Вища математика: невизначений інтеграл.
Практикум для дистанційного навчання

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Вища математика: невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання

Електронний практикум комбінованого (локального та мережного) використання

Вінниця
ВНТУ
2021

УДК 517.3(076)
В55

Автори: А. А. Коломієць, Я. В. Крупський, О. І. Тютюнник, К. І. Коцюбівська

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 8 від 29.01.2021 р.)

Рецензенти:
Т. Л. Годованюк, доктор педагогічних наук, доцент
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор
М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

В55 **Вища** математика: невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання : електронний навчальний практикум комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / А. А. Коломієць, Я. В. Крупський, О. І. Тютюнник, К. І. Коцюбівська. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 71 с.
ISBN 978-966-641-847-3 (PDF)

У практикумі наведено приклади розв'язання основних типів інтегралів, які найчастіше зустрічають студенти в типових розрахунках, а також у подальшому при розв'язуванні диференціальних рівнянь, визначених інтегралів. Вміння обчислювати інтеграли є фундаментальним і обов'язковим вмінням для студентів. Мета практикуму – надати студентам можливість більш детально розібратися у методах обчислення інтегралів, навчитися обирати метод інтегрування для окремо взятого інтегралу, також поглибити знання теоретичного матеріалу.

Призначений для студентів усіх спеціальностей.

УДК 517(076)

ISBN 978-966-641-847-3 (PDF)

ЗМІСТ

1. ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ 5
2. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ 7
2.1. Безпосереднє інтегрування 7
2.2. Інтегрування методом заміни змінної (внесення функції під знак диференціалу) 9
2.3. Інтегрування частинами. 111
3. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ 188
3.1. Універсальна тригонометрична підстановка 244
3.2. Частинні тригонометричні підстановки 25
4. ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ 27
4.1. Інтегрування елементарних дробів 1-го типу 27
4.2. Інтегрування елементарних дробів 2-го типу 27
4.3. Інтегрування елементарних дробів 3-го типу 28
4.4. Метод невизначених коефіцієнтів інтегрування раціональних функцій 32
5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ 39
6. ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ 45
6.1. Рекурентні формули 45
6.2. Інтегрування елементарних дробів четвертого типу 47
ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ 50
ВАРІАНТИ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ 59
ОСНОВНІ ПІДКАЗКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ 67
ЛІТЕРАТУРА 70

ВСТУП

Практикум призначений допомогти студентам розібратися та засвоїти основні методи інтегрування. Вміння обчислити первісну є основою у розв'язуванні визначених інтегралів, які є математичним розв'язком багатьох професійних задач. Також розділ вищої математики «Невизначений інтеграл» є фундаментальним і є основою для вивчення багатьох інших розділів цієї дисципліни. Так, при обчисленні диференціальних рівнянь студентам необхідно мати знання і навички обчислення інтегралів, при дослідженні знакододатних рядів на збіжність студенти застосовують інтегральну ознаку Коші збіжності знакододатних рядів тощо.

Для студентів важливо засвоїти теоретичні знання про різні типи інтегралів та здобути відповідні знання про методи їх розв'язання. З метою спростити це завдання у практикумі класифіковано та систематизовано більшість невизначених інтегралів, які студенти зустрічають як в курсі математичних дисциплін, так і при знаходженні розв'язків задач спеціальних дисциплін. Також запропоновано базове та додаткове відео для перегляду (посилання після кожного параграфу), що підвищить ефективність засвоєння студентами навчального матеріалу.

Практикум для дистанційного навчання є зручним при підготовці викладачів до лекційних і практичних занять, оскільки містить основні теоретичні відомості та підказки, наведено перелік літературних джерел.

Практикум призначений для студентів усіх спеціальностей і є доцільним у процесі їхньої математичної підготовки.

1. ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(\mathrm{x})$ на деякому проміжку *X*, якщо $F(\mathrm{x})$ неперервна і диференційована на цьому проміжку і виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Для функції $f(\mathrm{x})$ множиною усіх первісних буде $F(x)+C$.

Означення. **Невизначеним інтегралом** функції $f(\mathrm{x})$ називається сукупність усіх первісних даної функції.

Невизначений інтеграл позначається символом $\int f(x)dx$, тобто можна записати : $\int f(x)dx = F(x)+C$, де $C \in R$.

В останньому записі функція $f(\mathrm{x})$ називається *підінтегральною функцією*, добуток $f(x)dx$ називається підінтегральним виразом.

Властивість 1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції, а саме

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \tag{1.1}$$

Ця формула випливає безпосередньо із означень, що вище зазначено. Дійсно, за цими означеннями

$$\int f(x)dx = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x) \ .$$

Властивість 2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу, а саме

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx \tag{1.2}$$

Ця формула випливає із властивості 1 та із означення диференціала. Мається на увазі, що за означенням диференціала функції диференціал дорівнює добуткові похідної даної функції на приріст аргумента $\Delta x = dx$.

Властивість 3. Невизначений інтеграл від похідної деякої функції дорівнює сумі цієї функції та константи:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \tag{1.3}$$

Формула (1.3) також випливає із вищезазначених означень. Зміст цих означень можна сформулювати так: інтеграл дорівнює деякій сукупності функцій, якщо похідна від кожної функції із даної сукупності дорівнює функції, що стоїть під знаком інтеграла. Тобто, щоб довести формулу (1.3), ***треба показати, що похідна від правої частини формули дорівнює підінтегральній функції лівої частини формули.*** Дійсно, $\left(f(x)+C\right)' = f'(x) + C' = f'(x)$. Що і треба було довести.

Властивість 4. Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції та константи

$$\int df(x) = f(x) + C \tag{1.4}$$

Дійсно, формула (1.4) випливає із формули (1.3) $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$.

Наслідок

$$\int dx = x + C \qquad (1.4')$$

Властивість 5. Лінійність інтеграла

$$\left[c_1\int f_1(x) + c_2\int f_2(x)\right]dx = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx \tag{1.5}$$

2. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

2.1. Безпосереднє інтегрування

Невелика кількість інтегралів обчислюється за допомогою табличного інтегрування. Тобто під знаком інтегралу міститься функція, відшукання первісної якої не потребує додаткових перетворень чи заміни. Цей метод також називають безпосереднім інтегруванням. Безпосереднім називається інтегрування, при якому шляхом алгебраїчних перетворень і застосування властивостей невизначеного інтеграла зводять підінтегральні вирази до основних формул інтегрування, тобто до табличного вигляду.

Розглянемо таблицю інтегралів основних елементарних функцій

Таблиця 1. Таблиця інтегралів основних елементарних функцій

1. $\int 0dx = C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
2'. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	11'. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
2''. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	12'. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int chxdx = shx + C$
4'. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int shxdx = chx + C$
5. $\int \cos xdx = \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	
9'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	

Розглянемо приклади.

Приклад. Знайти інтеграл $\int(3x^2-2x-1)dx.$

Розв'язання. Використовуючи формулу 2 (таблиця 1), знаходимо:

$$\int(3x^2-2x-1)dx=\int 3x^2dx-\int 2xdx-\int 1dx=3\int x^2dx-2\int xdx-\int dx=3\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}-x+C=$$
$$=x^3-x^2-x+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{sin2x}{sinx}dx.$

Розв'язання. Скориставшись формулою $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$, зводимо підінтегральний вираз до табличного:

$$\int\frac{sin2x}{sinx}dx=\int\frac{2s\,\mathrm{in}\,xcosx}{sinx}dx=\int 2cosxdx=2\int cosxdx=2sinx+C.$$

Відео інтегрування найпростіших інтегралів.

Базове:

https://youtu.be/nx3IZfLk8zc

Додаткове

https://www.youtube.com/watch?v=mMRyY5V0wpo

2.2. Інтегрування методом заміни змінної (внесення функції під знак диференціалу)

Суть інтегрування методом заміни змінної полягає в переході від заданої змінної інтегрування до іншої змінної для того, щоб звести підінтегральний вираз до одного з табличних.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sqrt{2x-3}dx$.

Розв'язання. Інтеграл не зводиться до табличного раціональними алгебраїчними перетвореннями, але він подібний до табличного інтеграла: $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx.$

Тому доцільно зробити заміну: $2x-3=t.$

Диференціюючи, отримаємо:

$$d\left(2x-3\right)=dt,\, 2dx=dt,\, dx=\frac{dt}{2}.$$

Підінтегральний вираз зводиться до табличного:

$$\int \sqrt{2x-3}dx = \int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C.$$

Повертаючись до змінної x, будемо мати: $\int \sqrt{2x-3}dx = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C$.

Метод ***внесення функції під знак диференціалу*** застосовуємо, коли під знаком інтегралу є добуток двох функцій, одна із яких є похідною іншої (або можна утворити добуток такого типу). Тобто, якщо підінтегральний вираз можна представити так:

$$\int \varphi(f(x))\cdot f'(x)dx$$

Як було вже показано вище, можна робити заміну так, щоб представити $f'(x)dx = d(f(x))$.

Тоді, якщо зробити заміну

$$f\left(x\right)=t \text{, а } d\left(f\left(x\right)\right)=dt$$

то шуканий інтеграл запишеться у вигляді

$$\int \varphi(f(x))\cdot f'(x)dx = \int \varphi(t)dt$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз є добутком двох функцій-співмножників $\frac{1}{x^2+1}$ і $2xdx$.

Співмножник $2xdx$ є диференціалом функції x^2+1.

Тому заміна $x^2+1=t$ зводить підінтегральний вираз до табличного. Диференціюючи заміну, отримаємо :

$$d\left(x^2+1\right)=dt,$$
$$2xdx=dt.$$
$$\int \frac{2xdx}{x^2+1}=\int \frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз є добутком співмножників: sin^2x і $cosxdx=d(sinx)$. Заміна $sinx=t$ перетворює sin^2x у функцію t^2, яку ми вміємо інтегрувати:

$$\int \sin^2 x \cos x dx=\int t^2 dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

Вибір заміни змінної в кожному конкретному випадку залежить від підінтегрального виразу. Загального правила її вибору не існує.

Проте, якщо підінтегральна функція має вигляд $f\left(ax+b\right)$, то може бути корисною заміна $ax+b=t$.

Відео інтегрування заміни змінної.

Базове:

https://youtu.be/LcBRKlRHd6A

https://youtu.be/_2hfsoIyNSQ

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?v=IydjI7uPPGA

2.3. Інтегрування частинами.

Інтегруванням частинами називається зведення заданого інтеграла $\int udv$ до інтеграла $\int vdu$ за допомогою формули

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu \tag{2.1}$$

Цю формулу отримуємо в результаті інтегрування диференціалу добутку функцій $u = u(x)$ i $v = v(x)$.

Теорема. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Тоді

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \tag{2.2}$$

Доведення. Розглянемо добуток даних функцій $u(x) \cdot v(x)$ і знайдемо диференціал від цього добутку за відомим правилом

$$d\left[u(x)v(x)\right] = u(x)dv(x) + v(x)du(x),$$

тоді

$$u(x)dv(x) = d\left[u(x)v(x)\right] - v(x)du(x).$$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності

$$\int u(x)dv(x) = \int d\left[u(x)v(x)\right] - \int v(x)du(x)$$

Тут застосовуємо властивість (4): $\int df(x) = f(x) + C$.

Тоді $\int d\left[u(x)v(x)\right] = u(x)v(x) + C$, але константу можна віднести до другого доданку, який виражається через інтеграл. Тобто формула (2.2) приймає вигляд $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$, що і треба було довести.

Такий метод доцільний, коли під знаком інтегралу є добуток двох функцій, кожна з яких не є похідною іншої і/або коли $\int vdu$ знаходиться простіше, аніж $\int udv$. В якості u вибирається функція, що спрощується диференціюванням, а в якості dv – решта підінтегрального виразу, що містить dx, і з якого можна визначити v шляхом інтегрування.

Зауважимо, що можна застосовувати формулу інтегрування частинами послідовно кілька разів.

Розглянемо деякі типи інтегралів, при знаходженні яких потрібно застосовувати метод інтегрування частинами.

І) Інтеграл виду: $\int P_n(x)\sin axdx;\ \int P_n(x)\cos axdx;\ \int P_n(x)e^{ax}dx;\ \int P_n(x)a^{kx}dx.$

Застосовуємо до цих інтегралів формулу (2.1). Щоб обчислити будь-який інтеграл, треба звести його до табличних інтегралів. Оскільки права частина формули (1) містить у собі інтеграл, то формулу (2.1) є сенс використовувати за умови, що інтеграл у правій частині, а саме $\int vdu.$, буде табличним, або принаймні простішим, аніж інтеграл у лівій частині: $\int udv.$

Застосування формули (2.1) починається з того, що такий інтеграл треба подати у вигляді $\int udv.$ Тобто в умові треба зробити відповідні позначення. Покладемо в інтегралах, що розглядаються за $u = P_n(x)$ через dv позначимо добуток, який залишиться під знаком інтеграла. Тоді, переходячи до $\int vdu$, треба знайти $du = d\left(P_n(x)\right)$.

Після диференціювання степінь многочлена знизиться на одиницю.

Формулу (2.1) можна застосувати декілька разів, щоразу знижуючи степінь многочлена на одиницю. Поступово прийдемо до $x^0 = 1$, тобто степенева функція зникне під знаком інтеграла. Залишається один з інтегралів $\int \sin\alpha xdx$, $\int \cos\alpha xdx$, $\int e^{\alpha x}dx$, $\int a^{kx}dx$ кожний з яких перетворюється до табличного вигляду за допомогою внесення під знак диференціала.

Правило 1. Для інтегралів виду:

$$\int P_n(x)\sin axdx;\int P_n(x)\cos axdx;\int P_n(x)e^{ax}dx;\ \int P_n(x)a^{kx}dx.$$

Вид інтегралу	*u*	*dv*
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^{kx} \end{Bmatrix}dx$	$P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня	$dv = \begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^{kx} \end{Bmatrix}dx$ тобто усе, що залишилося під знаком інтеграла

Приклад. Знайти інтеграл $\int xe^x dx$.

Розв'язання.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int x \sin x dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз можна подати у вигляді $x \cdot \sin x dx = xd(-\cos x)$. Тут

$$u = x, \quad v = -\cos x.$$

Маємо $\int x \cdot \sin x dx = \int xd(-\cos x) = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx.$

Розв'язання. В цьому прикладі потрібно інтегрувати частинами двічі.

$$\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2, & dv = \cos \frac{x}{3} dx \\ du = 2xdx, & v = \int \cos \frac{x}{3} dx = 3 \int \cos \frac{x}{3} d\frac{x}{3} = 3 \sin \frac{x}{3} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 3x^2 \sin \frac{x}{3} - \int 6x \sin \frac{x}{3} dx = \left\{ \begin{matrix} u = 6x, & dv = \sin \frac{x}{3} dx \\ du = 6dx, & v = \int \sin \frac{x}{3} dx = 3 \int \sin \frac{x}{3} d\frac{x}{3} = -3 \cos \frac{x}{3} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 3x^2 \sin \frac{x}{3} - (-18x \cos \frac{x}{3} + 18 \int \cos \frac{x}{3} dx) = 3x^2 \sin \frac{x}{3} + 18x \cos \frac{x}{3} - 18 \cdot 3 \int \cos \frac{x}{3} d\frac{x}{3} =$$

$$= 3x^2 \sin \frac{x}{3} + 18x \cos \frac{x}{3} - 54 \sin \frac{x}{3} + C$$

Зауваження. Правило 1 застосовується не лише до вказаних стандартних інтегралів. Якщо перехід від $\int udv$ до $\int vdu$ дає змогу знизити показник степеня многочлена $P_n(x)$ і наближає до табличного інтегралу, то доцільно використовувати правило 1.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} & v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx \end{matrix} \right\} = -xctgx + \int ctgxdx =$$

$$= -xctgx + \int \frac{cosxdx}{sinx} = -xctgx + \int \frac{d(sinx)}{sinx} = -xctgx + \ln|\sin x| + \mathrm{C}$$

II) Інтеграли виду:

$$\int P_n(x)\arcsin axdx;\ \int P_n(x)\arccos axdx;\ \int P_n(x)\operatorname{arc}tgaxdx;\ \int P_n(x)\operatorname{arc}ctgaxdx;$$
$$\int P(x)\log_a xdx,\ \int P_n(x)\ln axdx.$$

До цих інтегралів застосовуємо формулу (2.1). Оберемо функцію $u(x)$ і диференціал $dv(x)$ так, щоб внаслідок застосування формули (2.1) інтеграл у правій частині формули був простіший, ніж вихідний інтеграл. У такому разі треба позначити $dv = P_n(x)dx$, а за $u(x)$ взяти функцію, яка залишилася під знаком інтеграла. Переходячи до $\int vdu,$ ми знаходимо

$$du = (\ln ax)'dx = \frac{1}{ax}adx = \frac{1}{x}dx$$

або $du = d(\arcsin\ ax) = (\arcsin\ ax)'dx = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$ і так далі. Бачимо, що трансцендентні функції $\log_a x$, $\ln ax,$ $\arcsin ax,$ $\arccos ax,$ $arctgax,$ під час знаходження $du(x)$ зникають. Дійсно, похідна $u'(x).$ в усіх розглянутих випадках є алгебраїчною функцією. Тому інтеграл у правій частині формули (2.1) буде простішим, ніж вихідний інтеграл. Сформулюємо правило 2.

Правило 2. Для інтегралів:

$$\int P_n(x)\arcsin axdx;\ \int P_n(x)\arccos axdx;\ \int P_n(x)arctgaxdx;\ \int P_n(x)arcctgaxdx;$$
$$\int P(x)\log_a xdx,\ \int P_n(x)\ln axdx.$$

Вид інтегралу	u	dv
$\int P_n(\mathrm{x})\left\{\begin{matrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}\ x\\ \mathrm{arcctg}\ x\\ \ln x\\ \log_a x\end{matrix}\right\}dx$	$\arcsin x$ $\arccos x$ $\mathrm{arctg}\ x$ $\mathrm{arcctg}\ x$ $\ln x$ $\log_a x$	$P_n(x)dx,$ де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня або усе, що залишилося під знаком інтеграла

Приклад. Знайти інтеграл $\int xarctg2xdx$

Розв'язання.

$$\int x\,arctg2xdx = \left\{\begin{array}{l} dv = xdx;\ u = arctg\,2x; \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2};\ du = d(arctg\,2x) = \\ = (arctg\,2x)'dx = \dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2dx = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctg2x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2}arctg2x - \int\frac{x^2dx}{1+4x^2} =$$

$$\frac{x^2}{2}arctg2x - \frac{1}{4}\int\frac{4x^2}{1+4x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctg2x - \frac{1}{4}\int\frac{(4x^2+1)-1}{1+4x^2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2}arctg2x - \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2}arctg2x - \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot\frac{d(2x)}{(2x)'} = \frac{x^2}{2}arctg2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\int\frac{d(2x)}{1+(2x)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{ar}\,ctg2x - 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}arctg2x + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int(3x^2+2x)\ln xdx$.

Розв'язання.

$$\int(3x^2+2x)\ln xdx = \left\{\begin{array}{l} dv = (3x^2+2x)dx;\ u = \ln x; \\ v = \int dv = \int(3x^2+2x)dx = 3\cdot\dfrac{x^3}{3} + 2\cdot\dfrac{x^2}{2} = \\ = x^3 + x^2;\ du = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}dx \end{array}\right\} =$$

$$(x^3+2x)\ln x - \int(x^3+x^2)\frac{1}{x}dx = (x^3+x^2)\ln x - \int(x^2+x)dx =$$

$$(x^3+2x)\ln x - \int x^2dx - \int xdx = (x^3+x^2)\ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int x^5\ln 2xdx$.

Розв'язання.

$$\int x^5\ln 2xdx = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln 2x, & dv = x^5dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \int x^5dx = \dfrac{1}{6}x^6 \end{array}\right\} = \frac{1}{6}x^6\ln 2x - \int\frac{x^6dx}{6x} = \frac{x^6}{6}\ln 2x - \frac{1}{36}x^6 + C$$

Зауваження. Правило 2 застосовується не лише до вказаних стандартних інтегралів. Якщо перехід від $\int u dv$ до $\int v du$ дає змогу позбутися таких трансцендентних функцій, як $\log_a x$, $\ln ax$, $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $arctgax$, $arcctgax$ і приводить до табличного інтегралу, то доцільно використовувати правило 2 .

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\ln(arctgx)}{1+x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\ln(arctgx)}{1+x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln(arctgx), & du = \frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = \frac{dx}{1+x^2}, & v = \int\frac{dx}{1+x^2} = arctgx \end{matrix}\right\} =$$

$$= arctgx\cdot\ln(arctgx) - \int arctgx\cdot\frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\cdot\ln(arctgx) -$$

$$-\frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\cdot\ln(arctgx) - arctgx + C = arctgx\left(\ln(arctgx)-1\right)+C$$

III) Інтеграли виду $\int e^{ax}\cos bxdx;\ \int e^{ax}\sin bxdx;\ \int\cos(\ln x)dx;\ \int\sin(\ln x)dx.$

Для такого типу інтегралів формулу інтегрування частинами потрібно застосувати два рази. Обидва рази за $u(x)$ треба брати тригонометричну функцію або для перших двох інтегралів показникові функції. За $dv(x)$ береться усе, що залишилося під знаком інтеграла. Унаслідок двократного застосування формули (2.1) отримаємо рівність, яку треба розглядати як рівняння відносного вихідного інтеграла. Знаходимо шуканий інтеграл із цього рівняння.

Приклад. Знайти інтеграл $\int e^x\cos xdx$.

Розв'язання.

$$\int e^x\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = e^x; du = \cos x\,dx; \\ du = d(e^x) = (e^x)'dx = e^x dx; \\ v = \int dv = \int\cos x\,dx = \sin x \end{matrix}\right\} = e^x\sin x - \int\sin x\cdot e^x dx. \qquad (*)$$

До інтеграла $\int e^x \sin x dx$ знову застосуємо формулу (2.1), причому обов'язково через $u(x)$ позначимо ту саму функцію e^x.

$$\int e^x \sin x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^x;\ du = d(e^x) = e^x dx; \\ dv = \sin x dx;\ v = \int dv = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{matrix} \right\} =$$
$$= e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)\cdot e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

Підставимо вираз для $\int e^x \sin x\, dx$ в (*), отримаємо

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x - (-e^x\ \cos x + \int e^x \cos x\ dx) = e^x \sin x + e^x \cos x -$$
$$-\int e^x \cos x dx.$$

У правій частині рівності ми отримали вихідний інтеграл, але з протилежним знаком. Ця рівність є рівнянням відносного інтеграла $\int e^x \cos x dx = I$.

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + 2C. \qquad 2I = e^x(\sin x + \cos x) + 2C.$$
$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C. \qquad \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Зауваження. У інтегралах виду $\int e^{\alpha x} \cos bx dx$, $\int e^{\alpha x} \sin bx dx$, $\int \cos(\ln x) dx$, $\int \sin(\ln x) dx$ суттєвим є те, що обидва рази у формулі (2.1) за $u(x)$ береться однотипна функція, чи тригонометрична, чи показникова. Якщо порушити цю умову, то після двох застосувань формули (2.1) перейдемо до тотожності $0 = 0$, із якої нічого не можна знайти.

Відео інтегрування частинами.
Базове:

https://youtu.be/D8gdeco5PeA

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?v=TbWaR8CjCLQ

3. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо під знаком інтегралу міститься тригонометричний вираз, то інтегрування такої функції може відбуватися залежно від підінтегрального виразу.

Зокрема розрізняють такі випадки.

Випадок 1

Нехай маємо інтеграли виду:

$$\int \sin kx \cos lx dx, \int \cos kx \cos lx dx, \int \sin kx \sin lx dx, \text{ де } k, l \in R$$

У такому разі можна застосувати одну із наступних формул:

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}\left(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x\right) \quad (3.1)$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\right) \quad (3.2)$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\right) \quad (3.3)$$

Враховуючи ці формули і зробивши перетворення у підінтегральних виразах, можна отримати інтеграли від простіших(табличних) функцій

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin 7x \cos 4x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.1). Отримаємо:

$$\int \sin 7x \cos 4x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3\mathrm{x}) + \sin(11\mathrm{x})\right) dx = \frac{1}{2}\int ((\sin 3x) + \sin(11\mathrm{x}))\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3\mathrm{x} - \frac{1}{11}\cos 11x\right)$$

Випадок 2

Нехай маємо інтеграли виду: $\int \cos^{2n} x \sin^{2m} x dx$.

Тобто маємо парні степені синуса і косинуса. Для зведення цього інтегралу до табличного вигляду застосуємо відомі з тригонометрії формули пониження степеня та формулу синуса подвійного кута:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Розв’язання.

$$\int\cos^4 x\sin^2 xdx=\int\cos^2 x\left(\cos x\sin x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\cos^2 x\left(2\cos x\sin x\right)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos^2 x\left(\sin^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\int dx+\int\cos 2xdx-\int\cos 4xdx-\int\cos 2x\cos 4xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\int\frac{1}{2}\left(\cos\left(2x-4x\right)+\cos\left(2x+4x\right)\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx-\frac{1}{2}\int\cos 6xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C$$

Випадок 3

Нехай маємо інтеграли виду $\int\sin^m x\cos^n xdx$,

де m і n числа, показники степеня синуса і косинуса. Далі покладемо, що m – показник синуса, n – показник косинуса.

<u>*Перший випадок.*</u>

Показник m – показник степеня синуса непарне додатне число $m=2k+1$. У цьому випадку робимо такі перетворення:

$$\sin^m \mathrm{x}=\sin^{2k+1} x=\sin^{2k} x\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)^k\sin x$$

Після перетворень підінтегральний вираз набуде вигляду:

$$\sin^m x\cos^n xdx=\left(1-\cos^2 x\right)^k\cos^n x\sin dx$$

Застосуємо підстановку $\cos x=z$. Тоді $d(\cos x)=-\sin xdx=dz$. Ми внесли під знак диференціала функцію косинуса і зробили відповідну заміну.

Підінтегральний вираз враховуючи заміну матиме вигляд:

$$(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin xdx=-(1-\mathrm{z}^2)^k z^n dz$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin^5 x dx$.

Розв'язання . Підінтегральний вираз можна записати у вигляді

$$\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x = (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x = (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x$$

Інтеграл набуде вигляду

$$\int \sin^5 x = \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot (-\sin x) dx$$

Після заміни $\cos x = z$ і $-\sin x dx = dz$, отримаємо інтеграл: $-\int (1-z^2)^2 dz$.

Зробимо перетворення:

$$(1-z^2)^2 = 1-2z^2+z^4$$

$$-\int (1-z^2)^2 dz = -\int (1-2z^2+z^4)\,\mathrm{dz} = -(\mathrm{z}-\mathrm{z}^2+\frac{z^5}{5})+C$$

Повертаючись до заміни отримаємо

$$I = -(\mathrm{z}-\mathrm{z}^2+\frac{z^5}{5})+C = -\left(\cos x - \cos^2 x + \frac{\cos^5 x}{5}\right)+C$$

Другий випадок

Якщо в $\int \sin^m x \cos^n x dx$ показник степеня косинуса n – непарне додатне число $n=2k+1$. Тоді з $\cos^n x = \cos^{2k+1} x$ виділяємо перший степінь косинуса і отримуємо

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k \cos x = \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x$$

Підінтегральний вираз запишеться у вигляді:

$$\sin^m x \cos^n x dx = \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x dx$$

Застосовуємо підстановку: $\sin x = z,\ d(\sin x) = \cos x dx = dz.$ У цьому випадку ми внесли під знак диференціалу функцію синуса, і підінтегральний вираз набуде вигляду: $z^m (1-\mathrm{z}^2)^k dz$. Як і у першому випадку, розв'язок зводиться до інтегрування суми степеневих функцій.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \cos^9 x dx$.

Розв'язання . Зробимо перетворення у підінтегральному виразі:

$$\cos^9 x = \cos^8 x \cos x = (\cos^2 x)^4 \cos x = (1-\sin^2 x)^4 \cos x$$

Тоді отримаємо

$$\int \cos^9 x dx = \int (1-\sin^2 x)^4 \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} \textit{зробимо заміну} \\ \sin x = z,\, dz = \cos x dx \end{matrix} \right\} = \int \left(1-z^2\right)^4 dz =$$

$$= \int (1-4z^2+6z^4-4z^6+z^8)dz = z - \frac{4}{3}z^3 + \frac{6}{5}z^5 - \frac{4}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 + C =$$

$$= \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x - \frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$

Розв'язання .

Підінтегральний вираз перетворимо так:

$$\cos^2 x \sin^5 x = \cos^2 x \sin^4 x \sin x = \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x =$$

$$= \cos^2 x (1-\cos^2 x)^2 \sin x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x + \cos^4 x) \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x$$

Тоді отримаємо такий інтеграл:

$$I = \int \cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} \textit{зробимо заміну} \\ \cos x = z,\, -\sin x dx = dz \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\int (z^2 - 2z^4 + z^6) dz = -\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \right) + C = \left\{ \textit{повернемося до заміни} \right\} =$$

$$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} \right) + C$$

Наведемо приклад того, як не вводячи заміну можна розв'язувати інтеграли такого типу.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$

Розв'язання .

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \cdot dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x dx) = \int \cos^4 x \cdot (1-\cos^2 x) \cdot (-(\cos x)' \cdot dx) =$$

$$= -\int (\cos^4 x - \cos^6 x) \cdot d(\cos x) = -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^6 x \cdot d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

Такі самі методи часто застосовують для інтегрування деяких ірраціональних функцій, які залежать від синуса та косинуса.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\cdot(\cos x)dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[3]{\sin x}}d(\sin x)=$$

$$=\int\frac{d(\sin x)}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}}-\int\frac{\sin^2 x}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}}d(\sin x)=\int(\sin x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x)-\int(\sin x)^{2-\frac{1}{3}}d(\sin x)=$$

$$=\frac{(\sin x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}-\int(\sin x)^{\frac{5}{3}}d(\sin x)=\frac{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}-\frac{(\sin x)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\left((\sin x)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sin^2 x\cdot(\sin x)^{\frac{2}{3}}\right)+C=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 x\right)\right)+C$$

Третій випадок

Сума $m+n$ показників степенів синуса і косинуса в інтегралі $\int\sin^m x\cos^n x dx$ парне від'ємне число $m+n=2k$ $(k<0)$.

У цьому випадку підінтегральний вираз може мати два види:

1) Підінтегральний вираз – дріб, у чисельнику якого знаходиться степінь синуса, а у знаменнику – степінь косинуса (або навпаки). Показники степенів синуса і косинуса або парні, або непарні (однакової парності).

Оскільки $m+n$ від'ємне число, то звідси слідує, що степінь знаменника більший степеня чисельника.

2) Підінтегральна функція – є дробом, чисельник якого постійна величина, а знаменник – добуток степенів синуса і косинуса однакових степенів.

У цьому випадку, коли $m+n=2k$, можна застосовувати підстановку

$$tgx=z \quad \text{або} \quad ctgx=z$$

Якщо в чисельнику підінтегрального виразу знаходиться синус, то зручніше застосовувати підстановку

$$tgx=z,\ dx=\frac{dz}{1+z^2},\ \sin z=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \qquad (3.4)$$

Якщо у чисельнику знаходиться синус, то краще застосовувати підстановку

$$ctgx=z,\ dx=-\frac{dz}{1+z^2},\ \sin z=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\ \cos x=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \qquad (3.5)$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. У цьому прикладі $n=4, m=-6, m+n=-2$ парне від'ємне число.

В чисельнику дробу знаходиться степінь косинуса, тому застосуємо підстановку (3.5)

$$ctgx = z\,,\; dx = -\frac{dz}{1+z^2}\,,\; \sin z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,,\; \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

Отримаємо:

$$I = \int \frac{\frac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^6}}}\left(-\frac{1}{1+z^2}\right)\mathrm{dz} = \left\{\begin{matrix}\text{після перетворень}\\ \text{отримаємо}\end{matrix}\right\} = -\int z^4 dz = -\frac{z^5}{5} + C =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{повернемося до}\\ \text{заміни } z = ctgx\end{matrix}\right\} = \frac{-ctg^5 x}{5} + C$$

Розглянемо випадок, коли числа m і n не є цілими, але умова $m+n = 2k\ (\mathrm{k} < 0)$ виконується.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}}dx$.

Розв'язання. В цьому прикладі показник степеня синуса $m = -\frac{8}{3}$, а показник степеня косинуса $n = \frac{2}{3}$, а тому $m+n = -\frac{8}{3}+\frac{2}{3} = -2$ – парне від'ємне число. Тут доцільна підстановка

$$ctg\, x = z\,,\quad dx = -\frac{dz}{1=z^2}\,,\quad \sin z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,,\quad \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\int \frac{\cos^{\frac{2}{3}} x}{\sin^{\frac{8}{3}} x}dx = -\int \frac{\frac{z^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(1+z)^{\frac{2}{3}}}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{z}^2)^{\frac{8}{3}}}}}\cdot\frac{dz}{1+z^2} = -\int z^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{(1+\mathrm{z}^2)^{\frac{8}{3}}}}{\sqrt{(1+\mathrm{z}^2)^{\frac{2}{3}}}}\cdot\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= -\int z^{\frac{2}{3}}dz = -\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{5}ctgx\sqrt[3]{ctg^2 x} + C$$

Відео інтегрування тригонометричних функцій.

Базове:

https://youtu.be/xEi9sRkWWTk

https://youtu.be/LsmFVqEyP-E

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?v=4z8ZgruWpRg

3.1. Універсальна тригонометрична підстановка

Якщо підінтегральна функція є раціональною від тригонометричних функцій, то такий інтеграл завжди можна звести до інтегралу виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, бо, як відомо з тригонометрії, всі тригонометричні функції можна раціонально виразити через функції $\sin x$ та $\cos x$. Крім того, усі тригонометричні функції раціонально виражають через $tg\frac{x}{2}=t$. При цьому dx раціонально виражається через t і dt. Справді, розпишемо формули переходу більш детально:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \begin{bmatrix} \textit{чисельник і знаменник} \\ \textit{ділимо на } \cos^2\frac{x}{2} \end{bmatrix} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \begin{bmatrix} \textit{чисельник і знаменник} \\ \textit{ділимо на } \cos^2\frac{x}{2} \end{bmatrix} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Підстановку $tg\frac{x}{2}=t$ називають ***універсальною тригонометричною підстановкою.***

Так як $tg\frac{x}{2}=t$, то $x = 2arctgt$, тому $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5} = \left| \begin{matrix} \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{4t-\left(1-t^2\right)+5\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{6t^2+4t+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\mathrm{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$$

Підстановка $tg\frac{x}{2}=t$ має назву універсальної саме тому, що будь-яка функція виду $R(\sin x,\cos x)$ внаслідок цієї підстановки перетворюється на раціональну функцію. А будь-яку раціональну функцію можна проінтегрувати методом невизначених коефіцієнтів. Але вказана підстановка в деяких випадках може призвести до громіздких обчислень. Тому розглянемо також деякі інші способи інтегрування тригонометричних функцій. Насамперед, зупинимося на так званих частинних тригонометричних підстановках.

3.2. Частинні тригонометричні підстановки

Розглянемо інтеграл виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де $R(\sin x,\cos x)-$ функція, яка раціонально виражається через синус та косинус.

Існують три випадки, коли для зведення такого інтеграла до табличного вигляду можна застосувати також підстановки відмінні від універсальної тригонометричної підстановки.

Перший випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно синуса, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то застосовують підстановку $\cos x=t$;

Другий випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно косинуса, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то застосовують підстановку $\sin x=t$;

Третій випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ парна відносно синуса і косинуса, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то застосовують підстановку $tgx=t$.

Розглянемо приклад на застосування підстановки $tgx=t$. Для цієї підстановки використовують відомі тригонометричні формули:

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \sin x=tgx\cdot\cos x=\frac{tgx}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Оскільки $x=arctgt, mo\ \ dx=\left(arctgt\right)'\cdot dt=\frac{1}{1+t^2}dt.$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\left\{\begin{array}{l} \textit{підінтегральна функція є парною відносно} \\ \textit{функцій } \cos x \textit{ та } \sin x, \textit{ тому заміна змінної}: \\ tgx=t;\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\ \ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right\}=$$

$$=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4-3\cdot\frac{1}{1+t^2}+5\cdot\frac{t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{4\left(1+t^2\right)-3+5t^2}=\int \frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\int \frac{d\left(3t\right)}{\left(3t\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot arctg\left(3t\right)+C=\left\{t=tgx\right\}=\frac{1}{3}\cdot arctg\left(3tgx\right)+C.$$

Відео інтегрування тригонометричних виразів за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

Базове:

https://youtu.be/5xwUXG1WkO0

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?v=r-wsvHSOFUE

4. ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

4.1. Інтегрування елементарних дробів 1-го типу

Елементарний дріб 1-го типу $\frac{A}{x-a}$ інтегрується за табличною формулою $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$ де $u = x - a$. А саме,

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{7dx}{x-5}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{7dx}{x-5} = 7\ln|x-5| + C.$$

4.2. Інтегрування елементарних дробів 2-го типу

Елементарний дріб 2-го типу $\int \frac{A}{(x-a)^k}$, де $k \geq 2$ інтегрується за табличною формулою $\int \frac{dz}{z^k} = \frac{z^{-k+1}}{-k+1} + C, \quad де \quad z = x - a$. А саме,

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{-2}{(x+3)^5}dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{-2}{(x+3)^5}dx = -2\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^5} = -2\int (x+3)^{-5}\,d(x+3) =$$

$$= -2\frac{(x+3)^{-5+1}}{-5+1} + C = -2\frac{(x+3)^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{2(x+3)^4} + C.$$

Якщо під знаком інтегралу міститься дробово-раціональна функція, у чисельнику якої константа, а знаменник – многочлен $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx$, дискримінант якого $D<0.$ То такі інтеграли зводять до табличних, виділяючи у знаменнику квадрат суми (різниці) двох виразів.

Тут пригадаємо формули

$$a^2+2ab+b^2=(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2$$

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=(x+\frac{p}{2})^2-(\frac{p^2}{4}-q)$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{7}{x^2-5x-1}dx$

Розв'язання.

$$\int \frac{7}{x^2-5x-1}dx=\int \frac{7dx}{x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-1}=\int \frac{7dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-1}=$$

$$=\int \frac{7dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}=7\cdot\frac{1}{\frac{29}{2}}\ln\left|\frac{\frac{29}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\frac{29}{4}+\left(x+\frac{5}{2}\right)}\right|+C=\frac{14}{29}\ln\left|\frac{\frac{29}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\frac{29}{4}+\left(x+\frac{5}{2}\right)}\right|+C$$

4.3. Інтегрування елементарних дробів 3-го типу

Елементарний дріб 3-го типу $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (де $D=p^2-4q<0$) інтегрується за спеціальним алгоритмом.

Алгоритм інтегрування дробів

1-й крок. У чисельнику запишемо похідну від знаменника, $\left(x^2+px+q\right)'=2x+p.$ Дужку $(2x+p)$ помножимо на таку сталу, щоб коефіцієнти при x у першому та у другому інтегралах були рівними. Потім за дужкою віднімемо таку сталу, щоб вільний член у чисельнику став нулем, а саме, віднімемо сталу $\frac{A\cdot p}{2}$. Нарешті додамо у чисельнику сталу B. Тепер чисельники першого та другого інтегралів відрізняються лише формою запису. Але саме така форма запису чисельника дозволяє даний інтеграл звести до табличних інтегралів. А саме,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\left(\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{A\cdot p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx.$$

2-й крок. Останній інтеграл запишемо у вигляді суми двох інтегралів, а саме

- до чисельника першого інтеграла відносимо перший доданок: $\frac{A}{2}(2x+p)$,
- до чисельника другого інтеграла відносимо другий доданок: $B-\frac{A\cdot p}{2}$.

$$\int \frac{\left(\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{A\cdot p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \int \frac{B-\frac{A\cdot p}{2}}{x^2+px+q}dx.$$

3-й крок. Перший з двох останніх інтегралів перетворюємо до табличного вигляду внесенням під знак диференціалу квадратного тричлену x^2+px+q.

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{\left(x^2+px+q\right)'\cdot dx}{x^2+px+q} = \left\{\begin{matrix} dz(x) = \\ = z'(x)dx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} = \left\{ \textit{за формулою} \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C \right\} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + C.$$

4-й крок. Другий з інтегралів 2-го кроку перетворюємо до табличного вигляду *виділенням повного квадрату в знаменнику* та подальшим внесенням під знак диференціалу

$$\int \frac{\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}=$$

$$=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2-4q}{4}\right)}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\textit{за означенням елементарні дроби} 3-\textit{го та } 4-\textit{го типів}\\ \textit{у знаменнику мають квадратичний тричлен з}\\ \textit{дискримінантом } p^2-4q\le 0; \textit{ тоді } 4q-p^2>0.\end{array}\right\}=$$

$$=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{4q-p^2}{4}\right)}=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}=$$

$$=\left\{\textit{за формулою } \int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{arc}\,tg\frac{z}{a}+C, \textit{ де } z=x+\frac{p}{2}, a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right\}=$$

$$=\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}+C=\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}=\left\{\begin{array}{l}\textit{робимо перетворення з метою отримати у чисельнику}\\ \textit{похідну від знаменника, домножимо на } 8 \textit{ і на } \frac{1}{8}\end{array}\right\}=$$

$$\int\frac{\frac{1}{8}\cdot 8(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{\frac{1}{8}\cdot 3\left(8x-\frac{8}{3}\right)dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{3}{8}\cdot\frac{8x-4+4-\frac{8}{3}}{4x^2-4x+17}dx=$$

$$\int\frac{\frac{3}{8}\cdot(8x-4)+\frac{3}{4}\cdot 4-1}{4x^2-4x+17}dx=\{\textit{перейдемо до суми двох інтегралів; див. } 2-\textit{й крок.}\}=$$

$$\frac{3}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17}+\left(\frac{3}{4}\cdot 4-1\right)\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}=\frac{3}{8}\cdot I_1+\frac{1}{2}\cdot I_2.$$

Знайдемо I_1, *див.* $3-$*й крок.*

$$I_1=\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{\left(4x^2-4x+17\right)'\cdot dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{d\left(4x^2-4x+17\right)}{4x^2-4x+17}=\ln\left|4x^2-4x+17\right|+C_1.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}=\{\text{див. } 4-\text{й крок}\}\int\frac{dx}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=\frac{1}{8}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+C_2.$$

Знайдені вирази інтегралів I_1 та I_2 підставимо у вихідний інтеграл.

$$\int\frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}=\frac{3}{8}\cdot I_1+\frac{1}{2}\cdot I_2=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\ln\left|4x^2-4x+17\right|+C_1\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+C_2\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\ln\left|4x^2-4x+17\right|+\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot C_1+\frac{1}{2}\cdot C_2\right)=$$

$$=\left\{\text{нехай }\ \frac{3}{8}\cdot C_1+\frac{1}{2}\cdot C_2=C\right\}=\frac{3}{8}\cdot\ln\left|4x^2-4x+17\right|+\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+C.$$

Відео інтегрування дробово-раціонального виразу.

Базове:

https://youtu.be/_FRezB5842c

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?reload=9&v=b5RmLIPln2g

https://www.youtube.com/watch?v=cP2xGRn0SrE

4.4. Метод невизначених коефіцієнтів інтегрування раціональних функцій

Перш за все будемо розділяти інтегрування правильних дробів $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx,$ де $m < n$ і неправильних дробів $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx,$ де $m \geq n$. Де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ многочлени відповідно степенів m і n.

Розглянемо інтегрування правильних дробів.

Тут розглянемо такі випадки:

Випадок 1. Корені знаменника – лише дійсні числа, серед яких немає рівних.

Випадок 2. Корені знаменника – дійсні числа, серед яких є рівні (знаменник має дійсні рівні корені).

Доцільно розглянути теорему про розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів, розбивши її на декілька частин.

I. Нехай маємо $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильний раціональний дріб, знаменник якого має дійсні різні корені, так що знаменник можна представити у вигляді:

$$Q_n(x) = (x-a)(x-b)...(x-d)$$

Тоді згідно із загальною теоремою можна записати суму елементарних дробів першого типу.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + ... + \frac{D}{x-d}$$

Як бачимо, задача звелася до знаходження невизначених коефіцієнтів. Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}dx$.

Розв'язання.

Потрібно підінтегральний вираз розкласти на суму елементарних дробів. Для цього розкладемо квадратичний тричлен на множники.

$$4x^2-16x+15=0,\ D=b^2-4ac=(-16)^2-4\cdot4\cdot15=256-240=16.$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{16+4}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}=2,5;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{16-4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1,5.$$

Тоді знаменник дробу приймає вигляд:

$$(2x-1)(4x^2-16x+15)=(2x-1)\cdot4(x-1,5)(x-2,5)=$$
$$=2\cdot4(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)=8(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5).$$

Перепишемо окремо підінтегральну функцію і розкладемо її на суму елементарних дробів.

$$f(x)=\frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}=\frac{32x}{8(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=$$
$$=\left\{\begin{matrix}\textit{Знаменник дробу має корені лише дійсні різні числа. За правилом розкладання}\\ \textit{кожному множнику знаменника відповідає один елементарний дріб } 1-\textit{го типу}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=\frac{A}{x-0,5}+\frac{B}{x-1,5}+\frac{C}{x-2,5}$$

Тобто вихідний інтеграл дорівнюватиме сумі трьох інтегралів:

$$\int\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}dx=\int(\frac{A}{x-0,5}+\frac{B}{x-1,5}+\frac{C}{x-2,5})dx$$

Потрібно знайти невизначені коефіцієнти *A, B, C*.

Зведемо до спільного знаменника доданки, що містять невизначені коефіцієнти

$$f(x)=\frac{A}{x-0,5}+\frac{B}{x-1,5}+\frac{C}{x-2,5}=\frac{A(x-1,5)(x-2,5)+B(x-0,5)(x-2,5)+C(x-0,5)(x-1,5)}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}.$$

Тепер ми маємо рівність двох раціональних функцій:

$$f(x)=\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=\frac{A(x-1,5)(x-2,5)+B(x-0,5)(x-2,5)+C(x-0,5)(x-1,5)}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}.$$

Ці функції мають однакові знаменники, тобто для їх рівності мають бути рівними чисельники дробів. Тому прирівняємо чисельники дробів:

$$4x=A(x-1,5)(x-2,5)+B(x-0,5)(x-2,5)+C(x-0,5)(x-1,5)\qquad(*)$$

Застосуємо спосіб *“конкретних числових значень”* для знаходження *A, B, C*. Відомо, що дві функції рівні, якщо збігаються їх значення при будь-яких значеннях x із області визначення. Саме цей факт лежить в основі способу конкретних числових значень. Спосіб полягає у тому, щоб надавати

x будь-яких числових значень із області визначення. Якщо x замінюється числом, рівність (*) перетворюється на рівняння відносно невідомих *A, B,...* .

Треба взяти стільки різних числових значень x, скільки невідомих невизначених коефіцієнтів *A, B*, … є в останній рівності. Якщо корені знаменника дійсні та однократні (кожен множник знаменника лінійна функція, яка піднесена до першого степеня), то найкраще надавати x числові значення, які збігаються з коренями знаменника. Внаслідок цих дій отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження числових значень невизначених коефіцієнтів *A, B*, … .

Застосуємо цей спосіб до нашого прикладу. Рівність (*) має три невизначених коефіцієнта *A, B, C*. Тобто треба надати x три різних числових значення. Надамо x числові значення, які збігаються з коренями знаменника функції $f(x)$. А саме, $x_1 = 0,5;\ x_2 = 1,5;\ x_3 = 2,5.$ Як результат, отримаємо три рівняння для знаходження значень невизначених коефіцієнтів *A, B, C*.

А саме,

$$4x = A(x-1,5)(x-2,5) + B(x-0,5)(x-2,5) + C(x-0,5)(x-1,5).$$

$$x = 0,5;\ \textit{тоді}:\ 4\cdot 0,5 = A(0,5-1,5)(0,5-2,5) + B(0,5-0,5)(0,5-2,5) + C(0,5-0,5)(0,5-1,5).$$
$$2 = A(-1)(-2) + B\cdot 0 + C\cdot 0;\quad 2 = 2A;\ A = 1.$$

$$x = 1,5;\ \textit{тоді}:\ 4\cdot 1,5 = A(1,5-1,5)(1,5-2,5) + B(1,5-0,5)(1,5-2,5) + C(1,5-0,5)(1,5-1,5).$$
$$6 = A\cdot 0 + B\cdot 1\cdot(-1) + C\cdot 1\cdot 0;\quad 6 = -B;\ B = -6.$$

$$x = 2,5;\ \textit{тоді}:\ 4\cdot 2,5 = A(2,5-1,5)(2,5-2,5) + B(2,5-0,5)(2,5-2,5) + C(2,5-0,5)(2,5-1,5).$$
$$10 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 2\cdot 1;\quad 10 = 2C;\ C = 5.$$

$$\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}dx = \int \left(\frac{1}{x-0,5} - \frac{6}{x-1,5} + \frac{5}{x-2,5}\right)dx =$$
$$= \ln|x-0,5| - 6\ln|x-1,5| + 5\ln|x-2,5| + C$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$.

Розв’язання.

Розкладемо знаменник на елементарні множники

$$x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-2}\Rightarrow x^2+x-1=A(x-2)(x+3)+B(x+3)x+C(x-2)x$$

$$x=0:\quad -1=-6A\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{6};$$

$$x=2:\quad 5=10B\ \Rightarrow\ B=\frac{1}{2}; x=-3:\quad 5=15C\ \Rightarrow\ C=\frac{1}{3}.$$

$$I=\int\left(\frac{1}{6}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+3|+C.$$

II. Нехай маємо $\frac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})}$ – правильний раціональний дріб, знаменник якого має дійсні різні корені, так що знаменник можна представити у вигляді:

$$Q_n(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}(\mathrm{x}-\mathrm{b})^{\beta}...(\mathrm{x}-\mathrm{d})^{\gamma},$$

де α,β,γ числа, що визначають кратність коренів. В цьому випадку підінтегральний вираз – дріб можна розкласти на суму елементарних дробів першого і другого типу. При чому співмножнику $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}$ відповідатиме сума дробів $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}$. Аналогічним чином записується відповідність для решти співмножників.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

Розв'язання.

Знаменник має дійсні кратні корені, підінтегральна функція дорівнюватиме сумі інтегралів.

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+4}+\frac{D}{(x+4)^2}$$

Зведемо дроби правої частини рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельник одержаного виразу до чисельника заданої підінтегральної функції.

$$x^2=A(x+2)(x+4)^2+B(x+4)^2+C(x+4)(x+2)^2+D(x+2)^2$$

В цьому випадку застосуємо комбінований метод для обчислення невизначених коефіцієнтів. Спочатку застосуємо спосіб “конкретних числовий значень”, а потім прирівняємо коефіцієнти при невідомих з однаковими показниками степенів.

$x=-2 \quad 4=4B \Rightarrow B=1$

$x=-4 \quad 16=4D \Rightarrow D=4$

$x^2: \quad 1=10A+B+8C+D$

$x^0: \quad 0=32A+16B+16C+4D$

$$\begin{cases} 1=10A+1+8C+16, \\ 0=32A+16+16C+16; \end{cases} \quad \begin{cases} -16=10A+8C, \\ -32=32A+16C; \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ C=-2. \end{cases}$$

$$I=\int\left(\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-2}{x+4}+\frac{4}{(x+4)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{(x+2)^2}-2\int\frac{dx}{x+4}+4\int\frac{dx}{(x+4)^2}=$$

$$=-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x+4}-2\ln|x+4|+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

Розв’язання.

Знаменник підінтегрального виразу розкладається на множники 2-го і 1-го степеня. Застосуємо теорему про розклад. Множнику x^2+1 відповідає вираз $Mx+N$ у чисельнику дробу із знаменником x^2+1.

Зведемо до спільного знаменника дроби правої частини рівності. Прирівнюємо чисельники початкового підінтегрального дробу та одержаного виразу:

$$\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

$$x^3+3x^2-3x+1=M(x^3+2x^2+x)+N(x^2+2x+1)+A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1) \qquad (**)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових показниках степенів:

$x^3 \mid 1=M+A$

$x^2 \mid 3=2M+N+A+B$

$x \mid -3=M+2N+A$

$x^0 \mid 1=N+A+B$

$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 6=2B \quad \Rightarrow \quad B=3$

$$\begin{cases}2M+N+A=0,\\ M+2N+A=-3,\\ M+A=1\end{cases}\qquad \begin{cases}N=-2,\\ 2M+A=2,\\ M+A=1\end{cases}\qquad \begin{cases}N=-2,\\ M=1,\\ A=0\end{cases}$$

Знайдені значення невизначених коефіцієнтів підставляємо в (**)

$$\int\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int\frac{x-2}{x^2+1}dx+\int\frac{3}{(x+1)^2}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{-2}{x^2+1}dx+$$
$$+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-2\operatorname{arctg}x-\frac{3}{x+1}+C$$

Розглянемо інтегрування неправильних дробів $\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx,$ де $m\geq n.$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{x^4+2x^3+4x+4}{x^2+2x+2}dx$.

Розв’язання.

Перетворимо неправильний дріб у правильний. Для цього поділимо многочлен четвертого степеня x^4+2x^3+4x+4 на многочлен другого степеня x^2+2x+2:

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^3+4x+4 & x^2+2x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+2x^3+2x^2} & x^2-2 \\ \qquad -2x^2+4x+4 & \\ \qquad \underline{-2x^2-4x-4} & \\ \qquad\qquad 8x+8 & \end{array}$$

Отримали інтеграл

$$\int(x^2-2+\frac{8x+8}{x^2+2x+2})\,\mathrm{dx}=\int x^2dx-2\int dx+\int\frac{8x+8}{x^2+2x+2}dx=\frac{x^3}{3}-2x+4\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$$

Бачимо, що останній інтеграл є інтегралом третього типу. Причому в чисельнику вже є похідна знаменника. $(x^2+2x+2)'=2\mathrm{x}+2$. Тому інтеграл запишеться так:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}\begin{Bmatrix} \text{ввівши заміну } x^2+2x+2=t \\ d(x^2+2x+2)=(2x+2)dx=dt \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|t\right| + C =$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{повернемося до} \\ \text{заміни} \end{Bmatrix} = \ln\left|x^2+2x+2\right| + C$$

Відео методу невизначених коефіцієнтів (розкладання дробу на найпростіші).

Базове:

https://youtu.be/_FRezB5842c

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?v=f_0NLokBamw

5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Інтеграли виду $\int \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

У знаменнику виділимо повний квадрат (квадрат двочлена) і, таким чином, зведемо цей інтеграл до табличного.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Розв'язання.

Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$5+2x-x^2 = -(x^2-2x+1-6) = -\left[(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2)-6\right] =$$
$$= -\left[(x-1)^2-6\right] = 6-(x-1)^2$$

(застосували формулу $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(x-1\right)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$$

$\int \sqrt[m]{kx+b}\,dx$ $(k\neq 0)$. У цьому випадку потрібно покласти $\sqrt[m]{kx+b}=t$, звідки $x=\frac{1}{k}(t^m-b)$, $dx=\frac{m}{k}t^{m-1}dt$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-3} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-3} = 2\int \frac{\left(t^2-3\right)+3}{t^2-3}dt =$$

$$= 2\int \left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)dt = 2\left(\int dt+3\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right) = 2\left(t+3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right)+C =$$

$$= 2t+\sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C = 2\sqrt{x}+\sqrt{3}\ \ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right|+C$$

Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_2}}, ..., \sqrt[n_s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_s}}\right)dx$.

Підінтегральна функція раціонально залежить від кількох коренів виду

$$\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_2}}, ..., \sqrt[n_s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_s}}.$$

Знайдемо найменше спільне кратне показників степенів коренів, а саме $НСК(n_1, n_2, ..., n_s) = m$. Зробимо заміну змінної: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$. Із останньої рівності знайдемо x та dx.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,\ ax+b = t^m\cdot(cx+d),\ ax - t^m\cdot cx = t^m\cdot d - b,\ x(a - c\cdot t^m) = d\cdot t^m - b,\ x = \frac{d\cdot t^m - b}{a - c\cdot t^m}.$$

$$\textit{Знаходимо } dx = d\left(\frac{d\cdot t^m - b}{a - c\cdot t^m}\right) = \left(\frac{d\cdot t^m - b}{a - c\cdot t^m}\right)'\cdot dt = ...\ .$$

У вихідному інтегралі підінтегральну функцію та множник dx треба замінити виразами через новий аргумент t. Після закінчення процесу інтегрування потрібно від аргументу t повернутися до аргументу x, підставивши $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} = \left\{\begin{array}{l} \textit{знайдемо НСК показників степенів коренів}:\ НСК(3,2) = 6 = m. \\ \textit{заміна змінної}:\ 2x+1 = t^6, x = \frac{1}{2}(t^6 - 1), dx = \frac{1}{2}\cdot 6t^5dt = 3t^5dt. \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{3t^5dt}{\sqrt[3]{(t^6)^2} - \sqrt{t^6}} = 3\int \frac{t^5dt}{\sqrt[3]{t^{12}} - t^3} = 3\int \frac{t^5dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^5dt}{t^3(t-1)} = 3\int \frac{t^2dt}{t-1} = 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 3\left(\int \frac{t^2-1}{t-1}dt + \int \frac{1}{t-1}dt\right) = 3\left(\int (t+1)dt + \int \frac{d(t-1)}{t-1}\right) = 3\left(\int (t+1)d(t+1) + \ln|t-1|\right) =$$

$$= 3\left(\frac{(t+1)^2}{2} + \ln|t-1|\right) + C = \left\{t = \sqrt[6]{2x+1}\right\} = 3\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{2x+1} + 1\right)^2 + \ln\left|\sqrt[6]{2x+1} - 1\right|\right) + C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2},\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Тут доцільні такі заміни, залежно від підінтегрального виразу

1) $\sqrt{a^2-x^2}$, то доцільно зробити підстановку $x=a\ \sin t$;
2) $\sqrt{a^2+x^2}$, то доцільно зробити підстановку $x=a\ tgt$;
3) $\sqrt{x^2-a^2}$, то доцільно зробити підстановку $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\left\{\begin{aligned}&\text{Маємо другий випадок}\\&a=1,\ x=tgx,\\&dx=d\left(tgt\right)'dt=\frac{1}{\cos^2 t}dt\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{\left(1+tg^2t\right)^3}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1}{\cos^6 t}}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}}=\int\frac{dt}{\frac{1}{\cos\ t}}=$$

$$\int\cos tdt=\sin t+C=\left\{x=tgx,\ \sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right\}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$**.**

Такий інтеграл зводиться до одного з інтегралів попереднього типу, якщо під знаком кореня виділити повний квадрат (квадрат двочлена) із квадратного тричлена. А саме,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну змінної: $x+\dfrac{b}{2a}=t$, $dx=dt$. Позначимо: $\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)=A$.

Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+A}.$$

Можливі чотири випадки:

1. Якщо $a>0$ *і* $A>0$.

Позначимо $a=m^2$ і $\mathrm{A}=n^2$. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}=m\cdot\sqrt{t^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2}$.

У першому випадку можна позбутися кореня за допомогою другої тригонометричної підстановки $t=\frac{n}{m}tgz$.

2. Якщо $a>0$, $A<0$.

Позначимо $a=m^2$ і $\mathrm{A}=-n^2$. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}=m\cdot\sqrt{t^2-\left(\frac{n}{m}\right)^2}$.

У другому випадку можна позбутися кореня за допомогою третьої тригонометричної підстановки $t=\frac{n}{m\cos z}$.

3. Якщо $a<0$ *і* $A>0$.

Позначимо: $a=-m^2$ і $A=n^2$. Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}=m\cdot\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2-t^2}$.

У третьому випадку можна позбутися кореня за допомогою першої тригонометричної підстановки $t=\frac{n}{m}\sin z$.

4. Якщо $a<0$ і $A<0$, то під знаком кореня стоїть від'ємна функція при будь-якому значенні *t*, що неможливо в дійсній області.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{1-4x-x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int\sqrt{1-4x-x^2}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\textit{виділяємо повний квадрат}: 1-4x-x^2=-(x^2+4x-1)=-\left[\left(x^2+2\cdot2\cdot x+4\right)-4-1\right]=\\ =-\left[\left(x+2\right)^2-5\right]=5-\left(x+2\right)^2.\ \textit{Заміна змінної}:\ x+2=t;\ dx=dt.\end{array}\right\}=$$

$$=\int\sqrt{5-(x+2)^2}dx=\int\sqrt{5-t^2}dt=\left\{\begin{array}{l}A=5>0; a=-1<0;\ \textit{підходить перша тригонометрична}\\ \textit{підстановка}:\ \mathrm{t}=\sqrt{5}\cdot\sin z;\ \ dt=\sqrt{5}\cdot\cos zdz.\end{array}\right\}=$$

$$= \int \sqrt{5-5\sin^2 z} \cdot (\sqrt{5} \cdot \cos z)dz = 5\int \sqrt{1-\sin^2 z} \cdot \cos z dz = 5\int \sqrt{\cos^2 z} \cdot \cos z dz = 5\int \cos^2 z dz =$$

$$= \left\{ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \right\} = 5\int \frac{1+\cos 2z}{2} dz = \frac{5}{2}\left(\int dz + \int \cos 2z dz \right) = \frac{5}{2}\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z \right) + C =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin z = \dfrac{t}{\sqrt{5}},\ t = x+2,\ \ z = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{5}} = \arcsin\dfrac{x+2}{\sqrt{5}};\quad \cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-\dfrac{t^2}{5}} = \sqrt{\dfrac{5-t^2}{5}}. \\ \sin 2z = 2\sin z\cos z = 2\cdot\dfrac{t}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{5-t^2}{5}} = \dfrac{2}{5}\cdot t\cdot\sqrt{5-t^2} = \dfrac{2}{5}(x+2)\sqrt{5-(x+2)^2}. \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot(x+2)\sqrt{1-4x-x^2} \right) + C = \frac{1}{2}\left(5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + (x+2)\sqrt{1-4x-x^2} \right) + C.$$

Розглянемо інтеграли, що містять ірраціональність, які можна розв'язати також методом інтегрування частинами.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{a^2-x^2} & du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{\left(a^2-x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx +$$

$$+ a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} \right) + C$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

Розв'язання.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a^2} & du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right\} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| =$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right) + C$$

Відео інтегрування деяких ірраціональних виразів.

Базове:

https://youtu.be/qfoLFYjaFgs

Додаткове:

https://www.youtube.com/watch?v=h9xVseDp0H4

6. ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

6.1. Рекурентні формули

Рекурентною формулою називається співвідношення $a_{n+1} = F(n, a)$, яке дозволяє обчислити будь-який член послідовності $a_1, a_2 ... a_n, a_{n+1} ...$ за умови, що попередні члени цієї послідовності відомі. Наприклад, рекурентними є формула загального члена геометричної прогресії, $a_{n+1} = a_n g$ (знаменник прогресії $g \neq 0$), та формула загального члена арифметичної прогресії, $a_{n+1} = a_n + d$; $d -$ *різниця прогресії*.

Рекурентні формули існують також в інтегральному численні. Розглянемо інтеграли

$$l_n = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} \quad \text{і} \quad I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n+1}}, n = 1, 2, 3...$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+A)^n} = \left\{ \begin{aligned} & u = \frac{dx}{(x^2+A)^n}; dv = du; du = d\left(\frac{dx}{(x^2+A)^n}\right) = \\ & = \left(\frac{dx}{(x^2+A)^n}\right)' dx = \left((x^2+A)^{-n}\right)' dx = \\ & = -n(x^2+A)^{-n-1} 2xdx = \frac{-2nxdx}{(x^2+A)^{n+1}}; \\ & v = \int dv = \int dx = x \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+A)^n} - \int x \frac{-2nxdx}{(x^2+A)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2+A)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2n \int \frac{(x^2+A) - A}{(x^2+A)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+A)^n} +$$

$$+ 2n \int \frac{x^2+A}{(x^2+A)^{n+1}} dx - 2nA \int \frac{dx}{(x^2+A)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+A)^n} - 2nA \int \frac{dx}{(x^2+A)^{n+1;}};$$

Маємо рівність: $\quad I_n = \dfrac{x}{(x^2+A)^n} + 2nI_n - 2nAI_{n+1}$

Із цієї рівності виразимо I_{n+1} через I_n.

$$2nAI_{n+1} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2nI_n - I_n,$$

$$2nAI_{n+1} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + (2n-1)I_n.$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nA} \frac{x}{(x^2+A)^n} + \frac{2n-1}{2nA} I_n \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) є рекурентною формулою. Дійсно, для послідовності, інтегралів $I_1,\ I_2,\ \dots\ I_n,\ I_{n+1},\ \dots$ будь-який елемент цієї послідовності I_{n+1}, виражається через елемент I_n. Зокрема, інтеграл I_n виражається через I_{n-1} і так далі до I_1. Інтеграл I_1 є табличним, причому можливі два випадки:

$$A = a^2 \text{ тоді } I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C,$$

$$A = -a^2 \text{ тоді } I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Формулу (4.1) перепишемо, підставивши відповідні інтеграли.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A)^{n+1}} = \frac{1}{2nA} \frac{x}{(x^2 + A)^n} + \frac{2n-1}{2nA} \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} \tag{4.2}$$

Розглянемо приклад застосування останньої формули.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^3}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2-4)^3} &= \left\{ \begin{matrix} n+1 = 3; n = 2 \\ A = -4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot (-4)} \cdot \frac{x}{(x^2-4)^2} + \\ &+ \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 \cdot (-4)} \cdot \int \frac{dx}{(x^2-4)^2} = -\frac{1}{16} \frac{x}{(x^2-4)^2} - \frac{3}{16} \cdot \int \frac{dx}{(x^2-4)^2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

До $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^2}$ знову застосуємо формулу (4.2). Тепер $n + 1 = 2, n = 1, A = -4$.

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (-4)} \cdot \frac{x}{(x^2-4)} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 \cdot (-4)} \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{8} \frac{x}{(x^2-4)} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = -\frac{1}{8} \frac{x}{(x^2-4)} - \frac{1}{32 \ln} \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

Знайдений вираз для $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^2}$ підставимо в (4.3):

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^3} = \frac{-x}{16(x^2-4)} - \frac{3}{16} \left(-\frac{1}{8} \frac{x}{(x^2-4)} - \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \right) =$$

$$= \frac{-x}{16(x^2-4)^2} + \frac{3}{128} \frac{x}{(x^2-4)} + \frac{3}{512} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \frac{3}{16} C = \left\{ -\frac{3}{16} C = C_1 \right\} =$$

$$= \frac{-x}{16(x^2-4)^2} + \frac{3}{128} \frac{x}{(x^2-4)} + \frac{3}{512} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_1$$

Формулу (4.2) зокрема використовують для інтегрування елементарних дробів четвертого типу. Саме це питання розглянемо далі.

6.2. Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

Елементарний дріб 4-го типу $\frac{Mx+N}{(x^2+rx+s)^k}$, де дискримінант $r^2-4s<0; k\geq 2$, зводиться до табличного вигляду внесенням під знак диференціалу, заміною змінної та подальшим використанням рекурентної формули (4.2). Розглянемо алгоритм інтегрування дробу 4-го типу.

1-й крок. Під знаком інтеграла зробимо перетворення з метою отримати у чисельнику похідну від квадратного тричлена x^2+rx+s.

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+rx+s)^k} = \int \frac{\left(\frac{M}{2}(2x+r)+N-\frac{Mr}{2}\right)dx}{(x^2+rx+s)^k}$$

2-й крок. Останній інтеграл записати у вигляді суми двох інтегралів.

$$\int \frac{\left(\frac{M}{2}(2x+r)+N-\frac{Mr}{2}\right)dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k} = \frac{M}{2}\cdot\int \frac{(2x+r)}{\left(x^2+rx+s\right)^k}dx + \left(N-\frac{Mr}{2}\right)\cdot\int \frac{dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot I_1 + \left(N-\frac{Mr}{2}\right)\cdot I_2.$$

3-й крок. Перший інтеграл $I_1 = \int \frac{(2x+r)}{(x^2+rx+s)^k}dx$ зводимо до табличного вигляду внесенням під знак диференціалу квадратного тричлена x^2+rx+s.

$$\int \frac{(2x+r)}{(x^2+rx+s)^k}dx = \int \frac{(2x+r)}{(x^2+rx+s)^k}dx = \int \frac{\left(x^2+rx+s\right)' dx}{(x^2+rx+s)^k} =$$

$$\int \frac{d(x^2+rx+s)}{(x^2+rx+s)^k} = \int (x^2+rx+s)^{-k}\cdot d(x^2+rx+s) = \frac{(x^2+rx+s)^{-k+1}}{-k+1}+C =$$

$$= -\frac{1}{(k-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+rx+s)^{k-1}}+C$$

4-й крок. Другий інтеграл $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^k}$ зведемо до рекурентної формули (4.2) за допомогою заміни змінної.

А саме,

$$\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^k} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{r}{2}\cdot x+\frac{r^2}{4}-\frac{r^2}{4}+s\right)^k} = \int \frac{dx}{\left(\left(x^2+\frac{r}{2}\right)^2+s-\frac{r^2}{4}\right)^k} =$$

$$\begin{bmatrix} \textit{Нехай } x+\frac{r}{2}=z, \textit{ тоді } dz=dx. \textit{ За умовою дискримінант } r^2-4s<0, \\ \textit{тоді } 4s-r^2>0. \textit{ Позначимо } \frac{4s-r^2}{4}=a^2. \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k} = I_k. \textit{ Ми прийшли до рекурентної формули } (4.2).$$

У формулі (4.2) приймаємо: $x=z$; $n=k$; $A=a^2$. Застосуємо рекурентну формулу (4.2) $\frac{(A\cdot p)}{2}$ разів. Внаслідок цього прийдемо до табличного інтегралу. Знайдені вирази інтегралів I_1 та I_2 підставимо у вихідний інтеграл.

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{3x-1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \begin{Bmatrix} \textit{зробимо перетворення у чисельнику,} \\ \textit{див.} 1-\textit{й крок} \end{Bmatrix} = \int \frac{\frac{3}{2}\left(2x+2\right)-\frac{3}{2}\cdot 2-1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} \textit{перейдемо до суми двох} \\ \textit{інтегралів, див. } 2-\textit{й крок} \end{Bmatrix} \frac{3}{2}\int \frac{\left(2x-2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx - 4\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \frac{3}{2}I_1 - 4I_2.$$

$$I_1 = \int \frac{\left(2x-2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \begin{Bmatrix} \textit{внесемо під знак} \\ \textit{диференціалу функцію} \\ x^2+2x+2, \textit{ див. } 3-\textit{й крок} \end{Bmatrix} = \int \frac{\left(x^2+2x+2\right)' dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+2}+C_1, \textit{ за формулою } \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}+C, \textit{ де } z=x^2+2x+2.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{для того, щоб визначити заміну змінної, виділяємо}\\ \text{повний квадрат } x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=\left(x+1\right)^2+1;\\ \text{заміна змінної}: x+1=z,\ dx=dz;\ \text{див. } 4-\text{й крок.}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=\left\{\text{застосуємо рекурертну формулу } (4.2);\ n+1=2,\ n=1,\ A=a^2=1\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot1\cdot1}\cdot\frac{z}{z^2+1}+\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1\cdot1}\cdot\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{z}{2\left(z^2+1\right)}+\frac{1}{2}\cdot arctg\,z+C_2=$$

$$=\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+2\right)}+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(x+1\right)+C_2.$$

Знайдені вирази інтегралів I_1 та I_2 підставимо у вихідний інтеграл.

$$\int\frac{\left(3x-1\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}dx=\frac{3}{2}\cdot I_1-4I_2=$$

$$=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2-2x+2}+C_1\right)+4\left(\frac{x+1}{2\left(x^2-2x+2\right)}+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(x+1\right)+C_2\right)=$$

$$=-\frac{3}{2\left(x^2-2x+2\right)}-\frac{2\left(x+1\right)}{\left(x^2-2x+2\right)}-2arctg\left(x+1\right)+\left(\frac{3}{2}C_1-4C_2\right)=\left\{\frac{3}{2}C_1-4C_2=C\right\}=$$

$$=-\frac{3}{2\left(x^2-2x+2\right)}-\frac{2\left(x+1\right)}{\left(x^2-2x+2\right)}-2arctg\left(x+1\right)+C.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

1) $\int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)}{3} + C = \frac{(2x-3)^2}{6} + C$

Використали формулу: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2} f(ax+b) + C$

2) $\int (x^2+2x)dxd = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$

$$\left\{ \textit{Застосувати таблицю інтегралів і формулу } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right\}$$

3) $\int \sin(2x+1)dx = \frac{-\cos(2x+1)}{2} + C$

Використати формулу:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + \mathrm{C}$$

$$4)\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Зробимо заміну } x^3+1=t \\ \textit{Диференціюємо обидві частини} \\ (x^3+1)'dx = t'dt \\ 3x^2dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{3x^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$$

$$5)\int x\sin(x^2)dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Зробимо заміну}: x^2 = t \\ \text{Диференціюємо обидві частини, маємо}: \\ \left(x^2\right)' dx = t'dt \\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right\} =$$

$$= \int \cancel{x}\sin(t)\frac{dt}{2\cancel{x}} = \int \sin(t)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin(t)dt = \frac{1}{2}(-\cos(t)) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(t) + C = \left\{\text{Повернемось до заміни}\right\} = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

$$6)\int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{5}})dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Застосуємо формулу}: \\ \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{7}x^{\frac{5}{7}} + C$$

$$7)\int \frac{x}{\sin^2(x^2)}dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Зробимо заміну}: x^2 = t \\ \text{Диференціюємо обидві частини, маємо}: \\ \left(x^2\right)' dx = t'dt \\ 2xdx = dt \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sin^2(x^2)} = \left\{\text{Після заміни одержимо}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin^2(t)} =$$

$$= \left\{\text{Отримали табличний інтеграл}\right\} = -\frac{1}{2}ctg(t) + C =$$

$$\left\{\text{Повернемося до заміни}\right\} = -\frac{1}{2}ctg(x^2) + C$$

$$8)\int \frac{dx}{x^2 - 25} = \left\{\begin{array}{l} \text{Застосуємо табличну формулу}: \\ \int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \end{array}\right\} = \int \frac{dx}{x^2 - 5^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$$

$$9)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\left\{\begin{array}{l}\textit{Застосуємо формулу:}\\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\end{array}\right\}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$$

$$10)\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}=\left\{\textit{Винесемо з}-\textit{під кореня } 4, \textit{ отримаємо}\right\}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{4(\frac{5}{4}-x^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}}^2-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-x^2}}=$$

$$=\left\{\textit{Використаємо формулу: }\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)+C=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$11)\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\left\{\begin{array}{l}\textit{Знайдемо похідну від підкореневого виразу та введемо заміну:}\\ (1-e^{2x})'dx=t'dt\\ -2e^{2x}dx=dt\end{array}\right\}=$$

Домножимо підінтегральний вираз на (-2) *і на* $(-\frac{1}{2})$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2)e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{t}+C=$$

$$=-\sqrt{t}+C=\left\{\textit{Повернемось до заміни}\right\}=-\sqrt{1-e^{2x}}+C$$

$$12)\int\frac{dx}{(x-2)(x+5)}$$

Потрібно знайти коефіцієнти A та B

$$\int\frac{dx}{(x-2)(x+5)}=\int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}\right)dx=\left\{\textit{Зведемо до спільного знаменника дроби}\right\}=$$

$$=\left(\frac{A}{x+2}\right)^{\backslash(x+5)}+\left(\frac{B}{x+5}\right)^{\backslash(x+2)}=\frac{A(x+5)+B(x+2)}{(x+2)(x+5)}=$$

$$=\left\{\text{Прирівняємо чисельники дробів}: A(x+5)+B(x+2)=1\right\}=$$

$$=\left\{\text{Підставимо кореніз наменника в останню рівність}: x=-5 \text{ і } x=-2\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} A(-2+5)+B(-2+2)=1 & & A(-5+5)+B(-5+2)=1 \\ 3A=1 & & -3B=1 \\ A=\dfrac{1}{3} & & B=-\dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+5}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\ln|x+5|+C$$

13) $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$

Під знаком кореня знаходиться функція, похідна від якої :

$$\left(x^2+9\right)'=2x$$

Тоді зробимо заміну :

$$x^2+9=t$$
$$dt=2xdx$$

Отримаємо : $\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$.

За формулою таблиці інтегралів $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, *маємо*

$$\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$

Повернемось до заміни:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}=2\sqrt{x^2+9}+C$$

14) $\int(7x-4)\sin(2x+1)dx$

Це випадок інтегрування частинами

Застосуємо формулу $\int udv=uv-\int vdu$

$$\int(7x-4)\sin(2x+1)\,dx=\left\{\begin{matrix} u=7x-4,\ dv=\sin(2x+1)\,dx \\ du=7dx,\quad v=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1)+\int\frac{1}{2}\cos(2x+1)\cdot 7dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1)+\frac{7}{2}\int\cos(2x+1)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1)+\frac{7}{4}\int\cos(2x+1)\,d(2x+1)=$$

$$=-\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1)+\frac{7}{4}\sin(2x+1)+C$$

15) $\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$

$$\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx=\left[\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{5+\frac{12t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(4+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt$$

Щоб обчислити $\int\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt$ *, будемо спершу розкладати правильний раціональний дріб, що знаходиться під знаком інтегралу на суму елементарних дробів*

$$\frac{5t^2+12t+5}{t\left(7+t^2\right)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{7+t^2}$$

Тепер знайдемо $A,\quad B,\quad C$.

$$\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{7+t^2}=\frac{A(7+t^2)+t(Bt+C)}{t(7+t^2)}=\frac{7A+At^2+t^2B+Ct}{t(7+t^2)}=$$

$$=\frac{t^2(A+B)+Ct+7A}{t(7+t^2)}$$

Отже, $\quad\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}=\frac{t^2(A+B)+Ct+7A}{t(7+t^2)}.$

Останні дроби тотожно рівні, крім того, у них однакові знаменники, а отже, тотожно рівні чисельники. Таким чином: $5t^2+12t+5=t^2(A+B)+Ct+7A$.

Відомо, що два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях t *рівні між собою. Звідси одержуємо систему лінійних рівнянь:*

$$\begin{array}{l} t^2 \\ t \\ t^0 \end{array} \quad \begin{cases} A + B = 5, \\ \quad C = 12, \\ 7A = 5. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо:

$$A = \frac{5}{7}, \quad B = \frac{30}{7}, \quad C = 12.$$

Таким чином: $$\frac{5t^2 + 12t + 5}{t(7+t^2)} = \frac{\frac{5}{7}}{t} + \frac{\frac{30}{7}t + 12}{7+t^2}.$$

$$\int \frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt = \int \left(\frac{\frac{5}{7}}{t} + \frac{\frac{30}{7}t+12}{7+t^2} \right) dt = \int \frac{\frac{5}{7}}{t}dt + \int \frac{\frac{30}{7}t+12}{7+t^2}dt =$$

$$= \frac{5}{7}\ln|t| + \frac{15}{7}\ln\left(7+t^2\right) + \frac{12}{\sqrt{7}} arctg \frac{t}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{5}{7}\left[\ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + \frac{15}{7}\ln\left(7 + tg^2\frac{x}{2} \right) \right] + \frac{12}{\sqrt{7}} arctg \frac{1}{\sqrt{7}} tg\frac{x}{2} + C$$

16) $\int \sqrt{x^2-16}dx$

Маємо інтеграл виду $\sqrt{x^2-a^2}$ *, до якого застосуємо підстановку* $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

$$\int \sqrt{x^2-16}dx = \int \sqrt{x^2-4^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{4}{\cos t};\ \cos t = \dfrac{4}{x},\ t = \arccos\dfrac{4}{x} \\ \\ dx = \left(\dfrac{4}{\cos t}\right)' dt = -4\left(\cos t\right)^{-2}\sin t dt = -\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{4}{\cos t}\right)^2 - 4}\left(-\frac{4\sin t}{\cos^2 t}\right)dt = -4\int \sqrt{\frac{16}{\cos^2 t} - 4}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= -4\int \sqrt{\frac{16-16\cos^2 t}{\cos^2 t}}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = -4\int \sqrt{\frac{16(1-\cos^2 \mathrm{t})}{\cos^2 t}}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= -4\int \sqrt{\frac{16\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = -4\int \frac{4\sin t}{\cos t}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = -16\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = -16\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt =$$

$$= -16\int \left(\frac{1}{\cos^3 t} - \frac{1}{\cos t} \right)dt$$

$I_1 = \int \frac{1}{\cos^3 t} dt$. *Раціонально перейти до обчислення інтегралу* $\int \frac{1}{\sin^3 t} dt$ *через заміну* $\cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$

. *Отримаємо* $\int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int \frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Знайдемо $\int \frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Знайдемо спочатку $\int \frac{dt}{\sin^3 t}$

Використаємо підстановку $tg\frac{t}{2} = z, sint = \frac{2z}{1+z^2}, dt = \frac{2dz}{1+z^2}$.

Отримаємо:

$$\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{\left(1+z^2\right)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+z^2\right)^3}{z^3} dz = \frac{1}{4}\int \frac{1+2z^2+z^3}{z^3} dz = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+z\right)dz =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}+2\ln|z|+\frac{z^2}{2}\right)+C =$$

Повернемося до заміни:

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{tg^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{t}{2}+C = -\frac{1}{8}ctg^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| =$$

$$= -\frac{1}{8}ctg^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{t}{2}+C$$

Тоді:

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int \frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = (-\frac{1}{8})ctg^2\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}+C =$$

$$= (-\frac{1}{8})ctg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{8}tg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Загальний інтеграл $I = I_1 + I_2$

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos t}dt = \ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$I = I_1 + I_2 = -16\int\left(\frac{1}{\cos^3 t} - \frac{1}{cost}\right)dt =$$

$$= (-\frac{1}{8})ctg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{8}tg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Повернемося до заміни $t = \arccos\frac{4}{x}$.

$$\int\sqrt{x^2-16}dx =$$

$$= (-\frac{1}{8})ctg^2\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{8}tg^2\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \ln\left|tg\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

17) $\int \cos^5 xdx$

У підінтегральній функції $\cos^5 x$ *виділимо перший степінь косинуса, отримаємо*

$$\cos^5 x = \cos^4 x\ cosx = \left(\cos^2 x\right)^2 cosx = \left(1-\sin^2 x\right)^2 cosx = \left(1-2\sin^2 x + \sin^4 x\right)cosx$$

Тоді $\int \cos^5 xdx = \int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)cosxdx$

Використаємо підстановку $sinx = z, cosxdx = dz$.

Отримаємо:

$$\int\left(1-2z^2+z^4x\right)dz = z - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + C$$

Повернемося до заміни:

$$z - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + C = sinx - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Тут, звичайно, можна обійтись без підстановки, а інтегрувати за допомогою методу внесення під знак інтегралу.

$$\int\cos^5 xdx = \int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)cosxdx = \int cosxdx - \int 2\sin^2 xcosxdx + \int \sin^4 xcosxdx =$$

$$= \int cosxdx - \int 2\sin^2 xd(\sin x) + \int\sin^4 xd(\sin x) = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

18) $\int \frac{dx}{5x^2+7x+11}$

Оскільки коефіцієнт біля x^2 *у знаменнику не дорівнює одиниці, то для того, щоб виділити повний квадрат, потрібно винести цей коефіцієнт за дужки. Тоді*

$$5x^2+7x+11=5\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{11}{5}\right)=5\left(\left(x+\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}+\frac{11}{5}\right)=5\left(\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right)$$

$$\int\frac{dx}{5x^2+7x+11}=\int\frac{dx}{5\left(\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right)}=\frac{1}{5}\frac{1}{\frac{\sqrt{171}}{10}}arctg\frac{x+\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{171}}{100}}+C=\frac{2}{\sqrt{171}}arctg\frac{10x+7}{\sqrt{171}}+C$$

ВАРІАНТИ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Варіант – 1

$\int 12x^2 - 10x - 10dx$, $\int 2\sin(3x+4)dx$, $\int \frac{1}{x+19}dx$, $\int \frac{1}{4x^2+1}dx$, $\int \frac{1}{x^2+6x+109}dx$, $\int 2\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$,

$\int \frac{2x+1}{9x^2+4}dx$, $\int \left(x^2+6x+109\right)\sin(3x+4)dx$, $\int \frac{3+\sin(x)}{-10+2\cos(x)}dx$, $\int \frac{-4x+5}{2x^2+5x-25}dx$,

$\int \frac{2\sin(x)+2\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}dx$, $\int e^x \sin(4x+7)dx$.

Варіант – 2

$\int 3x^2+4x+9dx$, $\int \mathrm{e}^{5x-16}dx$, $\int \frac{1}{2x+10}dx$, $\int \frac{2}{9x^2+25}dx$, $\int \sqrt{x^2-25}dx$, $\int 2\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$, $\int \frac{2x+1}{x^2+9}dx$,

$\int \left(5x^2+4x+3\right)\ln(x+2)dx$, $\int \frac{4x+1}{3x^2+13x+4}dx$, $\int \frac{4+\sin(x)}{2+\cos(x)}dx$ $\int \frac{\arcsin(4x+2)}{\sqrt{-3-16x^2-16x}}dx$,

$\int \cos(x+5)\mathrm{e}^{4x+4}dx$

Варіант – 3

$\int \mathrm{e}^{4x+9}dx$, $\int \sqrt{x-13}dx$, $\int \frac{5}{\left(16x^2+100\right)}dx$, $\int (8x+1)\sin(7x+2)dx$, $\int \sqrt{x^2-16}dx$, $\int x\sqrt{x^2-1}dx$,

$\int 6\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx$, $\int \frac{3x+4}{2x^2+8x+6}dx$, $\int \frac{2+\sin(x)}{9+3\cos(x)}dx$, $\int \left(10x^2+2x+9\right)\ln(x+4)dx$

$\int \cos(x+4)\mathrm{e}^{x+5}dx$, $\int \frac{135x^2+276x+83}{27x^2+45x+12}dx$

Варіант – 4

$\int \mathrm{e}^{-3x+12}dx$, $\int \sqrt{2x-2}dx$, $\int \frac{7}{\left(9x^2+81\right)}dx$, $\int (10x-3)\sin(4x-4)dx$, $\int \sqrt{x^2-9}dx$, $\int x\sqrt{4x^2-25}dx$,

$\int 10\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$, $\int \left(\frac{4}{-5+\sin(x)}\right)dx$, $\int \frac{10x-2}{-3x^2+18x-27}dx$ $\int \left(x^2-3x+9\right)\ln(x-4)dx$,

$\int \cos(x-1)\mathrm{e}^{-3x+10}dx$, $\int \frac{-180x^2+59x-1}{90x^2-48x+6}dx$

Варіант – 5

$\int e^{3x+13}dx$, $\int \frac{x+1}{100x^2+1}dx$, $\int (x+4)\sin(10x+4)dx$, $\int \sqrt{x^2-1}dx$, $\int \frac{11}{(4x^2-81)} dx$, $\int 2x\sqrt{x^2-4}dx$,

$\int \frac{-7x+4}{x^2-1}dx$, $\int (-2x^2+4x-1)\ln(x+4)dx$, $\int (\sin(2x-3))^6 \cos(2x-3)dx$, $\int \frac{4}{(3+\sin(x))} dx$,

$\int \cos(x+3)e^{x-3}dx$, $\int \frac{42x^2-132x+71}{14x^2-29x+12}dx$

Варіант – 6

$\int e^{4x+9}dx$, $\int \sqrt{x^2-16}dx$, $\int \frac{2}{(16x^2-64)} dx$, $\int 4\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$, $\int \frac{4x+3}{x^2+1}dx$, $\int \frac{-2x+5}{5x^2+11x-36}dx$,

$\int \frac{\arcsin(3x+5)}{\sqrt{-24-9x^2-30x}}dx$, $\int (\sin(5x-1))^4 \cos(5x-1)dx$, $\int \frac{4}{(5+\sin(x))} dx$,

$\int (-3x^2+2x-8)\ln(x+2)dx$, $\int \cos(x+1)e^{3x-7}dx$, $\int \frac{30x^2-94x+36}{10x^2-27x+5}dx$

Варіант – 7

$\int \sqrt{4x-15}dx$, $\int \frac{7}{(25x^2+36)}dx$, $\int (4x+4)\sin(7x+5)dx$, $\int \sqrt{x^2-4}dx$, $\int 4\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$,

$\int \frac{5x+1}{81x^2+25}dx$, $\int 1/2\frac{\arcsin(4x+5)}{\sqrt{-4x^2-10x-6}}dx$, $\int e^{-10x^2+x-8}(-20x+1)dx$, $\int 2x\sqrt{4x^2-1}dx$

$\int (-10x^2+x-8)\ln(x+3)dx$, $\int \cos(x+1)e^{4x-10}dx$, $\int \frac{35x^2-144x+83}{7x^2-25x+12}dx$

Варіант – 8

$\int 3\sin(4x+18)dx$, $\int \sqrt{3x+8}dx$, $\int (8x-3)\sin(x-2)dx$, $\int \sqrt{x^2-9}dx$, $\int 10\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$,

$\int \frac{-5x-2}{-5x^2+18x+8}dx$, $\int \frac{\arcsin(4x-4)}{\sqrt{-15-16x^2+32x}}dx$, $\int e^{-10x^2-2x-1}(-20x-2)dx$,

$\int (\sin(3x+1))^4 \cos(3x+1)dx$, $\int \frac{5+\sin(x)}{-2+\cos(x)}dx$, $\int (-10x^2-2x-1)\ln(x-1)dx$,

$\int \cos(x-2)e^{-2x-1}dx$

Варіант – 9

$\int e^{-2x+2}dx$, $\int (x-4)\cos(x-2)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$, $\int 4\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int \frac{x-4}{49x^2+1}dx$, $\int \frac{2x-1}{-3x^2+10x-7}dx$,

$\int e^{4x^2-4x+5}(8x-4)\,dx$, $\int (\sin(10x-5))^4\cos(10x-5)\,dx$, $\int \frac{7}{(-4+\sin(x))}dx$,

$\int (4x^2-4x+5)\ln(x-3)\,dx$, $\int \cos(x-2)e^{-4x+1}dx$, $\int \frac{-40x^2-2x+11}{20x^2-20x+5}dx$

Варіант – 10

$\int \frac{11}{(-5x+19)}dx$, $\int (4x-2)\cos(5x-5)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-25}\,dx$, $\int 6\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$, $\int (\sin(4x-2))^3\,dx$,

$\int \frac{4x-2}{-x^2+10x-25}dx$, $\int e^{3x^2-3x+5}(6x-3)\,dx$, $\int (\sin(x-5))^5\cos(x-5)\,dx$, $\int \frac{3+\sin(x)}{8+5\cos(x)}dx$,

$\int (3x^2-3x+5)\ln(x-1)\,dx$, $\int \cos(x-1)e^{-5x+1}dx$, $\int \frac{-4x^2-3x+25}{4x^2-22x+10}dx$

Варіант – 11

$\int \sqrt{2x+18}\,dx$, $\int (7x-4)\cos(2x-2)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$, $\int \frac{2}{(9x^2-1)}dx$, $\int \frac{5x-4}{-x^2+14x-45}dx$,

$\int e^{5x^2-3x+2}(10x-3)\,dx$, $\int (\sin(3x-3))^3\cos(3x-3)\,dx$, $\int \frac{4}{(-3+\sin(x))}dx$, $\int \cos(x-2)e^{-3x+5}dx$,

$\int \frac{-45x^2+49x-8}{15x^2-27x+12}dx$

Варіант – 12

$\int 2\sin(3x-6)\,dx$, $\int \sqrt{4x+18}\,dx$, $\int \frac{1}{(5x-9)}dx$, $\int (8x+2)\cos(10x+5)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$,

$\int \frac{9x+2}{16x^2+25}dx$, $\int \frac{-10x+3}{x^2-2x-24}dx$, $\int \frac{3}{(4+\sin(x))}dx$, $\int \frac{2+\sin(x)}{-3+4\cos(x)}dx$, $\int (1-\sin(10x-3))^2\,dx$

$\int \cos(x+2)e^{2x-10}dx$, $\int \frac{270x^2-297x+74}{90x^2-77x+15}dx$

Варіант – 13

$\int \sin(3x-13)\,dx$, $\int e^{3x-10}dx$, $\int \sqrt{3x-17}dx$, $\int \frac{7dx}{(x+12)}$, $\int (2x+5)\sin(3x+1)\,dx$, $\int \frac{6}{(4x^2-100)}dx$,

$\int \frac{7x+4}{x^2+5x+6}dx$, $\int e^{6x^2+2x+6}(12x+2)\,dx$, $\int \frac{3}{(4+\sin(x))}dx$, $\int (6x^2+2x+6)\ln(x+4)\,dx$,

$\int \cos(x+4)e^{2x+5}dx$, $\int \frac{42x^2+102x+51}{21x^2+33x+12}dx$

Варіант – 14

$\int \sqrt{3x+3}dx$, $\int (8x-1)\cos(7x-2)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-16}dx$, $\int 4\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}dx$, $\int \frac{-4x-3}{-2x^2+4x+16}dx$,

$\int e^{-9x^2-3x-5}(-18x-3)\,dx$, $\int -(\sin(2x+3))^7\cos(2x+3)\,dx$, $\int \frac{3}{(-2+\sin(x))}dx$, $\int \frac{4+\sin(x)}{-3+3\cos(x)}dx$,

$\int \cos(x-5)e^{-5x-7}dx$, $\int \frac{-32x^2-46x-9}{8x^2+18x+9}dx$, $\int \frac{4\sin(x)-2\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}dx$

Варіант – 15

$\int (6x-4)\cos(7x-4)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-9}dx$, $\int 10\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}dx$, $\int \frac{5x-3}{64x^2+1}dx$, $\int (\sin(10x-1))^3 dx$,

$\int \frac{10x-1}{-4x^2+16x-12}dx$, $\int (\sin(x-1))^3\cos(x-1)\,dx$, $\int \frac{8}{(x^2-2x+65)}dx$, $\int \frac{5+\sin(x)}{3+2\cos(x)}dx$,

$\int (x^2-2x+65)\sin(x-3)\,dx$, $\int \cos(x-3)e^{-x+2}dx$, $\int \frac{-10x^2-31x+5}{10x^2-11x+1}dx$

Варіант – 16

$\int e^{-4x-17}dx$, $\int \sqrt{2x-4}dx$, $\int \frac{5}{(-3x-20)}dx$, $\int (6x-2)\sin(9x-4)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-16}dx$, $\int 2\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx$,

$\int \frac{8x-5}{-5x^2+19x-18}dx$, $\int \frac{9}{(-4+\sin(x))}dx$, $\int (-3+\sin(8x-5))^2 dx$, $\int (x^2-5x+4)\ln(x-1)\,dx$,

$\int \cos(x-3)e^{-4x+2}dx$, $\int \frac{-16x^2+33x-13}{8x^2-21x+10}dx$

Варіант – 17

$\int\sqrt{2x+6}dx$, $\int(5x+3)\cos(9x+1)dx$, $\int 2\frac{9}{(4x^2+4)}dx$ $\int\sqrt{x^2-4}dx$, $\int 10\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$,

$\int\frac{-2x+4}{5x^2+4x-12}dx$, $\int -(\sin(10x-4))^7\cos(10x-4)dx$, $\int\left(\frac{7}{(4x^2+4)}\right)dx$, $\int 3\frac{8}{(5+\sin(x))}dx$,,

$\int\frac{4+\sin(x)}{-1+\cos(x)}dx$,, $\int\cos(x+4)e^{4x-7}dx$, $\int\frac{40x^2-154x+68}{20x^2-48x+16}dx$

Варіант – 18

$\int 3\sin(5x+4)dx$, $\int e^{3x-7}dx$, $\int\sqrt{2x-10}dx$, $\int(10x+4)\sin(10x+5)dx$, $\int\sqrt{x^2-25}dx$,

$\int -(\sin(3x-1))^3dx$, $\int\frac{-3x+1}{3x^2+9x-30}dx$, $\int e^{-3x^2+x-4}(-6x+1)dx$, $\int\left(\frac{4}{x^2+6x+13}\right)dx$,

$\int\frac{5}{(5+\sin(x))}dx$, $\int\cos(x+2)e^{2x-5}dx$, $\int\frac{24x^2-79x+37}{6x^2-14x+4}dx$

Варіант – 19

$\int\sqrt{4x-17}dx$, $\int(9x+2)\sin(5x+3)dx$, $\int\sqrt{x^2-9}dx$, $\int 1/4\frac{x+3}{16x^2+25}dx$, $\int\frac{-3x+4}{x^2-4x-12}dx$,

$\int e^{-5x^2+3x-5}(-10x+3)dx$, $\int\left(\frac{9}{2+\sin(x)}\right)dx$, $\int 5\left(\frac{3}{2+\sin(x)}\right)dx$, $\int(1-\sin(3x-4))^2dx$,

$\int\cos(x+2)e^{x-2}dx$, $\int\frac{81x^2-147x+42}{27x^2-42x+8}dx$, $\int\frac{8\sin(x)+5\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}dx$

Варіант – 20

$\int 4\sin(3x-13)dx$, $\int e^{-3x+12}dx$, $\int\sqrt{5x-1}dx$, $\int(6x-1)\sin(9x-2)dx$, $\int\sqrt{x^2-4}dx$, $\int\frac{3}{(4x^2-25)}dx$,

$\int 1/25\frac{x-1}{x^2+1}dx$, $\int\frac{8x-1}{-2x^2+17x-35}dx$, $\int\frac{\arccos(4x-4)}{\sqrt{-15-16x^2+32x}}dx$, $\int(\sin(3x-3))^3\cos(3x-3)dx$,

$\int\frac{4}{(-3+\sin(x))}dx$, $\int\cos(x-5)e^{-5x+6}dx$, $\int\frac{-120x^2+118x-5}{24x^2-27x+3}dx$

Варіант – 21

$\int 4\sin(4x-3)\,dx$, $\int \sqrt{3x+1}dx$, $\int (7x-3)\cos(2x-5)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-4}dx$, $\int \left(\sin(4x-2)\right)^3 dx$,

$\int \frac{4x-2}{-2x^2+14x-20}dx$, $\int \frac{\arcsin(4x-4)}{\sqrt{-15-16x^2+32x}}dx$, $\int \left(\sin(5x-5)\right)^5 \cos(5x-5)\,dx$,

$\int \left(\frac{7}{x^2-12x+40}\right)dx$, $\int \frac{6}{(-1+\sin(x))}dx$, $\int \cos(x-2)\,\mathrm{e}^{-2x+8}dx$, $\int \frac{-60x^2+54x-2}{20x^2-30x+10}dx$

Варіант – 22

$\int \mathrm{e}^{3x-4}dx$, $\int (9x+2)\cos(8x+3)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-25}dx$, $\int \frac{10xdx}{\sqrt{x^2-16}}$, $\int \frac{\arcsin(4x+2)}{\sqrt{-3-16x^2-16x}}dx$,

$\int \mathrm{e}^{-8x^2+3x-1}(-16x+3)\,dx$, $\int \left(\sin(9x-1)\right)^4 \cos(9x-1)\,dx$, $\int \frac{11}{(x^2+8x+41)}dx$, $\int \frac{7dx}{2+\sin(x)}$,

$\int \frac{2+\sin(x)}{-10+4\cos(x)}dx$, $\int \left(-8x^2+3x-1\right)\ln(x+4)\,dx$, $\int \frac{405x^2-126x+9}{81x^2-18x+1}dx$

Варіант – 23

$\int \left(6x^2+4x+4\right)dx$, $\int \mathrm{e}^{3x+5}dx$, $\int (9x+3)\sin(2x+5)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-1}dx$, $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}}$, $\int 1/9\frac{5x+4}{x^2+9}dx$,

$\int \left(\sin(5x+4)\right)^3 dx$, $\int \frac{5x+4}{2x^2+17x+35}dx$, $\int \mathrm{e}^{8x^2+x+4}(16x+1)\,dx$, $\int \frac{4}{1+\sin(x)}dx$, $\int \cos(x+1)\,\mathrm{e}^{x+3}dx$,

$\int \frac{60x^2+158x+96}{15x^2+32x+16}dx$

Варіант – 24

$\int 4\sin(x-13)\,dx$, $\int \mathrm{e}^{3x+4}dx$, $\int \sqrt{3x-19}dx$, $\int (3x+5)\sin(2x+1)\,dx$, $\int \sqrt{x^2-9}dx$, $\int \frac{7x+5}{16x^2+81}dx$,

$\int \left(\sin(6x+5)\right)^3 dx$, $\int \frac{6x+5}{3x^2+4x+1}dx$, $\int \mathrm{e}^{5x^2+x+8}(10x+1)\,dx$, $\int \left(\frac{12}{x^2-12x+72}\right)dx$,

$\int \cos(x+3)\,\mathrm{e}^{3x+3}dx$, $\int \frac{72x^2+132x+57}{36x^2+54x+20}dx$

Варіант – 25

$\int 3\sin(2x+14)\,dx$, $\int e^{3x-1}dx$, $\int\sqrt{4x-15}\,dx$, $\int(5x+5)\sin(3x+1)\,dx$, $\int\sqrt{x^2-25}\,dx$, $\int 4\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$,

$\int\frac{x+3}{9x^2+100}dx$,, $\int\frac{-6x+1}{x^2-5x-6}dx$, $\int e^{-6x^2+x-8}(-12x+1)\,dx$, $\int\frac{1}{(2+\sin(x))}dx$, $\int\cos(x+1)e^{5x-8}dx$,

$\int\frac{18x^2-90x+26}{6x^2-25x+4}dx$

Варіант – 26

$\int(3x+5)\cos(x+4)\,dx$, $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$, $\int\left(\frac{21}{x^2-25}\right)dx$, $\int\frac{8x\,dx}{\sqrt{x^2-16}}$, $\int(\sin(4x+3))^3\,dx$

$\int\frac{4x+3}{3x^2+15x+12}dx$, $\int e^{6x^2+x+9}(12x+1)\,dx$, $\int(\sin(x+5))^7\cos(x+5)\,dx$, $\int\frac{2+\sin(x)}{8+4\cos(x)}dx$,

$\int(6x^2+x+9)\ln(x+3)\,dx$, $\int\cos(x+2)e^{3x+4}dx$, $\int\frac{16x^2+98x+73}{4x^2+23x+15}dx$

Варіант – 27

$\int 3\sin(3x+11)\,dx$, $\int(10x+3)\cos(2x+5)\,dx$, $\int\sqrt{x^2-25}\,dx$, $\int\frac{6x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $\int(\sin(3x-5))^3\,dx$,

$\int\frac{-3x+5}{4x^2+16x-20}dx$, $\int e^{-6x^2+4x-10}(-12x+4)\,dx$, $\int\frac{dx}{5+\sin(x)}$, $\int(-6x^2+4x-10)\ln(x+4)\,dx$,

$\int\cos(x+2)e^{2x-4}dx$, $\int\frac{30x^2-100x+66}{15x^2-37x+20}dx$

Варіант – 28

$\int\sin(3x+14)\,dx$, $\int e^{4x+16}dx$, $\int\sqrt{2x+3}\,dx$, $\int(9x+4)\sin(8x+3)\,dx$, $\int\frac{-8x+2}{4x^2+11x-3}dx$,

$\int e^{-5x^2+2x-9}(-10x+2)\,dx$, $\int\left(\frac{11}{x^2+14x+130}\right)dx$, $\int\frac{14}{(7+\sin(x))}dx$,

$\int(x^2+14x+130)\sin(4x+5)\,dx$, $\int(-5x^2+2x-9)\ln(x+5)\,dx$, $\int\cos(x+2)e^{2x-8}dx$,

$\int\frac{224x^2-260x+64}{56x^2-54x+10}dx$

Варіант – 29

$\int e^{x-12}dx$, $\int\sqrt{x-19}dx$, $\int(5x+3)\cos(6x+5)\,dx$, $\int\sqrt{x^2-9}dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$, $\int\frac{3x+3}{5x^2+17x+14}dx$,

$\int e^{5x^2+5x+8}(10x+5)\,dx$, $\int(\sin(4x+2))^3\cos(4x+2)\,dx$, $\int\frac{3+\sin(x)}{10+5\cos(x)}dx$,

$\int(5x^2+5x+8)\ln(x+3)\,dx$, $\int\cos(x+4)e^{4x+10}dx$, $\int\frac{24x^2+51x+21}{12x^2+18x+6}dx$

Варіант – 30

$\int e^{-4x+7}dx$, $\int\sqrt{5x+2}dx$, $\int(4x-3)\cos(2x-4)\,dx$, $\int\sqrt{x^2-4}dx$, $\int\frac{x-1}{16x^2+81}dx$,

$\int-(\sin(7x+2))^3\,dx$, $\int\frac{-7x-2}{-2x^2-4x+6}dx$, $\int\frac{6}{(x^2+4x+13)}dx$, $\int 2\left(\frac{8}{-4+\sin(x)}\right)dx$,

$\int(x^2+4x+13)\sin(x-1)\,dx$, $\int\cos(x-4)e^{-5x-2}dx$, $\int\frac{-14x^2+6x+5}{7x^2+9x+2}dx$

ОСНОВНІ ПІДКАЗКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Формули подвійного кута

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x} \qquad ctg 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin 2x \qquad tg^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Універсальна тригонометрична підстановка

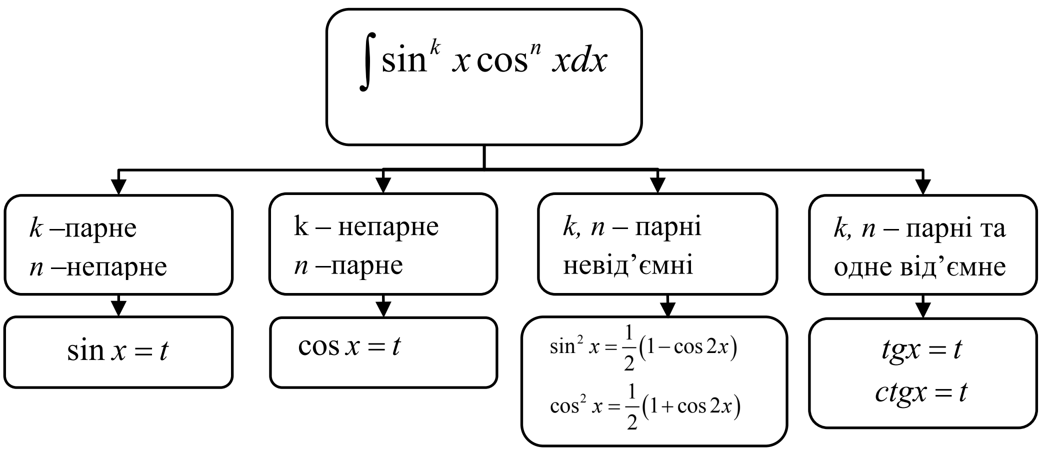
$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left| \begin{matrix} t = tg\,\dfrac{x}{2} & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right|$$

Інтегрування частинами

Рекомендації щодо вибору u і dv

Вид інтегралу	u	dv
$\int P_n(x) \left\{ \begin{matrix} e^{ax} \\ \sin \beta x \\ \cos \beta x \\ a^{kx} \end{matrix} \right\} dx$	$P_n(x)$	$dv = \left\{ \begin{matrix} e^{ax} \\ \sin \beta x \\ \cos \beta x \\ a^{kx} \end{matrix} \right\} dx$
$\int P_n(x) \left\{ \begin{matrix} \arcsin x \\ \arccos x \\ \mathrm{arctg}\ x \\ \mathrm{arcctg}\ x \\ \ln x \\ \log_a x \end{matrix} \right\} dx$	$\arcsin x$ $\arccos x$ $\mathrm{arctg}\ x$ $\mathrm{arcctg}\ x$ $\ln x$ $\log_a x$	$dv = P_n(x)\,dx$
$\int e^{\propto x} \left\{ \begin{matrix} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{matrix} \right\} dx$	*Після двократного застосування формули інтегрування частинами у правій частині отримаємо вираз, що містить початковий інтеграл, його знаходимо як розв'язок лінійного алгебраїчного рівняння*	
$\int \left\{ \begin{matrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{matrix} \right\} dx$	$u = \left\{ \begin{matrix} \sin(lnx) \\ \cos(\ln x) \end{matrix} \right\}$	$dv = dx$

Схема інтегрування тригонометричних виразів виду



Таблиця похідних

Похідні елементарних функцій	Похідні складених функцій
$C'=0, \quad x'=1$	
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$(ctgx)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)'=\dfrac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\mathrm{arctg}\ x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$	$(\mathrm{arctg}\ u)'=\dfrac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(\mathrm{arcctg}\ x)'=-\dfrac{1}{x^2+1}$	$(\mathrm{arcctg}\ x)'=-\dfrac{1}{u^2+1}\cdot u'$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Наука, 2002. – 464 с.

2. Вища математика. Збірник задач: у 2 ч. / За ред. П. П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2004. – Ч. 1. – 279 с.; 2004. – Ч. 2. – 376 с.

3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах у 3-х томах / Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. – К. : Знання, 2012.

4. Дереч В. Д. Інтегральне числення. Невизначений інтеграл / В. Д. Дереч, Н. Ю. Фурдіяк. – Вінниця : ВДТУ, 2002. – 104 с.

5. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.

6. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі / Дюженкова Л. І. , Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. – К. : Академія, 2003. – 624 с.

7. Овчинников П. П. Вища математика : підручник у 2-х частинах / Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. − 3-е вид. – К. : Техніка, 2008. – Ч. 1. 600 с.; Ч. 2 – 792 с.

8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2-х т. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – Т. 1. – 416 с.; 2003. – Т. 2. – 529 с.

9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Фихтенгольц Г. М. – М. : Физмалит, 2003. – Т. 1 – 680 с.; 2006. – Т. 2 – 864 с.; 2005. – Т. 3 – 728 с.

10. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч. 1. / Шкіль М. І. – К : Вища школа, 2005. – 447 с.

Електронне навчальне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Коломієць Альона Анатоліївна
Крупський Ярослав Володимирович
Тютюнник Оксана Іванівна
Коцюбівська Катерина Іванівна

Вища математика: невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання

Практикум

Рукопис оформлено *А. Коломієць*

Редактор *О. Ткачук*

Оригінал-макет підготовлено *Г. Багдасар'ян*

Підписано до видання 10.06.2021 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2021-010.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.