**УДК 621.396.96**

А. Ю. ВОЛОВИК, О. В. ОСАДЧУК, М. А. ШУТИЛО, О. П. ЧЕРВАК
Винницкий национальный технический университет

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАРОЖДАЮЩИХСЯ НЕИСПРАВНОСТЕЙ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

*Первоначально метод раздельного оценивания, разработанный Фридландом, использовался в качестве эффективного средства понижения вычислительной сложности расширенного фильтра Калмана т.е. фильтра, размерность которого значительно выше размерности контролируемой системы. Структура, предложенная Фридландом, представляет собой пару специальных фильтров, которые разъединены, но действуют параллельно, а линейная комбинация их выходов аппроксимирует выход расширенного фильтра Калмана. В самом общем случае, эта структура не является оптимальной в том смысле, что она не полностью эквивалентна расширенному фильтру Калмана. В данной работе рассматривается применение модифицированного двухкаскадного разделенного фильтра Калмана к задаче идентификации зарождающихся неисправностей в линейных динамических системах.*

*Ключевые слова: расширенный фильтр Калмана, двухкаскадный фильтр Калмана, фильтр, свободный от неисправностей, раздельное оценивание зарождающихся неисправностей.*

A. YU. VOLOVIK, A. V. OSADCHUK, N. A. SHUTILO, O. P. CHERVAK
Vinnytsia National Technical University

## ARISING MALFUNCTIONS IDENTIFICATION BY METHOD OF SEPARATE ESTIMATION

*Annotation – Originally the method of separate estimation developed by Friedland was used as an effective approach of computing complexity lowering of an expanded Kalman filter i.e. the filter which dimension is much higher than dimension of controlled system. The structure offered by Friedland represents pair of special filters which are isolated, but work in parallel, and linear combination of their exits approximates an exit of an expanded Kalman filter. In the most general case, this structure is not optimum in the sense that it is not completely equivalent to an expanded Kalman filter, being optimum only for perturbations of the determined type. In case of random disturbances the two-stage Kalman filter stops being an optimum filter because of connected with performance of very rigid restrictions which are difficult for executing in practice. The purpose of this work is such modernization of two-stage structure of the filter of Friedland which with the arising malfunctions modelled by accidental process of the general type is capable to provide filter responses close to optimum. Use of unitary matrix transformation for the purpose of receiving two standard Kalman filters which linear combination of exits approximates an exit of an expanded Kalman filter is the basis for a method of modernization, and introduction of the additional adjusting input significantly weakens the restrictions imposed on a mutual complete correlation matrix between noise of perturbation and system noise. From the mathematical point of view of structure of the separated filters the expanded Kalman filter which leads covariation matrixes to a diagonal look can receive by application two step linear unitary transformation. The main feature, the entered transformations the fact that direct and return transformations are connected by rather simple parity is. Direct application of the specified transformations to an expanded Kalman filter allows to offer parallel structure of the two-stage filter based on linear combination of exits of the modified filter free from malfunctions, and the filter specializing only in estimation of dynamics of the arising malfunctions.*

*Keywords: the expanded filter of Kallman, the two-cascade filter of Kallman, the filter, free from malfunctions, separate estimation of the arising malfunctions.*

## Введение

Рассматривая задачу оценивания состояния линейной динамической системы в присутствии зарождающихся неисправностей. В общем случае, их принято считать составной частью вектора состояния и, следовательно, оценивать также как и вектор состояния. При такой интерпретации зарождающихся неисправностей приходим к фильтру Калмана с расширенным вектором состояний, размерность которого значительно выше размерности контролируемой системы. Практическая реализация такого фильтра сопряжена со значительными трудностями вычислительного характера. Для преодоления этих затруднений Фридланд [1] предложил вместо расширенного фильтра Калмана использовать составной фильтр, состоящий из двух параллельно работающих отдельных каскадов, но меньшей размерности.

Известно, что декомпозиция расширенного фильтра Калмана, рекомендованная Фридландом, является оптимальной только для возмущений детерминированного типа [1]. В случае случайных возмущений двухкаскадный фильтр Калмана перестает быть оптимальным фильтром по причине связанной с выполнением весьма жестких ограничений, которые трудно выполнить на практике [4,5].

После выхода работы [1], возмущения многими авторами рассматривались в виде процесса, управляемого белым шумом который не был коррелированным с системным шумом [2,3]. Однако полученные результаты оказались квазиоптимальными. В работах [5,6] был рассмотрен случай, когда случайные возмущения порождались белым шумом, коррелированным с системным шумом. Было показано, что в этом случае можно получить оптимальную структуру двухкаскадного фильтра Калмана, однако оставались ограничения, накладываемые на взаимную корреляционную матрицу между шумом возмущения и системным шумом. Целью данной работы является такая модернизация двухкаскадной структуры фильтра Фридланда, которая при наличии зарождающихся неисправностей, моделируемых случайным процессом общего типа, способна обеспечить характеристики фильтра близкие к оптимальным, а введение дополнительного корректирующего входа существенно ослабляет ограничения, введенные в работе [5].

### Постановка задачи исследований

Предполагается, что предмет исследований описывается системой разностных уравнений

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{\Delta}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{\Sigma}(k)(k)\boldsymbol{\varphi}(k)+\mathbf{v}(k); \qquad (1)$$

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{\Phi}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)+\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(k); \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k+1)=\mathbf{\Gamma}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)+\mathbf{w}_{\varphi}(k), \qquad (3)$$

где $\mathbf{y}(k)\in\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ – вектор наблюдений; $\mathbf{x}(k)\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ – вектор состояния системы; $\boldsymbol{\varphi}(k)\in\mathbf{R}^{\mathbf{p}}$ – вектор состояния зарождающейся неисправности, а системные матрицы $\mathbf{\Delta}(k),\,\mathbf{\Sigma}(k),\,\mathbf{\Phi}(k),\mathbf{G}(k),\,\mathbf{\Gamma}(k)$ известны и имеют соответствующие размерности, кроме того матрица $\mathbf{\Gamma}(k)$ предполагается невырожденной. Шумовые процессы $\mathbf{w}_{\varphi}(k),\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(k),\mathbf{v}(k)$ являются белыми гауссовыми последовательностями, имеющими нулевые средние значения и заданные ковариационные матрицы: $\mathbf{M}[\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(k)\mathbf{w}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}(j)]=\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}(k)\boldsymbol{\delta}(k,j);$

$$\mathbf{M}[\mathbf{w}_{\varphi}(k)\mathbf{w}_{\varphi}^{\mathbf{T}}(j)]=\mathbf{Q}_{\varphi}(k)\boldsymbol{\delta}(k,j);\quad \mathbf{M}[\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(k)\mathbf{w}_{\varphi}^{\mathbf{T}}(j)]=\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\varphi}(k)\boldsymbol{\delta}(k,j);\quad \mathbf{M}\left[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^{\mathbf{T}}(j)\right]=\mathbf{R}(k)\boldsymbol{\delta}(k,j).$$

$\mathbf{M}[\mathbf{w}_{\varphi}(k)\mathbf{v}^{\mathbf{T}}(j)]=0;$ $\mathbf{M}[\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^{\mathbf{T}}(j)]=0.$ Начальные состояния $\mathbf{x}(0),\boldsymbol{\varphi}(0)$ предполагаются некоррелированными с белыми гауссовыми последовательностями $\mathbf{w}_{\varphi}(k),\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(k),\mathbf{v}(k)$ и представляют собой гауссовы случайные величины с параметрами:

$$\mathbf{M}\left[\mathbf{x}(0)\right]=\overline{\mathbf{x}_{\mathbf{0}}},\ \mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}(0)\right]=\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(0),\ \mathbf{M}\left[\boldsymbol{\varphi}(0)\right]=\overline{\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{0}}},\ \mathrm{Cov}\left[\boldsymbol{\varphi}(0)\right]=\mathbf{P}_{\varphi}(0)>0,\ \mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}(0)\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{T}}(0)\right]=\mathbf{P}_{\mathbf{x}\varphi}(0).$$

Рассматривая $\mathbf{x}(k),\boldsymbol{\varphi}(k)$ в качестве переменных состояния $\mathbf{z}(k)$ обобщенной системы, можно записать уравнения для расширенного фильтра Калмана в стандартной форме:

$$\mathbf{z}^{*}(k/k-1)=\mathbf{F}_{\mathbf{z}}(k-1)\mathbf{z}^{*}(k-1/k-1); \qquad (4)$$

$$\mathbf{z}^{*}(k/k)=\mathbf{z}^{*}(k/k-1)+\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(k)\left[\mathbf{y}(k)-\mathbf{\Pi}(k)\mathbf{z}^{*}(k/k-1)\right]; \qquad (5)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1)=\mathbf{F}_{\mathbf{z}}(k-1)\mathbf{P}_{z}(k-1/k-1)\mathbf{F}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{z}}(k-1)+\mathbf{Q}_{\mathbf{z}}(k-1); \qquad (6)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(k)=\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1)\mathbf{\Pi}^{T}(k)\left[\mathbf{\Pi}(k)\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1)\mathbf{\Pi}^{T}(k)+\mathbf{R}(k)\right]^{-1}; \qquad (7)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k)=\left[\mathbf{I}-\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(k)\mathbf{\Pi}(k)\right]\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1), \qquad (8)$$

Общеизвестно, что сложность вычислений возрастает нелинейно с ростом размерности расширенного фильтра $\sim(n+p)^{3}$ и во многих случаях модель (4) – (8) становится неприемлемой для практических приложений. Основным источником этих трудностей становится чрезмерная сложность вычислений взаимной корреляционной матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{x}\varphi}(k/k)$. Устранение этой составляющей из рассмотрения будет способствовать существенному упрощению вычислений при практической реализации фильтра в виде цифрового специализированного устройства. В следующем подразделе предлагается квазиоптимальная двухкаскадная аппроксимация расширенного фильтра, без явных вычислений составляющей $\mathbf{P}_{\mathbf{x}\varphi}(k/k)$.

### Структура модифицированного двухкаскадного фильтра для раздельного оценивания

Процесс синтеза квазиоптимального двухкаскадного фильтра состоит из двух этапов, и его можно описать следующим образом. На первом шаге проектируется фильтр, в котором зарождающиеся неисправности игнорируются, а для последующего учета возникшей неисправности, вводится дополнительный внешний вход. На втором шаге проектируется отдельный фильтр, который оценивает переменные зарождающейся неисправности с целью введения корректирующего воздействия в фильтр, свободный от неисправностей. Эти два фильтра составляют базис, на основе которого строится новый фильтр, в некотором смысле, эквивалентный исходному расширенному фильтру Калмана.

С формально-математической точки зрения структуры разделенных фильтров можно получить путем применения двух шагового линейного унитарного преобразования **U–V** к расширенному фильтру Калмана, которое приводит ковариационные матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1),\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k)$ к диагональному виду. Эти преобразования имеют вид:

$$\mathbf{T}\left[\mathbf{U}(k)\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{U}(k)\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{U}(k)\equiv\mathbf{P}_{\mathbf{x}\varphi}(k/k-1)[\mathbf{P}_{\varphi}(k/k-1)]^{-1};$$

$$\mathbf{T}\left[\mathbf{V}(k)\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{V}(k)\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{V}(k)\equiv\mathbf{P}_{\mathbf{x}\varphi}(k/k)[\mathbf{P}_{\varphi}(k/k)]^{-1}.$$

Главной особенностью, введенных преобразований является то, что прямое и обратное преобразования связаны очень простым соотношением, а именно $\mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{U}(k)\right]=\mathbf{T}\left[-\mathbf{U}(k)\right]$ , т.е. отличие только в изменении знака. В связи с этим справедливы выражения, которые описывают взаимосвязь между переменными (4)–(8) в старой и вновь введенной координатной системе:

$$\mathbf{z}^{*}(k/k-1)=\mathbf{T}\left[\mathbf{U}(k)\right]\hat{\mathbf{z}}(k/k-1); \qquad \hat{\mathbf{z}}(k/k-1)=\mathbf{T}\left[-\mathbf{U}(k)\right]\mathbf{z}^{*}(k/k-1);$$

$$\mathbf{z}^{*}(k/k)=\mathbf{T}\left[\mathbf{V}(k)\right]\hat{\mathbf{z}}(k/k); \qquad \hat{\mathbf{z}}(k/k)=\mathbf{T}\left[-\mathbf{V}(k)\right]\mathbf{z}^{*}(k/k);$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1)=\mathbf{T}\left[\mathbf{U}(k)\right]\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}}(k/k-1)\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{U}(k)\right]; \qquad \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}}(k/k-1)=\mathbf{T}\left[-\mathbf{U}(k)\right]\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k-1)\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\left[-\mathbf{U}(k)\right];$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(k)=\mathbf{T}\left[\mathbf{V}(k)\right]\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}}(k); \qquad \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}}(k)=\mathbf{T}\left[-\mathbf{V}(k)\right]\mathbf{K}_{\mathbf{z}}(k);$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k)=\mathbf{T}\left[\mathbf{V}(k)\right]\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}}(k/k)\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{V}(k)\right]; \qquad \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}}(k/k)=\mathbf{T}\left[-\mathbf{V}(k)\right]\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(k/k)\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\left[-\mathbf{V}(k)\right]$$

## Заключение

Непосредственное применение указанных преобразований к расширенному фильтру Калмана позволяет предложить следующую параллельную структуру двухкаскадного фильтра, основанного на линейной комбинации выходов модифицированного фильтра, свободного от неисправностей, и фильтра, специализирующегося исключительно на оценивании динамики зарождающихся неисправностей:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k/k-1)=\boldsymbol{x}^{*}{}_{1}(k/k-1)+\boldsymbol{U}(k)\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k-1); \tag{9}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k/k)=\boldsymbol{x}^{*}{}_{1}(k/k)+\boldsymbol{V}(k)\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k); \tag{10}$$

$$\mathbf{P}_{11}(k/k-1)=\mathbf{P}_{\mathbf{x}_1}(k/k-1)+\mathbf{U}(k)\mathbf{P}_{\varphi}(k/k-1)\mathbf{U}^{\mathbf{T}}(k)=\mathbf{M}\{[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)][\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]^{\mathbf{T}}\}; \tag{11}$$

$$\mathbf{P}_{11}(k/k)=\mathbf{P}_{\mathbf{x}_1}(k/k)+\mathbf{V}(k)\mathbf{P}_{\varphi}(k/k)\,\mathbf{V}^{\mathbf{T}}(k)=\mathbf{M}\{[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k/k)][\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k/k)]^{\mathbf{T}}\}; \tag{12}$$

$$\mathbf{P}_{12}(k/k-1)=\mathbf{U}(k)\mathbf{P}_{\varphi}(k/k-1)=\mathbf{M}\{[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]\left[\boldsymbol{\varphi}(k)-\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k-1)\right]^{\mathbf{T}}\}; \tag{13}$$

$$\mathbf{P}_{12}(k/k)=\mathbf{V}(k)\mathbf{P}_{\varphi}(k/k)=\mathbf{M}\{[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k/k)]\left[\boldsymbol{\varphi}(k)-\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k)\right]^{\mathbf{T}}\}; \tag{14}$$

$$\mathbf{P}_{22}(k/k-1)=\mathbf{P}_{\varphi}(k/k-1)=\mathbf{M}\left\{\left[\boldsymbol{\varphi}(k)-\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k-1)\right]\left[\boldsymbol{\varphi}(k)-\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k-1)\right]^{\mathbf{T}}\right\}; \tag{15}$$

$$\mathbf{P}_{22}(k/k)=\mathbf{P}_{\varphi}(k/k)=\mathbf{M}\left\{\left[\boldsymbol{\varphi}(k)-\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k)\right]\left[\boldsymbol{\varphi}(k)-\boldsymbol{\varphi}^{*}(k/k)\right]^{\mathbf{T}}\right\} \tag{16}$$

при следующих начальных условиях:

$$\mathbf{V}(0)=\mathbf{P}_{\mathbf{x}\varphi}(0)\mathbf{P}^{-1}{}_{\varphi}(0); \qquad \hat{\mathbf{x}}(0/0)=\overline{\mathbf{x}_0}+\mathbf{V}(0)\overline{\boldsymbol{\varphi}_0}; \qquad \boldsymbol{\varphi}^{*}(0/0)=\overline{\boldsymbol{\varphi}_0};$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_1}(0/0)=\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0}(0/0)-\mathbf{V}(0)\mathbf{P}_{\varphi}(0/0)\mathbf{V}(0)^{-1}; \qquad \mathbf{P}_{\varphi}(0/0)=\mathbf{P}_{\varphi}(0).$$

## Литература


1. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering / B. Friedland // IEEE Trans. Automatic Control. – 1969, vol. AC-14, P. 359–367,

2. Tacker E. C. Linear filtering in the presence of time varying bias / E. C. Tacker, C. C. Lee // IEEE Trans. Automatic Control. – 1972, Vol. AC-17, P. 828–829.

3. Ignagni M. B. Separate-bias Kalman estimator with bias state noise / M. B. Ignagni // IEEE Trans. Automatic Control. – 1990, Vol. AC-35, P. 338–341.

4. Alouani A. T. A two-stage filte r for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias / A. T. Alouani , T. R. Rice, W. D. Blair // Proc. Amer. Control Conf., Chicago, IL, 1992.– P. 1784–1788.

5. Alouani A. T. On the optimality of two-stage state estimation in the presence of random bias / A. T. Alouani, P. Xia, T. R. Rice, W. D. Blair // IEEE Trans. Automatic. Control. – 1993,Vol. AC-38, P. 1279–1282.

6. Baranowski J. Bayesian fault detection and isolation using Field Kalman Filter / J. Baranowski , P. Bania , I. Prasad, T. Cong // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2017. – P.– 52–63


## References


1. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering / B. Friedland // IEEE Trans. Automatic Control. – 1969, vol. AC-14, P. 359–367,

2. Tacker E. C. Linear filtering in the presence of time varying bias / E. C. Tacker, C. C. Lee // IEEE Trans. Automatic Control. – 1972, Vol. AC-17, P. 828–829.

3. Ignagni M. B. Separate-bias Kalman estimator with bias state noise / M. B. Ignagni // IEEE Trans. Automatic Control. – 1990, Vol. AC-35, P. 338–341.

4. Alouani A. T. A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias / A. T. Alouani , T. R. Rice, W. D. Blair // Proc. Amer. Control Conf., Chicago, IL, 1992.– P. 1784–1788.

5. Alouani A. T. On the optimality of two-stage state estimation in the presence of random bias / A. T. Alouani, P. Xia, T. R. Rice, W. D. Blair // IEEE Trans. Automatic. Control. – 1993,Vol. AC-38, P. 1279–1282.

6. Baranowski J. Bayesian fault detection and isolation using Field Kalman Filter / J. Baranowski , P. Bania , I. Prasad, T. Cong // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2017. – P.– 52–63.