УДК 621.396.96

А.Ю. ВОЛОВИК, О.В. ОСАДЧУК, О.П. ЧЕРВАК, М.А. ШУТИЛО
Вінницький національний технічний університет

ОПТИМАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК ПРИ ВИКОНАННІ КОМПЛЕКСНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Однією з нагальних проблем оцінювання стану об'єкта контролю за результатами виконання комплексних спостережень є необхідність врахування несумісності окремих результатів вимірювань через непередбачувану появу систематичних похибок (зсувів). Оскільки у якості основного інструменту оцінювання часто використовують фільтр Калмана, то бажано, щоб метод урахування систематичних похибок був створений у рамках теорії оптимальної фільтрації. Найбільш перспективним виявився метод Б. Фрідланда, згідно з яким розширений фільтр Калмана розділяється на два паралельно працюючі фільтри, один з яких оцінює вектор стану об'єкта контролю за умови відсутності систематичних похибок, а інший оцінює у незалежний спосіб систематичні похибки. У даній роботі доказується, що необхідною умовою вказаної декомпозиції є відсутність стохастичної складової у рівняннях для кореляційної матриці похибок екстраполяції.

Ключові слова: динамічні системи, систематичні похибки, фільтр Калмана, декомпозиція.

A.YU. VOLOVIK, A.V. OSADCHUK, O.P. CHERVAK, M.A. SHUTILO
Vinnytsia National Technical University

OPTIMUM ESTIMATION OF SYSTEMATIC MISTAKES WHEN PERFORMING COMPLEX SUPERVISION

Practical implementation of the program of complex tests assumes use of a significant amount of various measuring means which, as a rule, unite in a uniform measuring complex. One of problems of optimum estimation of parameters of object of control when performing complex supervision is incompatibility of results of separate measurements because of unforeseen emergence of systematic mistakes in the form of shifts. As as the main instrument of estimation Kallman's filter is often used, it is desirable that the method of the accounting of systematic errors would be created within the theory of an optimum filtration. The trivial solution of this problem, consists that for each component of a systematic mistake, the being of interest, the additional variable of a state is entered and then procedure of an optimum filtration for an expanded vector of a state is carried out. Such method is acceptable for dynamic systems of small dimension and a small amount of the considered factors, but for systems of high dimension it is inefficient. A bit different technology allowing to solve a problem of systematic mistakes in a touch subsystem was developed by B. Friedland. He managed to divide the expanded filter of Kallman so that dynamics of a vector of a state and shifts were estimated separately. In this work necessary conditions under which such division is possible are defined, in particular is shown that one of such conditions is equality to zero stochastic component in expression for a covariation matrix of errors of prediction.

Keywords: dynamic systems, systematic mistakes, Kallman's filter, decomposition.

Вступ та постановка задачі

Практична реалізація будь-якої програми комплексних випробовувань передбачає використання великої кількості різноманітних вимірювальних засобів. Наприклад, виконання льотних випробовувань потребує застосування радіолокаційних станцій, різноманітних камер спостереження, системи датчиків кутових координат, датчиків кутових та лінійних швидкостей, акселерометрів та тощо. Як правило, ці засоби об'єднуються в єдиний вимірювальний комплекс, а результати комплексних вимірювань використовуються для якнайкращого (у певному розумінні) оцінювання параметрів траєкторії повітряного судна у режимі реального часу. Саме з такою метою і був розроблений алгоритм фільтра Калмана [1]. Однією з нагальних проблем оптимального оцінювання параметрів траєкторій повітряних суден є необхідність врахування несумісності окремих результатів вимірювань через непередбачувану появу аномальних [2] або систематичних похибок (зсувів). Оскільки основним інструментом оцінювання параметрів траєкторій є фільтр Калмана, то бажано щоб метод урахування систематичних похибок був створений у рамках теорії оптимальної фільтрації. Існує тривіальний шлях розв'язку цієї проблеми, який полягає у тому, що для кожної суттєвої складової систематичної похибки уводиться додаткова змінна стану, а потім виконується процедура оптимального оцінювання для розширеного, таким чином, вектору стану. Проте, якщо навіть враховувати лише один суттєвий зсув у кожному сенсорі, а їх число суттєво перевищує порядок номінальної моделі траєкторії повітряного судна, то розмірність розширеного фільтра Калмана може сягати декількох десятків. Зрозуміло, що використання фільтра Калмана такої розмірності у системах реального часу, щонайменше, є недоцільним. Таким чином, повинна бути розвинена дещо інша технологія, яка дозволила б ураховувати наявність систематичних похибок у сенсорній підсистемі саме у рамках теорії оптимальної фільтрації. Попередньо проведений аналіз літературних джерел [3] виявив декілька можливих підходів до розв'язку даної проблеми, але більшість з них була надалі відхилена чи то з міркувань недостатньої точності оцінювання зсувів, чи то через занадто складну систему розрахунків [4]. Серед тих підходів, що залишилися найбільш перспективним виявився метод, у основу якого покладена оригінальна робота Б. Фрідланда [4]. У даній статті використовуються основні ідеї цієї роботи, проте з дещо іншою метою.

Оцінювання систематичних похибок сенсорної підсистеми методом Калмана

Надалі розглядається лише дискретний варіант фільтра Калмана у припущенні, що номінальна модель динаміки контрольованого об'єкту допускає опис виразом

$$\boldsymbol{x}\left(k\right) = \boldsymbol{A}(k,k-1)\,\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}(k-1), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x}(k)$– вектор стану динамічного процесу розмірності $(n\times1)$; $\boldsymbol{A}(k,k\text{-}1)$ – системна матриця розміру

$(n\times n)$; $\boldsymbol{w}_x(k)$ – випадковий вектор розміру $(n\times 1)$, який відображає факт неточного опису реального процесу однорідною частиною рівняння (1). Передбачається, що математичне сподівання випадкового вектору $\boldsymbol{w}_x(k)$ є нульовим, а його кореляційна матриця має вигляд $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{w}_x(k)\ \boldsymbol{w}^T_x(j)] = \boldsymbol{Q}_x(k)\delta(k,j)$. Результати комплексних вимірювань у будь-який момент часу відображаються алгебраїчним рівнянням

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{b}(k) + \boldsymbol{v}(k), \tag{2}$$

де $\boldsymbol{v}(k)$ – стохастична складова вектора похибок вимірювань, яка має нульове математичне сподівання та кореляційну матрицю $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{v}(k)\ \boldsymbol{v}^T(j)] = \boldsymbol{R}(k)\delta(k,j)$; $\boldsymbol{b}(k)$– вектор систематичних похибок розміру $(p\times 1)$, динаміка якого допускає опис різницевим рівнянням

$$\boldsymbol{b}(k) = \boldsymbol{B}(k,k-1)\ \boldsymbol{b}(k-1) + \boldsymbol{w}_b(k-1). \tag{3}$$

Передбачається, що $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{w}_b(k)]=0$, $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{w}_b(k)\ \boldsymbol{w}^T_b(j)] = \boldsymbol{Q}_b(k)\delta(k,j)$. Якщо вектор $\boldsymbol{b}(k)$ приєднати до $\boldsymbol{x}(k)$, то отримаємо розширений вектор стану $\boldsymbol{z}(k)=[\ \boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{b}(k)]^{\mathrm{T}}$. За таких умов динаміка розширеного вектора стану буде відображатися різницевим рівнянням

$$\boldsymbol{z}(k) = \boldsymbol{F}_z(k,k-1)\boldsymbol{z}(k-1) + \boldsymbol{w}_z(k-1), \tag{3}$$

де $\boldsymbol{F}_z(k,k-1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(k+1,k) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}(k+1,k) \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{w}_z(k)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_x(k) \\ \boldsymbol{w}_b(k) \end{bmatrix}$, а рівняння спостережень матиме вигляд

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{L}_z(k)\boldsymbol{z}(k) + \boldsymbol{v}(k), \quad \boldsymbol{L}_z(k) = [\boldsymbol{C}(k)\ ,\boldsymbol{G}(k)]. \tag{4}$$

Якщо позначити через $\boldsymbol{z}^*(k\text{-}1/k\text{-}1)$ оптимальну оцінку вектора стану розширеної системи, то оцінка на момент часу t_k може бути передбачена за формулою $\boldsymbol{z}^*(k/k\text{-}1) = \boldsymbol{F}_z(k,k\text{-}1)\ \boldsymbol{z}^*(k\text{-}1/k\text{-}1)$, а поточна оцінка дорівнює [6]

$$\boldsymbol{z}(k/k) = \boldsymbol{z}^*(k/k-1) + \boldsymbol{K}_z(k)[\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{L}_z(k)\ \boldsymbol{z}^*(k/k-1)], \tag{5}$$

де $\boldsymbol{K}_z(k)=[\ \boldsymbol{K}_x(k),\ \boldsymbol{K}_b(k)]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_z(k/k)\ \boldsymbol{L}_z^{\ T}(k)\ \boldsymbol{R}^{-1}(k)$ – оптимальна матриця передачі розширеного фільтра Калмана. Оскільки кореляційна матриця похибок екстраполяції на один крок уперед визначається виразом

$$\boldsymbol{P}_z(k/k-1) = \boldsymbol{F}_z(k/k-1)\boldsymbol{P}_z(k-1/k-1)\boldsymbol{F}^T{}_z(k/k-1) + \boldsymbol{Q}_z(k-1)$$

де $\boldsymbol{Q}_z(k-1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_x(k-1) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Q}_b(k-1) \end{bmatrix}$, то кореляційну матрицю похибок фільтрації можна обчислювати у рекурентний спосіб

$$\boldsymbol{P}_z(k/k) = [\boldsymbol{P}^{-1}{}_z(k/k-1) + \boldsymbol{L}^T{}_z(k)\boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{L}_z(k)]^{-1}. \tag{6}$$

За великої розмірності вектора систематичних похибок $\boldsymbol{b}(k)$ безпосередня реалізація розширеного фільтра Калмана (3)–(6) в обчислюваному плані довготривала та недоцільна, особливо за високого темпу оновлення результатів спостережень. Проте Б. Фрідланд [5] шляхом функціонального перетворення рівняння Рікатті зумів розділити розширений фільтр Калмана на два паралельно працюючі фільтри, один з яких оцінював вектор стану номінального динамічного процесу за умови відсутності систематичних похибок $\boldsymbol{x}_0^*(k/k)$, а інший оцінював систематичну похибку $\boldsymbol{b}^*(k/k)$. Підсумкова оптимальна оцінка $\boldsymbol{x}^*(k/k)$ підраховувалась за формулою

$$\boldsymbol{x}^*(k/k) = \boldsymbol{x}^*{}_0(k/k) + \boldsymbol{T}(k)\boldsymbol{b}^*(k/k), \tag{7}$$

де $\boldsymbol{T}(k)$ – матриця розміру $(n\times p)$, яка ще підлягатиме визначенню за певних обмежень на динамічні властивості систематичних похибок. У представленій роботі фундаментальне співвідношення (7) отримується за дещо інших припущень, а саме справедливості принципу суперпозиції для моделей (1)–(3) та лінійності фільтра Калмана. Таким чином, будуть доведені необхідні умови існування співвідношення (7) шляхом аналізу умов, за яких воно може бути справедливим. Зокрема буде показано, що необхідною умовою вказаної декомпозиції є відсутність стохастичної складової $\boldsymbol{Q}_b(k)$ у рівнянні для кореляційної матриці похибок екстраполяції.

Декомпозиція розширеного фільтра Калмана

У загальному випадку, структура розширеного лінійного фільтра рекурентного типу визначається рівнянням (5) для оцінки, де матриця передачі $\boldsymbol{K}_z(k)$ не обов'язково повинна бути оптимальною. Структура оцінки $\boldsymbol{z}^*(k/k)$ допускає її розщеплення на дві складові $\boldsymbol{x}^*(k/k)$ та $\boldsymbol{b}^*(k/k)$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}^*(k/k) = \boldsymbol{x}^*(k/k-1) + \boldsymbol{K}_x(k)\boldsymbol{r}_z^*(k/k-1); \quad \boldsymbol{x}^*(k/k-1) = \boldsymbol{A}(k,k-1)\ \boldsymbol{x}^*(k-1/k-1); \\ \boldsymbol{r}_z^*(k/k-1) = [\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}^*(k/k-1) - \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{b}^*(k/k-1)];\end{gathered} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{b}^*(k/k) = \boldsymbol{b}^*(k/k-1) + \boldsymbol{K}_b(k)\boldsymbol{r}_z^*(k/k-1); \qquad \boldsymbol{b}^*(k/k-1) = \boldsymbol{B}(k,k-1)\boldsymbol{b}^*(k-1/k-1). \tag{9}$$

Тепер припустимо, що існує оцінка вектора стану динамічної системи за умови відсутності систематичних похибок, тобто сенсорна підсистема передбачається апріорі справною. Надалі таку оцінку будемо позначати як $\boldsymbol{x}_0^*(k/k)$. Вона також може бути обчислена у рекурентний спосіб

$$\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k\right)=\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k-1\right)+\boldsymbol{K}_{x0}\left(k\right)\boldsymbol{r}_{z0}^{\ *}\left(k/k-1\right);\boldsymbol{x}_0^{\ *}(k/k-1\ )=\boldsymbol{A}(k,k-1)\,\boldsymbol{x}_0^{\ *}(k-1/k-1\ );$$

$$\boldsymbol{r}_{z0}^{\ *}\left(k/k-1\right)=\left[\boldsymbol{y}\left(k\right)-\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{x}_0^{\ *}\left(k/k-1\right)\right]. \quad (10)$$

У зв'язку з цим постає питання, за яких умов існує можливість розділу оптимальної оцінки на дві складові

$$\boldsymbol{x}^*\left(k/k\right)=\boldsymbol{x}^*{}_0\left(k/k\right)+\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{b}^*\left(k/k\right). \quad (11)$$

Для з'ясування цього питання уведемо спеціальне позначення для різниці $\boldsymbol{r}_z^{\ *}\left(k/k-1\right)$

$$\boldsymbol{r}_z^{\ *}\left(k/k-1\right)=\left[\boldsymbol{y}\left(k\right)-\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{x}^*\left(k/k-1\right)-\boldsymbol{G}\left(k\right)\boldsymbol{b}^*\left(k/k-1\right)\right]. \quad (12)$$

Якщо процес декомпозиції (11) має місце, то підставивши (11) у (12), отримуємо альтернативний вираз для різницевого сигналу $\boldsymbol{r}_z^{\ *}\left(k/k-1\right)$

$$\boldsymbol{r}_z^{\ *}\left(k/k-1\right)=[\,\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}_0^*(k/k-1)-\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{b}^*(k/k-1)]; \quad (13)$$

де $\boldsymbol{S}(k)=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{B}(k,k\text{-}1)+\boldsymbol{C}(k)\,\boldsymbol{A}(k,k\text{-}1)\,\boldsymbol{T}(k\text{-}1)$.

Надалі підставивши вирази (9), (10), (13) у (11), знаходимо

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^*\left(k/k\right)=\boldsymbol{x}^*\left(k/k-1\right)+\left[\,\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)+\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{K}_{b}\left(k\right)\right]\ \boldsymbol{r}_z^{\ *}\left(k/k-1\right)+\\&+\left[\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{B}\left(k,k-1\right)+\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)\boldsymbol{S}(k)-\boldsymbol{A}\left(k,k-1\right)\,\boldsymbol{T}\left(k-1\right)\right]\ \boldsymbol{b}^*\left(k-1/k-1\right).\end{aligned} \quad (14)$$

Якщо припустити, що вирази (8) – (9) описують оптимальний розширений фільтр Калмана, то згідно теореми про ортогональну проекцію [6], випадкові вектори $\boldsymbol{r}_z(k+1/k)$ і $\boldsymbol{b}^*(k/k)$ є статистично незалежними. У той же час для оцінки $\boldsymbol{x}^*(k/\ k)$ також повинно бути справедливим співвідношення декомпозиції (11). Це означає, що друга складова у виразі (14) має бути відсутньою, тобто

$$\left[\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{B}\left(k,k-1\right)+\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)\boldsymbol{S}(k)-\boldsymbol{A}\left(k,k-1\right)\,\boldsymbol{T}\left(k-1\right)\right]=0.$$

Таким чином, декомпозиція розширеного фільтра Калмана можлива, якщо

$$\boldsymbol{K}_{x}\left(k\right)=\left[\,\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)+\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{K}_{b}\left(k\right)\right]; \quad (15)$$

$$\boldsymbol{T}\left(k\right)=\boldsymbol{A}\left(k,k-1\right)\,\boldsymbol{T}\left(k-1\right)\boldsymbol{B}^{-1}\left(k,k-1\right)-\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)\boldsymbol{S}\left(k\right)\boldsymbol{B}^{-1}\left(k,k-1\right). \quad (16)$$

Провівши детальний аналіз виразу (14) можна переконатись, що довільний лінійний фільтр також може бути зображений у роздільній формі (11) за умови справедливості співвідношень (15) – (16), проте їх ще потрібно доповнити умовою

$$\boldsymbol{x}^*\left(0/0\right)=\boldsymbol{x}^*{}_0\left(0/0\right)+\boldsymbol{T}\left(0\right)\boldsymbol{b}^*\left(0/0\right). \quad (17)$$

оскільки процедура декомпозиції повинна виконуватись для усіх k. Доцільно вибирати $\boldsymbol{x}^*(0/0)=\boldsymbol{x}_0^*(0/0)$, $\boldsymbol{T}(0)=0$, тобто припустити, що у початковий момент часу система справна і систематичні похибки відсутні. Таким чином, умови (15) – (17) повністю визначають процедуру декомпозиції довільного лінійного фільтра.

Оцінка наслідків процедури декомпозиції

Наслідки обмежень уведених у (15) можливо оцінити, якщо скористатись припущенням, що усі оцінки $\boldsymbol{x}^*(k/\ k)$, $\boldsymbol{x}_0^*(k/\ k)$, $\boldsymbol{b}^*(k/k)$ є оптимальними, тобто отримані за допомогою фільтра Калмана. Як відомо [6], оптимальний матричний коефіцієнт передачі фільтра Калмана, за умови відсутності систематичних похибок, описують виразом

$$\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)=\boldsymbol{P}_{x_0}\left(k/k\right)\boldsymbol{C}^{T}\left(k\right)\boldsymbol{R}^{-1}\left(k\right). \quad (18)$$

Кореляційна матриця похибок фільтрації за наявності систематичних похибок повинна обчислюватись за загальною формулою

$$\boldsymbol{P}_{x_1}(k/k)=\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{x}(k)-\ \boldsymbol{x}_0^*(k/k)-\boldsymbol{T}(k)\ \boldsymbol{b}^*(k/k)]\ [\boldsymbol{x}(k)-\ \boldsymbol{x}_0^*(k/k)-\boldsymbol{T}(k)\ \boldsymbol{b}^*(k/k)]^T\}\,. \quad (19)$$

Тепер встановимо зв'язок між кореляційними матрицями $\boldsymbol{P}_x(k+1)$, $\boldsymbol{P}_{x0}(k+1)$, $\boldsymbol{P}_b(k+1)$. Для цього перепишемо рівняння декомпозиції у еквівалентній формі

$$\boldsymbol{P}_{x_1}(k/k)=\boldsymbol{E}\left[\Delta\boldsymbol{x}_1\left(k/k\right)\Delta\boldsymbol{x}_1^{\ T}\left(k/k\right)\right],$$

де

$$\Delta\boldsymbol{x}_1\left(k/k\right)=\left[\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k\right)-\boldsymbol{x}\left(k\right)\right]+\boldsymbol{T}(k)\ \boldsymbol{b}^*(k/k) \quad (20)$$

та виконаємо процедуру знаходження математичного сподівання (19). Результат обчислень матиме вигляд:

$$\boldsymbol{P}_{x_1}\left(k/k\right)=\boldsymbol{P}_{x_0}\left(k/k\right)+\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{P}_{b}\left(k/k\right)\boldsymbol{T}^{T}\left(k\right)-\boldsymbol{P}_{xb}\left(k/k\right)\boldsymbol{T}^{T}\left(k\right)-\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{P}_{bx}\left(k/k\right); \quad (21)$$

де

$$\boldsymbol{P}_{xb}\left(k/k\right)=\boldsymbol{P}^{T}{}_{bx}\left(k/k\right)=\mathbf{E}\{[\ \boldsymbol{x}^*(k/k)-\boldsymbol{x}(k)]\ [\ \boldsymbol{b}^*(k/k)-\boldsymbol{b}(k)]^T\}. \quad (22)$$

Матрицю передачі розширеного фільтра Калмана можливо обчислювати за формулою, аналогічною (18)

$$\boldsymbol{K}_z\left(k\right)=[\ \boldsymbol{K}_x(k),\boldsymbol{K}_b(k)]^{\mathrm{T}}=\ \boldsymbol{P}_z(k/k)\ \boldsymbol{L}_z^T(k)\ \boldsymbol{R}^{-1}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{xx}(k/k) & \boldsymbol{P}_{xb}(k/k)\\ \boldsymbol{P}_{bx}(k/k) & \boldsymbol{P}_{bb}(k/k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^T(k)\\ \boldsymbol{G}^T(k)\end{bmatrix}\boldsymbol{R}^{-1} \quad (23)$$

.

Підставимо вираз для умовної матриці передачі у першу складову виразу (23), тоді отримуємо

$$\left[\boldsymbol{P}_{xx}\left(k/k\right)\boldsymbol{C}^T\left(k\right)+\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)\boldsymbol{G}^T\left(k\right)\right]\boldsymbol{R}^{-1}\left(k\right)=\boldsymbol{K}_{x0}\left(k\right)+\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{K}_b\left(k\right). \quad (32)$$

Аналогічна операція застосована до другої складової (23) з урахуванням (18) дозволяє знайти вимоги до умовної матриці передачі

$$\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)\left[\boldsymbol{G}\left(k\right)+\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{T}\left(k\right)\right]^T=\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)\left[\boldsymbol{G}\left(k\right)+\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{T}\left(k\right)\right]^T. \quad (33)$$

Отже, умова декомпозиції для розширеного фільтра Калмана виконується, якщо накласти наступне обмеження

$$\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)=\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{P}_{bb}(k/k) \quad (34)$$

З'ясуємо тепер зв'язок виразу (34) з умовною матрицею передачі фільтра $\boldsymbol{K}_z(k)$. Для цього скористаємось відомим виразом для оптимальної матриці передачі розширеного фільтра [6]

$$\boldsymbol{P}_z(k/k)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_z(k)\boldsymbol{L}_z(k)]\ \boldsymbol{P}_z(k/k-1), \quad (35)$$

що еквівалентно співвідношенням

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{xx}(k/k) & \boldsymbol{P}_{xb}(k/k)\\ \boldsymbol{P}_{bx}(k/k) & \boldsymbol{P}_{bb}(k/k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_x\left(k\right)\boldsymbol{C}\left(k\right) & -\boldsymbol{K}_x\left(k\right)\boldsymbol{G}\left(k\right)\\ -\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\boldsymbol{C}\left(k\right) & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\boldsymbol{G}\left(k\right)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{xx}(k/k-1) & \boldsymbol{P}_{xb}(k/k-1)\\ \boldsymbol{P}_{bx}(k/k-1) & \boldsymbol{P}_{bb}(k/k-1)\end{bmatrix}. \quad (36)$$

З виразу (36) неважко знайти складові кореляційної матриці похибок оцінювання за наявності систематичних похибок $\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)$ та $\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)$

$$\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_x\left(k\right)\boldsymbol{C}\left(k\right)]\boldsymbol{P}_{xb}(k/k-1)-\boldsymbol{K}_x\left(k\right)\boldsymbol{G}\left(k\right)\boldsymbol{P}_{bb}(k/k-1); \quad (37)$$

$$\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)=[\ \boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\boldsymbol{G}\left(k\right)]\boldsymbol{P}_{bb}(k/k-1)-\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{P}_{xb}(k/k-1). \quad (38)$$

Тепер припустимо, що для умовної кореляційної матриці (34) є справедливим вираз

$$\boldsymbol{P}_{xb}(k-1/k-1)=\boldsymbol{T}(k-1)\boldsymbol{P}_{bb}(k-1/k-1).$$

За цієї умови можна записати

$$\boldsymbol{P}_{xb}(k/k-1)=\boldsymbol{A}(k,k-1)\boldsymbol{T}(k-1)\boldsymbol{P}_{bb}(k-1/k-1)\boldsymbol{B}^T(k,k-1); \quad (39)$$

$$\boldsymbol{P}_{bb}(k/k-1)=\boldsymbol{B}(k,k-1)\boldsymbol{P}_{bb}(k-1/k-1)\boldsymbol{B}^T(k,k-1)+\boldsymbol{Q}_b(k-1). \quad (40)$$

Підставивши (39)–(40) у (37) та зважаючи на (13), (15) досягаємо результату

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)=\boldsymbol{T}\left(k\right)\left[\boldsymbol{S}\left(k-1\right)-\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\boldsymbol{S}\left(k\right)\right]\boldsymbol{P}_{bb}\left(k-1/k-1\right)\boldsymbol{B}^T\left(k,k-1\right)-\\ -\left[\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)+\boldsymbol{T}\left(k\right)\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\right]\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{Q}_b(k-1);\end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)=[\boldsymbol{B}\left(k,k-1\right)-\boldsymbol{K}_b\left(k\right)\boldsymbol{S}\left(k\right)]\ \ \boldsymbol{P}_{bb}\left(k-1/k-1\right)\boldsymbol{B}^T\left(k,k-1\right)+\\ +\ [\boldsymbol{I}-\ \boldsymbol{K}_b(k)\boldsymbol{S}(k)]\ \boldsymbol{Q}_b(k-1).\end{aligned} \quad (42)$$

Порівнюючи (41)–(42) можна виявити, що вимога $\boldsymbol{P}_{xb}(k/k)=\boldsymbol{T}(k)\ \boldsymbol{P}_b(k/k)$ може бути виконана лише за відсутності стохастичної складової $\boldsymbol{Q}_b(k)$ у динаміці систематичної похибки, тобто $\boldsymbol{Q}_b(k)=0$. Проте за таких обставин часто буває неможливим надійно гарантувати збіжність оцінок роз'єднаного фільтра Калмана, і не зовсім очевидно, як це обмеження можливо обійти, що може бути об'єктом додаткових досліджень.

Висновки

Для дискретної динамічної системи $\boldsymbol{x}\left(k\right)=\boldsymbol{A}(k,k-1)\ \boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{w}_x(k-1)$, за наявності непередбачуваних систематичних похибок у багатовимірній сенсорній підсистемі

$$\boldsymbol{y}\left(k\right)=\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{x}\left(k\right)+\boldsymbol{G}\left(k\right)\boldsymbol{b}\left(k\right)+\ \boldsymbol{v}\left(k\right);\qquad \boldsymbol{b}\left(k\right)=\boldsymbol{B}(k,k-1)\ \boldsymbol{b}(k-1)+\boldsymbol{w}_b(k-1)$$

процедура декомпозиції оптимального лінійного розширеного фільтра реалізується у декілька етапів:

1. Формуються оцінки фільтра Калмана, узгодженого з гіпотезою H_0 про відсутність систематичних похибок у сенсорній підсистемі

$$\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k\right)=\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k-1\right)+\boldsymbol{K}_{x_0}\left(k\right)\left[\boldsymbol{y}\left(k\right)-\boldsymbol{C}\left(k\right)\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k-1\right)\right];$$

$$\boldsymbol{x}_0^*\left(k/k-1\right)=\boldsymbol{A}(k,k-1)\ \boldsymbol{x}_0^*\left(k-1/k-1\right);$$

$$\boldsymbol{K}_{x_0}(k)=\boldsymbol{P}_{x_1}(k/k)\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(k)\boldsymbol{R}^{-1}(k);$$

$$\boldsymbol{P}_{x_0}(k/k)=[\boldsymbol{P}_{x_1}(k/k-1)+\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(k)]^{-1};$$

$$\boldsymbol{P}_{x_0}(k/k-1)=\boldsymbol{A}(k,k-1)\boldsymbol{P}_{x_1}(k-1/k-1)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(k,k-1)+\boldsymbol{Q}_{x0}(k-1).$$

2. Формуються оцінки систематичних похибок

$$\boldsymbol{b}^*(k/k)=\boldsymbol{b}^*(k/k-1)+\boldsymbol{K}_b(k)\left[\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}_0^*(k/k-1)-\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{b}^*(k/k-1)\right];$$

$$\boldsymbol{b}^*(k/k-1)=\boldsymbol{B}(k,k-1)\boldsymbol{b}^*(k-1/k-1);$$

$$\boldsymbol{K}_b(k)=\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}(k)\boldsymbol{P}^{-1}{}_{rr}(k/k-1);$$

$$\boldsymbol{S}(k)=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{B}(k,k-1)+\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{T}(k,k-1);$$

$$\boldsymbol{P}_{rr}(k/k-1)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{P}_{x_1}(k/k-1)\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(k)+\boldsymbol{R}(k);$$

$$\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)=[\boldsymbol{P}^{-1}{}_{bb}(k/k-1)+\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}(k)\boldsymbol{P}^{-1}{}_{rr}(k/k-1)\boldsymbol{S}(k)]^{-1};$$

$$\boldsymbol{P}_{bb}(k/k-1)=\boldsymbol{B}(k,k-1)\boldsymbol{P}_{bb}(k-1/k-1)\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(k,k-1).$$

3. Формуються оптимальні оцінки вектора стану динамічної системи, узгоджені з гіпотезою H_1 про наявність систематичних похибок у сенсорній підсистемі

$$\boldsymbol{T}(k,k-1)=\boldsymbol{A}(k,k-1)\boldsymbol{T}(k-1);$$

$$\boldsymbol{T}(k)=\boldsymbol{T}(k,k-1)-\boldsymbol{K}_{x_0}(k)\boldsymbol{S}(k);$$

$$\boldsymbol{x}_1^*(k/k)=\boldsymbol{x}_0^*(k/k)+\boldsymbol{T}(k)\boldsymbol{b}^*(k/k);$$

$$\boldsymbol{P}_{x_1}(k/k)=\boldsymbol{P}_{x_0}(k/k)+\boldsymbol{T}(k)\boldsymbol{P}_{bb}(k/k)\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}(k).$$

Література

1. Калман Р. Е. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания / Р. Е. Калман, Р. С. Бьюси // Техническая механика. – 1961. – Сер. Д. – 83 с.

2. Воловик А. Ю. Оцінювання характеристик функціональної надійності фазового каналу синхронізації в системі посадки сантиметрового діапазону / А. Ю. Воловик, Ю. М. Воловик // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2007. – № 1. – С. 151–154.

3. Agee W. S. The WSM1R Best Estimate of Trajectory – An Overview / W. S. Agee, R. H. Turner // Analysis and Computation Division, White Sands Missile Range, New Mexico, Internal Memorandum. – No. 129. – January 1972. – 44 p.

4. Hsieh C. S. General two-stage Kalman filters / C. S. Hsieh. And F. C. Chen // IEEE Transactions on Automatic Control, 45, 4 (2000), P. 819–824.

5. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering / B. Friedland // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1969. Vol. AC. 14. – № 4. – P. 359–367.

6. Сейдж Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс / пер. с англ. ; под ред. Б. Р. Левина. – М. : Связь, 1976. – 496 с.

References

1. Kalman R. E. Novye rezultaty v lyneinoi fyltratsyy y teoryy predskazanyia / R. E. Kalman, R. S. Biusy // Tekhnycheskaia mekhanyka. – 1961. – Ser. D. – 83 s.

2. Volovyk A. Yu. Otsiniuvannia kharakterystyk funktsionalnoi nadiinosti fazovoho kanalu synkhronizatsii v systemi posadky santymetrovoho diapazonu / A. Yu. Volovyk, Yu. M. Volovyk // Herald of Khmelnytsky National University. Tekhnichni nauky. – 2007. – # 1. – S. 151–154.

3. Agee W. S. The WSM1R Best Estimate of Trajectory – An Overview / W. S. Agee, R. H. Turner // Analysis and Computation Division, White Sands Missile Range, New Mexico, Internal Memorandum. – No. 129. – January 1972. – 44 p.

4. Hsieh C. S. General two-stage Kalman filters / C. S. Hsieh. And F. C. Chen // IEEE Transactions on Automatic Control, 45, 4 (2000), P. 819–824.

5. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering / B. Friedland // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1969. Vol. AC. 14. – # 4. – P. 359–367.

6. Seidzh E. Teoryia otsenyvanyia y ee prymenenye v sviazy y upravlenyy / E. Seidzh, Dzh. Mels / per. s anhl. pod red. B. R. Levyna. – M. : Sviaz, 1976. – 496 s.

Рецензія/Peer review : 15.06.2017 р. Надрукована/Printed :03.09.2017 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Осадчук В.С.