УДК 681.12

В. М. Михалевич
В. О. Краєвський

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИЗНАЧАЛЬНОГО СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ ГАРЯЧОМУ ДЕФОРМУВАННІ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У роботі показано, що використання у визначальному співвідношенні степеневого ядра приводить до отримання узагальненого рівняння Абеля, для знаходження розв'язку якого продемонстровано застосування методу операційного числення.
Ключові слова: накопичення пошкоджень, тензорна модель, руйнування, деформація, пластичність.

Abstract
In this work it is shown that the using of a power kernel in the main expression of deformation theory during hot deformation leads to the general of the Abel equation, for which the application of the operational calculus method is demonstrated.
Keywords: damage accumulation, tensor model, destruction, deformation, plasticity.

Вступ

Розвитку теорії підсумовування пошкоджень присвячено велика кількість праць науковців всього світу [1-18].

У працях [19, 20] показано, що визначальне співвідношення в лінійній теорії граничних деформацій при гарячому деформуванні може бути записаний у вигляді

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \cdot d\tau = \psi(t), \quad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

$$\psi(0) \ge 0, \ \psi(t_*) = 1, \tag{2}$$

де φ - функція, що з точністю до сталої дорівнює інтенсивності швидкостей деформацій.

У представленні (1) відповідно термінології теорії інтегральних рівнянь функція $\psi(t)$ є вільним членом і вважається відомою функцією, $(t-\tau)^{\alpha-1}$ - ядро інтегрального рівняння; $\varphi(\tau)$ - невідома функція.

Згідно класифікації інтегральних рівнянь маємо лінійне інтегральне рівняння Вольтери 1 – го роду типу згортки. До того ж (1) є узагальненим рівнянням Абеля, розв'язок якого за певних умов завжди існує.

Результати дослідження

Надалі вважатимемо $\psi(t)$ - функцією, що має неперервну похідну на деякому інтервалі $[0,\infty)$. Незважаючи на те, що при $\alpha \le \frac{1}{2}$ ядро рівняння (1) не належить простору інтегровних з квадратом функцій, вказане рівняння має розв'язок.

Припустимо, що розв'язок рівняння (1) існує. Розв'язок цього рівняння може бути отриманий різними методами. Розглянемо застосування методу операційного числення.

Надалі дотримуватимемося методології, що викладена в [21]. Позначимо через $\overline{f}(p), \overline{\varphi}(p)$ перетворення Лапласа відповідно функцій $f(t), \varphi(t)$. Для ядра інтегрального рівняння маємо

$$k(t)=t^{\alpha-1}\Rightarrow \bar{k}(p)=\frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}}. \tag{3}$$

З урахуванням введених позначень інтегральне рівняння (1) в просторі зображень матиме вигляд

$$\bar{k}(p)\cdot\bar{\varphi}(p)=\bar{\psi}(p), \tag{4}$$

звідко легко знайти зображення невідомої функції

$$\bar{\varphi}(p)=\frac{\bar{\psi}(p)}{\bar{k}(p)}. \tag{5}$$

Оригінал шуканої функції $\varphi(t)$ може бути визначений за допомогою оберненого перетворення Лапласа

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\int\limits_L\frac{\bar{\psi}(p)}{\bar{k}(p)}\cdot e^{p\cdot t}\cdot dp, \tag{6}$$

де L – деяка пряма, що розташована праворуч від особливих точок підінтегральної функції. Звідси випливає додаткова умова розв'язності за допомогою перетворення Лапласа інтегрального рівняння

$$\bar{\varphi}(p)\Big|_L=\frac{\bar{\psi}(p)}{\bar{k}(p)}\Bigg|_L\xrightarrow[|p|\to\infty]{}0. \tag{7}$$

Якщо умова (7) не виконується, це означає, що метод перетворення Лапласа не застосовний у відповідному випадку.

На основі (5) з урахуванням (3) для узагальненого рівняння Абеля матимемо

$$\bar{\varphi}(p)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\bar{\psi}(p). \tag{8}$$

У цьому випадку умова (7) набуває вигляду

$$\lim_{|p|\to\infty}p^{\alpha}\cdot\bar{\psi}(p)\Big|_L=0. \tag{9}$$

В разі виконання цієї умови розв'язок інтегрального рівняння, що поданий співвідношенням (6) набуває вигляду

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\Gamma(\alpha)\cdot i}\cdot\int\limits_L\bar{\psi}(p)\cdot p^{\alpha}\cdot e^{p\cdot t}\cdot dp, \tag{10}$$

або

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\int\limits_L\bar{\psi}(p)\cdot p^{\alpha-1}\cdot e^{p\cdot t}\cdot dp\right), \tag{11}$$

і на основі використання формули згортки отримаємо

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t\psi(\tau)\cdot(t-\tau)^{-\alpha}\cdot d\tau\right), \tag{12}$$

або

$$\varphi(t)=\frac{\sin(\alpha\cdot\pi)}{\pi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t\frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\cdot d\tau\right), \tag{13}$$

де враховано формулу доповнення для гамма-функції

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\cdot\pi)}. \tag{14}$$

Введемо позначення

$$\psi=u\Rightarrow d\psi=du$$

$$\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=dv\Rightarrow v=-\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \tag{15}$$

та перепишемо інтеграл в (13) за допомогою формули інтегрування частинами

$$\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \cdot d\tau = -\psi(\tau) \cdot \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_0^t + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} \cdot d\tau, \qquad (16)$$

тоді розв'язок (13) набуває вигляду

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\alpha \cdot \pi)}{\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\psi(0) \cdot \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} \cdot d\tau\right) \qquad (17)$$

і після виконання диференціювання остаточно матимемо

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\alpha \cdot \pi)}{\pi} \cdot \left(\frac{\psi(0)}{t^{\alpha}} + \int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \cdot d\tau\right). \qquad (18)$$

Висновки

1. Запропоновано дослідити визначальне співвідношення теорії граничних деформацій при гарячому деформуванні методами теорії інтегральних рівнянь та визначено, що вказане рівняння відноситься до лінійних інтегральних рівнянь Вольтери 1 – го роду типу згортки.
2. Показано, що використання у визначальному співвідношенні степеневого ядра приводить до отримання узагальненого рівняння Абеля, для знаходження розв'язку якого продемонстровано застосування методу операційного числення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности / А. А. Ильюшин // Механика твердого тела. -- 1967. -- №13. - С. 21--25.
2. Колмогоров В. Л. Пластичность и разрушение / В. Л. Колмогоров и др. - М. : Металлургия, 1977. - 336 с.
3. Дель Г. Д. Технологическая механика / Г. Д. Дель. - М. : Машиностроение, 1978. - 174 с.
4. Дель Г. Д. Пластичность деформированного металла. / Г. Д. Дель // В сб.: Физика и техника высоких давлений. - 1983. - №11. - С. 28-32.
5. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / В. А. Огородников. - К. : Выща шк., 1983. - 200 с.
6. Матвийчук В. А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов: Монография / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. - Краматорск: ДГМА, 2009. - 268 с.
7. Mikhalevich V. M. Variational problems for damage accumulation models heritable type [Text] / V. M. Mikhalevich, V. O. Kraevskiy // The nonlinear analysis and application 2009 : materials of the international scientific conference, Kyiv, April 02-04th 2009. - Kyiv : NTUU "KPI", 2009. - P. 109-110.
8. Lebedev A. A. On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics/ A. A. Lebedev, V. M. Mikhalevich // Strength of Materials N 35 (3) , Plenum Publishing Corporation (USA), May - June, 2003, 217-224.
9. Афонин А.Н. Моделирование разрушения металлов при пластической деформации в DEFORM и LS-DYNA / А.Н.Афонин // Известия ОрелГТУ. Машиностроение. Приборостроение.- 2012.- №1.- С. 52-62. – Режим доступу до роботи: http://www.artech-eng.ru/images/stories/Stat/DEFORM/Orel1.pdf.
10. Боткин А. В. Оценка поврежденности металла при холодной пластической деформации с использованием модели разрушения Кокрофта-Латама / А.В. Боткин, Р.З. Валиев [и др.] // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 7. С. 17–22.
11. Боткин А. В. Оценка поврежденности металла при холодной пластической деформации с использованием модели разрушения Кокрофт-Лэтэм и программного комплекса DEFORM 3D / А. В. Боткин, Р. З. Валиев, П. С. Степин // Инновационные технологии в металлургии и машиностроении : материалы 6-й международной молодежной научно-практической конференции «Инновационные технологии в металлургии и машиностроении. Уральская научно-педагогическая школа имени профессора А. Ф. Головина», [г. Екатеринбург, 29 октября - 1 ноября 2012 г.]. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012. — С. 102-108.

12. Боткин А. В. Прогнозирование разрушения металла в процессе интенсивной пластической деформации длинномерной заготовки равноканальным угловым прессованием конформ / Боткин А.В., Валиев Р.З. [и др.] // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16. № 8 (53). С. 98–103.
13. Власов А.В., Герасимов Д.А. Реализация модели Гурсо – Твергарда – Нидельмана для расчетов процессов холодной объемной штамповки несжимаемых материалов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. №8(689). С. 8-17.
14. Власов А.В. О применении критерия Кокрофта-Лэтэма для прогнозирования разрушения при холодной объемной штамповке. // Известия ТулГУ. Технические науки – 2017 вып.11, ч.1 – С 46-59.
15. Казанцев А. В., Келлер И. Э., Петухов Д. С., Трофимов В. Н. Диаграмма предельных деформаций при горячей листовой штамповке металлов: обзор моделей материала, критериев вязкого разрушения и стандартных испытаний // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2017. Т. 21, № x. С. 1—x. doi: 10.14498/.
16. Матвеев М. А.. Оценка вероятности разрушения металла при горячей пластической деформации спомощью критерия Кокрофта— Латама // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2017. Т.23. № 2. С. 109–126.
17. Mikhalevich V. M. Tensor models of rupture strengh. Report no. 1. Steade koading of initially isotropic and anisotropic bodies / V. M. Mikhalevich // Strength of Materials. - 1995, 27 (8) , pp. 482-492. https://doi.org/10.1007/BF02209347
18. Матвійчук В. А. Оцінка деформованості матеріалу заготовок при вальцюванні за схемами в два і більше переходів / В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, І. А. Бубновська // Матеріали Міжнародної науково- методичної Інтернет - конференції "Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності" (17-18.05.2018р.) / Вінниця, ВНТУ, 2018. - 5 с. ? Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/index/pages/view/zbirn2018 Дата звернення: Лют. 2019
19. Mikhalevich V. M. The model of ultimate strains during hot deformation / V. M. Mikhalevich // Izvestia Akademii nauk SSSR. Metally (5) . - 1991, pp. 89-95.
20. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич / Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 - 195 с.
21. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple : учебник для вузов / Д. П. Голоскоков. - Санкт-Петербург: Питер, 2004. – 539 с.

Михалевич Володимир Маркуксович – д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету
Краєвський Володимир Олександрович – к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету

Mykhalevych Volodymyr – D.Sc., Professor, Head of the Department of Higher Mathematics Vinnytsia National Technical University
Kraievskyi Volodymyr – Ph.D., Associate Professor, Department of Higher Mathematics Vinnytsia National Technical University