в грошах, а повертає дискретизовану функцію-вибірку $zfun$ та кредитний потенціал цієї вибірки $sumseg$ – потенційний обсяг сегмента ринку кредитів.

$SegmKrPot(nd, diap, sdox) :=$	$\begin{aligned} &sumseg \leftarrow 0 \\ &for \ i \in 1..Kts - 1 \\ &\quad \left \begin{aligned} &zfun_i \leftarrow Dengl(i, sdox) \cdot (nd \leq i \leq nd + diap) \\ &sumseg \leftarrow sumseg + zfun_i \end{aligned} \right. \\ &\quad \left(\begin{array}{l} zfun \\ sumseg \end{array} \right) \end{aligned}$
--------------------------------	--

Рис. 6.9. Модуль дискретизації розподіленої функції кредитів

Видача програми $SegmKrPot(НДС, Діап, 1) = \begin{pmatrix} \{99, 1\} \\ 3 \end{pmatrix}$ – масив і

число, розпаковуємо її

$$\begin{aligned} SegmKr(nd, diap, sdox) &:= SegmKrPot(nd, diap, sdox)_1; \\ sumseg(nd, diap, sdox) &:= SegmKrPot(nd, diap, sdox)_2. \end{aligned}$$

Формуємо три різних сегменти приблизно однакового обсягу
 $sumseg(10, 22, 1) = 2.997$; $sumseg(35, 6, 1) = 2.977$; $sumseg(45, 5, 1) = 3.125$.

Подемо ці сегменти на графіку (рис. 6.10).

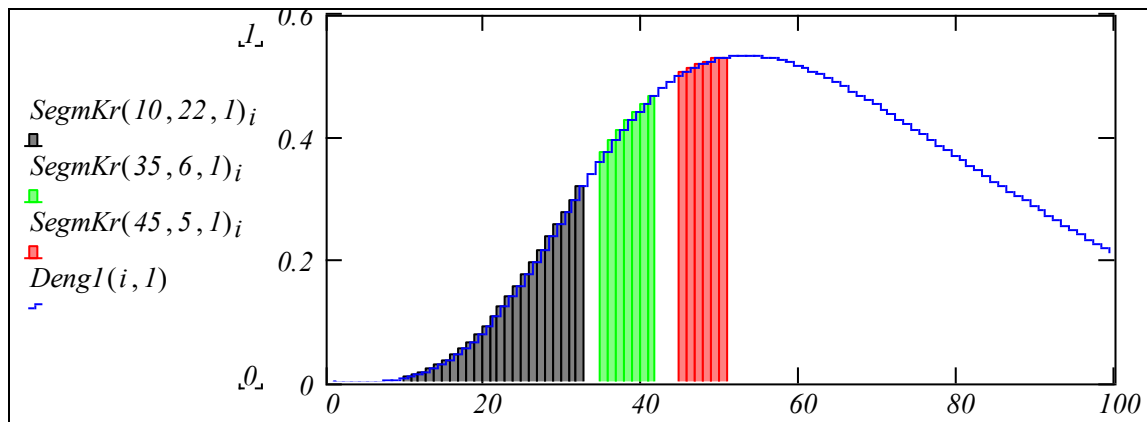


Рис. 6.10. Виділення заданих сегментів на функції розподілу кредитного потенціалу по розміру кредиту

Розглянемо на конкретному прикладі практичне призначення зробленого модуля. Звичайно:

- кредити від 1000 до 20000 угод клієнт отримує протягом 1–3 днів, заповнюючи прив'язною ручкою документи за загальним столом, або стоячі біля відповідного вікна;
- кредити більше 1000000 угод оформлюються в спеціальному приміщенні, з додатковим обслуговуванням: білети на транспорт, замовлення готелю, концерту в номері та ін.

Позичальники різних "вагових категорій" відрізняються функціями попиту, надійності, вимогами до сервісу, що потребує спеціалізації персоналу кредитного підрозділу банку на певні категорії клієнтів. Зроблений модуль – заготовка для розробки модуля, що автоматично обчислює характеристики (доходи, витрати) виділених сегментів ринку кредитів.

6.4. Розробка моделі розподіленого попиту

Попит на кредити залежить від багатьох факторів, з яких найбільш простий і прозорий – ставка кредиту, фактично – ціна грошей. Ставки кредиту – змінні управління станом кредитного портфеля, його структурою і обсягом. Розглянемо клієнтів в аспекті залежності попиту від ставки кредитів. На основі цього розгляду побудуємо узагальнену розподілену модель попиту на кредити, прив'язану до обсягів, тривалості і ризиків неповернення.

Класичні моделі попиту є звичайно агрегованими. Однак, агрегування повинно базуватись на чітких моделях механізмів систем споживачів і продуктів для того, щоб бути конструктивним. Для нашої задачі це означає, що ми повинні проаналізувати можливі механізми споживання.

Робимо узагальнену модель-фрейм для першого наближення, точніше для обчислювальних пошукових експериментів на правдоподібній віртуальній реальності. Ми зробили модель такого класу для "кредитного потенціалу" клієнтської бази, тепер зробимо аналогічну модель розподіленого попиту – попитів на окремі класи кредитів.

6.4.1. Скалярна модель попиту на кредити

Словесна модель. Якщо в регіоні обслуговування немає інших банків, то при нульовій ставці кредитів попит на них не буде нескінченим: уявіть собі ви взяли 1.000.000 угод на рік, і просто не можете вкласти цей мільйон, щоб через рік повернути його без збитків.

При наявності системи банків і фінансового ринку, у випадку нульової ставки, клієнти будуть брати необмежені позики, щоб покласти їх на депозити в інших банках. Будемо вважати стан світової, національної, регіональної і персональної економіки задовільно стабільним. Звичайно банк не буде брати за кредити менше ставки депозиту – нічого не заробить. Припускаємо, що кожному рівню припустимої ставки кредитів відповідає темп кредитів потенційний. Наближуємо реальні залежності попиту на кредити такою S-функцією:

$$F5(x, A, w, s) := A \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-w \cdot 100x} \right)^s \right]. \quad (6.13)$$

Три параметри A, w, s дозволяють досить точно наблизити реальні залежності попиту. Задаємо параметри: максимальне значення амплітуди $Am := 15$; темп зростання $w := 0.17$; "увігнутість" $s := 5$; діапазон ставки кредитів $r := 0, 0.002..0.2$; середня ставка депозитів $рин_дп := 0.11$; середня ставка кредитів $рин_кр := 0.19$ на фінансовому ринку. Записуємо рівняння функції попиту

$$tkr(r, Am) := F5(r, Am, w, s);$$

та рівняння робочої області, "обрізаної" ринковими ставками депозитів і кредитів (рис. 6.11)

$$tkro(r, Am) := F5(r, Am, w, s) \cdot (r > рин_дп) \cdot (r < рин_кр); \quad (6.14)$$

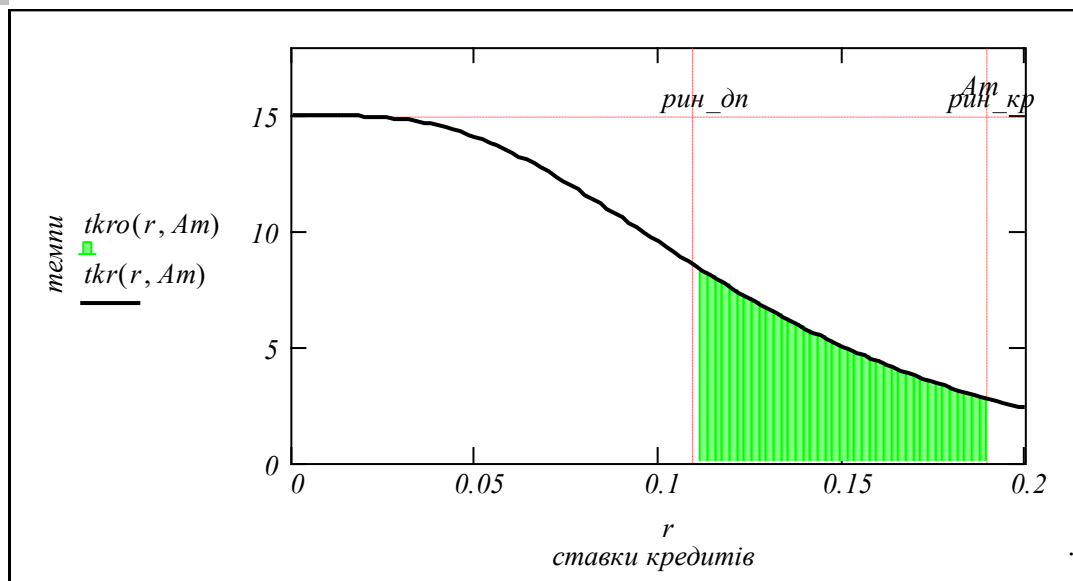


Рис. 6.11. Модель попиту на кредити, виділення робочої зони

6.4.2. Векторна (розподілена) модель попиту на кредити

Логіку розподіленої моделі попиту можна описати так: ми отримали функцію $Deng1(i, sdox)$, що описує потенційний (максимальний, при нульовій ставці) попит на кредити в залежності від розміру кредиту. Побудуємо тепер від кожної точки функції $Deng1(i, sdox)$ функцію попиту з класу S-функції. На першому етапі для усіх цих функцій беремо однакові значення параметрів. Побудуємо тривимірний графік розподіленої функції попиту.

По осі X відкладаємо розмір кредиту (номер точки на сітці),
 - по осі Y – ставку кредиту (теж номер точки на сітці),
 - по осі Z – величину попиту для даних значень змінних "розмір кредиту" і "ставка кредиту".

Формат функції: щільність_попиту (розмір кредиту, ставка кредиту).

Задаємо: індекс: $i := 1..Kts - 1$; крок сітки ставки кредитів $kkr := 0.0025$. Дискретна функція кредитного потенціалу: $Krepot_i := Deng1(i, 1)$. Визначаємо дискретні середні значення ставок кредитів і депозитів на фінансовому ринку

$$Rd_mean := \frac{0.1}{kkr}; Rkr_mean := \frac{0.2}{kkr}.$$

Робимо на базі моделі (6.13) дискретну двовимірну функцію попиту:

$$KrPop_{i,j} := F5(j \cdot kkr, Krepot_i, w, s). \quad (6.15)$$

Робимо також функцію попиту з урахуванням природних обмежень на ставку кредиту (рис. 6.5)

$$\text{Обрез}_{i,j} := \text{KrPop}_{i,j} \cdot (\text{Rd_mean} \leq j \leq \text{Rkr_mean}).$$

Будуємо параметричні графіки, що є "фреймами" для "кредитних стратегій".

$$X_i := i ; Y_i := \text{trunc} \left[30 - 0.004 \cdot (|i - 40|)^2 \right] ; Z_i := \text{KrPop}_{X_i, Y_i} ;$$

$$Y2_i := \text{trunc} \left[50 + 0.004 \cdot (|i - 40|)^2 \right] ; Z2_i := \text{KrPop}_{X_i, Y2_i} .$$

На рис. 6.12 подано проекції тривимірного графіка. На рис. 6.13 подано цей же тривимірний графік в довільних ракурсах. Сьогодні спеціалістам рідних галузей (від політології до нафторозвідки і конструювання молекул) приходиться працювати з складними розподіленими об'єктами (географія уподобань виборців, структури нафтових родовищ).

Наш об'єкт – клієнти, позичальники простіше від названих. Проаналізуємо його подання: на першій проекції (див. рис. 6.7) маємо серію функцій. Тепер наступний крок – сформулювати оптимізаційну задачу. Попередньо ми її означили як встановлення кредитних ставок для кредитів різних розмірів із умови оптимізації заданого критерію.

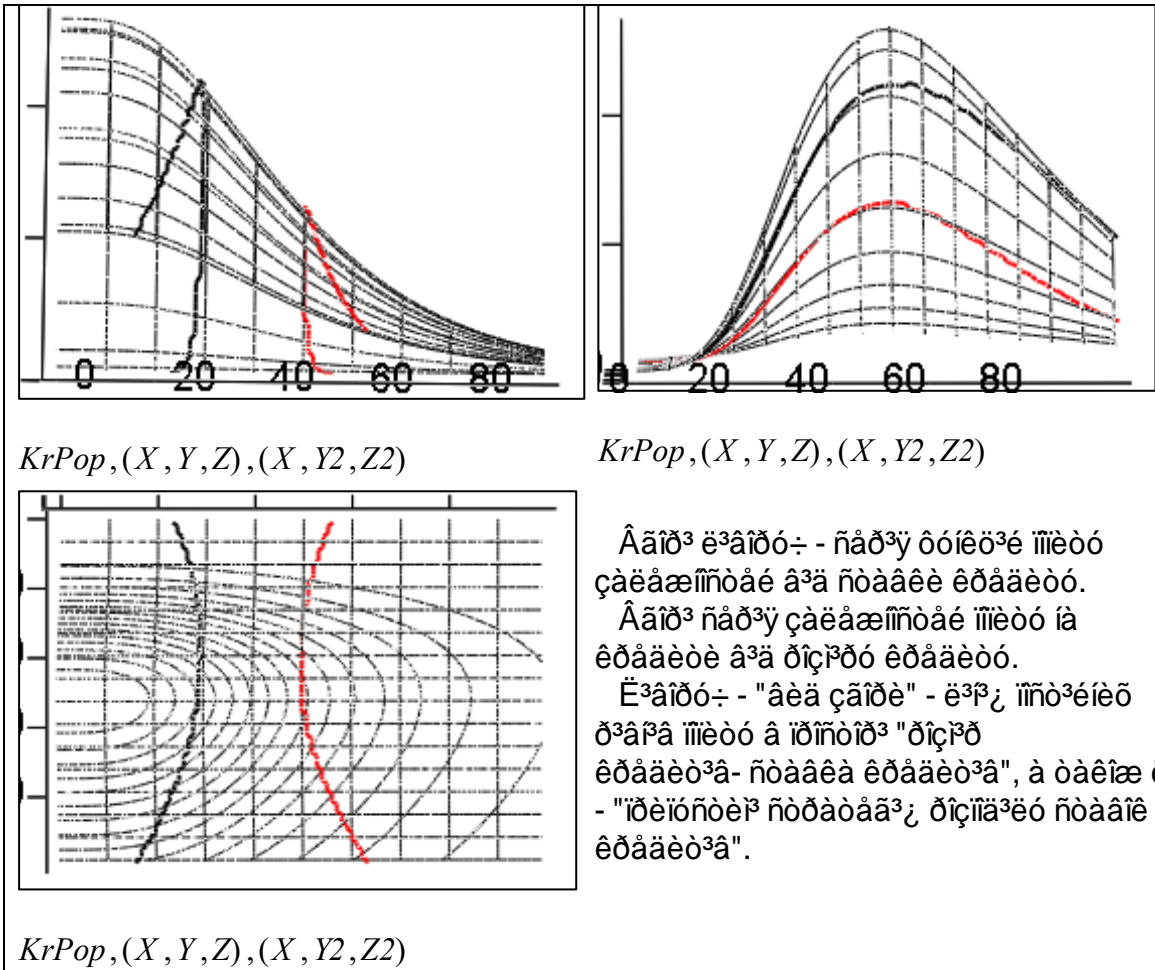


Рис. 6.12. Три проєкції розподіленої функції попиту

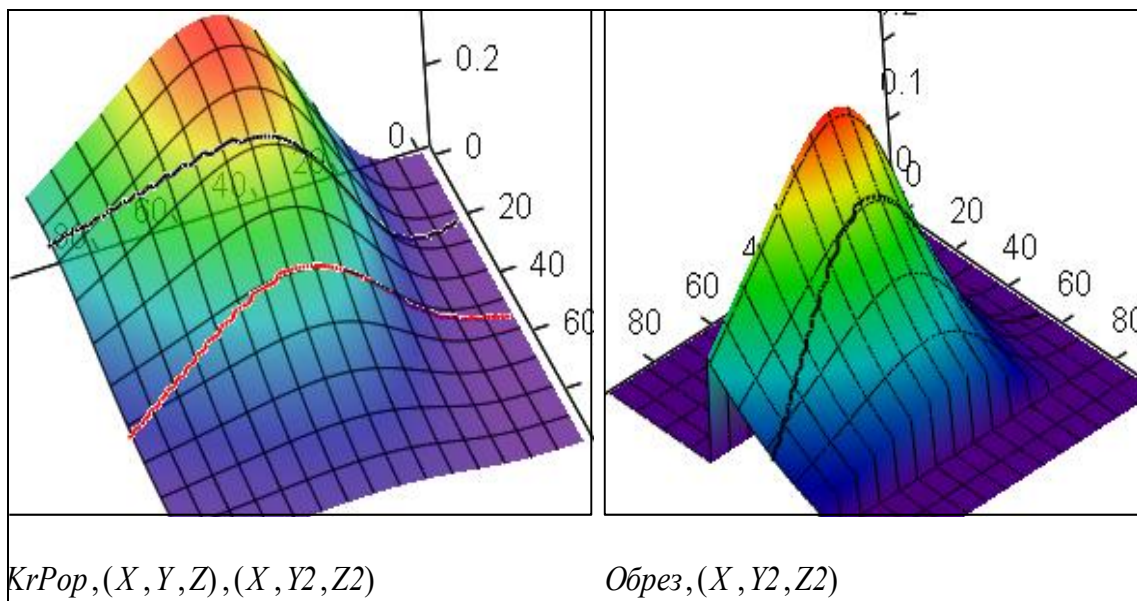


Рис. 6.13. Проєкція кредитної стратегії на функцію розподіленого попиту

6.4.3. Векторна (розподілена) модель еластичності попиту

Якщо помножити попит на кредити на ставку кредиту, отримаємо залежність процентного доходу від ставки кредиту. Ми оперуємо з розподіленими системами – множиною позичальників, множиною класів кредитів.

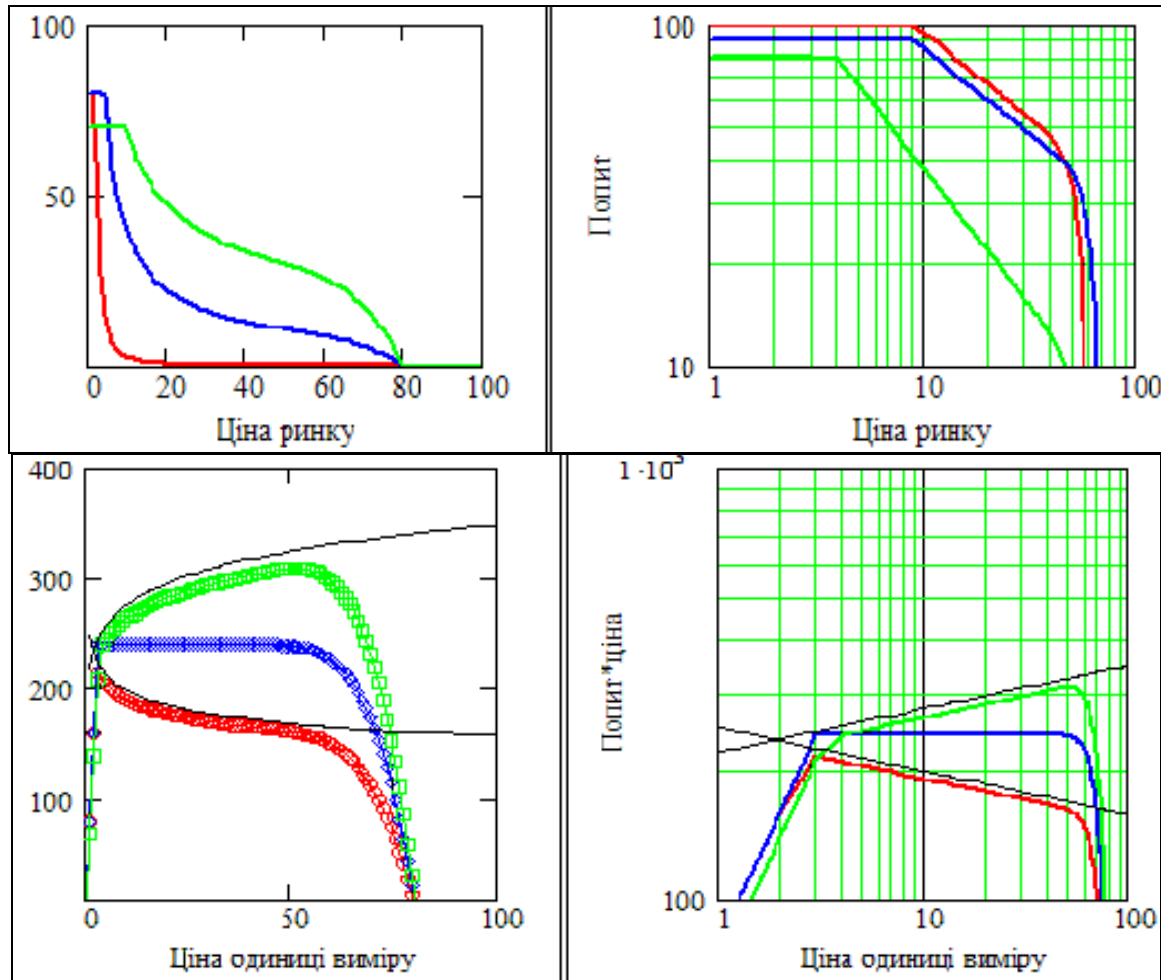


Рис. 6.14. Аналіз функцій попиту та еластичності попиту

Проаналізуємо спочатку вид функцій "ціна–дохід" (у нас "ставка кредитів–дохід") на скалярному прикладі: маємо якийсь "монолітний" продукт з модифікованим класичним попитом – гіперболічним. Суть модифікації – "м'яко обрублені хвости" – хвіст нескінченного попиту на безкоштовний продукт, та хвіст ненульового попиту при нескінчених цінах.

Дивимось, на рис. 6.14, бачимо, чому економісти досі застрягають на гіперболічній моделі попиту: постійна еластичність на всьому діапазоні цін та лінійні залежності в подвійному логарифмічному масштабі. На графіках, для кращого розуміння користувачем, подано три залежності для випадків, коли при збільшення ціни дохід: зростає; не змінюється; спадає. Бачимо, що

уреальнювання моделі шляхом обрубання хвостів робить негармонічною залежність в логарифмічних координатах. Можливо це означає необхідність шукати нові "природні" моделі попиту, або взагалі відмовитись від концепції функції попиту. В цьому розділі не відмовляємось від функції попиту.

Застосуємо цей класичний підхід для нашої задачі управління розподіленою системою попиту на кредити. Беремо дискретизовану розподілену модель попиту (6.15):

$$KrPop_{i,j} := F5(j \cdot kkr, Krepot_{i,w,s}).$$

Робимо розподілену модель процентного доходу – множимо кожне значення розподіленого за розмірами кредитів попиту на відповідну ставку кредиту

$$Krdox_{i,j} := F5(j \cdot kkr, Krepot_{i,w,s}) \cdot j \cdot kkr.$$

Відомо, що еластичність попиту є різною для різних категорій позичальників – великих і малих.

$$Krdoxdif_{i,j} := F5[j \cdot kkr, Krepot_{i,w,(1 - 0.005 \cdot i),s}] \cdot j \cdot kkr.$$

Будуємо графіки (рис. 6.15), аналізуємо.

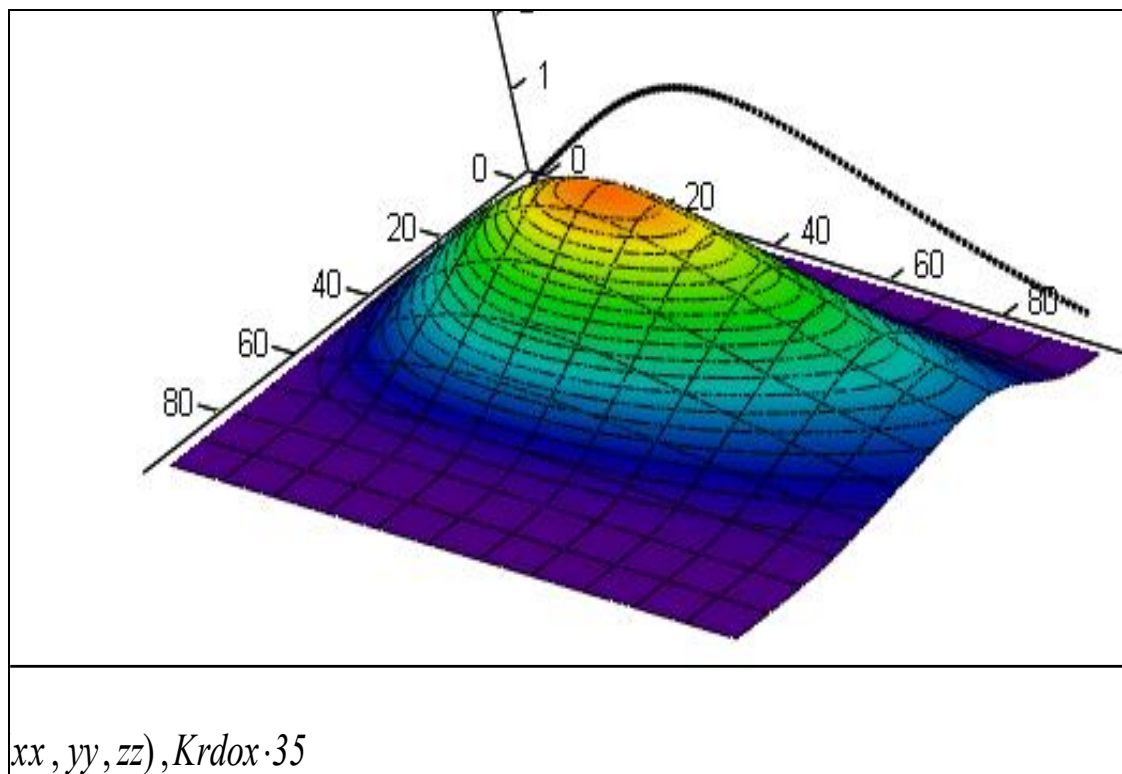


Рис. 6.15. Розподіл доходності кредитів в просторі "розмір кредитів, ставка кредитів" та розподіл кредитів за розмірами

6.4.4. Моделі залежності функцій попиту від рівня доходів клієнта

Дивимось на графік (рис. 6.16) бачимо спочатку апріорно очевидне: при однакових функціях попиту для всіх розмірів кредитів існує однакова для всіх розмірів кредитів оптимальна ставка кредитів. Тобто задача оптимізації портфелю кредитів дуже проста – встановити оптимальну ставку, проінформувати потенційних клієнтів – і оптимальний портфель (розподіл кількостей кредитів різних розмірів) сформується сам собою. На задньому плані подано сумарну дохідність (одного "розподіленого клієнта", щоб отримати дохідність регіону, слід помножити ще на кількість потенційних клієнтів) в функції ставки кредитів, при умові, що ставки кредитів будуть однаковими для всіх класів кредитів.

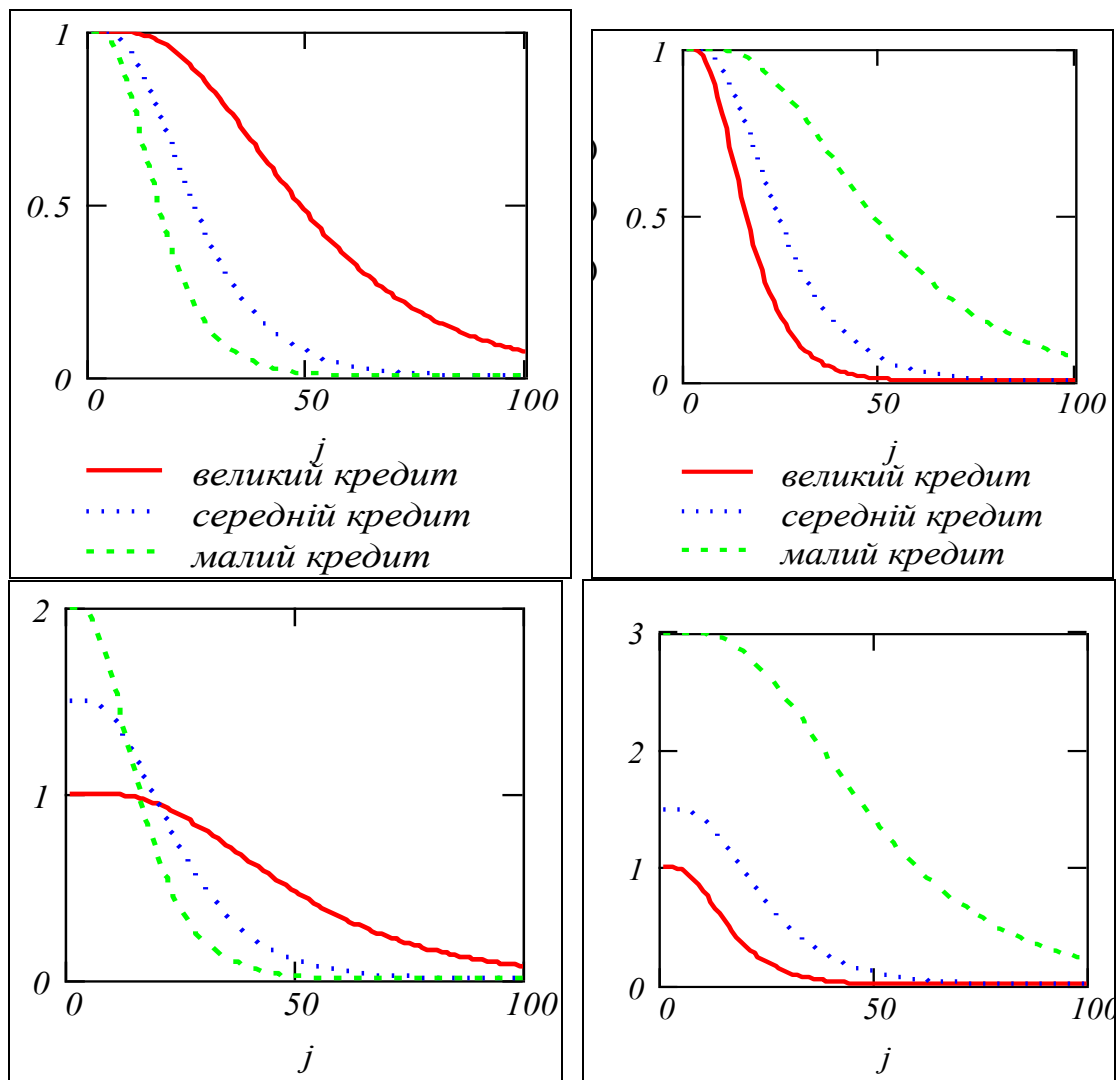


Рис. 6.16. Аналіз можливих залежностей функцій попиту на кредити від розміру кредитів

Робимо функцію розподіленого попиту для випадку різних функцій попиту на кредити різних розмірів:

$$KrPl_{i,j} := F5[j \cdot kkr, Krepot_{i,w} \cdot (2.1 - 0.02 \cdot i), s]$$

Відомо, що еластичність попиту є різною для різних категорій позичальників – великих і малих. Робимо функцію розподіленої дохідності кредитів різних розмірів:

$$Krdoxdif_{i,j} := F5[j \cdot kkr, Krepot_{i,w} \cdot (2.1 - 0.02 \cdot i), s] \cdot j \cdot kkr$$

Будуємо тривимірні графіки виставляємо їх в потрібних ракурсах (рис. 6.17).

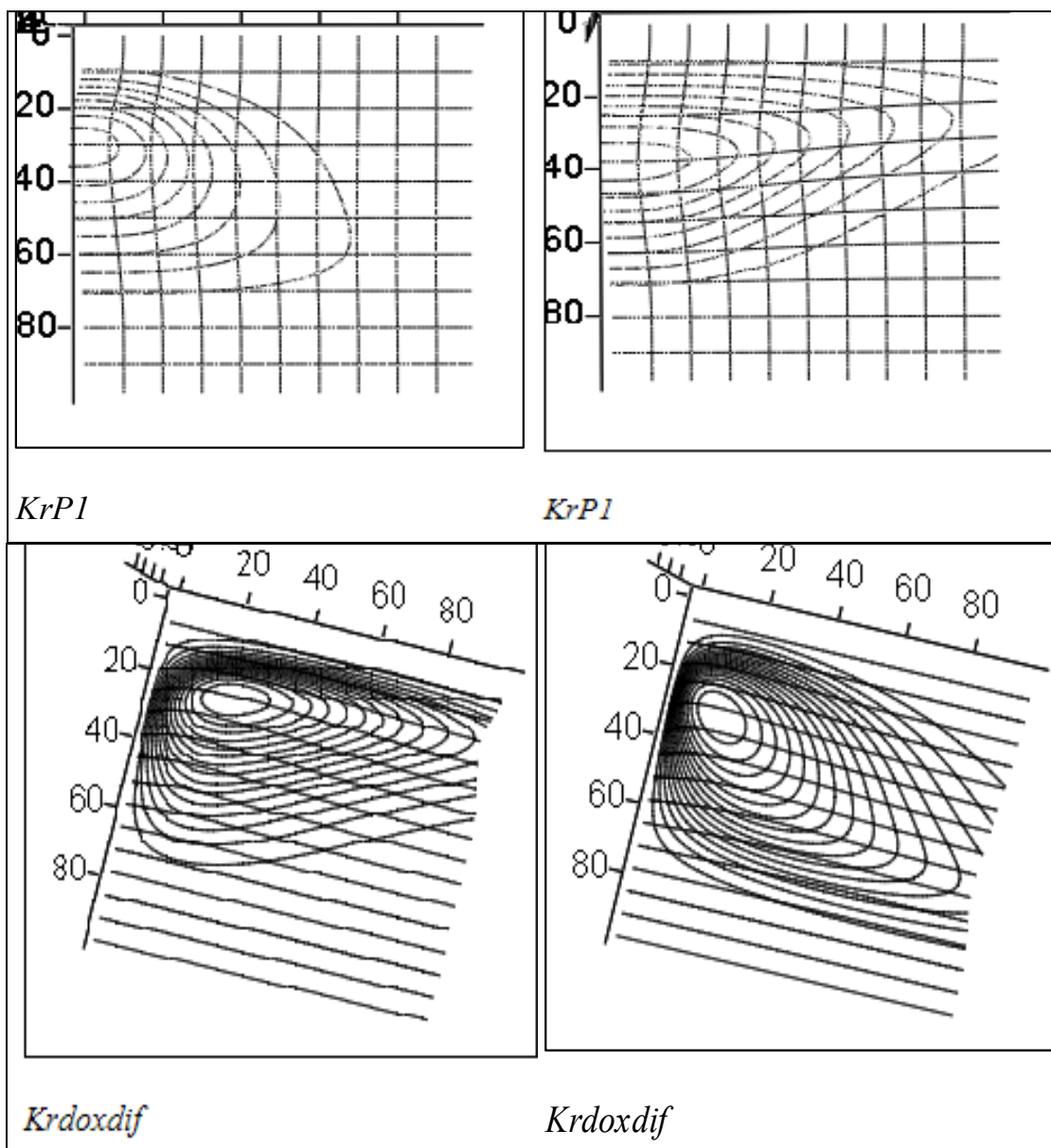


Рис. 6.17. Технологія. Графіка до аналізу залежності функції дохідності кредитів від функцій попиту і розміру кредиту

Ми створили інструмент для попереднього аналізу альтернативних моделей, що може бути настроєний на довільну систему клієнтів, точніше – "соціо-техніко-економічну систему".

Припустимо, що зв'язки між кредитами різних класів (особами, що беруть ці кредити) несуттєві. Тоді для максимізації сумарного процентного прибутку достатньо для кожного розміру кредитів вибрати ставку, що дає максимум прибутку.

Відповідні моделі і графіки зроблені для того, щоб подивитись на характер розподілу максимумів дохідності на "лінійці кредитів". Дивимось на рис. 6.17, бачимо можливі конфігурації розподіленої функції дохідності.

6.5. Визначення оптимального розподілу ставок кредитів різних розмірів

Зробимо програмний модуль, що знаходить *положення максимумів – локально оптимальні ставки кредитів*. Максимально використовуємо вбудовані функції пакета для роботи з масивами. Маємо проблеми з "±1" тому: $i := 1..Kts - 1$; $j := 1..Kts - 1$.

Відрізаємо зайве з масиву розподіленого доходу:

$$KrDoxDi := submatrix(Krdoxdif, 1, 99, 1, 99).$$

Записуємо головний вираз

$$rkrOp_i := mean(match(max(Krdoxdif^{<i>i}), Krdoxdif^{<i>i})), \quad (6.16)$$

що читається так: визначаємо максимум i -го стовпця масиву значень *max(масив_значень)*, визначаємо (в цьому ж масиві значень) координати цього максимуму *match(значення, масив_значень)*, функція видає не одне значення, а ряд точок (екстремуми розмиті), беремо середнє *mean(масив_значень)*.

Це некоректно, але функції, з якими ми оперуємо, є суттєво невизначеними. Між іншим, ми знаходимо не одну точку, а множину максимумів для кожного значення розміру кредитів (заданих індексами від 1 до 99).

При бажанні, у процедурі визначення максимуму можна побачити катастрофічну проблему: для знаходження 100 точок максимумів, ми обчислили масив у $100 \cdot 100 = 10000$ точок. Прикро, що дешеві обчислювальні ресурси "вбивають" витончені та "інтелектуальні"

методи, набагато гірше, що можуть зникнути індивіди, здатні до створення витончених методів у напрямку "витончений примітив" (не плутати з "примітивною витонченістю"). Так, сьогодні генеральний напрямок – мережі, масово-паралельні обчислення, векторизація обчислень, сигнал-процесори, швидке перетворення Фур'є, сплески. Однак, повинен існувати запас альтернатив. Формуємо координати параметричних графіків:

$$xk_i := i; \quad yk_i := \text{trunc}(0.73 \cdot rkrOp_i); \quad zk_i := KrDoxDi_{xk_i, yk_i}$$

Координата для розподіленого попиту

$$Zp_i := KrPI_{xk_i, yk_i}$$

Розроблений модуль може містити помилки. Наводимо елементарні корисні перевірки для прикрих випадків, коли система діагностики помилок пише: "розмір масиву занадто великий/малий"

$$\begin{aligned} \text{rows}(KrDoxDi) &= 99; \quad \text{cols}(KrDoxDi) = 99; \quad \text{length}(xk) = 99; \\ \text{length}(yk) &= 99; \quad \text{min}(xk) = 1; \quad \text{max}(xk) = 99; \quad \text{min}(yk) = 22; \\ \text{max}(yk) &= 45; \quad \text{max}(KrDoxDi) = 0.0376; \quad \text{min}(KrDoxDi) = 0. \end{aligned}$$

Будуємо серію графіків (рис. 6.18)

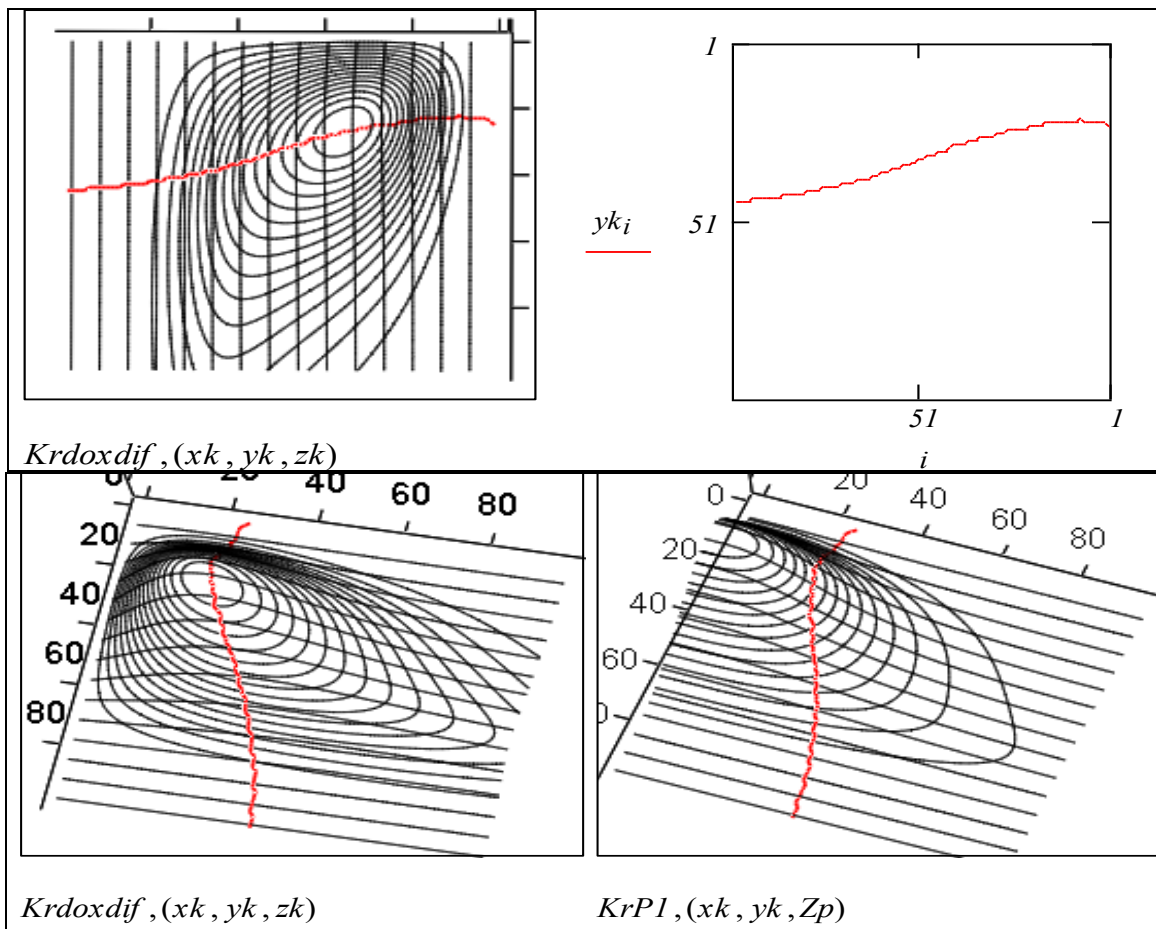


Рис. 6.18. Технологія. Графіка до побудови годографа оптимальних ставок кредитів

На рис.6.18 на першому "кадрі" подано два графіки (тривимірні, вид згори) – залежність дохідності кредитів від розміру і ставки кредиту" та положення на цьому графіку точок оптимальних ставок кредиту (= максимуми для кожного розміру кредитів).

На другому "кадрі" – контроль – звичайний графік залежності оптимальної ставки кредиту від розміру кредиту.

На третьому і четвертому "кадрах" – положення точок оптимальних ставок кредитів на графіках розподіленої дохідності, та розподіленого попиту.

Виконуємо заключну операцію – визначаємо дохідність оптимального портфеля з диференційованими ставками кредитів і порівнюємо її з "простими" портфелями, в яких ставка кредитів однакова для всіх розмірів кредитів.

Використовуємо вичерпні імена змінних:

$$\text{Дохід_оптим_портфелю_на_одного_клієнта} := \sum_{i=1}^{Kts-1} zk_i ,$$

$$\text{Дохід_оптим_портфелю_на_одного_клієнта} = 1.6173 ,$$

$$\text{Дохід_портфелю_постійна_ставка_кредитів}_j := \sum_{i=1}^{Kts-1} KrDoxDi_{i,j} .$$

Ці управління – розподілені, це вектори (дискретизовані функції). Для побудови графіків замінюємо вичерпні імена змінних на зручні

$$\text{Допок} := \text{Дохід_оптим_портфелю_на_одного_клієнта},$$

$$\text{Дппск} := \text{Дохід_портфелю_постійна_ставка_кредитів}.$$

Будуємо графік (рис. 6.19), де можна бачити збільшення обсягу кредитів на п'ять процентів (для заданих даних). Подивимось на ці 5% інакше: типова ставка кредитів у світі – 3–8%, в Україні – 15–20%. Тобто додаткові прибутки будуть еквівалентні збільшенню кредитної ставки на 5%. Однак, якщо розглядати діяльність банку в умовах конкуренції, то виграшем може бути також покращення конкурентної позиції, що важить більше приросту прибутку.

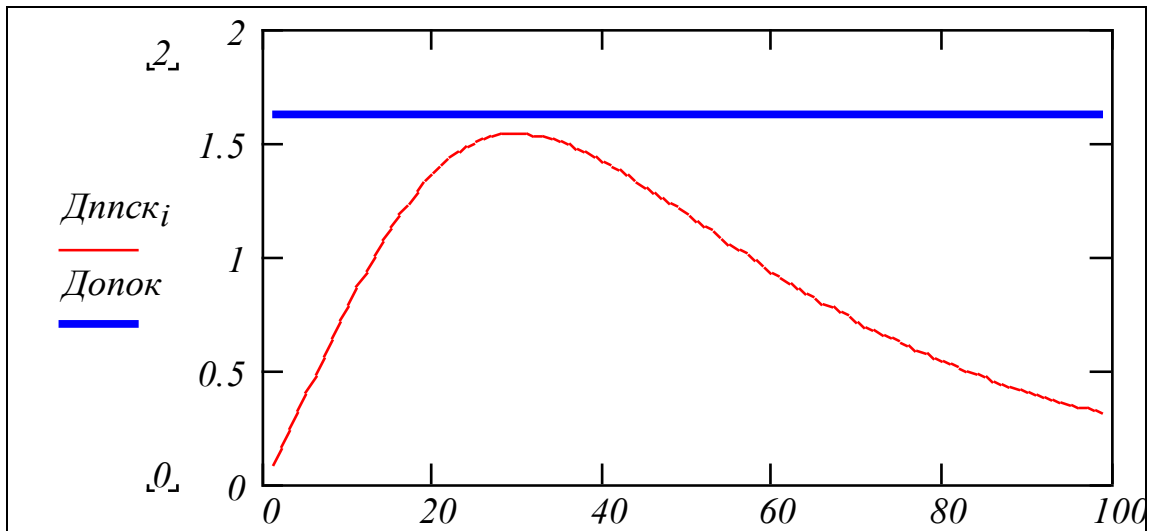


Рис. 6.19. Перевірка оптимального портфеля кредитів на оптимальність відносно портфелів з постійною ставкою кредитів

Виразимо побачене числом:

$$Вигрالی := \frac{Дпонок}{\max(Дппск)} - 1 ; Вигрالی = 0.051\% .$$

Тобто дійсно маємо виграш від диференціації ставки кредитів.

6.6. Визначення функцій попиту на кредити для розвитку

В цьому розділі визначимо конструктивний підхід до визначення функцій попиту на базі фундаментальних техніко-економічних механізмів. Як відомо, банки завжди цікавляться яке поле засіває їхніми грошами позичальник і чи буде врожай достатнім для повернення кредиту. В цьому сенсі банк повинен вести себе протиприродно: шукати засоби, щоб позичальник брав менше кредитів і витрачав їх з максимальною ефективністю.

Відомо, що ефективність і перспективність банку залежить від кількості і якості моделей, що використовує банк для прогнозування і управління. Очевидно це справедливо і для інших категорій бізнес одиниць, що роблять гроші не з грошей, а з нафти, кросівок, комп'ютерів, сталі, рінгтонів, гамбургерів, лізингу і консалтингу.

Навіть, якщо банк просто хоче викачати з клієнта по максимуму, не турбуючись проблемами його (клієнта) процвітання і продуктивності, йому (банку) слід поцікавитись якими моделями користується він (прогресивний клієнт) для підтримки рішень, в тому числі, стосовно позик.

Розглянемо моделі раціональної поведінки клієнта – "науковообґрунтовані" методи визначення оптимальних стратегій розвитку.

Використаємо як базові математичні моделі використання кредитів бізнес одиницею для розвитку виробництва **робочі моделі оптимального розвитку** розподіленої виробничої системи та моделі оптимальних кредитних стратегій [3–12]. Ці моделі безумовно є найкращими серед моделей надуманого авторами класу, тому що більше ніхто не веде досліджень в цьому конкретному напрямку. Розглянемо спочатку стисло теоретичні основи методів.

6.6.1. Постановка і розв'язання задачі оптимального розвитку виробничої системи

Цей розділ є по можливості точним відтворенням в середовищі математичного пакета розділів з книги Роберта Беллмана [4].

Беллман називає варіаційну задачу "задача розподілу". По суті це задача розвитку виробничих систем. В цьому розділі ми зосередимось саме на математичній суті задачі.

Постановка одновимірної задачі. Шукаємо максимум функціоналу

$$J1 = \int_0^T F(x(t), y(t)) dt, \quad (6.17)$$

де функції $x(t), y(t)$ зв'язані диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} x(t) = G(x(t), y(t)), \quad x(0) = c > 0, \quad (6.18)$$

і на функцію $y(t)$ накладено обмеження

$$0 \leq y \leq x. \quad (6.19)$$

Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими. При відсутності обмежень це класична задача варіаційного числення, при наявності обмеження – це окремий випадок задачі Больца. Розглядаючи розв'язання окремих випадків задачі (підрозділи 3.1, 3.2) бачимо, що розв'язання може мати три інтервали ("все в розвиток", "пропорційно", "все в накопичення"). При виконанні певних "природних" умов розв'язання має такий вид (структуру)

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) & \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad \text{– "все в розвиток"} \\ 0 \leq y(t) \leq x(t) & \quad \text{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad \text{– "ейлерова ділянка"} \\ y(t) = 0 & \quad \text{при} \quad t_2 \leq t \leq T \quad \text{– "все в накопичення"} \end{aligned}$$

Припускаємо, що функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ задовольняють такі умови:

а) функції F та G належать до класу C^2 тобто мають неперервні окремі похідні другого порядку;

б) існують константи p, q, r такі, що

$$p \cdot x < G(x, y) < q \cdot x + r \quad \text{при } x > 0 \text{ та } 0 < y < x; \quad (6.20)$$

в) функція G_y (тобто частинна похідна $\frac{\partial}{\partial y} G(x, y)$) приймає

значення тільки одного знака: або $G_y > 0$ або $G_y < 0$ при усіх значеннях x, y , що задовольняють умови $x > 0$ та $0 < y < x$.

Умова б) означає, що на інтервалі $(0, T)$ функція $x(t)$ буде (в силу диференціального рівняння (6.18)) обмежена позитивними константами

$$0 < m \leq x(t) \leq M \quad (6.21)$$

Постановка багатовимірної задачі. Багатовимірна задача не створює принципово нових проблем крім чисто кількісної проблеми розмірності. Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J(y) = \int_0^T F(x(t), y(t)) dt, \quad (6.22)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – вектор стану (темпи виробництва);

$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор управління. Вектор-функції $x(t), y(t)$ зв'язані системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} x_i = G_i(x(t), y(t)), \quad x_i(0) = c_i > 0, \quad i = 1..N \quad (6.23)$$

і на вектор-функцію $y(t)$ – управління накладено обмеження

$$0 \leq y_i \leq x_i, \quad i = 1..N \quad (6.24)$$

Функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ вважаються заданими.

Розв'язання багатовимірної задачі в загальному випадку теж має ділянки "все в розвиток", "ейлерова ділянка", "все в накопичення". На рис. 6.20, 6.21 подано результати розрахунку оптимальних стратегій для різних класів функцій розвитку (ФР) – лінійних, випуклих, увігнуто-випуклих. Беллман не обмежувався випадком випуклих і гладких (таких, що мають першу і другу похідні) функцій F та G . Він отримав і проаналізував розв'язання задачі розподілу для випадків випуклих та увігнутих функцій. Причому отримав загальні розв'язання задачі альтернативними методами – варіаційного числення і динамічного програмування.

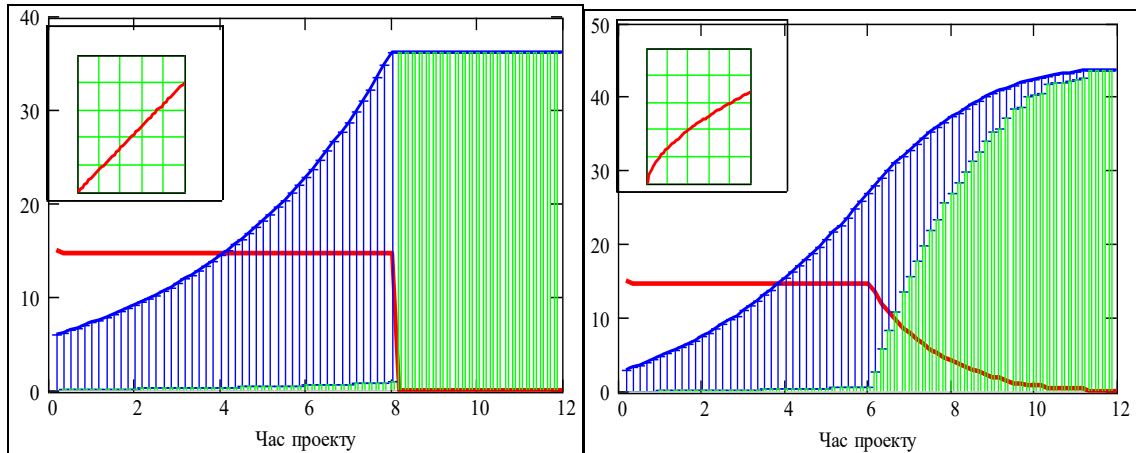


Рис. 6.20. Оптимальні стратегії для лінійних і для випуклих ФР

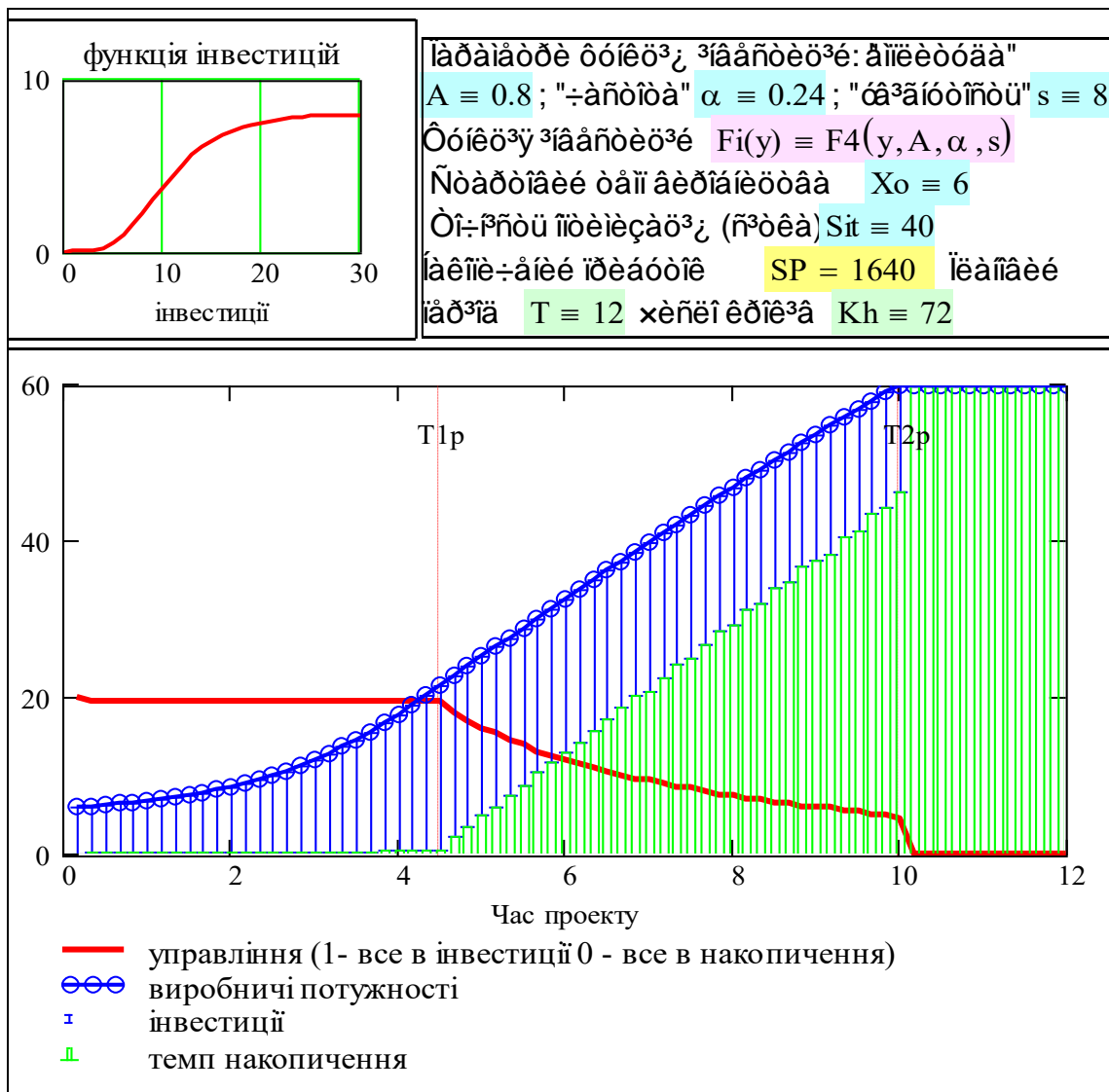


Рис. 6.21. Типовий процес розвитку виробництва без зовнішніх ресурсів для випадку увігнуто-випуклої функції інвестицій

Дивимось на рис. 6.21. Це інтерфейс програми моделювання оптимізації процесів розвитку. Він складається з трьох частин: зона введення вхідних даних, графіки для змінних управління і стану для оптимального процесу розвитку, тобто "входи" і "виходи" – причини і наслідки.

На рис. 6.22 подано еволюцію функції Гамільтона під час протікання процесу. Поточні максимуми на цій тривимірній поверхні визначають поточний розподіл ресурсу між накопиченням і розвитком, такий що дає максимум кінцевого результату – накопиченого випуску продукції, а значить – накопиченого доходу, прибутку.

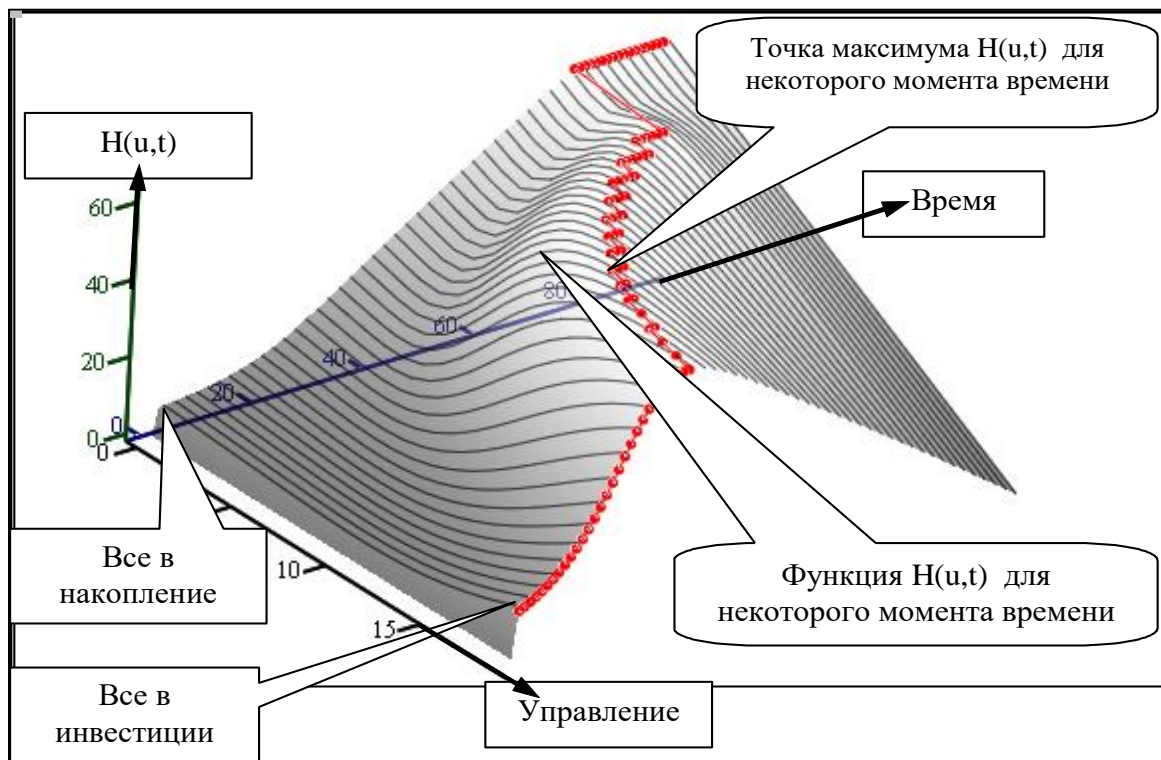


Рис. 6.22. Приклад еволюції функції Гамільтона та положення максимумів

6.6.2. Програма оптимізації і моделювання процесу розвитку виробничої системи

Дослідимо властивості запропонованого управління в обчислювальних експериментах – робимо програму моделювання, орієнтовану на проведення початкових досліджень. Майже неважко буде зробити програму моделювання виробничої системи. Дивимось на рис. 6.23 – це фактично і є схема процесу функціонування системи. Програма повинна обчислювати стан системи на кожному кроці. Стан системи визначимо так: управління – u_k , темп виробництва (одиниць

продукції за одиницю часу) – x_k , темп накопичення (одиниць накопичень за одиницю часу) – z_k . Випишемо рівняння для визначення вектора стану

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad & x1_{k+1} = x1_k + \text{fin}(x1_k \cdot u, \text{параметри}) \cdot \Delta t \\
 2) \quad & z1_{k+1} = x1_{k+1} \cdot (1 - u_{k+1}) \\
 3) \quad & u_{k+1} = \max_u(H(x, u)); \quad 0 \leq u \leq 1 \\
 & \text{зараз} = x1_k \cdot (1 - u_k); \quad \text{майбутнє} = \text{fin}(x1_k \cdot u_k, \text{пар}) \cdot (T - t + \text{пріс}) \\
 & \text{повернення_боргів} = xkr \cdot [1 + \text{пріс} \cdot (T - t)] \\
 4) \quad & H(x1_k, u_k) = \text{зараз} + \text{майбутнє} - \text{повернення_боргів}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

В рівняннях (6.25) $\text{fin}(x1_k \cdot u, \text{параметри})$ – функція віддачі інвестицій, що вважається довільною і може залежати від певного числа **параметрів**. Будемо вважати, що темп виробництва, як і темп накопичень вимірюється в грошових одиницях. Звернемо увагу на те, що управління знаходиться з умови максимуму функції $H(x, u)$. Таким чином, на кожному кроці шукаємо максимум функції від u – управління. На рис. 6.4 подано програму в псевдокодах.

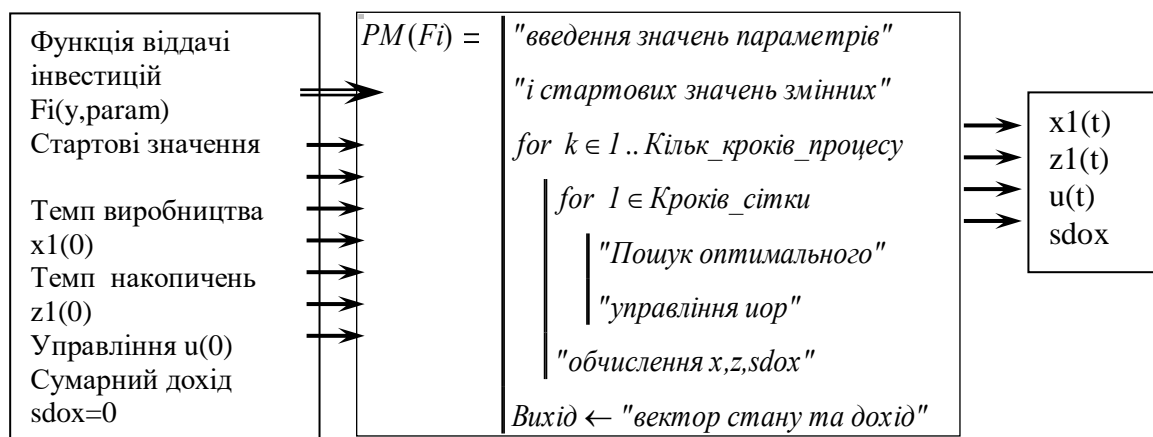


Рис. 6.23. Схема програми моделювання і оптимізації виробничої системи

На рис. 6.24 подано дворівневий інтерфейс для аналізу функції впливу ставки кредитів та систему для аналізу кредитних стратегій. Класичні методи отримання функції впливу – лінеаризація математичних моделей процесу розвитку, а потім отримання похідних від цих функцій чутливості. В нашому випадку суттєва нелінійність процесу розвитку не дає можливості використати аналітичні методи.

Функції впливу ми отримуємо прямим методом – просто для кожного значення дискретної сітки ставки кредитів обчислюємо

оптимальний процес розвитку. Фундамент такого примітивного підходу – високоефективна математична модель і програма моделювання, що нечутливі до виду функцій віддачі інвестицій. Обчислювальна ефективність програми обумовлена декомпозиційним підходом – розбиттям багатовимірної оптимізаційної задачі в систему одновимірних задач.

Працездатна і коректна математична модель великої системи звичайно стає генератором нових знань про властивості реального об'єкта – як таких, що спостерігаються, і таких, що можуть реалізуватись за певних умов: значеннях параметрів, початкових умовах, збуреннях. В цьому випадку модель є генератором знань про властивості функцій попиту "цивілізованих" бізнесменів – таких, що використовують в своїй діяльності програми бізнес-аналітики.

Залежність оптимального обсягу кредитів для проекту розвитку від ставки кредитів є фактично індивідуальною функцією попиту певного бізнес-елемента. Бачимо парадоксальну властивість цієї функції (рис. 6.24): зменшення ставки кредитів в діапазоні 15 – 5% викликає зменшення попиту на кредити. Причина проста: дешевих кредитів береться більше на старті, потім раніше починається вихід виробництва на самозабезпечення ресурсами для розвитку.

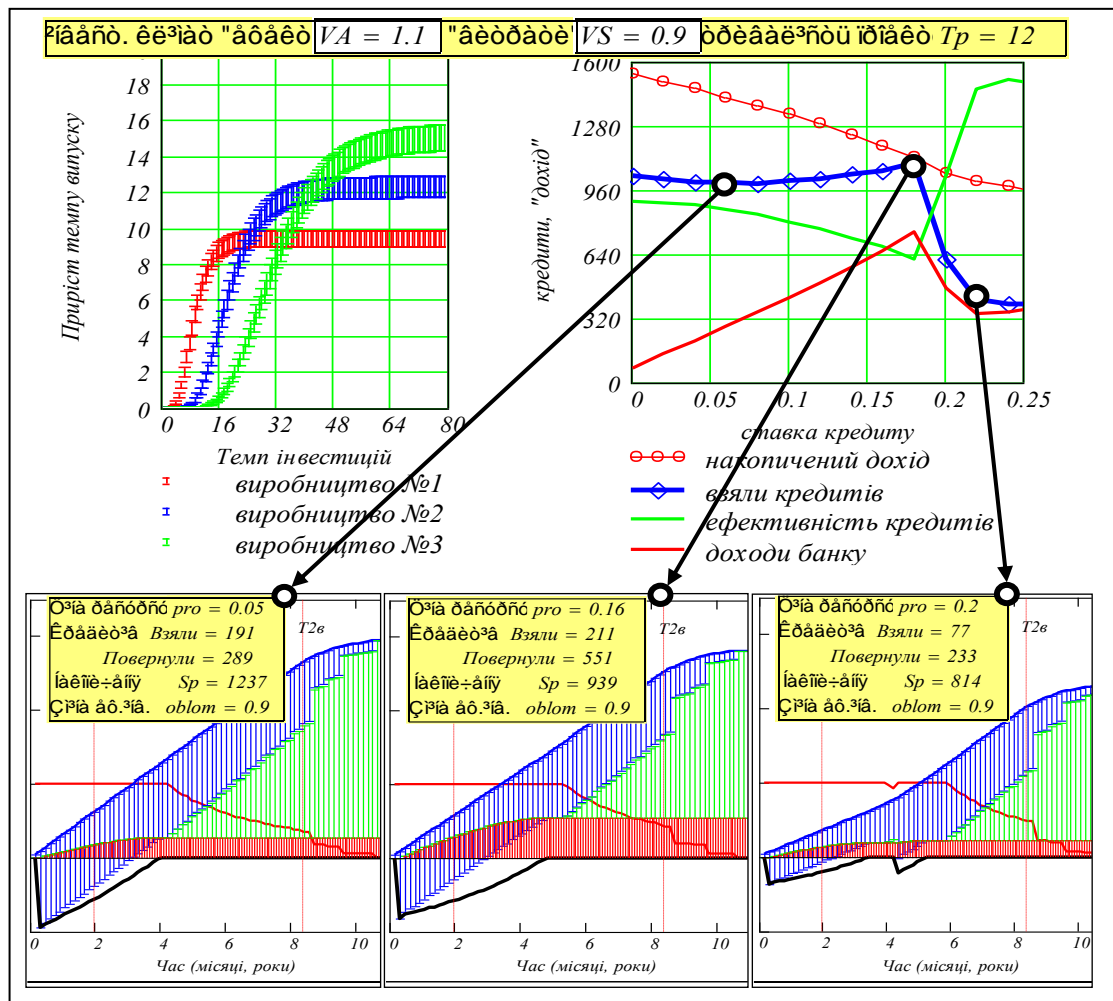


Рис. 6.24. Стенд: дворівнева система аналізу кредитних стратегій

6.6.3 Аналіз типових функцій попиту на кредити для розвитку

Проаналізуємо залежності показників проекту розвитку від ставки кредитів при різних значеннях параметрів виробничої системи "ефект" та "витрати" (рис. 6.25) та тривалості проекту (рис. 6.26).

Для прикладу взято виробничу систему з трьох виробництв. Кожне виробництво характеризується номінальною функцією розвитку (ФР) та її розкидами. Змістовно це залежність приросту виробничих потужностей в грошових одиницях доходу M грн/рік при витратах In грн/рік. Очевидно інвестиційна ефективність – відношення приросту виробничих потужностей до витрат буде вимірюватись в одиницях часу – так це ж давно відомий показник – "темп повернення капіталовкладень".

Умови розвитку виробничої системи характеризуються параметрами: "постійні витрати" (незалежні від обсягу приросту виробництва, наприклад податки на землю, зарплата охорони та ін.), "інвестиційний клімат" (це фактично продуктивність праці в

інвестуванні, що ускладнюється різними негативними факторами). На графіках (див. рис. 6.25, 6.26) побудовані "функції впливу" – залежності показників від ставки кредитів.

На основі аналізу результатів моделювання (див. рис. 6.24 – 6.26) можемо зробити такі висновки:

– для коротких (тривалість 7 років) проектів, в умовах зниженої ефективності інвестицій функція попиту на кредити "від клієнта" – ступінчаста;

– для довгих проектів (тривалість 10 років), в умовах підвищення інвестиційної ефективності на функції попиту з'являється "парадоксальна ділянка" – *при здешевленні кредитів попит на них зменшується.*

Причина такого ефекту – дешевих кредитів на старті береться більше і виробництво раніше виходить на самофінансування з отриманих прибутків.

Розшифруємо висловлювання "попит на них зменшується": *особа, що приймає рішення, має програми бізнес-аналітики, що дозволяють розрахувати оптимальний процес розвитку, в тому числі і кредитні стратегії.*

Збираємо фрагменти з попередніх графіків і порівнюємо функції попиту – проведемо якісний (а не кількісний), візуальний аналіз (рис. 6.27, 6.28).

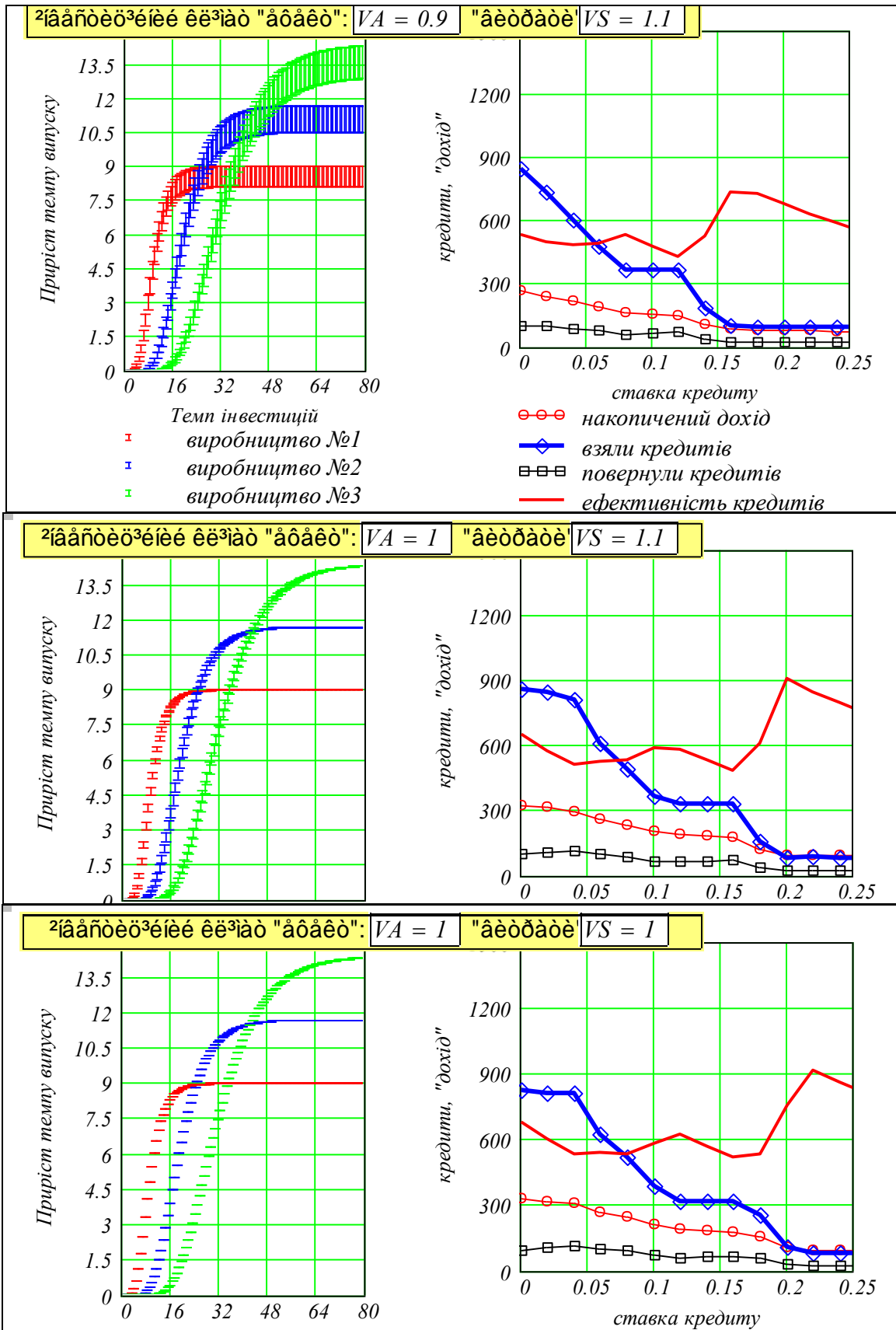


Рис. 6.25. Функції впливу для коротких проектів (7 років)

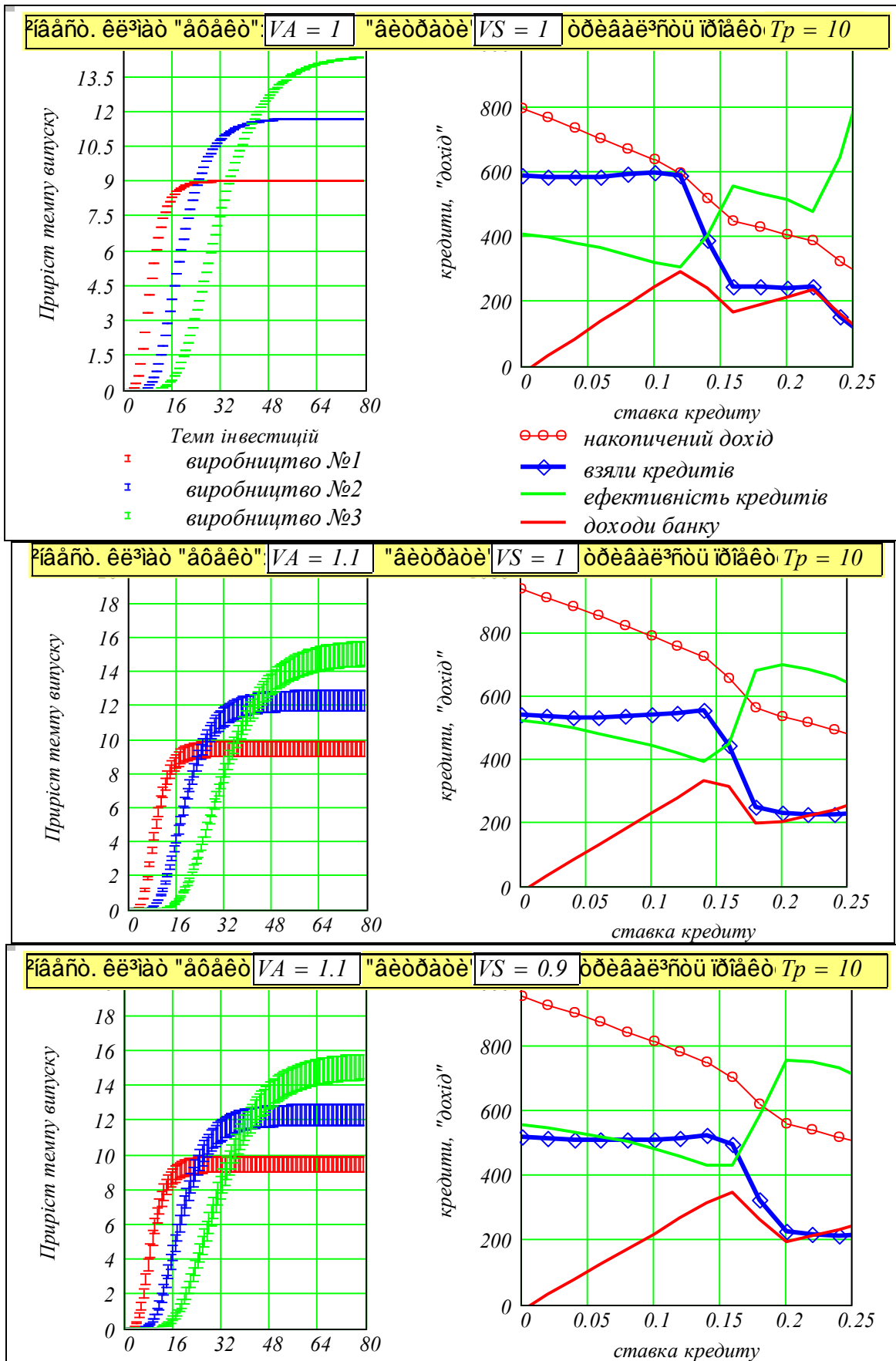


Рис. 6.26. Функції впливу для довгих проектів (тривалість 10 років)

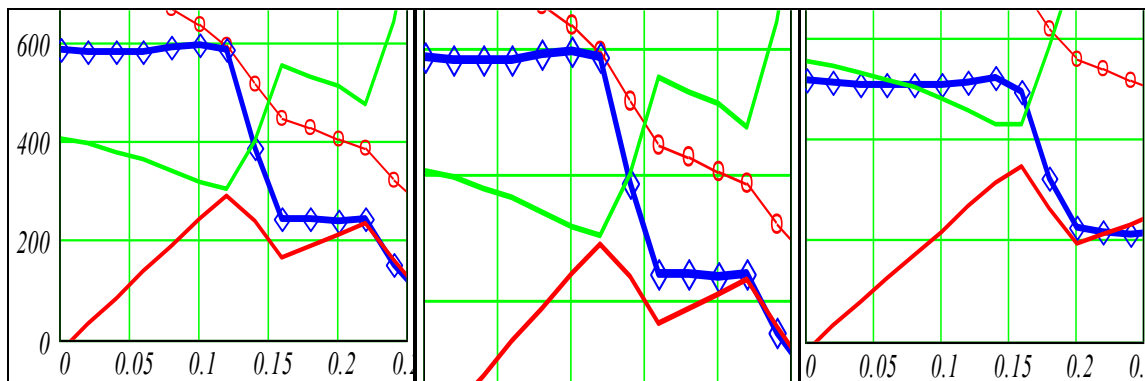


Рис. 6.27. Порівняння функцій попиту на кредити для *тривалих* проектів розвитку

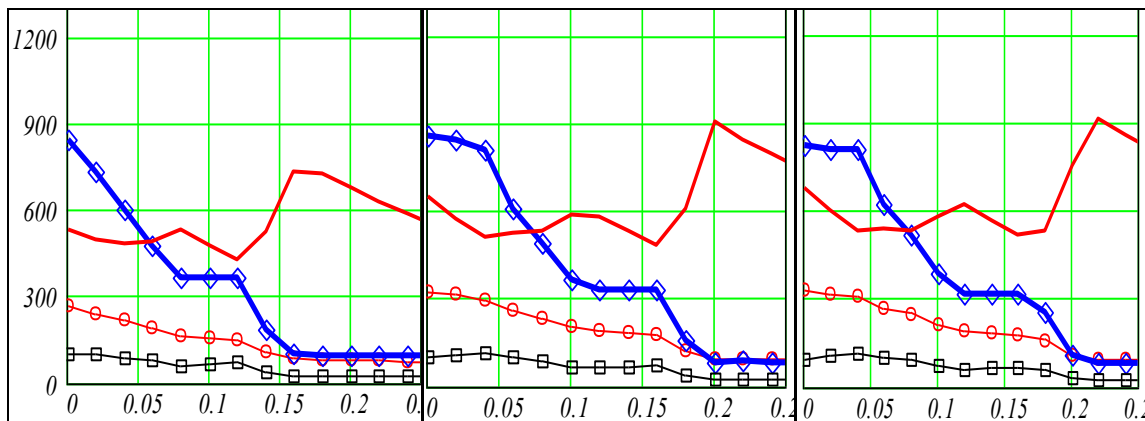


Рис. 6.28. Порівняння функцій попиту на кредити для *коротких* проектів розвитку

Бачимо також певне протиріччя: *максимальний процентний прибуток банку* при покращенні інвестиційного клімату зсувається в сторону дорожчих кредитів, в той час як *накопичений прибуток клієнта* зростає при зменшенні ставки кредитів до нуля. Маємо якісний матеріал для роздумів.

Виконаємо кількісний аналіз проблеми антагонізму інтересів банку і клієнта. Результати першого етапу такого аналізу подані на рис. 6.29. Суть результатів – можливість підвищення прибутків одночасно виробника і банку.

Побудуємо у відповідності з рис. 6.29 математичну модель "справедливого розподілу цінності" між банком і виробником. У підсумку, за допомогою низки моделей: оптимального агрегування, оптимального розвитку, оптимізації кредитних стратегій в процесах розвитку, знайшли можливість підвищення прибутків одночасно банку і підприємства.

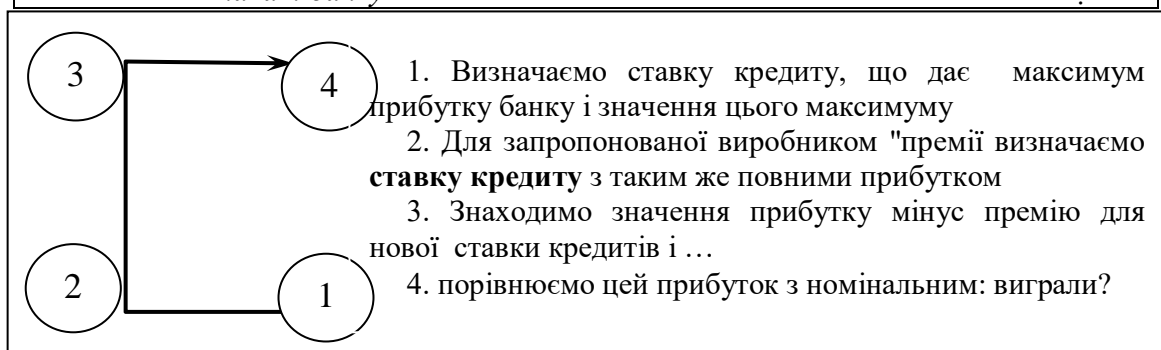
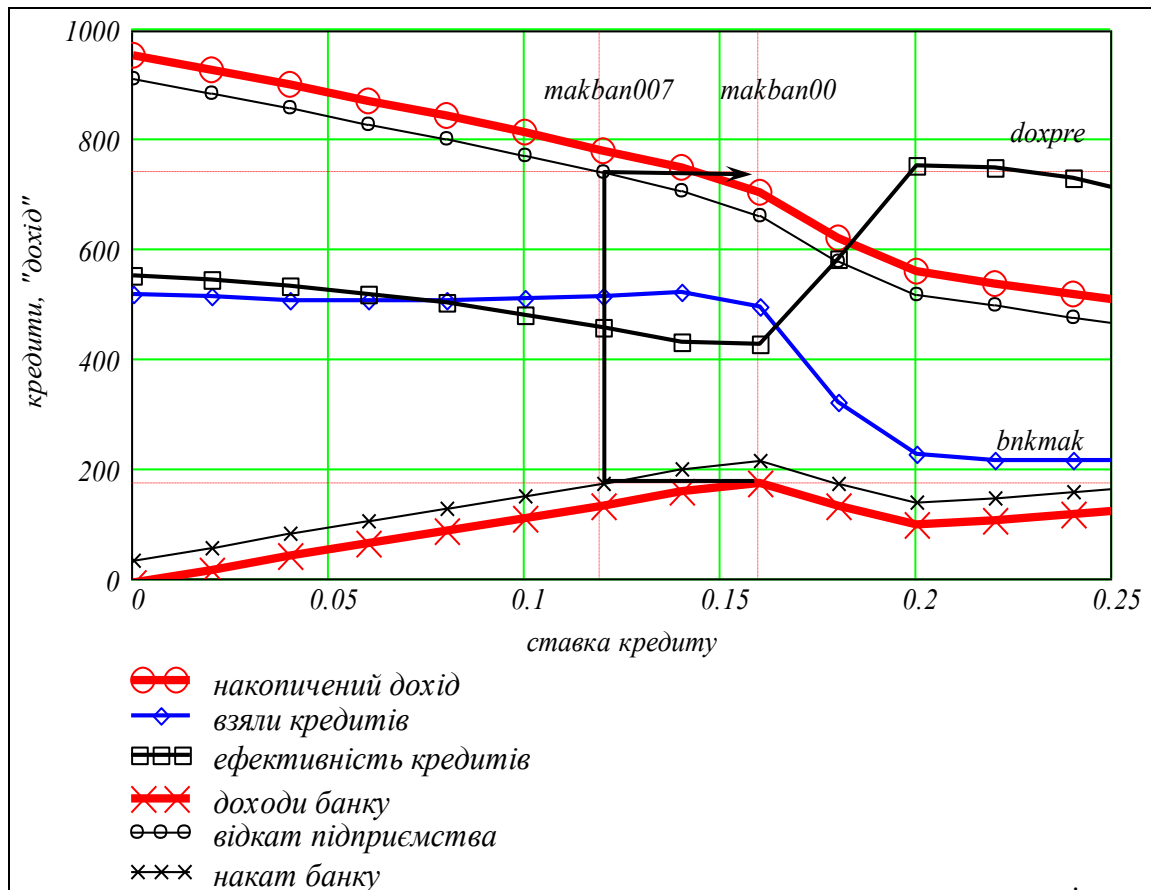


Рис. 6.29. Аналіз можливостей збільшення доходів банку і підприємства

Припустимо, що відомі функції накопиченого за плановий період виконання інвестиційного проекту доходу

для банку $S_{dbank}(rk, p)$
і підприємства $S_{dprod}(rk, p)$.

Хай на деякому інтервалі ставок кредитів

$$rk1 \leq rk \leq rk2$$

похідна від доходу підприємства негативна (накопичений дохід зростає з падінням ставки кредитів – це безумовна властивість процесів

розвитку), а похідна від накопиченого процентного доходу банку – позитивна:

$$\frac{\partial}{\partial rk} Sdprod(rk, p) < 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial rk} Sdbank(rk, p) > 0 .$$

Відомо, що банк не вільний у виборі ставки кредитів – вона, як мінімум, залежить від середньої ставки кредитів на банківському ринку.

Припустимо, що встановлено ставку кредиту банку для підприємства на заданому інтервалі ставок кредитів. При деякому малому зменшенні ставки кредиту на Δrk в діапазоні

$$\text{дохід банку зменшиться на} \quad \frac{\partial}{\partial rk} Sdbank(rko - \Delta rk, p) ;$$

$$\text{дохід підприємства збільшиться на} \quad \frac{\partial}{\partial rk} Sdprod(rko - \Delta rk, p) .$$

При цьому можуть бути такі ситуації:

$$\text{а) } \frac{\partial}{\partial rk} Sdbank(rko - \Delta rk, p) + \frac{\partial}{\partial rk} Sdprod(rko - \Delta rk, p) > 0 ;$$

$$\text{б) } \frac{\partial}{\partial rk} Sdbank(rko - \Delta rk, p) + \frac{\partial}{\partial rk} Sdprod(rko - \Delta rk, p) < 0 .$$

$$\Delta doxSyst = \frac{\partial}{\partial rk} Sdbank(rko - \Delta rk, p) + \frac{\partial}{\partial rk} Sdprod(rko - \Delta rk, p) ;$$

$$lost_bank = \frac{\partial}{\partial rk} Sdprod(rko - \Delta rk, p) .$$

У ситуації сумарний дохід системи росте при зниженні ставки кредитування маємо істотний приріст доходу підприємства, більший падіння доходів банку. Підприємство може виплачувати банку "премію" за зниження ставки кредитів на Δrk в діапазоні

$$lost_bank \leq bonus_bank \leq \Delta doxSyst .$$

Як розділити приріст доходу системи – завдання іншого рівня, варіанти можуть бути такими: порівну, пропорційно вкладеним сторонами ресурсам, все віддати банку, якщо для підприємства головна цінність не дохід, а завоювання ринку – тобто швидке створення виробничих потужностей.

Наступний крок в завданні "справедливого розподілу приросту цінності" – аналіз області існування в просторі параметрів областей з позитивним приростом сумарного доходу або сумарної цінності.

6.7. Напрямки узагальнення і застосування моделі оптимального розподілу ресурсу

Ми розглянули приклад використання методу оптимального агрегування для варіаційної задачі розвитку. Обчислювальна ефективність методу оптимального агрегування дозволила розширити коло доступних результатів оптимізації і моделювання: будувати функції впливу, набирати віртуальну статистику для "що буде якщо аналізу" та "ризик-аналізу". У свій час центром застосування методів оптимального управління були задачі управління літальними апаратами – вертольотами, літаками вертикального зльоту і посадки, ракетами-носіями, космічними апаратами, роботами-маніпуляторами. Саме на задачах управління такими динамічними об'єктами сформувалися сучасні методи оптимального управління, зокрема, метод динамічного програмування, метод принципу максимуму.

Підкреслимо важливу особливість цього напрямку застосування методів оптимального управління: те, що в епоху Ейлера і Лагранжа було "математичною іграшкою" для вузького кола математиків було реалізовано спочатку у бортових ЦОМ вагою 50–80 кг, а зараз – в мікроконтролерах і мікропроцесорах. Документально відомо, що система управління ракети-носія "Аполлон" реалізувала розв'язання варіаційної задачі Больца. Природно, що застосування методів оптимального управління для воєнних об'єктів автоматично засекречувалось. Однак численні роботи з оптимального управління техніко-економічними об'єктами, проекти "кібернетичних корпорацій" не знаходили прямого використання. Причиною такого "відставання" є комплекс факторів: – обмежені можливості експериментування і спостереження; – специфіка об'єкта управління і системи управління – "людський фактор", управління через мову (об'єкти керовані мовою), важливість інформаційних процесів; – децентралізація, розподіленість об'єкта управління; – складності прогнозування і планування окремої організації з урахуванням активності інших організацій; – триєдиність елементів соціо-техніко-економічних систем: в економічно розвинених суспільствах індивід є одночасно виробником, споживачем та інвестором; – інноваційний характер процесів функціонування і розвитку соціо-техніко-економічних систем.

На рис. 6.30 подана схема актуальних для теорії і практики задач побудови моделей і методів оптимізації процесів розвитку. В багатьох з

цих задач використання методу оптимального агрегування створює можливості розробки відносно простих моделей для задач, що при інших підходах є занадто складними. Пам'ятаємо що метод оптимального агрегування не тільки обчислювально ефективний, але і нечутливий до виду узагальнених виробничих функцій.

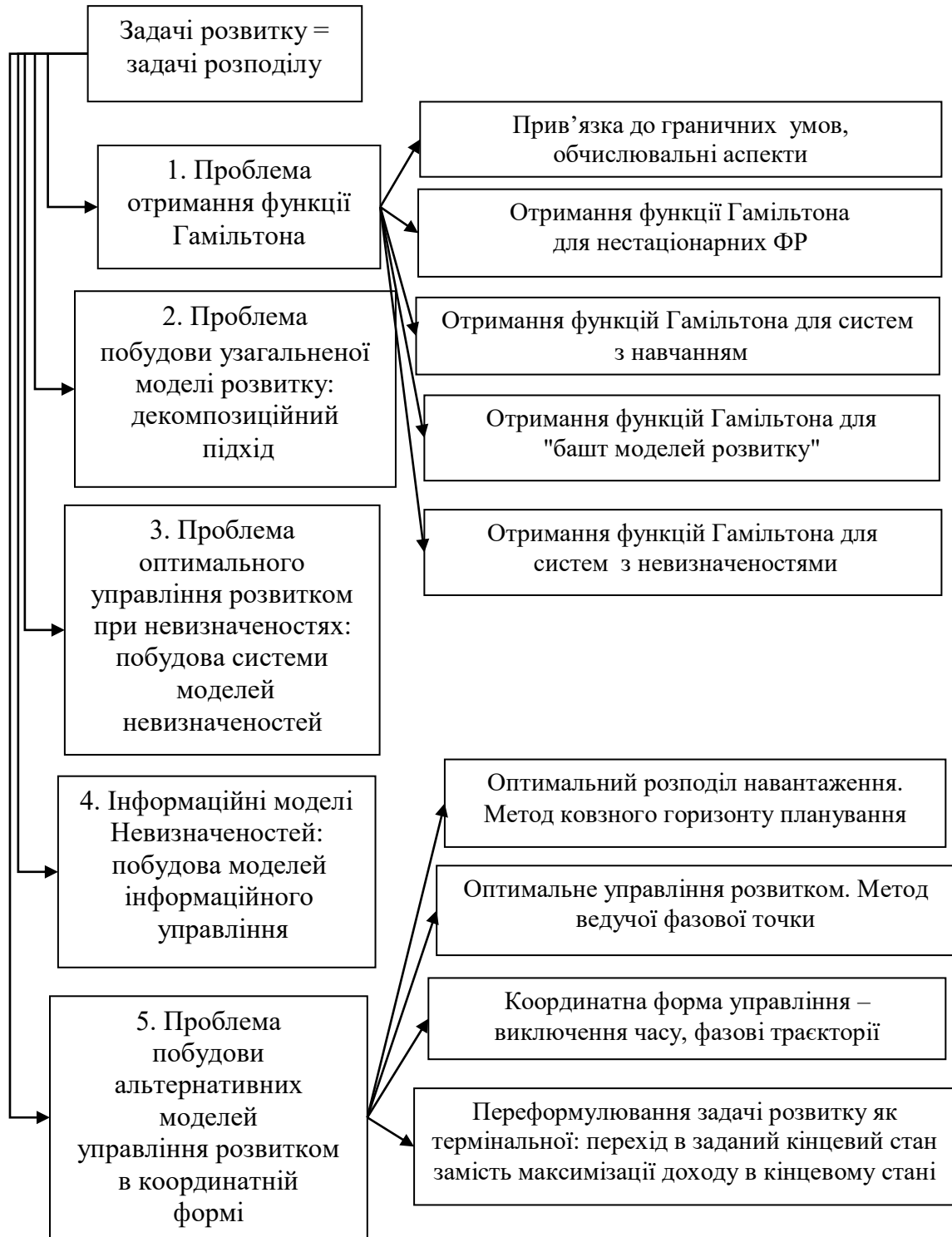


Рис. 6.30. Система актуальних задач оптимального управління розвитком

Перспективний напрямок – побудова базової моделі елемента вертикально інтегрованої виробничої системи. Між іншим, система "банк – виробнича система" є прикладом вертикально інтегрованої системи.

Майже для всіх проблем перерахованих в схемі на рис. 6.30 в нашій роботі отримані базові елементи – методи гібридних розв'язань, методи конструювання робочих моделей, програмні модулі, типові інтерфейси для проведення досліджень на моделях.

З екології і соціології відомо, що інтенсивний розвиток систем часто закінчується крахом, викликаним не зовнішніми катаклізмами, а внутрішніми факторами. Для соціо-техніко-економічних систем фактором раціонального функціонування без катастроф є відкритість управління, інформаційна симетрія усіх учасників: індивід в ролі продавця знає усі рекламно-маркетингові схеми, специфіку інформаційних війн конкурентів, і, природно, використовує ці знання в ролі покупця... Інакше кажучи, мають шанс на виживання системи з відкритим управлінням. В теоретичному плані прийняття припущення про відкрите управління дозволяє будувати прості і адекватні моделі дійсно складних систем. Далі розглянуто ряд актуальних задач розвитку, для яких можливо побудувати моделі з використанням методу оптимального агрегування. Канонічний шлях побудови моделей: – збір словесної інформації і побудова лінгвістичних моделей; – аналіз зв'язків і побудова графових моделей; – вибір математичних моделей (алгоритмів, диференціальних і алгебраїчних рівнянь...) для елементів схеми; – збирання моделі системи з функціональних субмоделей, порівняльний аналіз з доступними статистичними даними. Побудуємо схеми розв'язання ряду актуальних задач розвитку з урахуванням використання методу оптимального агрегування. Почнемо зі схеми для базової – однокрокової задачі (рис. 6.31), розглянутої в розділі 1.

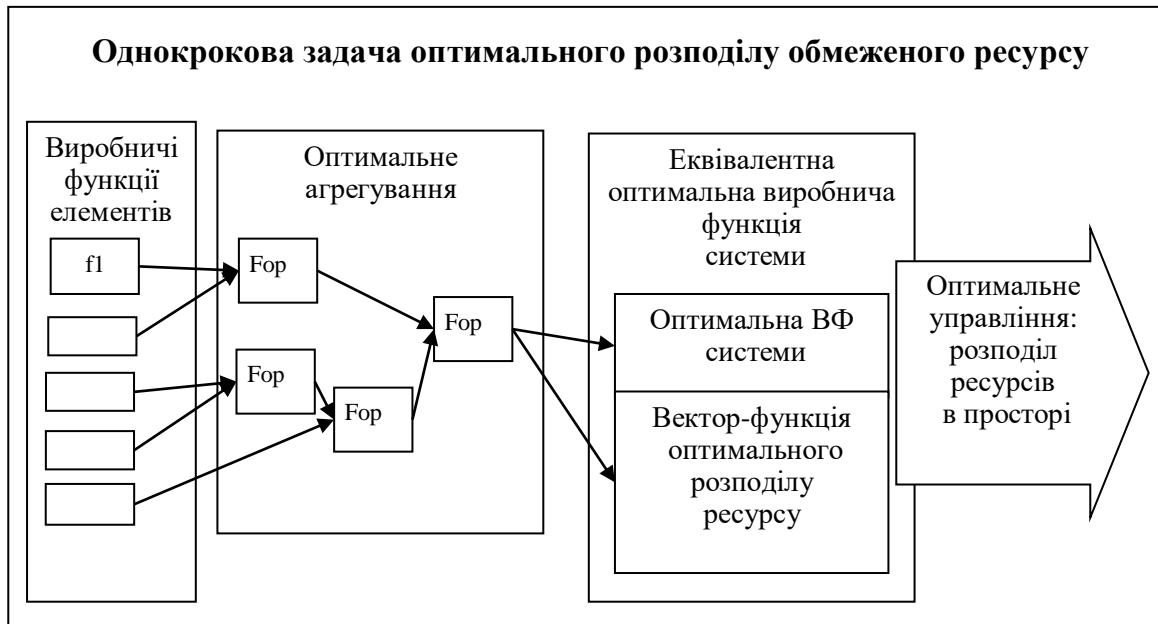


Рис. 6.31. Схема розв'язання однокрокової задачі оптимального розподілу ресурсу методом оптимального агрегування

При переході до багатокрокової задачі розвитку (рис. 6.32) метод оптимального агрегування дозволяє замінити багатовимірну задачу (з декількома паралельно працюючими виробництвами) еквівалентною одновимірною, розв'язуємо для еквівалентної системи варіаційну задачу оптимального розвитку.

Результатом розв'язання варіаційної задачі є функція часу, що для кожного моменту процесу визначає оптимальну (за інтегральним критерієм) частку ресурсу для розвитку. Остання – рутинна операція – дезагрегування: визначення часток ресурсу в розвиток кожного окремого виробництва.

Цю задачу можна розширювати введенням використання зовнішніх ресурсів, обмежень ринку, запізнь віддачі інвестицій та ін.



Рис. 6.32. Схема розв'язання задачі оптимального розподілу ресурсу методом оптимального агрегування

На рис. 6.33 подано приклад модифікації задачі розвитку – ураховано ефект освоєння виробництва та попит на продукт. Таке розширення приводить до суттєвої зміни задачі – змінною управління замість *пропорції розподілу* стає *ціна продажу*. Розв'язання одновимірної задачі про цінові стратегії подано в [4, 6, 16, 25, 26].

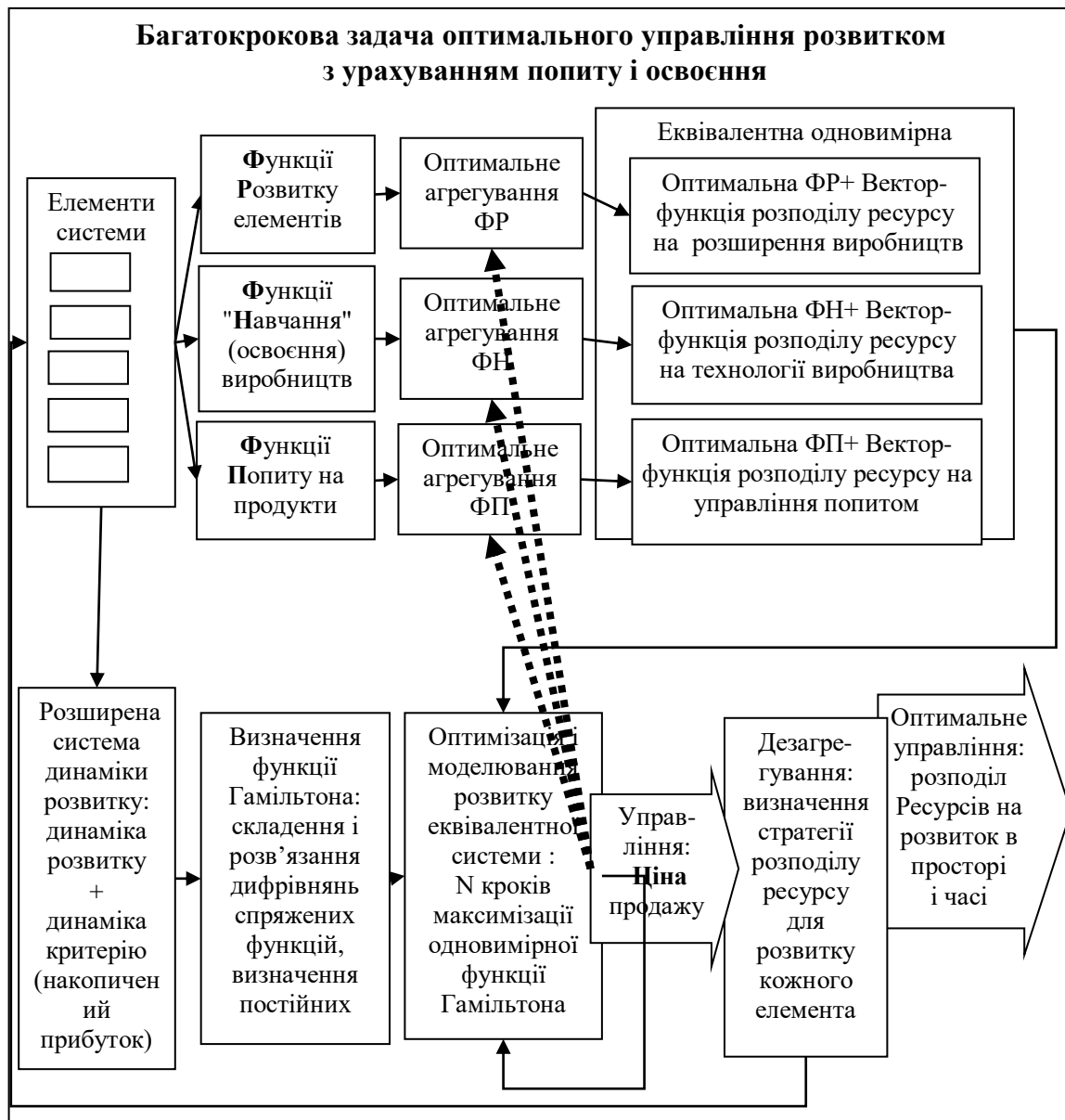


Рис. 6.33 Схема розв'язання задачі про цінові стратегії з використанням методу оптимального агрегування

В багатовимірній задачі ми маємо такі модулі елементів, що паралельно функціонують:

- окремі виробництва окремих продуктів, вихід – сумарний прибуток;
 - підсистеми розширення окремих виробництв, вихід – сумарний приріст виробничих потужностей;
 - попити на окремі продукти, вихід – сумарний попит на продукти.
- Бачимо можливості оптимального агрегування
- виробництв;
 - підсистем розширення виробництв;
 - попиту на окремі продукти.

Тобто, існує можливість, звести багатовимірну (багато продуктову) систему до еквівалентної оптимальної одновимірної. Перше ускладнення на цьому шляху – оптимальні функції виробництва, розвитку та попиту будуть залежати не тільки від обсягу обмеженого ресурсу, але і від цін продажу продуктів.

Значна частина інформаційних і матеріальних продуктів йде безпосередньо незалежному споживачу, який:

- звичайно не зобов'язаний і не вимушений купувати продукт;
- звичайно не мав досвіду використання продукту, тому не може кваліфіковано ним користуватися, і не має повної уяви про корисність і цінність продукту;
- звичайно може вільно (кваліфіковано, чи випадково) вибрати між продуктами виробників-конкурентів.

Тобто, щоб розвивати попит і утримувати попит, треба витратити ресурси на інформування і навчання клієнтів. Чи можна раціонально управляти виробничою системою, яка базується на "примхах" клієнта?

– Можна, якщо вироби і технології будуть проектуватися як єдине ціле з процедурами і методами роботи з клієнтами. Фактично так життя заставило проектувати автомобілі – в комплексі з автосервісом. Можна застосувати методи теорії управління до об'єкта "клієнт", якщо побудувати адекватну модель такого "об'єкта управління": орієнтованого мовою, такого, що навчається, і може довчитися до стану "раціонального вибору".

На рис. 6.34 подано схему системи "клієнти–продукти–виробництва". Задача, подана на рис. 6.34 відрізняється від задачі знаходження цінних стратегій (рис. 6.33) тим, що клієнт стає активним елементом системи, "верстатом", в який вкладаються певні ресурси і отримується певний результат. Виділяємо такі модулі з паралельно функціонуючими елементами:

– окремі продукти як технологічні перетворювачі витрат ресурсів (на просування) в прирощення попиту (і прибутку), вихід – сумарний прибуток;

– попити на окремі продукти, вихід – сумарний попит на продукти, вхід (управління) – регулювання цін та інформування клієнтів;

– клієнти як об'єкти навчання та інформування, вихід – сумарне прирощення попиту (продажів) продуктів. Навчання та інформування клієнтів не є чимось штучним, надуманим – згадаємо тест-драйви нових марок автомобілів, що влаштовуються автосалонами.

Бачимо такі можливі застосування оптимального агрегування:

- продуктів, як технологічних перетворювачів "витрати–ефект";
- попиту на окремі продукти;

– груп клієнтів, як об'єктів навчання і "технологічних перетворювачів ресурсів" в прирощення продаж.

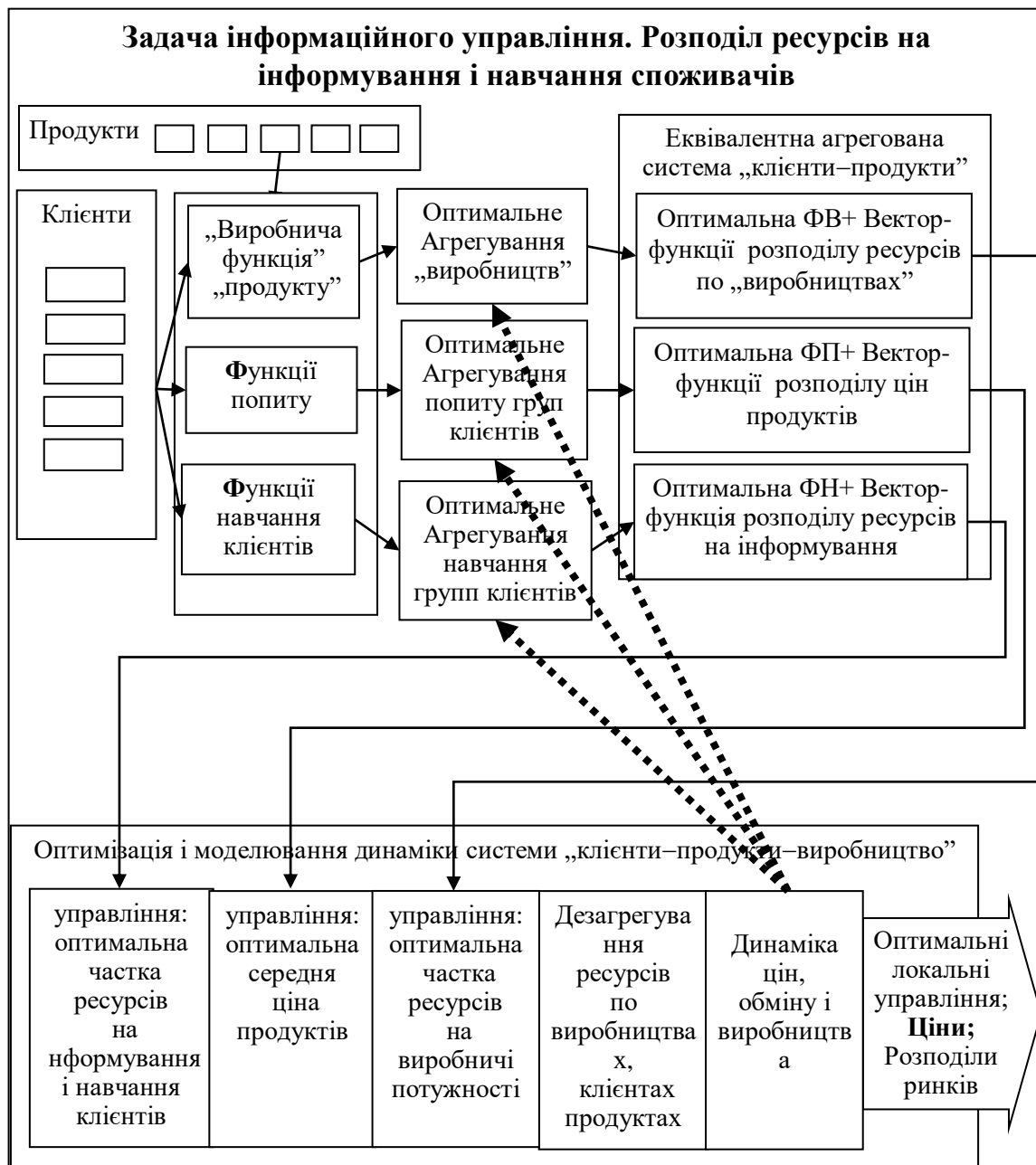


Рис. 6.34. Схема системи "клієнти–продукти–виробництво"

І в цьому випадку можливе зведення багатовимірної системи до еквівалентної оптимальної одновимірної. Ускладнення в застосуванні оптимального агрегування – наявність складних, нелінійних і нестационарних зв'язків між функціональними підсистемами "клієнти–навчання", "продукти–попит", "клієнти–попит" і залежність "оптимальних виробничих функцій" від цін продажу.

На завершення розглянемо ще одну задачу, що не є останньою, а тільки введенням в більш широкий клас задач – так званих "N×M" систем (рис. 6.35). Це класична модель ринку. Маємо N учасників ринку та M продуктів. На початку процесу кожен учасник має певні запаси товарів і виробничі потужності.

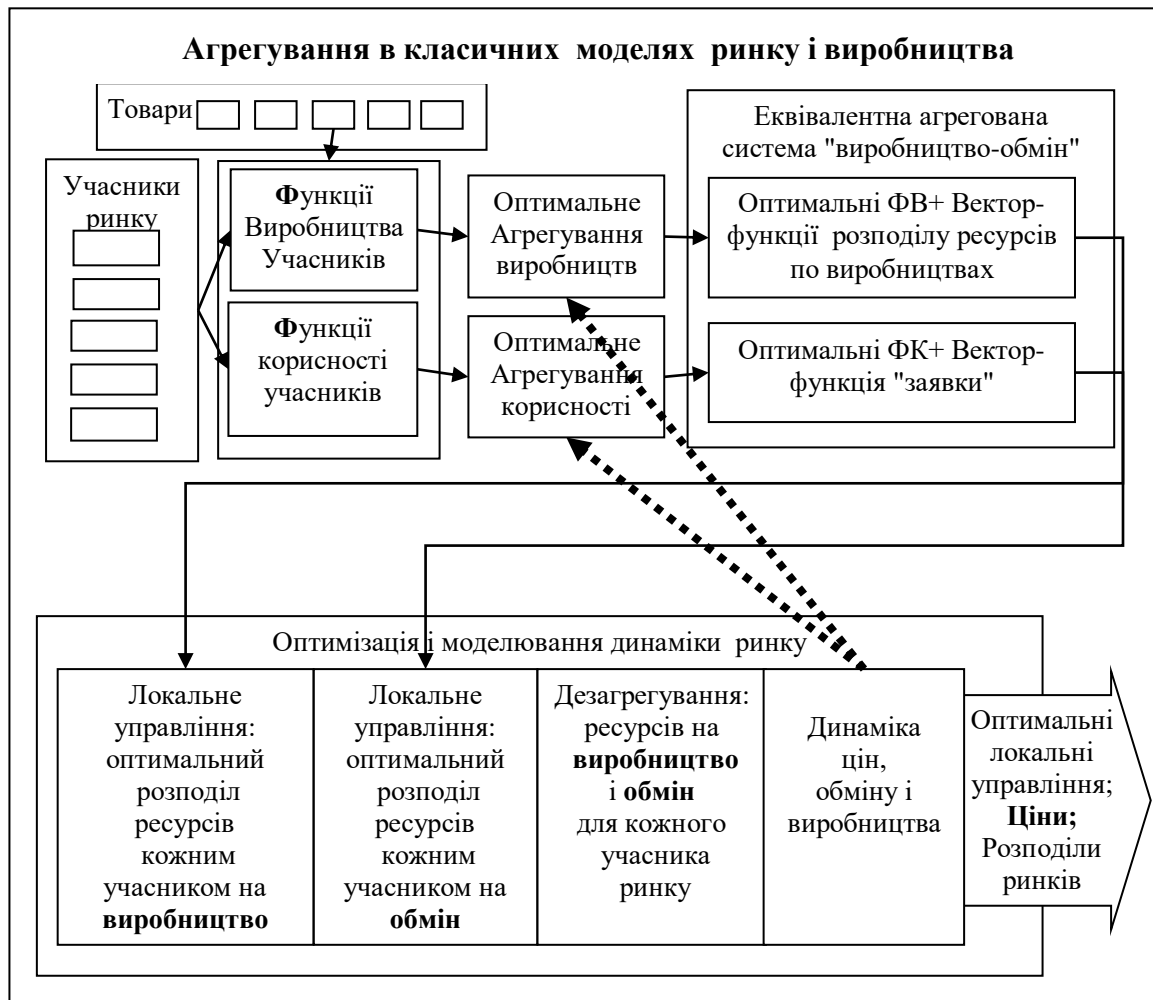


Рис. 6.35. Схема системи з обміном ресурсами і виробництвом

Сценарій процесів перерозподілу [23, 65, 83, 89]:

- "секретар ринку" визначає сумарну кількість кожного виду товарів (ресурсів), що виставили на обмін учасники ринку (елементи системи);

- кожний учасник оцінює свій початковий набір товарів (запаси) у поточних цінах. Ця сума – його "капітал" або "бюджет". Він може поміняти початковий набір на інший, але такої ж вартості;

- кожний учасник розв'язує задачу максимізації своєї функції корисності при бюджетному обмеженні і знаходить оптимальний набір

товарів (на практиці це може робитись методом пошуку, проб і помилок) і подає "заявку" на такий набір;

– "секретар ринку" збирає ці заявки і визначає сумарну потребу в кожному виді товарів, а потім порівнює їх з наявними сумарними запасами – визначає дефіцити/профіцити;

– ціни змінюються пропорційно дефіцитам і цикл повторюється, допоки дефіцити не стануть нульовими – це буде стан рівноваги ринку.

Якщо моделювати задачу безпосередньо, то обчислювальні витрати зростають пропорційно $N \times M$, якщо для кожного учасника ринку знаходити оптимальну заявку (максимум функції M змінних – функції корисності учасника).

І в цьому випадку можливо застосувати метод оптимального агрегування (рис. 6.35). Оптимальна функція корисності кожного учасника буде залежати від обмеження по ресурсу і по вектору цін. Бачимо спільну особливість задач (рис. 6.32 – 6.35) – залежність функцій оптимального розподілу ресурсу від цін.

Висновки

Розглянуто теоретико-логічні і практичні аспекти методу оптимального агрегування. Відомо, що над багатовимірними задачами оптимізації висить "прокляття розмірності". Р. Беллман як центральну мету своїх досліджень поставив пошук методів зведення задач вибору точки в багатовимірному фазовому просторі в послідовність задач вибору точки в просторі меншої розмірності, краще – в одновимірному.

Отримані результати виростили як "сімейки" – перенесення в середовище математичного пакета, а потім – доповнення (невипуклі функції, зовнішні ресурси...) задач поставлених і досліджених Р. Беллманом. Фундаментальна основа методу – принцип оптимальності, закладений в основу методів динамічного програмування та принципу максимуму Л. Понтрягіна. Відмінність, в тому, що метод оптимального агрегування розбиває багатовимірну оптимізаційну задачу на послідовність мало розмірних задач не в часі, а в просторі.

В роботі паралельно розглядався альтернативний метод оптимізації – відкрите управління. Найгірше, що можна придумати – визначити, який з них є кращим. Кращим буде синтез цих методів, однак, це ще треба зробити.

Література

1. Аакер Д.А. Бизнес-стратегия: от изучения рыночной среды до выработки беспроигрышных стратегий / Аакер Д.А. – М.: Эксмо, 2007. – 464 с. – ISBN 978-5-699-22614
2. Акофф Р. Планирование в больших экономических системах. / Акофф Р. – М.: Советское радио, 1972. – 224 с.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. / Арнольд В.И. – М.: Наука, 1990. – 128 с. – ISBN 5-02-014271-9
4. Бадьора С.П. Моделювання багатопродуктових виробничих систем. / Бадьора С.П., Боровська Т.М., Северілов В.А. // Вісник ВПШ. – 2004. – № 2. – С. 76.
5. Бадьора С.П. Інтеграція навчання, наукових досліджень і практики на прикладі узагальнень задачі Марковіца / Бадьора С.П., Колесник І.С. // Доповіді МНК "Інтернет–освіта–наука – 2002. Том 2". – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2002. – С. 275-279.
6. Бадьора С.П. Декомпозиційні методи моделювання розвитку розподілених технологічних систем. Дисертація на здоб. вч. ступ. канд. техн. наук. / Бадьора С.П. — Вінниця.: ВНТУ, 2007. — 220 с.
7. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. / Базара М., Шетти К. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
8. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. / Банди Б. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с. – ISBN 5-94774-175-X, ISBN 5-94774-060-5
10. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. / Беллман Р. — М.: Наука, 1964. — 317 с.
11. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления. / Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. — М.: Издат. иностр. литер., 1962. — 233 с.
12. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления. / Беллман Р., Калаба Р. — М.: Наука, 1969. — 131 с.
13. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. / Берзин Е. А. – М.: Сов. радио, 1974. – 304 с.
14. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. / Болтянский В.Г. — М.: Наука, 1966. — 308 с.
15. Боровская Т.Н. Детская экономика. Моделирование и оптимизация производственных систем / Боровская Т.Н., Северілов В.А., Колесник І.С. // Компьютеры + Программы. — 2002. — №2. — С. 43-47.

16. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Цінові стратегії / Боровська Т. М., Бадьора С.П., Северілов В.А. // Вісник ВПП. — 2003. — № 6. — С. 142-147.
17. Боровська Т.М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Кредитні стратегії / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник ВПП. — 2003. — № 6. — С. 137-142.
18. Боровська Т.М. Моделювання багатопродуктових виробничих систем / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 1. — С. 48-54.
19. Боровська Т.М. Адаптивна система для оптимального розподілу навантаження між хімічними реакторами / Боровська Т.М., Васюра А.С., Колесник І.С. // Тези доповідей МНК "Контроль і управління в технічних системах". — Вінниця: Універсам-Вінниця, 2005. — С. 160.
20. Боровська Т.М. Структура і технології розробки електронних книг, орієнтованих на дистанційну освіту / Боровська Т.М., Колесник І.С. // Матеріали МНМК дистанційні технології навчання та їх засоби. Випуск 1. — Вінниця: ВМУРОЛ "Україна", 2004. — С. 111-115.
21. Боровська Т.М. Нечітка оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі з неопуклими виробничими функціями елементів / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2003. — № 5. — С. 36-41.
22. Боровська Т.М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Кредитні стратегії / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2003. — № 6. — С. 173-180.
23. Боровська Т.М. Спеціальні розділи вищої математики: Навчальний посібник. / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. — Вінниця: ВНТУ, 2003. — 182 с.
24. Боровська Т. М. Основи кібернетики та дослідження операцій: Навч. посібник. / Боровська Т. М., Колесник І.С., Северілов В.А. — Вінниця: ВНТУ, 2003. — 242 с.
25. Боровська Т.М. Моделювання задач управління інвестиціями: Навчальний посібник. / Боровська Т.М., Северілов В.А., Бадьора С.П., Колесник І.С. - Вінниця: ВНТУ, 2007. — 175 с.
26. Боровська Т.М. Моделювання та оптимізація у менеджменті: Навчальний посібник. / Боровська Т.М., Северілов В.А., Бадьора С.П., Колесник І.С. - Вінниця: ВНТУ, 2007. — 160 с.

27. Боровська Т.М. Моделювання і оптимізація процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння. Монографія. / Боровська Т.М., Бадьора С.П., Колесник І.С., Северілов В.А. – Вінниця: Універсам-Вінниця, 2007. – 162 с.
28. Боровська Т.М. Оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі на базі агрегування виробничих функцій / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – № 1. – С. 12-18.
29. Боровська Т.М. Моделювання банківської системи / Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А., Северілов П.В. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2004. – № 1. – С. 53-61.
30. Боровська Т.М. Електронна книга "Моделювання у менеджменті". Технології навчання, орієнтовані на моделювання / Боровська Т.М., Северілов В.А. // Доповіді МНК "Інтернет–освіта–наука – 2002. Т. 2, – Вінниця: Універсам-Вінниця. – 2002. – С. 285-288.
31. Боровська Т.М. Декомпозиційний підхід до прямої оцінки ризиків ринку. Матеріали V Міжнародної НПК „Економічна безпека сучасного підприємства”. / Боровська Т.М., Колесник І.С. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008 – С. 80-86.
32. Бурков В.Н. Большие системы: моделирование организационных механизмов. / Бурков В.Н. — М.: Наука, 1989. — 246 с.
33. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. / Вентцель Е.С. — М.: Наука, 1969. – 371 с. – ISBN 5-06-003650-2
34. Воронов А.А. Теория автоматического управления. / Воронов А.А. – Ч. 1, 2. – М.: Энергия, 1986, 1987.
35. Глушков В.М. Кибернетика. Вопросы теории и практики. / Глушков В.М. – М.: Наука, 1986. – 477 с.
36. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем. / Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. – К.: Техника, 1975. – 390 с.
37. Горбань А.В. Рациональная технология системного производства проектных образцов: структура баз знаний перспективных САПР. / Горбань А.В. // Теория автоматизированного проектирования, – Харьков: ХАИ, 1986. – С. 35-45.
38. Дж.Кемени. Кибернетическое моделирование. / Дж.Кемени, Дж.Снелл. — М.: Советское радио, – 1972. – 223 с.
39. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. / Евтушенко Ю.Г. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 432 с.

40. Згуровський М.З. Системна стратегія технологічного передбачення в інноваційній діяльності. / Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – №3. – С. 7-24.
41. Изерман Р. Цифровые системы управления. / Изерман Р. — М.: Мир, 1984. – 233 с.
42. Имитационное моделирование производственных систем / Под общ. ред. А.А. Вавилова. – М.: Машиностроение; Берлин: Техника, 1983. – 416 с.
43. Исследование операций. – Т1: Методологические основы и математические методы. – Т2: Модели и методы / Под ред. Дж. Моудера. — М.: Мир, 1981. — 417 с.
44. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. / Клейнер Г.Б. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 567 с.
45. Ковальский В.С. Моделирование коммерческой деятельности предприятия. / Ковальский В.С., Косарев А.И., Кузьменко В.Н. — К., 1995. – 20 с.
46. Колесник І.С. Інтернет-орієнтовані технології виробництва інтелектуальної продукції. Структура малих дослідницьких груп / Колесник І.С., Бадьора С.П. // Тези доповідей МНК "Інтернет–освіта–наука – 2002". – Т. 2, – Вінниця: Універсум-Вінниця. – 2002. — С. 280-284.
47. Колесник І.С. Управління проектами розвитку нових виробництв. Програмний комплекс для дистанційної освіти. / Колесник І.С., Боровська Т.М., Северілов В.А. // Матеріали IV міжнародної конференції "Інтернет–освіта–наука" (ІОН-2004). – Т. 2. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2004. – С.254-258.
48. Колесник І.С. Моделі і методи для аналізу і оптимізації інвестиційних проектів / Колесник І.С., Боровська Т.М., Северілов В.А. //Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 4. С.56-61.
49. Колесник І.С. Управління проектами розвитку нових виробництв. Програмний комплекс для дистанційної освіти. / Колесник І.С., Боровська Т.М., Северілов В.А. // Тези доповідей МНК "Інтернет–освіта–наука – 2004". – Т. 2, – Вінниця: Універсум-Вінниця. – 2004. — С. 259-263.
50. Колесник І.С. Оптимізація портфелю цінних паперів. Мультимедійний комплекс для дистанційної освіти. / Колесник І.С., Мирончук В.М. // Тези доповідей МНК "Інтернет–освіта–наука – 2004". – Т. 2, – Вінниця: Універсум-Вінниця. – 2004. — С.

51. Колесник І.С. Мультимедійний комплекс для самостійного освоєння розділу "Оптимізація інвестиційних проектів. Стратегії розвитку виробничих систем" / Колесник І.С., Северілов В.А., Хільська І.І. // Матеріали МНМК дистанційні технології навчання та їх засоби. Випуск 1. – Вінниця: ВМУРОЛ "Україна", – 2004. – С. 100-105.
52. Колесник, І.С. Оптимальне управління системою котлоагрегатів / Колесник, І.С., Хміль С.Л. // Тези доповідей МНК "Контроль і управління в технічних системах". – Вінниця: Універсам-Вінниця, – 2005. – С. 73.
53. Колесник І.С. Моделювання процесів розподілу ресурсів у децентралізованих системах. Дисертація на здоб. вч. ступ. канд. техн. наук, зах. 17.03.2006, затв. 08.06.2006 / Колесник І.С. — Вінниця.: ВНТУ, 2006. — 208 с.
54. Колесник І.С. Розробка імітаційних моделей для оцінки ризиків ринку./ Матеріали V Міжнародної НПК "Економічна безпека сучасного підприємства" / Колесник І.С., Северілов П.В., Северілов В.А. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008 – С. 66-71.
55. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции: Базовый курс. Учебник для вузов. / Крушвиц Л. — Москва-Харьков: Питер, 2000. — 389 с. – ISBN 5-272-00130-3.
56. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. / Куропаткин П.В. — М.: Высшая школа, 1980. — 275 с.
57. Ли Т.Г. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация (пер. с англ.). / Ли Т.Г., Адамс Г.Э., Гейнз У.М. — М.: «Советское радио», 1972. — 312 с.
58. Месарович М. Д. Общая теория систем: математические основы. / Месарович М. Д., Такахара Я. — М.: Мир, 1978. – 308 с.
59. Месарович М.Д. Основания общей теории систем / Месарович М.Д. // Общая теория систем. – М.: Мир, 1966. – С. 15–18.
60. Месарович М.Д. Теория иерархических многоуровневых систем. / Месарович М.Д., Мако З., Такахара М. – М.: Мир, 1973. – 310 с.
61. Месарович М.Д. Математическая теория систем. / Месарович М.Д., Такахара И. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
62. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. / Мину М. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с.
63. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. / Моисеев Н.Н. – М.: Наука, 1981. – 487 с.

64. Исследование операций. Т1: Методологические основы и математические методы. Т2: Модели и методы / Под ред. Дж Моудера. — М.: Мир, 1981. — 417 с.
65. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. / Опойцев В.И. — М.: Наука, 1977. — 311 с.
66. Пешель М. Моделирование сигналов и систем. / Пешель М. — М.: Мир, 1981. — 286 с.
67. Пиотровский Р.Г. Текст, машины, математика. / Пиотровский Р.Г. — Ленинград: Наука, 1975. — 327 с.
68. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. / Полак Э. — М.: Мир, 1974. — 376 с.
69. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. Изд.2. / Понтрягин Л.С. Едиториал УРСС. — 2004. — 64 с.
70. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. Изд.2. / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. — М.: Высшая школа, 1969. — 384 с.
71. Попов Э.В. Экспертные системы. / Попов Э.В. — М.: Наука, 1987. — 284 с.
72. Северилов В.А. Детская экономика. Роль везения и умения в развитии производственных систем / Северилов В.А. // Компьютеры+Программы. — 2002. — №1. — С. 46–50.
73. Северилов В.А. Эволюционная технология разработки экспертных систем / Северилов В.А., Боровская Т.Н., Мельник Е.Н. // Теория автоматизированного проектирования. — Харьков: ХАИ, 1987. — Вып. 4 — С. 33–38.
74. Северілов В. Оптимальне управління розподіленням ресурсів в децентралізованих системах. / Северілов В., Колесник І., Черняк Н. // Доповіді МНК “Контроль і управління в складних системах”. — Вінниця: Універсум-Вінниця, 2001. — С. 142–146.
75. Северілов В. Узагальнення задач оптимального управління розподіленням ресурсів в часі. / Северілов В., Січко Т., Колесник І. // Тези доповідей МНК "Контроль і управління в складних системах". — Вінниця: Універсум-Вінниця, 2001. — С. 206–212.
76. Северілов В.А. Проблема моделювання сучасних виробництв і ринків. / Северілов В.А. Колесник І.С., Бадьора С.П. // Матеріали НМК "Проблеми підручника вищої школи". — Вінниця: Універсум-Вінниця, 2002. — С. 15.
77. Северілов В.А. Конструювання моделей соціо-техніко-економічних систем – нова навчальна дисципліна / Северілов В.А., Бадьора С.П., Васильська М.В. // Матеріали НМК “Дистанційні технології навчання та їх засоби. Випуск 1, – Вінниця: ВМУРОЛ „Україна”. — 2004. — С. 132-136.

78. Северілов В.А. Електронна книга “Моделювання та оптимізація в економіці”. Проблема трьох “не” – нелінійності, нестационарності та невикуклості / Северілов В.А., Колесник І.С., Бадьора С.М. // Доповіді НМК “Проблеми підручника вищої школи”. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2001. – С. 138–141.
79. Северілов В.А. Технологія створення електронних книг на прикладі посібника з спеціальних розділів вищої математики / Северілов В.А. // Доповіді НМК “Проблеми підручника вищої школи”. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2001. – С. 217–221.
80. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. / Трухаев Р.И. – М.: Наука, 1981.– 258 с.
81. Форд Л.Р. Поток в сетях. / Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. — М.: Мир, 1966. – 272 с.
82. Форрестер Дж. Динамика города (пер. с англ.). / Форрестер Дж. – М.: Прогресс, 1974.– 276 с.
83. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (пер. с англ.). / Форрестер Дж. – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
84. Хаотические системы. Тематический выпуск. систем — М.: Мир, ТИИЭР. — 1988. — №8. — 174 с.
85. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. / Цыпкин Я.З. — М.: Наука, 1968 — 400 с.
86. Чуев Ю.В. Технические задачи исследования операций. / Чуев Ю.В., Спехова Г.П. — М.: Советское радио, 1981. — 176 с.
87. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. / Шеннон Р. – М: Мир, 1978. – 418 с.
88. Шрейдер Ю.А. Системы и модели. / Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. — М.: Радио и связь, 1982. – 152 с.
89. Экланд И. Элементы математической экономики. / Экланд И. — М.: Мир, 1983. – 248 с.
90. Экспертные системы. Принципы работы и примеры: Пер. с англ./ А. Брукинг, П. Джонс, Ф. Кокс и др.; Под ред. Р. Форсайта. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.
91. Яблонский А.И. Стохастические модели научной деятельности. / Яблонский А.И. // Системные исследования. Ежегодник — М.: Наука, 1975. — 171 с.
92. Bellman R.E. Decision-making in a Fuzzy Environment. / Bellman R.E., Zadeh L.A. — MS, vol. 17, 1970.
93. Frank R. The-Winner-Take Society. / Frank R., Cook Ph. — Penguin Books, 1995. — 231 p. – ISBN: 0028740343.
94. Kelly K. New Rules for the New Economy. 10 radical strategies for a connected world. / Kelly K. — Penguin books, 1999. — 180 p. – ISBN: 014028060X.

95. Markowitz H. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments. / Markowitz H. – N. Y.: John Wiley and Sons, 1959. – 129 p. – ISBN: 0300013728.

Наукове видання

**Таїса Миколаївна Боровська
Ірина Сергіївна Колесник
Віктор Андрійович Северілов**

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО АГРЕГУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ

Монографія

Редактор С. Малішевська
Оригінал-макет підготовлено Т. Боровською

Видавництво ВНТУ “УНІВЕРСУМ-Вінниця”
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК №746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-85-32

Підписано до друку
Формат 29,7×42¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різнографічний Ум. друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам. №

Віддруковано в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-81-59