Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.А. Петрук, О.П. Прозор, І.А. Клєопа

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Вінниця
2020

УДК 51(075)
ББК 22.я73
П31

Рецензенти:

Ю.І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор

Р.С. Гуревич, доктор педагогічних наук, професор

І.М. Козловська, доктор педагогічних наук, старший науковий співробітник

Петрук В.А.

Вища математика з прикладними задачами. Ч.2 / В.А. Петрук, О.П. Прозор, І.А. Клєопа. – Вінниця, 2020. – 132 с.

В навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем вищої математики: невизначений та визначений інтеграли, комплексні числа, диференціальні рівняння, ряди. Розглянуто розв’язування прикладів по кожній темі та запропоновано 30 варіантів завдань для самостійного розв’язання, подано варіанти прикладних задач для інтерактивних занять.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ всіх форм навчання.

УДК 51(075)

ББК 22.я73

Вступ……………………………………………………………………………4
1. Невизначений інтеграл…………………………………………….. 5
1.1. Властивості невизначеного інтеграла……………………………………5
1.2. Таблиця невизначених інтегралів ………………………………..….6
1.3. Методи інтегрування ………………………………………………………7
1.4. Тести для самоперевірки…………………………………………………14
2. Визначений інтеграл……………………………………………...16
2.1. Поняття визначеного інтегралу………………………… ……16
2.2. Теореми про визначений інтеграл………………………………………18
2.3. Методи обчислювання визначеного інтеграла…………………………20
2.4. Наближені обчислення визначених інтегралів…………………...........24
2.5. Геометричні застосування визначеного інтеграла…………………….. 25
2.6. Невласні інтеграли………………………………………………………. 32
3. Комплексні числа……………………………. ……………… 35
4. Диференціальні рівняння……………………………………… 37
4.1. Означення диференціального рівняння та його властивості………… 37
4.2. Методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку. 40
4.3. Диференціальні рівняння другого порядку……………………………..44
4.4. Диференціальні рівняння вищих порядків…………………………….. 53
4.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь……………………….. 56
5. Ряди……………………………………………………………………… 57
5.1. Числові ряди…………………………………………………........ 57
5.2. Степеневі ряди………………………………………………………… 63
5.3. Ряди Фур’є………………………………………………………………. 68
6. Завдання для самостійного розв’язування………………………….. 77
6.1. Невизначений інтеграл…………………………………………….. 77
6.2. Визначений інтеграл ……………………………………………81
6.3. Диференціальні рівняння…………………………………………………99
6.4. Ряди…………………………………………………………………………118
Література …………………………………………………………… 132

ВСТУП

Даний навчальний посібник містить в собі теоретичний матеріал з тем вищої математики: «Невизначений та визначений інтеграли», «комплексні числа», «Диференціальні рівняння», «Ряди», які вивчаються студентами технічних вищих навчальних закладів на першому курсі навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати курсом лекцій. Більшість висвітлених теорем супроводжуються графічною інтерпретацією. Наведено конкретні приклади.

Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для самостійної роботи студентів з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає забезпечити усіх різними варіантами, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або згенерувати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 4, 1, 4,3; Петров – 30, 8, 1, 6, 25, 4, 11 і т.д.

Навчальний посібник можна використовувати для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, типових розрахунків студентами денної форми навчання та при виконанні контрольних робіт студентами заочної форми навчання.

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Первісна та невизначений інтеграл

Означення 1. *Функція* $F(x)$ *називається* **первісною** *для даної функції* $f(x)$ *на* проміжку (a,b)*, якщо* $F'(x) = f(x)$ *для будь-яких* $x \in (a;b)$.

Теорема 1. *Якщо* $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ *– дві первісні для функції* $f(x)$ *на проміжку* (a,b)*, то їх різниця дорівнює сталому числу.*

Доведення.

Нехай $f(x)$ *існує на проміжку* (a,b)*, та* $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ *її первісні. За означенням 1 маємо* $F_1'(x) = f(x)$ *та* $F_2'(x) = f(x) \Rightarrow F_1'(x) = F_2'(x)$.

За наслідком з теореми Лагранжа, маємо $F_1(x) - F_2(x) = c$*, де* $c = const$*, тобто,* $tg\alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$*. Теорему доведено.*

Наслідок. Якщо $F(x)$ первісна для деякої функції $f(x)$, то будь-яка інша первісна для $f(x)$ має вигляд $F(x)+C$.

Означення 2. **Невизначеним інтегралом від функції** $f(x)$ *називається сукупність всіх первісних для функції* $f(x)$ *і позначається символом* $\int f(x)dx = F(x) + C$*, де* $f(x)$ *– підінтегральна функція,* $f(x)dx$ *– підінтегральний вираз,* $\int$ *– знак інтеграла.*

Інтегруванням *називається операція знаходження первісної для даної функції* $f(x)$*. Крива* $F(x)$ *називається* **інтегральною кривою**.

2.2 Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

4. $\int d(f(x)) = f(x) + C$

5. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, *де* $a \in R,\ a \neq 0$

6. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Знаки d *і* $\int$ *слідуючи один за одним в будь-якій послідовності взаємознищуються.*

Доведемо 5-ту властивість*:*

Нехай $F(x)$ *– первісна* $f(x)$.

За означенням 2 маємо: $a\int f(x)dx = a(F(x)+C) = aF(x)+C_1,\ C_1 = aC$.

Тоді $aF(x)$ *є первісною для функції* $af(x)$. *Дійсно, за означенням 1:*

$$\left(aF\left(x\right)\right)' = a'F(x) + aF'(x) = aF'(x) = af(x).$$

2.3 Таблиця невизначених інтегралів

Нехай x – незалежна змінна, функція $f(x)$ *неперервна на даному інтервалі і* $F(x)$ *– її первісна.*

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x)+C \qquad (6.1)$$

Нехай $u=\varphi(x)$, *де* $\varphi(x)$ *неперервна і диференційовна, а* $\varphi'(x)$ *неперервна. Розглянемо* $\int f(u)du = \int f(u)u'dx$. *(6.2)*

В даному випадку складена функція $F(u)=F(\varphi(x))$ *є первісною для підінтегральної функції (6.2). Тоді знайдемо*

$$d\left[F(u)\right] = F'(u)du = f(u)du$$

$$\frac{d\left[F(u)\right]}{dx} = \frac{d\left[F(u)\right]}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u'.$$

Це означає $\int f(u)du = F(u)+C$, *(6.3)*

де $F'(u) = f(u)$.

Тобто, мають місце (6.1) і (6.3).

Зауваження. *Деякі перетворення диференціалів* $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$ *:*

1. $d(x) = d(x+b)$, *де* $b = const$.   *2.* $dx = \frac{1}{a}d(ax),\quad a\neq 0$.

3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b),\quad a\neq 0.$ *4.* $xdx = \frac{1}{2}d(x^2).$

5. $\sin xdx = -d(\cos x).$ *6.* $\cos xdx = d(\sin x).$

Таблиця інтегралів

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$
4. $\int e^{u} du = e^{u} + C$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$
7. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
8. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$
12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$
13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg \frac{u}{2}\right| + C$
14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
15. $\int shudu = chu + C$
16. $\int chudu = shu + C$
17. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$
18. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$

1.4 Методи інтегрування

Внесення під знак диференціала

Нехай потрібно знайти інтеграл від функції $\int f(\varphi)\varphi'(x)dx$. *За означенням диференціала:* $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x)) \Rightarrow \int f(\varphi)d(\varphi(x))$.

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $\int e^{6x}dx$.

Розв'язання.

$$\int e^{6x}dx = \left\{ \begin{matrix} d(6x) = 6dx \\ dx = \frac{d(6x)}{6} \end{matrix} \right\} = \int \frac{e^{6x}}{6} d(6x) == \frac{1}{6}\int e^{6x} d(6x) = \frac{1}{6} e^{6x} + C.$$

Приклад 2. *Обчислити інтеграл* $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{l} d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ u = \arcsin x,\ du = d(\arcsin x) \end{array} \right\} = \int \arcsin^2 x d(\arcsin x) = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C =$$

$$= \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

Інтегрування за частинами $u \cdot v = u'v + uv'$

Доведення.

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$$

$$\int d(uv) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

$$u \cdot v = \int v du + \int u dv$$

$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$ – *інтегрування за частинами.*

Приклад 3. *Обчислити інтеграл* $\int arctg 5x dx$.

Розв’язання.

$$\int arctg5xdx = \left\{ \begin{array}{l} u = arctg5x, \quad du = \dfrac{5}{1+25x^2}dx \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \cdot arctg5x - \int \frac{5x}{1+25x^2}dx =$$

$$= \left\{ d(25x^2+1) = 50xdx \right\} = x \cdot arctg5x - \int \frac{1}{10}\frac{10 \cdot 5x}{1+25x^2}dx = x \cdot arctg5x - \frac{1}{10}\int \frac{50x}{1+25x^2}dx =$$

$$= x \cdot arctg5x - \frac{1}{10}\int \frac{d(1+25x^2)}{1+25x^2} = x \cdot arctg5x - \frac{1}{10}\ln\left|1+25x^2\right| + C.$$

Інтеграл від функції, що містить повний квадрат

$$\grave{a}\tilde{o}^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

Розглянемо інтеграл $I = \int \dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$ *(6.4)*

Він зводиться до інтеграла (6.1), шляхом виділення в чисельнику похідної від знаменника:

$$\left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b$$

Приклад 4. *Обчислити інтеграл* $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx$.

Розв’язання.

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx = \left\{ \begin{aligned} & d(x^2-2x+5)=(2x-2)dx, \\ & x+3=\frac{1}{2}(2x-2)+1+3=\frac{1}{2}(2x-2)+4, \\ & x^2-2x+5=(x^2-2x+1)-1+5=(x-1)^2+4 \end{aligned} \right\} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+5}+$$

$$+\int \frac{4dx}{x^2-2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-2x+5\right)}{x^2-2x+5}+4\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+$$

$$+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+2arctg\frac{x-1}{2}+C.$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо правильний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Нехай для визначеності $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^m$, *(6.5)*

де квадратичний тричлен немає дійсних коренів.

Теорема. *Правильний раціональний дріб* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *де* $Q(x)$ *має вигляд (6.5) можна єдиним способом розкласти на суму найпростіших дробів:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+...+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x-N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}. \qquad (6.6)$$

Коефіцієнти A_i, B_i, M_i, N_i *– в рівності (6.6) можна визначити наступним чином. Рівність (6.6) – це тотожність, тому, звівши дроби (6.6) до спільного знаменника, отримаємо тотожні многочлени в чисельниках зліва та справа. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x, *або надаючи* x *значення, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів. Це є* **метод невизначених коефіцієнтів**.

Приклад 5. *Обчислити інтеграл* $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Розв’язання.

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+Cx(x-2)^2+D(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}$$

$$x^2-5x+9=A(x-2)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+Cx(x-2)^2+D(x-2)^2$$

$$x=2:\quad 3=10B\quad B=\frac{3}{10}$$

$$\begin{array}{ll} x^3: & A+C=0 \\ x^2: & B-4C+D=1 \\ x: & -2A+2B+4C=-5 \end{array}\qquad \begin{cases} A+C=0, \\ B-4C+D=1, \\ -2A+2B+4C=-5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C, \\ \frac{3}{10}-4C+D=1, \\ -2(-C)+2\cdot\frac{3}{10}+4C=-5. \end{cases}\qquad \begin{cases} A=-C, \\ -4C+D=\frac{7}{10}, \\ C=-\frac{14}{15}. \end{cases}\qquad \begin{cases} A=\frac{14}{15}, \\ D=-\frac{91}{30}, \\ C=-\frac{14}{15}. \end{cases}$$

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}dx=\frac{14}{15}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{3}{10}\int\frac{dx}{(x-2)^2}-\frac{1}{30}\int\frac{28x+91}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} d(x^2+2x+2)=(2x+2)dx, \\ 28x+91=14(2x+2)+63, \\ x^2+2x+2=(x+1)^2+1 \end{array}\right\}=\frac{14}{15}\ln|x-2|-\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{30}\int\frac{14(2x+2)+63}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\frac{14}{15}\ln|x-2|-\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{14}{30}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}-\frac{63}{30}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\frac{14}{15}\ln|x-2|-\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{x-2}-$$

$$-\frac{14}{30}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\frac{63}{30}\cdot arctg(x+1)+C.$$

Зауваження. *Всі неправильні дроби перетворюються у правильні діленням многочлена на многочлен, тобто виділяючи цілу частину.*

Приклад 6. *Виділити цілу частину* $\frac{x^2-2x+3}{x+2}$.

$$\begin{array}{l|l}
x^2-2x+3 & x+2 \\ \hline
\underline{x^2+2x} & x-4 \\
\quad -4x+3 & \\
\quad \underline{-4x-8} & \\
\qquad 11 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-2x+3}{x+2}=x-4+\frac{11}{x+2}.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

1. $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$, $a \neq 0 \to t=\sqrt[n]{ax+b}$, $t^n=ax+b$.

2. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad \to \quad t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^m$.

3. $\int R(x\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, *де* ax^2+bx+c *не має дійсних коренів.*

Якщо $D<0$, $a>0$ $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$ *– перша підстановка Ейлера.*

Якщо $D>0$, *то* $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \to t=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$ *– друга підстановка Ейлера.*

Інтегрування тригонометричних функцій

1. $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, *де* n *– цілі, додатні:*

а) n *– парне:* $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$;

б) n *– непарне:* $\sin x$ *або* $\cos x$ *внести під знак диференціала і використати тригонометричні формули.*

Приклад 7. *Обчислити інтеграл* $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

Розв’язання.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx=\int(\sin x \cdot \cos x)^2 dx=\int \frac{1}{4}\sin^2 2x dx=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\int dx-$$

$$-\frac{1}{8}\int \cos 4x dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Приклад 8. *Обчислити інтеграл* $\int \cos^3 x dx.$

Розв'язання.

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cdot \cos xdx = \{\cos xdx = d(\sin x)\} = \int (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

2. $\sin^m x \cos^n x dx$

а) m, n *(хоча б одне непарне) – виділити один множник і, замінюючи змінну на* t*, отримаємо табличні інтеграли.*

$$\int \sin^2 x \cos^3 xdx \quad \Rightarrow \sin x = t, \quad \cos xdx = dt.$$

б) m, n *(парні додатні) – понизити степінь за тригонометричними формулами.*

3. $\int tg^n xdx \quad \int ctg^n xdx \to t = tgx$

Приклад 9. *Обчислити інтеграл* $\int tg^4 xdx.$

Розв'язання.

$$\int tg^4 xdx = \left\{\begin{matrix} t = tgx \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^3}{3} - t + arctgt + C =$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} - tgx + arctg(tgx) + C = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C.$$

4. $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$; $\qquad \sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a+b\right)x + \sin(a-b)x\right).$

$\int \sin ax \cdot \sin bxdx$; $\qquad \sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right).$

$\int \cos ax \cdot \cos bxdx$; $\qquad \cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a+b\right)x + \cos\left(a-b\right)x\right).$

5. $\int R(\sin x, \cos x)dx \to$ *універсальна тригонометрична підстановка:*

$$t = tg\frac{x}{2}; \qquad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад 10. *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left\{ \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{3+t^2} = \int \frac{2dt}{t^2+3} = 2\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\,\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\,\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних

1. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx \;\rightarrow\; x = a\sin t$ *або* $x = a\cos t$.

2. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx \;\rightarrow\; x = atgt, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$.

3. $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx \;\rightarrow\; x = a\sec t = \frac{a}{\cos t}$.

Зауваження 1. $\int P(x)e^{ax}dx \;\rightarrow$ *Інтегрування за частинами.*

Для $\int R(e^x)dx \quad \rightarrow \quad t = e^x, \quad dt = e^x dx.$

Приклад 11. *Обчислити інтеграл* $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2} = \int \frac{e^{2x}\cdot e^x dx}{e^x+2} = \int \frac{e^{2x}d(e^x)}{e^x+2} = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t, \\ d(e^x) = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2dt}{t+2} = \int \left(t-2+\frac{4}{t-2} \right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln|t-2| + C = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln|e^x-2| + C.$$

Зауваження 2. *Існують інтеграли, які не розв'язуються за жодним з вказаних методів. Вони знаходяться лише за приблизними правилами.*

Наприклад, $\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$ *тощо.*

1.4.Тести для самоперевірки

1. Вказати метод інтегрування $\int \frac{dx}{x^3 + x^2}$.

а) табличний;
б) за частинами;
в) метод невизначених коефіцієнтів;
г) метод підстановки.

2. Вказати метод інтегрування $\int x^2 (x^2 + 1) dx$.

а) табличний;
б) за частинами;
в) метод невизначених коефіцієнтів;
г) метод підстановки.

3. Вказати метод інтегрування $\int x \cos x dx$.

а) табличний;
б) за частинами;
в) метод невизначених коефіцієнтів;
г) метод підстановки.

4. Вказати метод інтегрування $\int arcctgx dx$.

а) табличний;
б) за частинами;
в) метод невизначених коефіцієнтів;
г) метод підстановки.

5. Вказати метод інтегрування $\int \frac{3x + 2}{x(x+1)} dx$.

а) табличний;
б) за частинами;
в) метод невизначених коефіцієнтів;
г) метод підстановки.

6. Вказати метод інтегрування $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

а) внесення під знак диференціалу;
б) за частинами;
в) метод невизначених коефіцієнтів;

г) метод підстановки.

7. Вказати тип підстановки для інтегралу $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

а) $x = 3tgt$;

б) $x = 3\sin t$;

в) $x = \cos t$;

г) $x = \dfrac{3}{\cos t}$.

8. Знайти невизначений інтеграл $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$.

а) $e^{\sin^2 x} + C$;

б) $(\sin 2x)e^{\sin^2 x} + C$;

в) $(\cos 2x)e^{\sin^2 x} + C$;

г) $e^{\cos^2 x} + C$.

9. Знайти невизначений інтеграл $\int arctg 5x dx$.

а) $5x - \dfrac{1}{10}\ln\left|1+x^2\right| + C$;

б) $xarctg5x - \dfrac{1}{10}\ln\left|1+25x^2\right| + C$;

в) $xarctgx - \dfrac{1}{10}\ln\left|1+x^2\right| + C$;

г) $xarctg5x - \ln\left|1+25x^2\right| + C$.

10. Знайти невизначений інтеграл $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

а) $\dfrac{x}{2} + \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$;

б) $x + \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$;

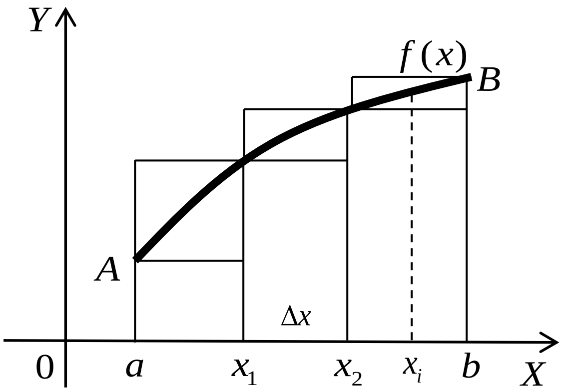
в) $\dfrac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$;

г) $x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$.

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Поняття визначеного інтегралу

Нехай f(x)=y неперервна на $x \in [a,b]$.



aABb – криволінійна трапеція. Відшукаємо її площу.

Для цього $[a;b]$ розіб'ємо точками на n рівних частин. Точки m_i і M_i – є *min* і *max f(x)* – інтервалу $[x_i, x_{i+1}]$, *aABb* – розіб'ється на *n* частин, площа *i*-ої менша або дорівнює $M_i(x_{i+1} - x_i)$.

Нехай $S_n = \sum_{i=1}^{n} m_{i\Delta} x_i, S_n' = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i \Rightarrow S_n \le S_{aABb} \le S_n'$, т.ч. S_n і S_n' прямують до S_{aABb}, коли $n \to \infty$.

Означення 1. Нехай $f(x), x \in [a,b]$ - неперервна невід'ємна функція, а границя послідовностей S_n і S_n' існують і рівні, їх значення називається площиною криволінійної трапеції.

Таким чином, нехай $c_i \in (x_{i+1}, x_i)$ тоді $m_i \le f(c_i) \le M_i$ домножимо цю нерівність на Δx_i та знайдемо суму всіх значень від 1 до n

$$S_n \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \le S_n', \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_{aABb}.$$

Означення 2. Нехай $f(x)$ визначена в будь-якому $x \in [a,b]$. Якщо $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ існує і не залежить від вибору точки c_i, то $f(x)$ називають інтегрованою на $[a;b]$, а границю часткових сум називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на $[a;b]$ і позначають $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$.

Властивості:

1. Для будь-якого числа α: $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a)$.

2. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, то $\forall\alpha$ функція $\alpha f(x)$ також інтегрована на $[a;b]$: $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a;b]$:

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

4. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a;b]$ і $f(x) \le g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

5. Для інтегрованої функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ виконується:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

6. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$,то вона інтегрована на будь-якому проміжку $[a;b]$, крім того, якщо $f(x)$ інтегрована на $[a;c]$ і $[c;b]$, то вона інтегрована на проміжку $[a;b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $a < c < b$, оскільки границя інтегрованої суми не залежить від способу ділення відрізка $[a;b]$, то будемо ділити його таким чином, щоб точка C була точкою ділення, наприклад: $C = X_m$, тоді інтегральна сума розіб'ється на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

переходячи до границі, коли $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

отримаємо $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Якщо a,b,c розташовані іншим чином, наприклад $a<b<c,$ властивість зберігається, дійсно:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Якщо інтегрована на $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *задовольняє нерівності* $m \le f(x) \le M$, *де* $m,M = const,$ *відповідно* min *та* max $f(x)$ *на* $[a,b]$, *то*

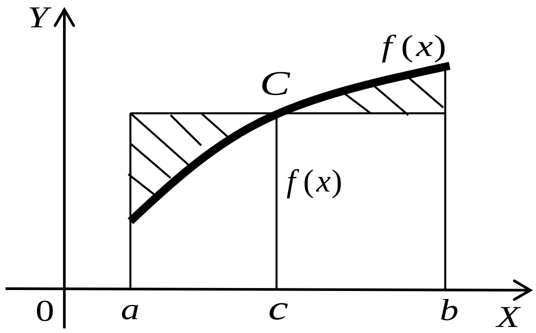
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. Якщо $f(x)$ *інтегрована на* $[a,b]$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \ (a \le b).$$

2.2. Теореми про визначений інтеграл

Теорема про середнє



Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то на $[a,b]$ існує така точка С, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad (1)$$

Доведення. Можливі три випадки для $[a,b]$:

1) $a=b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(a-a)=0;$

2) $a<b;$

Візьмемо на проміжку $[a,b]$ $\min = m$ та $\max = M$ значення функції $f(x)$, тоді з властивості 7 пункту 1.1.

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

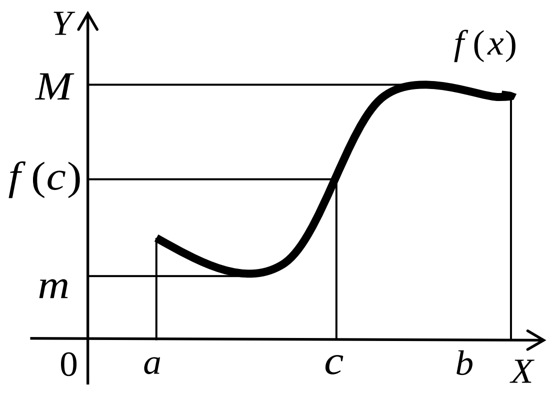
розділимо його на $(b-a)$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і приймає будь-яке значення на $[m;M]$, то існує така точка $c \in [a;b]$, що

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

3) $a > b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -f(c)(a-b) = f(c)(b-a).$



Зауваження. Теорема про середнє має геометричний зміст: величина визначеного інтеграла при $f(x) \ge 0$ дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b-a$.

Теорема про визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

Теорема. Похідна інтеграла від неперервної функції зі змінною верхнею межею існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, яка дорівнює верхній границі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Доведення. Із заданої функції та властивості (6)

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^x f(t)dt, \forall x, x_0 \in [a;b].$$

Тоді за теоремою про середнє:

$\Phi(x)-\Phi(x_0)=f(c)(x-x_0)$ *де* $c\in[x_0;x]$, *коли* $x_0<x$ *і* $c\in[x_0;x]$, *якщо* $x<x_0$.

Отже, $\forall x\neq x_0$ *знайдеться така* $c\in[x_0;x]$, *що*

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(c)\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(c).$$

$\Phi'(x_0)=f(x_0)$ - що і потрібно було довести.

Теорема (формула) Ньютона–Лейбніца

Теорема. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, а функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на $[a;b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Доведення. Відповідно до теореми 1.2.2: $\Phi(x)=\int_a^x f(u)du$ - є первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. Оскільки і $F(x)$ є первісна для $f(x)$ на $[a;b]$, то $\Phi(x)-F(x)$ рівна деякій постійній C на всьому проміжку $[a;b]$, тобто $\Phi(x)=F(x)+C$, надаючи x значення a, а потім b маємо

$$\begin{cases}\Phi(a)=F(a)+C, \text{ оскільки } \Phi(a)=\int_a^a f(u)du=0,\\ \Phi(b)=F(b)+C.\end{cases}$$

$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx,$ то $C=-F(a)\Rightarrow \hat{O}(b)=F(b)-F(a).$

Теорему доведено.

2.3. Методи обчислювання визначеного інтеграла

2.3.1. Метод заміни змінної інтегрування

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна в $\forall$ точці $x=\varphi(t)$, де $t\in[\alpha;\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, тоді, якщо $\varphi(t)$ має неперервну похідну, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)\right)dt$$

Доведення. За формулою Ньютона-Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$,

де $F(x)$ - первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. З іншого боку, розглянемо складену функцію $\Phi(t)=F(\varphi(t))$, згідно з правилом диференціювання складеної функції $\Phi'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ звідси випливає, що $\Phi(t)$ є первісною для $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, яка неперервна на $[\alpha;\beta]$, тоді згідно з формулою Ньютоно-Лейбніца:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F\left(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\right)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 1:

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\left|\begin{matrix} t=2x \\ dx=\frac{1}{2}dt \\ t_1=0, t_2=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2};$$

$$2)\int_1^2 x\sin x^2dx=\left|\begin{matrix} u=x^2 \\ du=2xdx \\ u_1=1; u_2=4\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_1^4\sin udu=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_1^4=-\frac{1}{2}(\cos 4-\cos 1);$$

$$3)\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{matrix} u=1+x^2 \\ du=2xdx \\ u_1=2; u_2=1+3=4\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}\Big|_1^4=2-1=1;$$

4) $\int\limits_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x dx = \left| \begin{array}{c} u=\cos x \\ du=-\sin x dx \\ u_1=\cos 0=1 \\ u_2=\cos\pi=-1 \end{array} \right| = -\int\limits_1^{-1} e^u du = -e^u\Big|_1^{-1} = -e^{-1}+e = e-\frac{1}{e}.$

2.3.2. Метод інтегрування частинами

Теорема. Нехай функції $U(x)$ і $V(x)$ мають неперервні похідні на $[a;b]$. Тоді справедлива формула $\int\limits_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b V(x)U'(x)dx$

або $\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU.$

Доведення. Використаємо відому формулу похідної добутку

$(UV)' = U'V + UV'$ проінтегруємо її $\int\limits_a^b (UV)'dx = \int\limits_a^b UV'dx + \int\limits_a^b U'Vdx$

$$\int\limits_a^b (UV)'dx = UV\Big|_a^b = \int\limits_a^b UV'dx + \int\limits_a^b U'Vdx \Rightarrow \int\limits_a^b UV'dx = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU.$$

Приклад 2: $\int\limits_1^e \ln x dx; \int\limits_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

Розв’язання:

1)

$$\int\limits_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u=\ln x; \quad du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx; \quad v=x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{xdx}{x} = e\ln e - 1\cdot\ln 1 - x\Big|_1^e = e-0-e+1=1;$$

2) $\int\limits_0^{\pi} x^2\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u=x^2; \quad du=2xdx \\ dv=\cos x dx; \quad v=\sin x \end{array} \right| = x^2\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} 2x\sin x dx =$

$$= \pi^2\sin\pi - 0 - 2\left| \begin{array}{c} u=x; \quad du=dx \\ dv=\sin x dx; \quad v=-\cos x \end{array} \right| = 2x\cos x\Big|_0^{\pi} - 2\int\limits_0^{\pi}\cos x dx =$$

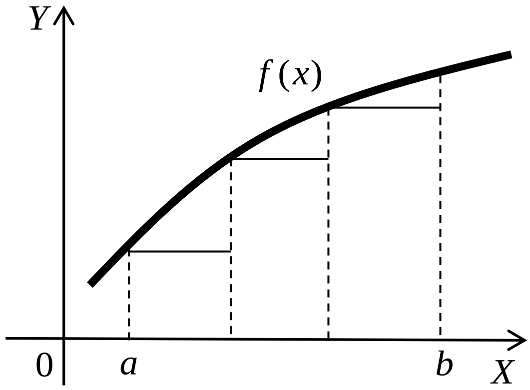
$= 2\pi\cos\pi - 0 - 2\sin x\Big|_0^{\pi} = -2\pi.$

Зауваження. Всі методи обчислення невизначеного інтегралу діють для визначеного інтегралу (метод невизначених коефіцієнтів, метод підстановок t^n, тригонометричних і т.д.).

2.4. Наближені обчислення визначених інтегралів

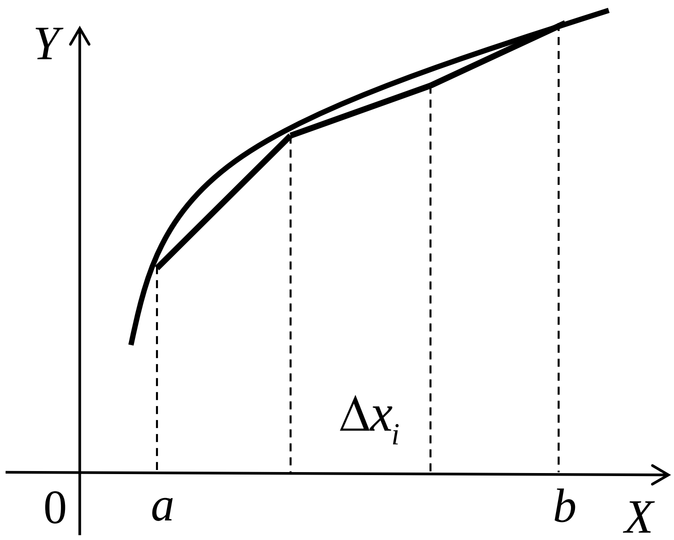
2.4.1. Формула прямокутника

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}+x_i)}{2},$$ $n-$ кількість інтервалів Δx_i.



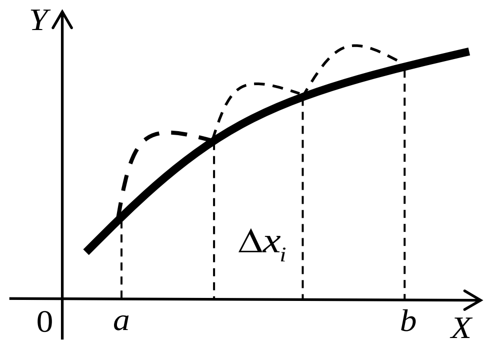
2.4.2. Формула трапеції

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i \right) \right],$$ де n кількість інтервалів Δx_i.



2.4.3. Формула параболи (Сімпсона)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f_{2n-1}(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2n}(x_i) \right],$$ де n кількість інтервалів Δx_i.



Приклад 3. Обчислити $\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx$ безпосередньо та за формулами прямокутника, трапеції та параболи. Оцінити похибку.

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{1/2} d(6x-5) = \frac{1}{6}(6x-5)^{3/2}\Big|_1^9 = 38.$$

Розіб'ємо інтервал $[1;9]$ на 8 частин, з кроком $h=1$.

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
y	*1,0000*	*2,6458*	*3,6056*	*4,3589*	*5,0000*	*5,5678*	*6,0828*	*6,5574*	*7,0000*

Формула прямокутника

$$\int_a^b Ydx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i,\; Y_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2};$$

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx \approx \frac{9-1}{8}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i = 34,8183.$$

Абсолютна похибка $\Delta = |38 - 34,8183| = 3,1817$, відносна похибка $\delta = \frac{\Delta}{38}\cdot 100\%, \delta = \frac{3,1817\cdot 100\%}{38} = 8,37\%.$

Формула трапеції

$$I = \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} i) \right] = 4 + \sum_{i=1}^{7} Y_i = 37,8183.$$

Абсолютна похибка $\Delta = |38 - 37,8183| = 0,1817,$ відносна похибка $\delta = \frac{0,1817 \cdot 100\%}{38} = 0,48\%.$

Формула Сімпсона

$$I = \frac{b-a}{3n} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f_{2n-1}(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2n}(x_i) \right] = 37,9655.$$

Абсолютна похибка $\Delta = |38 - 37,9655| = 0,0345,$ відносна похибка $\delta = \frac{0,0345 \cdot 100\%}{38} = 0,09\%.$

Отже, меншу похибку дав метод Сімпсона.

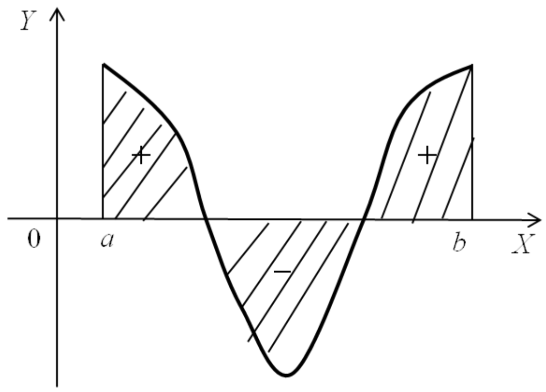
2.5. Геометричні застосування визначеного інтеграла

2.5.1. Площа в прямокутних координатах

На основі геометричного змісту визначеного інтегралу площа криволінійної трапеції *aABb,* обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x),\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;b],$ вертикаллю $x = a$ та $x = b$ і віссю OX :

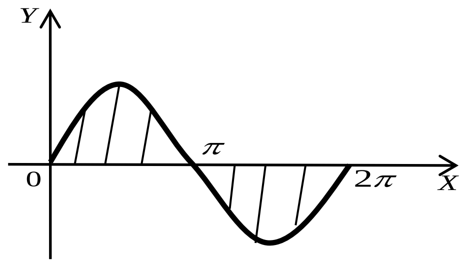
$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Якщо $f(x) \leq 0, \forall x \in [a;b],$ то $S = -\int_a^b f(x)dx.$



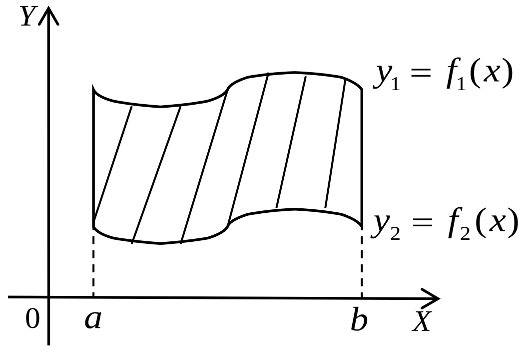
Якщо $f(x)$ змінює знак скінченне число разів на проміжку $[a;b],$ то інтеграл на $[a;b]$розбиваємо на суми інтегралів за частинними відрізками. Щоб отримати площу потрібно знайти суму абсолютних величин інтегралів за всіма відрізками.

Приклад 4. Обчислити площу обмежену синусоїдою $y = \sin x$ і віссю OX, $x \in [0; 2\pi]$.



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left|\sin x\right| dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \left|\cos x\right|\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

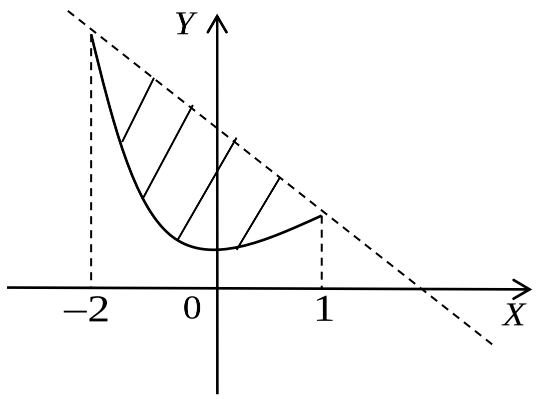
$$= -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = 4\ (од^2).$$



Зауваження. В більш складних випадках фігуру зображують у вигляді суми або різниці криволінійних трапецій. $\boxed{S = \int_a^b (y_1 - y_2)dx.}$

Приклад 5. Визначити площу S обмежену параболою $y = x^2 + 1$ та прямою $x + y = 3$.

Визначимо межі інтегрування $\begin{cases} y_1 = x^2 + 1 \\ y_2 = 3 - x \end{cases}$; $x_1 = -2,\ x_2 = 1.$



$$S = \int_{-2}^{1} (y_2 - y_1)dx;$$

$$S = \int_{-2}^{1} ((3 + x) - (x^2 + 1))dx = 4{,}5\ (\text{î ä}^2).$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметрично $x = x(t); y = y(t), t \in [t_1; t_2]$, то

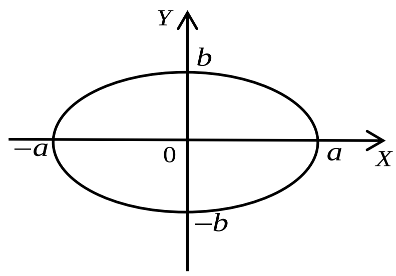
$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt. \text{ Отже, } \boxed{S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt.}$$

Приклад 6. Обчислити площу обмежену еліпсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t.$

Визначимо межі інтегрування

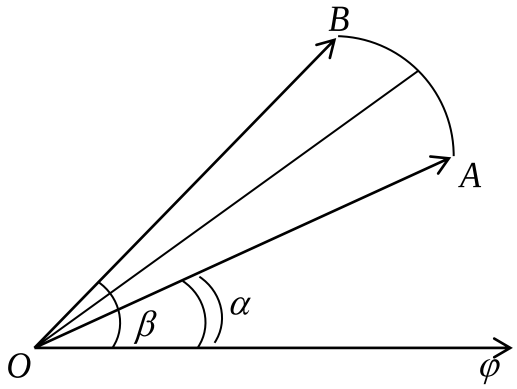
$x_1=-a,$ то $\cos t_1=-1;\ t_1=\pi$

$x_2=a,$ то $\cos t_2=1;\ \ t_2=0$



$$S=2\left(\int_\pi^0 b\sin t\cdot a\sin t dt\right)=$$

$$=2ab\int_\pi^0 \sin^2 t dt=\pi ab.$$



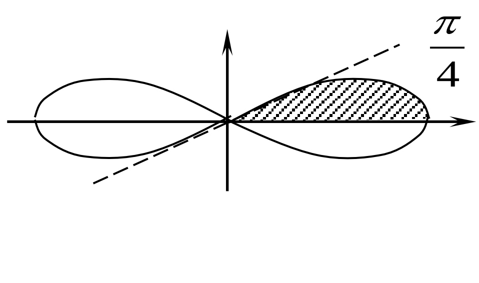
Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою заданою в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi),$ де $\varphi\in[\alpha;\beta],$ то її площу визначимо як площу сектора, обмеженого кривою $\rho=\rho(\varphi)$ та радіус-векторами $\varphi_1=\alpha,\ \varphi_2=\beta.$

Розіб'ємо дану площу радіус-векторами на n частин, позначимо через $\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2,...,\Delta\varphi_n$ кути між проведеними радіус-векторами. $\overline{\rho_i}-$ довжина радіус-вектора, що відповідає будь-якому куту φ_i, що знаходяться між φ_{i-1} та φ_i. Площа кругового сектора з радіусом ρ_i та центральним кутом $\Delta\varphi_i$ буде дорівнювати:

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}\overline{\rho_i^2}\Delta\varphi_i, \text{ тоді } \Delta S_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \rho_i^2\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left[\rho(\varphi_i)\right]^2\Delta\varphi_i;$$

при $n\to\infty$ *маємо* $S=\lim\limits_{n\to 1} S_n=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi.$ *Отже,* $\boxed{S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi.}$

***Приклад** 7. Обчислити площу обмежену лінією* $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi};\ \cos 2\varphi\geq 0.$



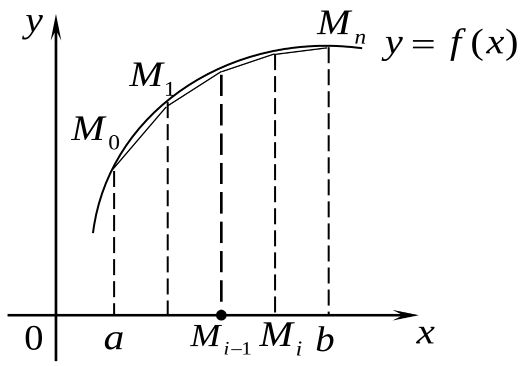
φ	$-\dfrac{\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$
ρ	0	1	0

$$\frac{\pi}{2} \geq 2\varphi \geq -\frac{\pi}{2};\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right].$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 1.$$

2.5.2. Довжина дуги кривої

Означення. Під довжиною дуги розуміють границю до якої прямує довжина ламаної, вписаної в цю дугу, коли число частин ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої частини прямує до нуля.



Нехай $y = f(x)$ рівняння кривої на $[a;b]$. Розіб'ємо криву точками M_i на n частин, маємо $M_0M_1...M_n$ – ламану.

Довжина $M_{i-1}M_i$ буде дорівнювати: $|M_{i-1}M_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ (теорема Піфагора).

За теоремою Лагранжа $\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f\,'(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f\,'(x_i)\Delta x.$

Тобто $|M_{i-1}M_i| = \sqrt{\Delta x + \Delta x_i^2 f\,'^2(x_i)} = \sqrt{1 + f\,'^2(x_i)}\Delta x_i.$

Отже, $M_0M_1...M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f\,'^2(x_i)}dx;$ при $n \to \infty$

$$L = \lim_{n \to 1} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f\,'^2(x_i)}\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + f\,'^2(x_i)}dx.$$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx} \text{ або, якщо } dl = \sqrt{1 + y'^2}dx, l = \int_a^b dl.$$

Приклад 8. Обчислити довжину кола $x^2+y^2=r^2$.

$$y=\sqrt{r^2-x^2};\;\; y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$L=4\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=4\int_0^r\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x}dx=4\int_0^r\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=4r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=2\pi r.$$

Якщо дуга кривої задана параметрично $x=x(t),\; y=y(t), t\in[t_1;t_2]$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}x'(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt; l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}dt.$$

Зауваження. Якщо крива в просторі $x=x(t), y=y(t), z=z(t),$ то

$$\boxed{L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}dt.}$$

Приклад 9. Обчислити довжину дуги $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t.$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 tdt}=4\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt=6a.$$

Межі інтегрування знайдемо надаючи параметру t значення:

t	0	$\pi/3$	$\pi/2$
x	a	$0,35a$	0
z	0	$0,35a$	a

Зауваження. Якщо крива задана в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi).$

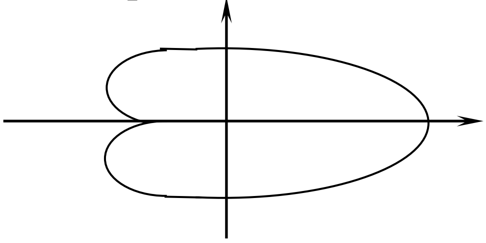
Запишемо формули переходу $y=\rho\sin\varphi, x=\rho\cos\varphi;$

$$\frac{dx}{d\varphi}=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi;\;\frac{dy}{d\varphi}=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi;$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2=\rho'^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi-2\rho'^2\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho'^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi+$$
$$+2\rho'^2\rho\cos\varphi\sin\varphi=\rho'^2+\rho^2.$$

Тоді $\boxed{L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi.}$

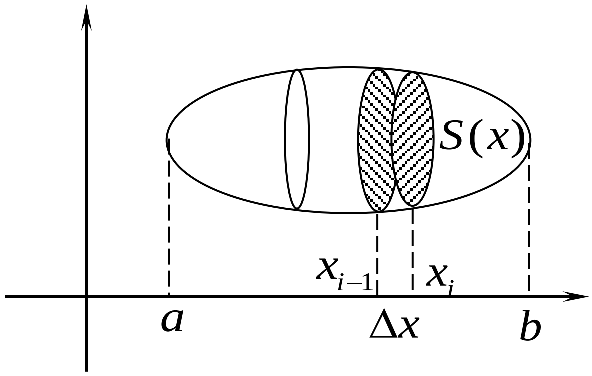
Приклад 10. Обчислити довжину кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.



φ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π
ρ	$2a$	$1{,}5a$	a	0

$$L=2\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\cdot\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a.$$

2.5.3 Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перерізів



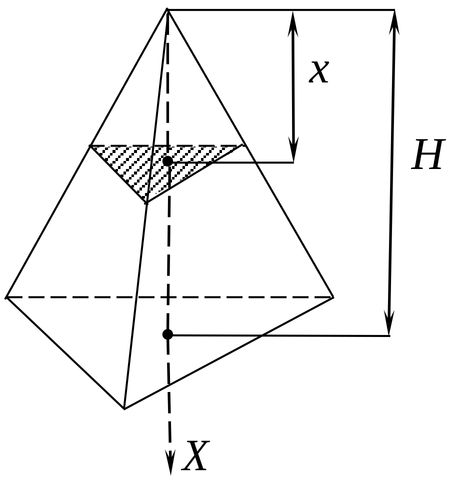
Нехай задано тіло T, та відомо площу будь-якого перерізу цього тіла площиною, перпендикулярною до осі OX. Ця площина залежить від положення січної площини і являється функцією від $x: S=S(x)$.

Необхідно визначити об'єм тіла T, якщо $S(x)$ - неперервна функція.

Спроектуємо тіло на вісь OX, отримаємо $[a;b]$, який дає лінійний розмір тіла в напрямку OX. Розділимо $[a;b]$ точками x_i на n частин і через них проведемо площини, перпендикулярні OX. Тіло розіб'ється на суму циліндрів, об'єми яких

$$V_1=S(x_i)\Delta x_i\Rightarrow V=\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x_i;\; V=\lim_{n\to 1}\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x_i,\; \boxed{V=\int\limits_a^b S(x)dx.}$$

Приклад 11. Знайти об'єм піраміди з площею основи S_0 та висотою H.



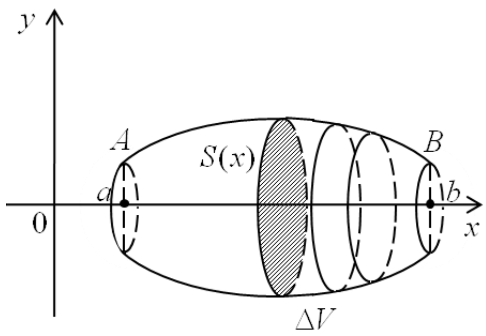
Розв'язання. Нехай $S(x)-$ площа перерізу. Площі перерізу та основи відносяться як квадрати їх відстаней до вершини.

$$\frac{S}{S_0}=\frac{x^2}{H^2};\ S=\frac{S_0x^2}{H^2};$$

$$V=\int_0^H\frac{S_0x^2}{H^2}dx=\frac{S_0}{H^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{3}S_0H.$$

2.5.4. Об'єм тіла обертання

Обчислити об'єм тіла V_x утвореного обертанням навколо осі OX криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої $y=f(x),\ a\le x\le b,$ віссю OX та прямими $x=a,\ x=b.$

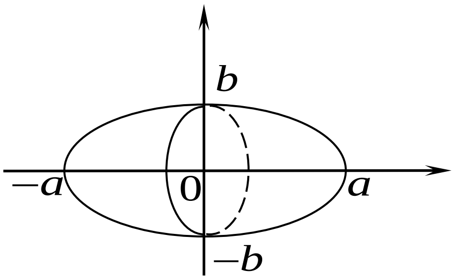


$S(x)=\pi y^2$ - площа кола в розрізі.

$V=\int_a^b \pi y^2dx=\pi\int_a^b y^2dx.$ Аналогічно об'єм тіла обертання навколо осі $OY: V=\pi\int_a^b x^2dy,$

отже $V_{OX}=\pi\int_a^b y^2dx,$ $\boxed{V_{OY}=\pi\int_a^b x^2dy;\ V_{OX}=\pi\int_a^b y^2dx.}$

Приклад 12. Визначити об’єм тіла $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

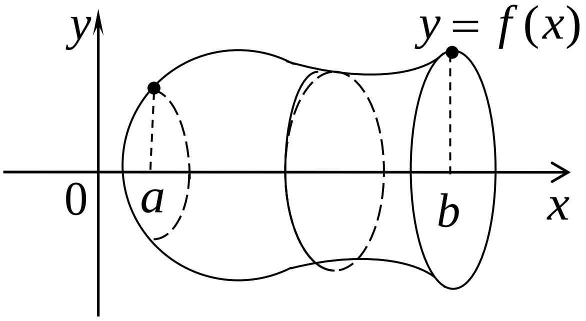


$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

$$V_x=2\int_0^a \pi y^2dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi b^2\left(a-\frac{1}{3}a\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi b^2a.$$

2.5.5. Поверхня тіла обертання



$y=f(x)$ обертається навколо осі OX на $[a;b]$:

$$\boxed{S_n=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+y'^2}dx.}$$

Якщо крива задана параметрично: $\boxed{S_n=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt.}$

2.6. Невласні інтеграли

2.6.1 Інтеграли з скінченними межами

При означенні інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ припускалось, що

1) відрізок $[a;b]$ скінченний;

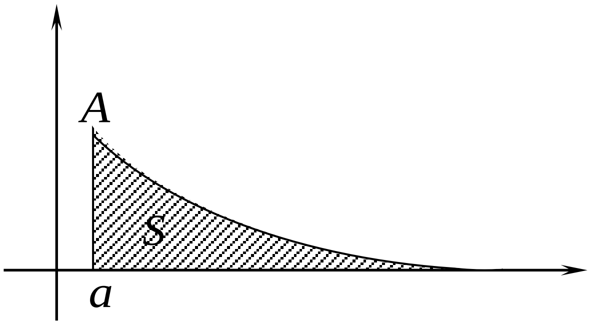
2) підінтегральна функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a;b]$.

Такий визначений інтеграл називається власним. Якщо хоча б одна з умов порушується, інтеграл називається невласним.

$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx;\ \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx;\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx;\ \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \to f(x)$ - має розрив другого роду в точці $x \in [a;b]$.

Означення. Якщо границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ - існує, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ називається збіжним, в іншому випадку – розбіжним.

Геометрично:



$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = S,$ або $S = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Приклад 13.

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\int\limits_{0}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} arctgx\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}.$$

2.6.2. Ознаки збіжності невласних інтегралів.

Теорема 1. Якщо для будь-якого $x(x \geq a)$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ і $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ - також збіжний, $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx \leq \int\limits_{a}^{\infty}\varphi(x)dx.$

Теорема 2. Якщо для будь-якого $x(x \geq a)$ виконується нерівність $0 \geq f(x) \geq \varphi(x)$ і $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ - розбіжний, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ - також розбіжний.

Теорема 3. Якщо $\int\limits_{a}^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ - збіжний, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ - є абсолютно збіжний.

Приклад 14. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$; $\frac{dx}{x^2(1+e^x)}<\frac{1}{x^2}$; $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=1$ - отже, інтеграл – збіжний. Робимо висновок про збіжність інтегралу $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$; $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}>\frac{x}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, то $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^{b}=\infty$. Можна зробити висновок, що обидва інтеграли розбіжні.

3. Комплексні числа

3.1 Поняття комплексного числа

Означення 1. **Комплексним числом** z *називається вираз* $z = a + bi$, *4.5)*

де a *та* b *дійсні числа,* $i = \sqrt{-1}$ *уявна одиниця.*

$a = \operatorname{Re} z$ *– дійсна частина,* $b = \operatorname{Im} z$ *– уявна частина.*

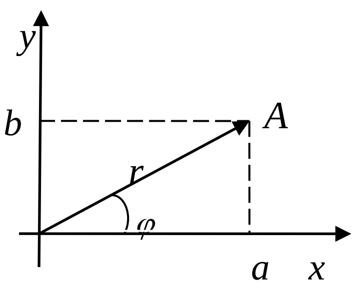
Всі дійсні числа є частиною множини комплексних чисел.

Означення 2. *Два комплексних числа* $z = a + bi$ *та* $\overline{z} = a - bi$, *які відрізняються тільки знаком уявної частини називаються* **спряженими**.

Означення 3. *Два комплексних числа* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *та* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *вважаються* **рівними** $z_1 = z_2$, *якщо* $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3.2 Геометричне зображення комплексного числа

Будь-яке комплексне число $z = a + bi$ *зображується на площині* xOy *точкою* $A(a;b)$. *Площина, на якій зображуються комплексні числа називається* **площиною комплексної змінної** . *Ox* – **дійсна вісь**, *Oy* – **уявна вісь**.



Позначимо через φ *та* r *полярні координати т.* $A(a;b)$, *вважаючи початок координат полюсом, а додатній напрям осі Ox – полярною віссю (рис.4.39). Тоді* $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ *– модуль комплексного числа.*

Рисунок 4.39

$\varphi = \arg z$ *– аргумент комплексного числа.*

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi$, *де* $\varphi = \arg z$ *– головний аргумент комплексного числа.*

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & z \in I \text{ і } IV \text{ ÷âåðò ü,} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & z \in II \text{ ÷âåðò ü,} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & z \in III \text{ ÷âåðò ü.} \end{cases}$$

Тригонометрична форма комплексного числа: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *(4.6)*

3.3 Основні дії над комплексними числами

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Властивості дій над комплексними числами

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
4. $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Властивості модуля та аргумента

1. $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_2| \cdot |z_1|$.
3. $Arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = Argz_1 + Argz_2$.
4. $Arg\,\dfrac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = Argz_1 - Argz_2$.
5. $|z^n| = |z|^n$, $Argz^n = nArgz$.

Піднесення до степеня: $z^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$

Добування кореня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots(n-1)$

Показникова форма комплексного числа

Розглянемо функцію $w = e^{\alpha}$ *, тобто* $w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

При $x = 0$ *маємо формулу Ейлера:* $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Показникова форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1. Означення диференціального рівняння та його властивості

4.1.1. Задачі, які призводять до диференціального рівняння

Означення 1. Рівняння, в яких невідомими є функції та їх похідні, називаються диференціальними рівняннями.

Означення 2. Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної шуканої функції.

Нехай з деякої висоти на землю скинуте тіло масою *m.* Потрібно знайти закон зміни швидкості падіння v від часу t, тобто функцію v=v(t). За законом механіки (другий закон Ньютона):

$$m\frac{dv}{dt}=F, \tag{1}$$

в нашому випадку:

$$F=mg-F_{опору}. \tag{2}$$

При аеродинамічній формі і невеликих швидкостях $F_{îïîðó}$ пропорційна швидкості руху тіла:

$$F_{опору}=pv. \tag{3}$$

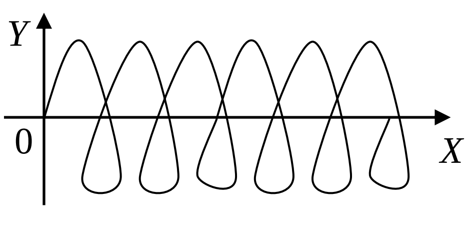
Таким чином:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-pv\to\frac{dv}{dt}=g-\frac{p}{m}v.$$

Якщо зараз знайти v на деякому проміжку $[a;b]$ то отримаємо:

$$\int\limits_a^b dv=\int\limits_a^b(g-\frac{p}{m}v)dt\to v=\int\limits_a^b(g-\frac{p}{m}v)dt \text{ - закон зміни } v(t).$$

Розглянемо прямолінійний коливальний рух вантажу маси m на пружині з жорсткістю k.



Положення вантажу на прямій лінії характеризується його координатою x, яка змінюється з часом $t\to x(t)\Rightarrow x$ - функція.

Початок координат розташуємо в положенні нерозтягненої пружини, довжина якої (L), тоді координата кінця $(-L)$, таким чином координата вантажу x, буде рівна зміні довжини пружини.

Згідно з законом Гука сила розтягу:

$$F = -kx$$

(знак “-” тому, що сила направлена проти напряму розтягу пружини).

Оскільки $v = \frac{dx}{dt}$, то рівняння (1) буде мати вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

4.1.2. Загальний розв’язок диференціального рівняння

Загальний вигляд диференціального рівняння 1-го порядку може бути зображено рівнянням:

$$F(t, x, x') = 0, \qquad (4)$$

де $x = x(t)$ - шукана функція, а $x' = \frac{dx}{dt}$ - її похідна.

Диференціальне рівняння (4) часто має вигляд:

$x' = f(t, x)$ (5)

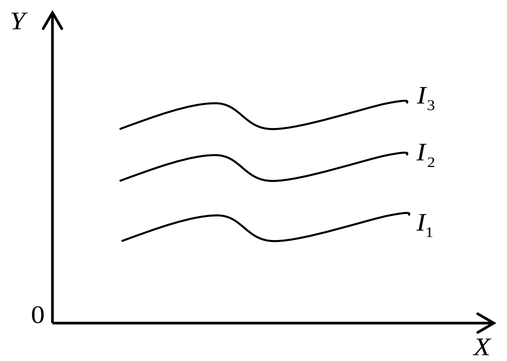
Означення 1. Функція $x = \varphi(t)$, $t \in (a;\ b)$ називається розв’язком диференціального рівняння (5), якщо вона має похідну $\varphi'(t)$ на $(a; b)$, і при будь-якому $t \in (a;b)$ виконується $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Якщо f залежить тільки від t, маємо справу з найпростішим видом диференціального рівняння:

$$x'(t) = f(t).$$

Його розв’язок $x(t) = \int f(t)dt = F(t) + C$ має нескінченну множину розв’язків.

Означення 2. Функція $x = \varphi(t, c),$ яка при кожному фіксованому значенні c є розв'язком рівняння (5), називається загальним розв'язком диференціального рівняння.



Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 5\sin t - \frac{2}{1+t^2}$$

Розв'язування.

$$x = \int (5\sin t - \frac{2}{1+t^2})dt = -5\cos t - 2arctg\, t + c.$$

4.1.3. Початкові умови та задача Коші

На практиці часто доводиться знаходити розв'язок завдань, які мають поряд з диференціальним рівнянням, яке описує деякий процес, додаткові умови

$$x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

які характеризують даний процес в означених конкретних умовах.

Означення. Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння $x'(t) = f(t, x),$ що задовольняє початкові умови (6), називається задачею Коші.

Приклад 2. Знайти розв'язки рівнянь при заданих початкових умовах.

1) $x' = \dfrac{5}{\cos^2 t}; x(0) = 3;$

$x = \int \dfrac{5}{\cos^2 t}dt = 5tgt + C,\ 3 = 5tg0 + C; C = 3,$ таким чином: $x = 5tgt + 3.$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2}{x^3};\ y(1) = 2;$

$$dy = \frac{x-2}{x^3}dx = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx;$$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{2dx}{x^3};\ y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C;\ y(1) = 2 = -\frac{1}{1} + 1 + C;\ C = 2;$$

Таким чином: $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2.$

4.2. Методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку

4.2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку $x'(t) = f(t, x)$, у випадку, коли $f(t, x) = f_1(t) \cdot f_2(x)$, приймає вигляд $x'(t) = f_1(t) \cdot f_2(x)$, називається рівнянням з відокремлюваним змінними.

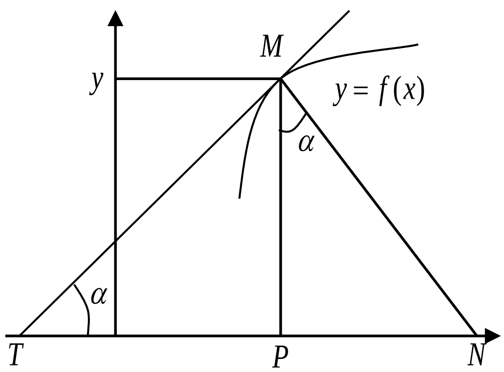
Його розв’язок: $\frac{dx}{dt} = f_1(t) \cdot f_2(x); \int \frac{dx}{f_2(x)} = \int f_1(t)dt.$

Приклад 3.

1) Розв’язати рівняння: $x'(t) = xt^2$.

Розв’язування.

$$\frac{dx}{dt} = xt^2;\ dx = xt^2dt;\ \int \frac{dx}{x} = \int t^2dt;\ ln|x| = \frac{t^3}{3} + C;\ x = e^{\frac{t^3}{3}+C}.$$



2) Знайти криву, яка проходить через точку $Q(-1, 4)$ таку, що піднормаль її в будь-якій точці має одне значення, яке дорівнює 4.

Розв’язування.

Нехай $y = f(x)$ - шукана крива, MT - дотична, до цієї кривої в точці M, MN - нормаль. Піднормаль - PN (проекція відрізка нормалі MN на вісь OX).

$$PM = y \text{ і } \angle NMP = \angle MTP = \alpha,\ PN = ytg\alpha, tg\alpha = y' \Rightarrow PN = y \cdot y'.$$

За умовою $y \cdot y' = 4 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = 4; ydy = 4dx; \frac{y^2}{2} = 4x + C; y^2 = 8x + C;$

$16 = -8 + C; C = 24 \Rightarrow y^2 = 8x + 24$ або $y^2 = 8(x+3)$ - парабола з вершиною в точці $A(-3, 0)$.

3)Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і повітря $(T_{ïîâ} = 20^0)$. Відомо, що протягом 20 хвилин тіло охололо від 100^0 до 60^0. Знайти закон зміни температури тіла від часу.

Розв’язування.

$T(t) - ?$. За умовою задачі:

$\frac{dT}{dt} = K(T - 20^0)$, де K - коефіцієнт пропорційності.

$$\int \frac{dT}{T - 20^0} = \int Kdt; ln\left|T - 20^0\right| = Kt + ln\left|C\right|; \frac{T - 20^0}{C} = e^{kt} \Rightarrow T - 20^0 = Ce^{kt};$$

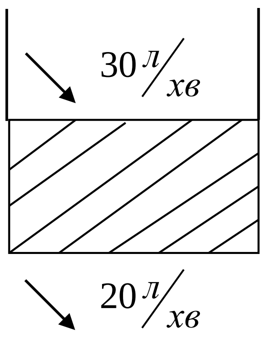
$$T = Ce^{kt} + 20^0;$$

$K =$? ; С= ? ; $K = ?, C = ?; T = 100^0$ коли $y = 0, T = 60^0,$ коли $t = 20$

$$\begin{cases} 100^0 = 20^0 + C \\ 60^0 = 20^0 + Ce^{20K}. \end{cases}$$

$$C = 80^0; e^{20K} = \frac{1}{2}; e^K = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}};$$

Таким чином: $T = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t} + 20.$



4) В резервуар, який містить 10 кг солі на 100 літрів суміші, кожну хвилину додається 30л. води і витікає 20л. суміші. Знайти яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хвилин, якщо суміш миттєво змішується.

Розв’язування.

Нехай x - кількість солі в резервуарі в момент часу t, а $x + dx$ в $t + dt$. Оскільки суміш витікає, то кількість солі x зменшуватиметься з часом $\Rightarrow dx < 0$ при $dt > 0$.

Об’єм суміші в резервуарі: $V = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t.$ Тому концентрація солі в час t буде $\frac{x}{100+10t}$ - зміна кількості солі - dx за нескінченно малий проміжок $\left[t, t+dt\right]$ ми отримаємо, якщо об’єм суміші, що витекла за цей час $20dt,$ помножимо на концентрацію солі:

$$\frac{x}{100+dt}\cdot 20dt = -dx \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{2}{10+t}dt;\ \ln|x| = -2\ln|10+t| + \ln|C|;$$

$$x = \frac{C}{(10+t)^2};\ t = 0; 10 = \frac{C}{100}; C = 1000;\ x = \frac{1000}{(10+t)^2}.$$

(Цей вираз дає можливість знайти час, який пройшов від початку процесу утворення суміші. За цим принципом обчислюється вік морів та океанів).

4.2.2. Однорідні диференціальні рівняння

Означення 1. Многочлен $P(x,y) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}x^i y^j$ називають однорідним степені $n,$ якщо всі члени мають один порядок $n.$ Тобто для кожного такого члена $a_{ij}x^i y^j$ маємо $i + j = n.$

Наприклад: $P\left(x, y\right) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ - многочлен другого степеня.

Означення 2. Функція $P\left(x, y\right),$ називається однорідною степені $n,$ якщо при будь-якому числі n має місце тотожність:

$$P(kx, ky) = k^n P(x, y).$$

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy = 0. \qquad (2)$$

Означення 3. Диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним, якщо коефіцієнти $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідні функції одного степеня.

Однорідні диференціальні рівняння розв’язуються методом підстановки:

$$\frac{y}{x}=z;\ y=xz; y'=x'z+xz'=z+xz'.$$

В загальному випадку рівняння (2) має вигляд $F\left(y',\frac{y}{x}\right)=0.$

Приклад 4. Розв’язати диференціальне рівняння $(x+y)dx+xdy=0.$

Розв’язання.

$P=x+y\Rightarrow Q=x$ - однорідні функції. Поділимо рівняння на $x,$ отримаємо: $\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+dy=0.$ Зробимо підстановку $\frac{y}{x}=z; dy=zdx+xdz;$

$$(1+z)dx+zdx+xdz=0;(1+2z)dx=-xdz;\ \int\frac{dx}{x}=\int\left(-\frac{dz}{1+2z}\right);$$

$$\ln|x|=-\frac{1}{2}\ln|1+2z|+\ln|C|;$$

Отже $\ln|x|=\ln\frac{C}{\sqrt{1+2z}};x=\frac{C}{\sqrt{1+2z}}=\frac{C}{\sqrt{1+2\frac{y}{x}}}.$

4.2.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення 1. Диференціальне рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$ називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Метод розв’язання: $y=U\cdot V; y'=U'V+UV'$ – метод Бернуллі

Приклад 5. Розв’язати рівняння $y'+xy=4x.$

Розв’язання. Зробимо підстановку $y=U\cdot V.$

Отже $U'V+UV'+xUV=4x;\ U'V+U\left(V'+xV\right)=4x;$

а) $V'+xV=0;\ \frac{dV}{dx}+xV=0;\ \frac{dV}{V}=-xdx;\ \ln|V|=-\frac{x^2}{2};\ V=e^{-\frac{x^2}{2}};$

б) $U'V=4x;\ \frac{dU}{dx}=\frac{4x}{e^{-\frac{x^2}{2}}};U=\int 4xe^{\frac{x^2}{2}}dx=4e^{\frac{x^2}{2}}+C;$

$$y = UV = e^{\frac{x^2}{2}}\left(4e^{\frac{x^2}{2}} + C\right) = 4 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$ - загальний розв'язок.

Розв'яжіть рівняння самостійно: $xy' + 2y = x^2$. Відповідь: $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{c}{x^2}$.

Означення 2. Диференціальне рівняння першого порядку $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ - називається диференціальним рівнянням Бернуллі

Метод розв'язання аналогічний $\Rightarrow y = UV$.

4.3. Диференціальні рівняння другого порядку

4.3.1 Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, де $C_1, C_2 - const$. Геометрично це означає, що не достатньо лише точки M, залежної від C_1. Необхідно задати ще і напрямок інтегральної кривої. Цей напрямок задається тангенсом кута нахилу дотичної до кривої в точці M, з додатним напрямком OX, тобто $y'\big|_M = tgx$, таким чином маємо початкові умови:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_0', \tag{2}$$

Розв'язком рівняння (1) за умовами (2) є задача Коші. Такі задачі часто зустрічаються в фізиці. Наприклад головне рівняння динаміки.

Нехай матеріальна точка маси m рухається вздовж OX під дією змінної сили F, a – прискорення цієї точки, тоді:

$$ma = F \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$ – диференціальне рівняння, а

$$x(t_0) = x_0; x'(t_0) = V_0$$ - початкові умови.

Розглянемо три типи рівняння (1):

1. $y'' = f(x)$ метод його розв'язку – послідовне інтегрування:

$$y'=\int f(x)dx+C;\ y'=F(x)+C;\ y=\int F(x)dx+Cx+C_1;\ y=\varphi(x)+Cx+C_1;\ \text{де}$$

$$C, C_1=const.$$

2. $y''=f(y)$. Нехай $y'=P(y)$.

Розглянемо P як функцію від y, тоді $y''=\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=P\frac{dP}{dy}$. Таким чином рівняння має вигляд $P\frac{dP}{dy}=f(y)$ - рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\int PdP=\int f(y)dy;\frac{P^2}{2}=\int f(y)dy+\frac{C_1}{2};\ P=\pm\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}\ \text{і}$$

$$P=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}\Rightarrow\int\frac{dy}{\pm\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}}=\pm(x+C_1).$$

3. $y''=f(x,y)$ аналогічно $y'=P(x), y''=P'(x)$.

Отже:

1) $y''=f(x)$ - послідовне інтегрування.

2) $y''=f(x,y)\Rightarrow y'=P(x), y''=P'(x)$.

3) $y''=f(y)\Rightarrow y'=P(y), y''=P\cdot P'(y)$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння:

$$1.\ y''=\frac{(y')^2}{y}, y'=P(y); y''=P\cdot P'(y); PP'=\frac{P^2}{y}; P\left(P'-\frac{P}{y}\right)=0;$$

а) $P=0;\frac{dy}{dx}=0; dy=0; y=C;$

б) $P'-\frac{P}{y}=0;\frac{dP}{P}=\frac{dy}{y};\ln|P|=\ln|yC_1|; P=yC_1;\ \frac{dy}{dx}=yC_1;\ln|y|=C_1x+C_2$. Отже: $y=e^{C_1x+C_2}$.

2. $xy''=2x-y'$. Зробимо підстановку $y'=P(x), xP'=2x-P;$

$$\frac{dP}{dx}=2-\frac{P}{x};\ \frac{P}{x}=z; P'=z+z'x; z+z'x=2-z; z'x+2z=2;\frac{dz}{dx}x=2-2z;$$

$$\frac{dz}{2-2z}=\frac{dx}{x};\frac{1}{2}\ln|1-z|=\ln|xC|;$$

$$1-z=(xC)^2; z=1-(xC)^2; \frac{P}{x}=1-(xC)^2; P=x-C^2x^3; y'=x-C^2x^3;$$

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{C^2x^4}{4}+C_1;$$

3. $y''=2\sin x$. Послідовно інтегруємо: $\int y'dx=\int 2\sin x dx=-2\cos x+C_1;$

$$y=\int(-2\cos x+C_1)dx=-2\cos x+C_1x+C_2.$$

4.3.2. Лінійні диференціальні однорідні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Означення 1. Рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0,$ (3)

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Означення 2. Функції $y_1=y_1(x),\ \ y_2=y_2(x)$ називається частинними розв'язками рівняння (3) ,що не містять у собі C_1, C_2.

Означення 3. Два розв'язки y_1, y_2 називаються лінійно незалежними, якщо можна підібрати сталі числа a_1, a_2 одночасно не рівні нулю такі, що $a_1y_1+a_2y_2=0,$ якщо ці умови не виконуються y_1, y_2 - лінійно залежні.

Теорема. Якщо y_1, y_2 лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння (3), то загальний розв'язок рівняння є лінійна комбінація цих частинних розв'язків:

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{4}$$

де $C_1, C_2=const.$

Доведення. Дійсно оскільки y_1, y_2- розв'язки (3), то вони задовольняють рівняння

$$\begin{cases} y_1''+py_1'+qy_1=0 \\ y_2''+py_2'+qy_2=0; \end{cases} \tag{5}$$

Підставляючи (4) в ліву частину (5) отримаємо:

$$a_0\left(C_1y_1+C_2y_2\right)''+a_1\left(C_1y_1+C_2y_2\right)'+a_2\left(C_1y_1+C_2y_2\right)''=$$

$$=C_1y_1'' + C_2y_2'' + pC_1y_1' + pC_2y_2' + qC_1y_1 + qC_2y_2 =$$

$=C_1\left[y_1'' + py_1' + qy_1\right] + C_2\left[y_2'' + py_2 + qy_2\right] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ (4) є розв'язком (3)

Зауваження. Якщо y_1, y_2 лінійно залежні,то (4) не може бути загальним $y_2 = ay_1 \Rightarrow y = C_1y_1 + C_2ay_1, y_2 = ay_1$ - загальний розв'язок рівняння (3).

Розглянемо методи розв'язання рівняння (3)

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння(3), коли $y = e^{kx}$, $k - const.$ Тоді:

$$y' = ke^{kx};\ \ y'' = k^2e^{kx};\ \ k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0\ \ \Big| e^{kx}$$

$k^2 + pk + q = 0$ - *характеристичне рівняння.* *(6)*

Випадок 1.

$$D > 0; y_1 = e^{k_1x};\ \ y_2 = e^{k_2x};\ \ y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$$

Випадок 2.

$$D = 0; k_1 = k_2 = -\frac{P}{2}; y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}; y_1 = y_2 \Rightarrow y = (C_1x + C_2)e^{kx}.$$

Випадок 3.

$$D < 0; k_1 = \alpha + \beta \cdot i; k_2 = \alpha - \beta \cdot i; y_1 = e^{(\alpha+\beta\cdot i)x}; y_2 = e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}$$

Тоді $y = C_1e^{(\alpha+\beta\cdot i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}.$

Переходячи до тригонометричної форми:

$$y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + 2\sin\beta x).$$

Отже: $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0;$

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0;$$

1) $D > 0; y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$

2) $D = 0; y = (C_1x + C_2)e^{kx};$

3) $D < 0; y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 5k + 6 = 0;\ \ k_1 = 2,\ k_2 = 3;\quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x};$$

2) $y'' - y = 0;\ k^2 - 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm 1;\ y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x};$

3) $y'' - 6y' + 13y = 0;\ \ k^2 - 6k + 13 = 0;\ \ k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm 2i;$

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$$

4) $y'' - 2y' + y = 0;\ \ k^2 - 2k + 1 = 0;\ k_{1,2} = 1;\ \ y = (C_1 x + C_2)e^{x}.$

4.3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{7}$$

Теорема: Загальний розв'язок рівняння (7) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння (3) і частинного розв'язку рівняння (7).

Доведення. Нехай $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - є загальним розв'язком рівняння (3), а z - частинним розв'язком, що відповідає $f(x)$ рівняння (7).

$$\overline{y}'' + p\overline{y}' + q\overline{y} = z'' + pz' + qz = f(x) \Rightarrow (\overline{y} + z)'' + p(\overline{y} + z)' + q(\overline{y} + z) =$$

$= f(x) \Rightarrow y = \overline{y} + z$ - розв'язок рівняння (7). Теорему доведено.

Випадок 1. $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ - квазімногочлен $m-$го степеня (8)

Теорема. Якщо права частина лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами має вигляд (8) і α не є коренем характеристичного рівняння (3), то $z = e^{\alpha x}M(x)$, де $M(x)$ - деякий многочлен $n-$го степеня; якщо α є коренем характеристичного рівняння кратності k, то: $z = x^k e^{\alpha x}M(x)$.

Приклад 8. Розв'язати $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Розв'язування. $y = \overline{y} + z$ або $y = y_{\div.\hat{\imath}.} + y_{\div.\acute{\imath}.}$, де

$y_{\div.\hat{\imath}.}$ - розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0;$

$y_{\div.\acute{\imath}.}$ - розв'язок, який відповідає правій частині рівняння (7), $y_{\div.\acute{\imath}.} \square f(x);$

1) $y'' - 4y' + 4y = 0;$

$k^2 - 4k + 4 = 0;\ k_{1,2} = 2;\ y_{\text{ч.о.}} = (C_1 x + C_2)e^{2x}.$

2) $y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)e^{2x} \cdot x^2,$ оскільки $k_1 = k_2 = 2 = \alpha;$

$y'_{\text{ч.н.}} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} = e^{2x}(3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2);$

$y''_{\text{ч.н.}} = (6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x} \cdot 2;$

Підставимо в рівняння:

$$(6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2) -$$

$$-(12Ax^2 + 8Bx + 8Ax^3 + 8Bx^2) + 4Ax^3 + 4Bx^2 = x;$$

Порівняємо коефіцієнти при змінній:

$x^3 : 4A + 4A - 8A = 0; 0 = 0$
$x^2 : 12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0; 0 = 0$

$x^1 : 6A + 8B - 8B = 1;\ A = \frac{1}{6}$

$x^0 : 2B = 0;\ B = 0$

Отже: $y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{6}x^3 e^{2x}.$

Загальний розв’язок має вигляд $y = (C_1 x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x},$ або

$$y = \left(C_1 x + C_2 + \frac{x^3}{6} \right) e^{2x}.$$

Випадок 2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x),$ (9)

де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ - многочлени $n-$го степеня.

Теорема. Якщо права частина лінійного рівняння (7) має вигляд (9) і $z = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв’язок: $y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x),$ де $M(x), N(x)$ - многочлени степеня n; якщо $z = \alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності k, то $y_{\text{ч.н.}} = x^k e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x).$

Приклад 9. Розв’язати рівняння: $y'' + 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

Розв’язування.

$y = y_{÷.î.} + y_{÷.í.}$.

1) $y'' + 5y' + 6y = 0;$

$k^2 + 5k + 6 = 0; k_1 = -2; k_2 = -3;$

$y_{÷.î.} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$

2) $y_{÷.í.} = A son 3x + B\cos 3x;$

$y'_{÷.í.} = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x;$

$y''_{÷.í.} = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x;$

Підставимо в рівняння:

$-9A\sin 3x - 9\cos 3x + 15A\cos 3x - 15\sin 3x + 6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 13\sin 3x;$

$\sin 3x : -9A - 15B + 6A = 13;$

$\cos 3x : -9B + 15A + 6B = 0;$

$$\begin{cases} -3A - 15B = 13 \\ -3B + 15A = 0 \end{cases} \begin{cases} 3B = 15A \\ 3A + 15B = -13 \end{cases} \begin{cases} B = 5A \\ 3A + 75A = -13 \end{cases} \begin{cases} B = 5A \\ 78A = -13 \end{cases} \begin{cases} B = -\dfrac{5}{6} \\ A = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Отже, $y'_{÷.í.} = -\dfrac{1}{6}\sin 3x - \dfrac{5}{6}\cos 3x.$

Таким чином, загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{5}{6}\cos 3x.$$

Випадок 3. $f(x) = f_1(x) + f_2(x),$ дивись випадок 1 та 2.

Теорема. Якщо y_1 - частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x),$ а $y_2 \to y'' + py' + qy,$ то $y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$

Приклад 10. Розв'язати рівняння $y'' + 2y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x.$

Розв'язування.

$y'' + 2y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$ буде мати загальний розв'язок у вигляді $y = y_{÷.î.} + y_{÷.í.}$.

1) $y''+2y=0; k^2+2=0;\ k_{1,2}=\pm\sqrt{2i}; \alpha=0; \beta=\sqrt{2};$

$y_{\text{÷.î.}}=e^{0x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x).$

2) $y_{\text{÷.í.}}=A\cos x+B\sin x+(Cx^2+Dx+E)e^x;$

$y'_{\text{÷.í.}}=-A\sin x+B\cos x+(2Cx+D)e^x+(Cx^2+Dx+E)e^x=$

$=-A\sin x+B\cos x+(2Cx+D+Cx^2+Dx+E)e^x;$

$y''_{\text{÷.í.}}=-A\cos x-B\sin x+(2C+2Cx+D)e^x+(2Cx+D+Cx^2+Dx+E)e^x=$

$=-A\cos x-B\sin x+(2C+4Cx+2D+Cx^2+Dx+E)e^x.$

Підставимо в рівняння.

$-A\cos x-B\sin x+(2C+4Cx+2D+Cx^2+Dx+E)e^x+2A\cos x+2B\sin x+$

$+(2Cx^2+2Dx+2E)e^x=4\cos x+(x^2+1)e^x;$

$\cos x: A=4;$

$\sin x: B=0;$

$x^2e^x: C+2C=1; C=\frac{1}{3};$

$xe^x: 4C+D+2D=0; 3D=-4C; D=-\frac{4}{9};$

$e^x: 2C+2D+E+2E=1; E=\frac{11}{27}.$

Отже, $y_{\text{÷.í.}}=4\cos x+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{11}{27}\right)e^x.$ Таким чином, загальний розв’язок рівняння: $y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+4\cos x+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{11}{27}\right)e^x.$

4.3.4. Метод Лагранжа (варіації довільної сталої)

Нехай є рівняння (7). Розв’яжемо однорідне рівняння $y''+py'+qy=0.$ Його розв’язок $y=C_1y_1+C_2y_2;$ припустимо, що $C_1=C_1(x), C_2=C_2(x),$ тоді:

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2, \tag{10}$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0; \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язавши її отримаємо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, тобто знайдемо розв'язок рівняння (7)у вигляді (10).

Приклад 11. Розв'язати рівняння $y'' + y = tg^2 x$.

Розв'язування.

$$y'' + y = 0;\ k^2 + 1 = 0;\ k = \pm i;$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;\ C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x).$$

Тоді $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$

Складемо систему враховуючи, що $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0; \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tg^2 x. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tg^2 x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x tg^2 x;\ \Delta C_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tg^2 x \end{vmatrix} = \cos x tg^2 x;$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta C_1'}{\Delta} = -\sin x tg^2 x;\ C_2'(x) = \frac{\Delta C_2'}{\Delta} = \cos x tg^2 x;$$

$$C_1(x) = \int (-\sin x) tg^2 x dx = -\int \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx =$$

$$= -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \cos x tg^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2.$$

Отже: $y = \left(C_1 - \frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\cos x + \left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2\right)\sin x$ - загальний розв'язок.

4.4. Диференціальні рівняння вищих порядків

Означення 1. Рівняння виду

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

яке має деяку невідому функцію та її похідні $n-$го порядку, включно до першого степеня, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням $n-$го порядку.

Коефіцієнти $P_k(x), k = 0,1,...,n$ і $f(x)$ вважаються неперервними на $(a;b)$. Якщо $f(x) = 0$, то маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння $n-$го порядку.

Означення 2. Лінійною комбінацією функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ називається функція $Y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$, яка утворюється із заданих функцій за допомогою лінійних операцій над ними.

Означення 3. Систему функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ визначених на $(a;b)$, називають лінійно залежною на цьому проміжку, якщо можна підібрати такі числа $C_1, C_2, ..., C_n$, не рівні водночас і такі, при яких виконується рівність:

$C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = 0$ для будь-якого $x \in (a;b)$. (2)

Виконання цієї умови означає, що хоча б одну із заданих функцій можна виразити лінійно через останні, наприклад:

$C_n \neq 0 \Rightarrow y_n = \alpha_1y_1 + ... + \alpha_{n-1}y_{n-1}$, де $\alpha_k = -\dfrac{C_k}{C_n}; (k = \overline{1, n-1})$.

Означення 4. Якщо при $x \in (a;b)$ лінійна комбінація $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = 0$ тільки тоді, коли $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$, то система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ називається лінійно залежною на $(a;b)$.

Наприклад, $\dfrac{y_2}{y_1} = -\dfrac{C_1}{C_2} = k - const, y_2 = ky_1$ - лінійна залежність.

Лінійну залежність або незалежність системи функцій $y_1, y_2, ..., y_n$, n разів диференційованих на проміжку $(a;b)$, можна визначити за допомогою визначника Вронського, або вронськіана:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні на $(a;b)$, то їх визначник Вронського дорівнює нулю на цьому інтервалі.

Доведення. З лінійної залежності y_i випливає, що існують $C_k, k = \overline{1,n}$, не всі рівні нулю, такі, що виконується рівність: $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = 0$. Продиференціюємо її $(n-1)$ раз:

$$\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = 0; \\ C_1y_1' + C_2y_2' + ... + C_ny_n' = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Це однорідна система, яка має нульовий розв'язок, а це означає, що $\Delta \equiv 0$, тобто $W(x) = 0$.

Теорема 2. Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ - частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $P_0(x)y^{(n)} + ... + P_n(x)y = 0$, з неперервними коефіцієнтами $P_n(x)$ - лінійно незалежними на $(a;b)$, то визначник Вронського $\neq 0$ в жодній точці цього інтервалу.

Доведення. Нехай навпаки існує деяка точка $x_0 \in (a:b)$, в якій $W(x) = 0$. Тоді:

$$Y(x_0) = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = 0;$$

$$Y'(x_0) = C_1y_1' + C_2y_2' + ... + C_ny_n' = 0;$$

$$Y^{(n-1)}(x_0) = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} = 0.$$

Відносно $\overline{C_1C_n}$ маємо $\Delta = W(x_0) = 0$.

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{vmatrix} = 0.$$

Отже система має ненульовий розв’язок $Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_n y_n$, таким чином це є задача Коші для рівняння з нульовими початковими умовами: $Y(x_0) = Y'(x_0) = \dots = 0 \Rightarrow$ задача має нульовий розв’язок і він єдиний. Тоді $Y(x_0) \equiv 0$ означає, що функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні на $(a;b)$. Таким чином маємо протиріччя, і припущення що $W(x) = 0$ - невірне, отже $W(x) \neq 0.$ Теорему доведено.

Означення 4. Будь-яка сукупність $n-$лінійно незалежних на $(a;b)$ частинних розв’язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійного однорідного диференціального рівняння $n-$го порядку називається фундаментальною системою розв’язків цього рівняння.

Теорема 3. Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння $n-$го порядку з неперервними на $(a;b)$ коефіцієнтами, то $Y(x) = \sum_1^n C_k y_k, a < x < b,$ де $C_k - const,$ є загальним розв’язком цього рівняння.

Доведення. Раніше ми доводили цю теорему для рівняння $n-$го порядку. Таким чином нам достатньо довести, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0, \dots, y(x_0)^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$ для будь-якого $x \in (a;b),$ знайдуться $C_k, k = \overline{1,n}$ такі, що $Y(x)$ задовольняє початкові умови.

Продиференціюємо $Y(x)$ $(n-1)$ разів і запишемо для x_0 :

$$y(x_0) = y_0 = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n;$$

$$y'(x_0) = y_0' = C_1 y_1' + \dots + C_n y_n';$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)};$$

$\Delta \neq 0$ оскільки y_k - лінійно незалежні. Отже, система має єдиний розв'язок і з цього випливає, що існують C_k, при яких $Y(x)$ задовольняє початкові умови $\Delta \neq 0$.

Висновок. Якщо треба записати загальний розв'язок рівняння (1), достатньо знати будь-яку його фундаментальну систему розв'язків.

Означення 5. Якщо фундаментальна система розв'язків задовольняє умови одиничної матриці, то вона називається нормальною фундаментальною системою розв'язків.

4.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Означення. Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{1}$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ - невідомі функції від змінної t, називається нормальною системою.

Якщо праві частини цих рівнянь є лінійними функціями відносно $x_1, x_2, ..., x_n$, то система (1) називається лінійною.

Одним із методів розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь є метод за яким систему зводять до рівняння $n-$го порядку, яке має одну невідому функцію.

Приклад 12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

Розв'язування.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2\frac{dx}{dt}+2x+3y;$$

З першого рівняння $y=\frac{dx}{dt}-2x;$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}+2x+3\frac{dx}{dt}-6x;\frac{d^2x}{dt^2}=5\frac{dx}{dt}-4x;$$

$$k^2-5k+4=0;\ k_1=4;k_2=1;x(t)=C_1e^{4t}+C_2e^{t};$$

$$y(t)=4C_1e^{4t}+C_2e^{t}-2C_1e^{4t}-2C_2e^{t}=2C_1e^{4t}-C_2e^{t}.$$

Отже, $\begin{cases} x(t)=C_1e^{4t}+C_2e^{t} \\ x(t)=2C_1e^{4t}-C_2e^{t} \end{cases}$ - загальний розв’язок.

5. РЯДИ

5.1.Числові ряди

5.1.1.Основні поняття

Ряди в математичному аналізі є основним засобом дослідження функцій. Розкладання в степеневі ряди широко використовують в наближених обчисленнях (для обчислення значень функції, визначених інтегралів, розв’язків диференціальних рівнянь). В математиці, фізиці, електротехніці, важливу роль відіграють тригонометричні ряди Фур’є.

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $U_1,U_2,...U_n,...$ Вираз

$$U_1+U_2+...+U_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n \qquad (1)$$

називають **числовим рядом**, а числа $U_1,U_2,...U_n,$ відповідно 1-м, 2-м,… n-м членами ряду.

Закон утворення членів ряду задають n-м членом. Знаючи формулу n-го члена можна знайти будь-який член ряду.

Наприклад, якщо $U_n=\frac{2^n}{n^2+1},$

то $U_1=1;U_2=\frac{4}{5};U_3=\frac{8}{10};U_4=\frac{16}{17};U_5=\frac{32}{26};...$

Означення. Суму скінченого числа «n» перших членів ряду називають n-ю частинною сумою ряду $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

Розглянемо частинні суми $S_1 = U_1; S_2 = U_1 + U_2; S_3 = U_1 + U_2 + U_3;$ $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$. Якщо існує кінцева границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (2)$$

то її називають сумою ряду (1), а ряд (1) – збіжним. Суму ряду записують

$$S = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

Якщо границя (2) не існує (наприклад $S_n \to \infty, n \to \infty$), то говорять, що ряд (1) розбіжний і суми не має.

5.1.2. Необхідна ознака збіжності ряду

Якщо ряд збіжний, то його n-й член прямує до нуля при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Наслідок: Якщо n-й член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$, то ряд розбіжний.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2}$.

Розв'язування. Використаємо необхідну ознаку збіжності:

$$U_n = \frac{n}{3n+2}; \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3} \neq 0 \text{ – ряд розбіжний.}$$

Дана ознака є тільки необхідною, тобто із того, що $U_n \to 0$ ще не випливає, що ряд збіжний (може бути і розбіжний). Прикладом є розбіжний гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, хоч і $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

5.1.3. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Ознака порівняння

Нехай дано два ряди з невід’ємними членами $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (3) та $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ (4)

а) Порівняльна ознака в формі нерівностей: якщо кожен член ряду (3) не більший за відповідний член ряду (4): $U_n \le V_n \, (n = 1, 2, ...),$ то із збіжності ряду (4) (більшого) випливає збіжність ряду (3) (меншого) і із розбіжності ряду (3) випливає розбіжність ряду (4).

б) Порівняльна ознака через границю: якщо існує скінчена та відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = k,$ то ряди (3) та (4) або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2},$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$ порівняємо з геометричною прогресією $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}, q = \frac{1}{3} < 1$ – збіжним рядом: $U_n = \frac{1}{3^n + 2} < \frac{1}{3^n} = V_n.$ Оскільки нерівність виконана і більший ряд збіжний, то і менший (U_n) збіжний.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ порівняємо з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (розбіжним): $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n} = V_n$ - неперервність виконана і менший ряд розбіжний, тому і даний ряд (більший) розбіжний.

Ознака Д’Аламбера

Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + ... + U_n + ...$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l,$ то даний ряд збігається якщо $l > 1,$ розбігається якщо $l > 1.$

Якщо $l = 1$ відповіді щодо збіжності теорема не дає. Необхідно застосовувати іншу ознаку.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

Розв'язування.

а) $U_n=\frac{2^n}{n^3}, U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot 2^n}=\lim 2=2>1$ - розбіжний.

б) $U_n=\frac{5^n}{n!}, U_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}; \lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 5^n\cdot n!}{n!(n+1)\cdot 5^n}=0<1$ - збіжний.

Ознака Коші

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду з додатними членами $U_1+U_2+...+U_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$, то при $l<1$ ряд збігається; $l>1$ - розбігається.

Якщо $l=1$ теорема відповіді не дає, потрібно застосувати іншу ознаку.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язування.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1 \text{ - розбіжний.}$$

Інтегральна ознака Коші

Якщо функція $f(x)$ при $x\geq 1$ неперервна, додатна і спадна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ $(n=1,2,...)$, де $U_n=f(n)$ та інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збіжний або розбіжний одночасно.

Приклад 5. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Розв'язування.

Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. Ця функція монотонно спадає на $\left[2;+\infty\right)$, неперервна на цьому проміжку та $f(n)=u_n$

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=\infty.$$

Інтеграл розбіжний. Згідно з інтегральною ознакою ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ розбіжний.

5.1.4. Ряди Лейбніца

Всі достатні ознаки ми розглядали відносно рядів з додатними членами.

Розглянемо знакозмінні ряди, для яких спостерігаються чергування знаків, тобто ряди виду:

$$U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots+(-1)^{n+1}U_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n, \tag{5}$$

де $U_n>0$ при $n=1,2,\ldots$. (які називають рядами Лейбніца).

Такі ряди досліджують на збіжність за теоремою Лейбніца:

Якщо в знакозмінному ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n(U_n>0)$ члени такі, що:

1) $U_1>U_2>\ldots>U_n>\ldots$ тобто члени монотонно спадають;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$,

то ряд (5) збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена.

Приклад 6.

Дослідити на збіжність ряд $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)^3}$ та знайти наближено (до 0,01) суму цього ряду.

Розв'язування.

А) Дослідимо на збіжність. Для цього перевіримо умови теореми Лейбніца;

$$\left.\begin{array}{l} 1)\dfrac{1}{2^3} > \dfrac{1}{4^3} > \ldots > \dfrac{1}{(2n)^3} > \ldots \\ 2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n)^3} = 0 \end{array}\right\} \text{ - ряд збіжний.}$$

Б) Для того, щоб знайти суму ряду з точністю до 0,01, потрібно взяти стільки членів ряду, щоб його наступний член за модулем був менший 0,01.

$$\frac{1}{2^3} > 0,01; \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} > 0,01; \ \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < 0,01; \ S \approx 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} \approx 0,89.$$

5.1.5. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Означення. Знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, якщо відповідний йому знакододатний ряд збіжний.

Для дослідження знакозмінного ряду на абсолютну та умовну збіжність зручно використовувати такий алгоритм:

1. Записати відповідний знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$.

2. Дослідити $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ за ознаками знакододатних рядів.

3. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ - збіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ - збіжний абсолютно. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ - розбіжний, то перейти до пункту 4.

4. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ на збіжність за теоремою Лейбніца. Якщо її умова виконується – ряд збіжний умовно, якщо ні – розбіжний.

Приклад 7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Розв'язування.

Складемо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. За ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ маємо: $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$. Оскільки знакододатний ряд збіжний, то знакозмінний ряд збіжний абсолютно.

5.2. Степеневі ряди

5.2.1. Основні поняття

Степеневі ряди відносяться до найважливіших класів функціональних рядів.

Означення. Степеневим рядом називають функціональний ряд

$$a_0+a_ix+a_2x^2+...+a_nx^n+... \ , \tag{6}$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ - сталі числа, коефіцієнти ряду.

Областю збіжності степеневого ряду завжди є інтервал, що може вироджуватись в точку.

Теорема Абеля:

а) якщо степеневий ряд (6) збігається в точці x_0, то він абсолютно збігається при всякому значенні x, для якого $|x|<|x_0|$.

б) якщо ряд розбігається при деякому значенні $x_0^{'}$, то він розбігається при всякому x, для якого $|x|>|x_0^{'}|$.

Означення. Інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ називають такий інтервал $(-R;R)$ з центром в початку координат, що для будь-якої точки з цього інтервалу ряд збігається абсолютно, а для точок x, що лежать поза інтервалом, ряд розбігається.

Означення. Степеневим рядом також називають ряд $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...,$ де $n=\overline{1,\infty}, a_n$ - коефіцієнти степеневого ряду. Цей степеневий ряд записаний за степенями двочлена $(x - x_0)$. Якщо $x_0 = 0$ отримаємо ряд за степенями x. Даний степеневий ряд збігається в інтервалі $|x - x_0| < R$ і розбігається поза ним $|x - x_0| > R$.

5.2.2. Знаходження інтервалу збіжності

Інтервал $(-R; R)$ – інтервал збіжності степеневого ряду, де R – радіус збіжності, який обчислюють за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ або } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад 8. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду: а) $a_n = \dfrac{2^n x^n}{2n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$.

Розв'язування.

а) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$; $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{2(n+1)+1} = \dfrac{2\cdot 2^n}{2n+3}$;

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(2n+3)}{(2n+1)\cdot 2\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}$; центр ряду в точці $X_0 = 0$, інтервал збіжності $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Дослідимо на кінцях інтервалу:

$$x = -\frac{1}{2}; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \square \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \text{ – збіжний умовно.}$$

$$x = \frac{1}{2}; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} \approx \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ – розбіжний.}$$

Тоді інтервал збіжності $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

б) $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, $R = 0$ – ряд збіжний в одній точці $X_0 = 0$.

Можна знаходити інтервал збіжності використовуючи ознаку Д'Аламбера або Коші.

в) Для знаходження інтервалу збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, U_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}n}{(n+1)|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається, якщо $|x|<1,$ тому $(-1;1)$ інтервал збіжності ряду.

Приклад 9. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n}.$

Розв'язування.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{5^n}}} = 5;$$

Центр ряду в точці $X_0 = -2,$ інтервал збіжності $(-7;3).$

5.2.3. Ряди Тейлора та Маклорена

Якщо $f(x)$ нескінченно диференційована в околі точки $x = x_0,$ за формулою Тейлора число «n» можна брати як завгодно великим. Припустимо, що в розглядуваному околі залишок $R_n \to 0$ при $n\to\infty.$ Якщо перейти в формулі Тейлора до границі при $n\to\infty$ дістанемо праворуч нескінченний ряд, що називають рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0,$ то дістанемо ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

5.2.4. Приклади розкладу функцій в ряди Маклорена-Тейлора

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$; $(-\infty;\infty)$.

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $(-\infty;\infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $(-\infty;\infty)$.

4. $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + ... +$

$$+\frac{m(m-1)...(m-(n-1))}{n!} x^n + ... = (1+x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n; (-1;1).$$

5. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} x^7 + ...; [-1;1]$.

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...; (-1;1)$.

7. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...; [-1;1]$.

5.2.5. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Елементарні функції розкладають в ряд Маклорена за степенями x. Похибку, яку допускають при заміні функції (суми ряду) многочленом, можна визначити, оцінивши залишковий член ряду, обчисленням значень функцій.

Приклад 10. Знайти наближено $\sin 1$.

Розв'язування.

Запишемо розклад в ряд функції $\sin x$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$.

Покладемо $x=1$, тоді $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$. Якщо відкинути всі члени починаючи з 4-го, то похибка буде за абсолютною величиною менша за $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < 0,0002$ (за теоремою Лейбніца). Звідки

$$\sin 1 = \sin 57^\circ 18' = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0,8417 \text{ (з точністю до 0,0002).}$$

5.2.6. Обчислення визначених інтегралів

Інтеграли $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \int_a^b \frac{\cos x}{x} dx, \int_a^b \frac{dx}{\ln x} dx, \int_a^b e^{-x^2} dx, \int_a^b \sqrt{1 - x^2 \sin^2 x} dx$ не беруться в кінцевому вигляді через елементарні функції, тому їх обчислюють за допомогою рядів.

Приклад 11. Обчислити $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язування.

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$. Замінимо x на $-\frac{x^2}{2}$;

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2} - \frac{x^6}{8 \cdot 6} + \dots$ – проінтегруємо.

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 8} - \frac{x^7}{48 \cdot 7}\right) + \dots \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - \dots$$

Знайдемо член ряду менший за задану точність

$$\frac{1}{3456} = 2,8935185 \cdot 10^{-4} < 0,001.$$

Тому всі члени ряду, починаючи з 5-го, відкидаємо:

$$I = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \approx 0,855.$$

5.2.7. Розв’язування диференціальних рівнянь

Якщо не вдається проінтегрувати диференціальне рівняння в елементарних функціях, то його розв’язок, що задовольняє деяку початкову умову, шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$y = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Приклад 12. Знайти чотири відмінні від 0 члени розкладання диференціального рівняння $y' = x^2 + xy + 1,$ що задовольняє початкову умову: $y(0) = 1.$

Розв’язування.

Розв’язок запишемо у вигляді:

$$y = y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{2!}x^3 + \ldots,$$

$y'(0) = 0^2 + 0 \cdot 1 + 1 = 1.$

Знайдемо $y'' = 2x + y + xy'; y''' = 2 + y' + y' + xy'' = 2 + 2y' + xy''.$

$y''(0) = 1;\ y'''(0) = 4.$ Тоді $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4x^3}{6} + \ldots = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3} + \ldots.$

5.3. Ряди Фур’є

5.3.1. Основні поняття

Періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ можна представити тригонометричним рядом, збіжним в інтервалі $(-\pi; \pi),$ тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x),$$

де $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$

Коефіцієнти a_0, a_n, b_n обчислені за цими формулами називають коефіцієнтами Фур'є, а тригонометричний ряд з такими коефіцієнтами називають рядом Фур'є.

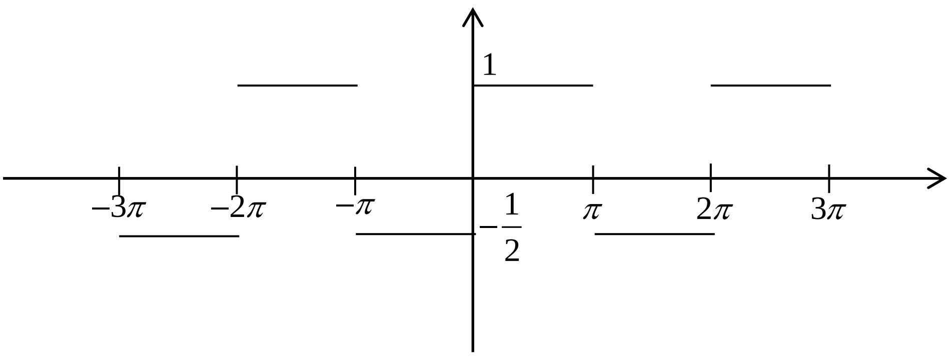
5.3.2. Ознака розкладу функції в ряд Фур'є

Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ кусково-монотонна і обмежена на $[-\pi;\pi]$, то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збіжний в усіх точках інтервалу $[-\pi;\pi]$. Сума отриманого ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності функції. В точках розриву функції сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ зліва і справа, тобто, якщо C – точка розриву функції, то $S(x) = \dfrac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$.

Приклад 13. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, (-\pi < x < 0) \\ 1, (0 < x \le \pi) \end{cases}$ $T = 2\pi$.

Розв'язування.

Побудуємо графік функції, та доповнимо її до періодичної



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{\pi} dx\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right) = 0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=\frac{3(1-(-1)^n)}{2\pi n};$$

$$b\to(-1)^{2k+1}=(-1);\ b_{2k+1}=\frac{3}{\pi(2k+1)};\ k=0,1,2,...,b_{2k}=0;$$

$$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...\right)$$ в

точках розриву $f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{2}=\dfrac{1}{4}.$

5.3.3. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

Якщо в ряд Фур'є розкладають непарну функцію $f(x)$, то коефіцієнти ряду Фур'є обчислюють за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)dx=0}_{\text{непарна}},\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nxdx=0}_{\text{непарна}},\ b_n=2\int_{0}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nxdx\neq 0}_{\text{парна}},$$

тобто ряд Фур'є непарної функції містить тільки синуси.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

Якщо $f(x)$ – парна функція, то

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)dx\neq 0\ a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx\neq 0,\ b_n=0,$ тобто ряд Фур'є парної функції містить тільки косинуси.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

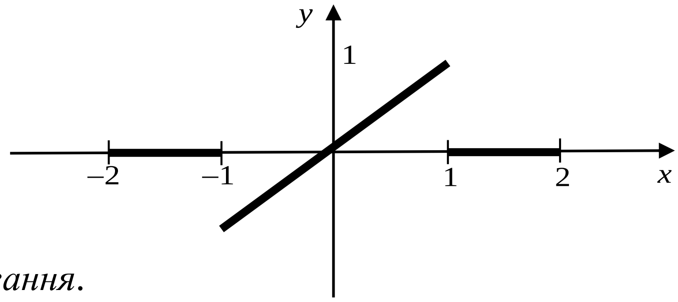
5.3.4. Ряди Фур'є для функції з періодом $T=2l$

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом $T=2l.$

Тоді $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Приклад 14.

Розкласти в ряд Фур'є функцію задану графіком:



Розв'язування.

Період $T - 2l = 4.$

Запишемо дану функцію $f(x) = x, (-1;1).$ Це непарна функція, тому $a_0 = a_n = 0.$

Обчислимо

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \int\limits_0^2 \sin\frac{\pi}{2}nxdx = -\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi}{2}nx\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^1 \cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

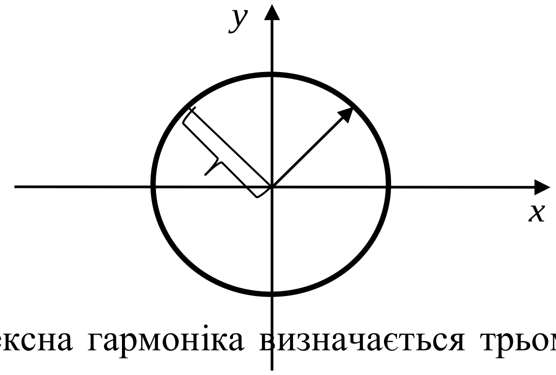
$$= -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi}{2}n + \frac{4}{n^2\pi^2};$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi^2}; b_2 = \frac{1}{\pi}; b_3 = -\frac{4}{\pi^2 3^2}; b_4 = -\frac{4}{2\pi}; b_5 = \frac{4}{\pi^2 5^2};$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x - \frac{4}{\pi^2 3^2}\sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{2}{\pi}\sin 4\pi x + \ldots$$

5.3.5. Ряд Фур'є в комплексній формі. Поняття комплексної гармоніки. Функцію $Ce^{i\omega t}$, де $C = a - bi, i = \sqrt{-1},$ називають комплексною гармонікою. Ця періодична функція з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ геометрично зображується вектором, який рівномірно обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю обертання ω. Його модуль дорівнює

$|C| = \sqrt{a^2 + b^2}$. В початковий момент часу $t = 0$, цей вектор збігається з вектором який зображує комплексне число C.



Кожна комплексна гармоніка визначається трьома параметрами ω, A та φ, де ω - кутова частота, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $|C| = A$ - амплітуда, $\arg C = \varphi$ - початкова фаза.

Розглядають комплексні гармоніки з від'ємними частотами, тобто функція виду $C \cdot e^{-i\omega t}$, які відрізняються від попередніх лише напрямком обертання вектора.

Поняття тригонометричного ряду

Функціональний ряд виду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$$

називають тригонометричним рядом в комплексній формі.

Якщо ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega k}$ рівномірно збіжний на відрізку $[0;T]$, де $T = \frac{2\pi}{\omega}$, функції $f(t)$, тоді

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

Тригонометричний ряд Фур'є.

Нехай функція $f(t)$ - періодична з періодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, інтегрована на відрізку $[0;T]$. Визначимо числа $C_k=\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$ та складемо тригонометричний ряд з цими коефіцієнтами, тобто ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$.

Теорема Діріхле: Якщо $f(t)$ періодична функція з періодом T і кусково-диференційовна на відрізку $[0;T]$, тоді

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}=\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2},$$

де $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, а $C_k=\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$ - коефіцієнти Фур'є.

Якщо $f(t)$ неперервна в точці t, то

$$f(t-0)=f(t+0)-f(t).$$

Тоді з теореми Діріхле одержимо:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t},$$

тобто сума ряду Фур'є збігається з функцією $f(t)$ у всіх точках її неперервності.

Якщо функція $f(t)$ неперіодична й визначена на відрізку нескінченної довжини, то розкласти її в ряд Фур'є неможливо, оскільки для неї неможливо побудувати періодичного продовження. В той же час при розв'язанні багатьох інженерних задач, потрібно знайти амплітудний та фазовий спектри функції. Цю задачу можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є.

Нехай функція $f(t)$ кусково-диференційовна та абсолютно інтегрована на всій числовій осі. Тоді

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{j\omega t}dt,$$

де $C(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt,$ спектральна функція $f(t)$.

Вираз $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{j\omega t}dt$ називають інтегралом Фур'є в комплексній формі.

Таким чином у всіх точках неперервності $f(t)$ значення інтегралу Фур'є збігається із значенням цієї функції.

Спектральна функція $C(\omega)$ дає можливість побудувати амплітудний та фазовий спектри функції $f(t), |C(\omega)|$ - є амплітудою комплексної гармоніки частоти $\omega,$ а аргумент $C(\omega)$ - початкова фаза цієї гармоніки. Сам інтеграл Фур'є є, ніби сума гармонік усіх частот від $-\infty$ до $+\infty$. На відміну від ряду Фур'є амплітудний і фазовий спектри інтеграла Фур'є мають вигляд неперервних ліній.

Приклад 15.

Розкласти функцію $f(t)=t, t\in[0;1]$ в ряд Фур'є в комплексній формі. Побудувати її амплітудний та фазовий спектри.

Розв'язування.

$T=1$ - період функції, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$ - основна частота.

Ряд Фур'є в комплексній формі має вигляд:

$$C_k=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt;\ f(t)=t;\ 0<t<T \qquad (7)$$

Тому $C_k=\int\limits_0^1 te^{-ik\omega t}dt=\left|\begin{matrix} U=t, dV=e^{-ik\omega t}dt \\ dU=dt, V=-\frac{1}{ik\omega}e^{-ik\omega t}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{ik\omega}te^{-ik\omega t}\Big|_0^1+$

$$+\frac{1}{ik\omega}\int\limits_0^1 e^{-ik\omega t}dt=-\frac{1}{ik\omega}te^{-ik\omega t}\Big|_0^1+\frac{1}{k^2\omega^2}e^{-ik\omega t}\Big|_0^1=-\frac{1}{ik\omega}e^{-ik\omega t}+\frac{1}{k^2\omega^2}(e^{-ik\omega t}-1).$$

Підставивши $\omega=2\pi$ *та враховуючи, що* $e^{-ik\omega t}=1$ *отримаємо*

$$C_k = -\frac{1}{ik2\pi} = \frac{i}{2k\pi},\ k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

Для знаходження C_0 *підставимо* $k = 0$ *в (7), отримаємо:*

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Розклад $f(t)$ *в ряд Фур'є має вигляд:*

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{i}{2k\pi} e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi} e^{ik\omega t}.$$

Для побудови амплітудного та фазового спектрів врахуємо, що

$$A_k = |C_k|,\ \varphi_k = \arg C_k;$$

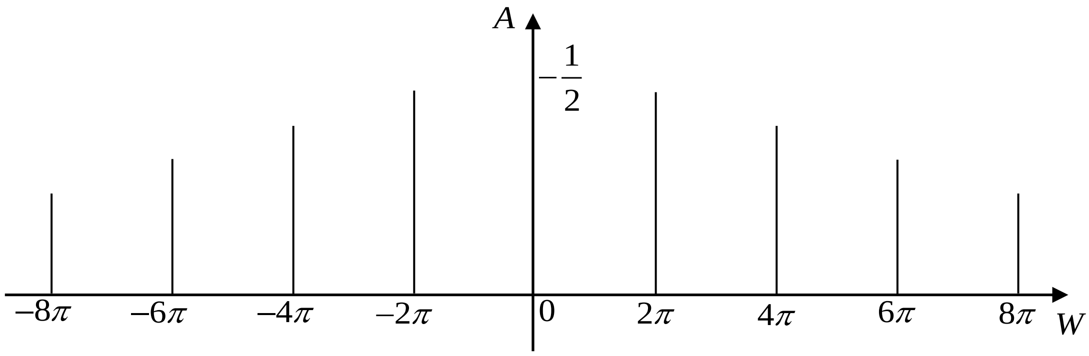
$$A_k = |C_k| = \frac{1}{2k\pi}, k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$A_0 = |C_0| = \frac{1}{2};\ \varphi_k = \arg\frac{i}{2k\pi} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, k > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, k < 0. \end{cases}$$

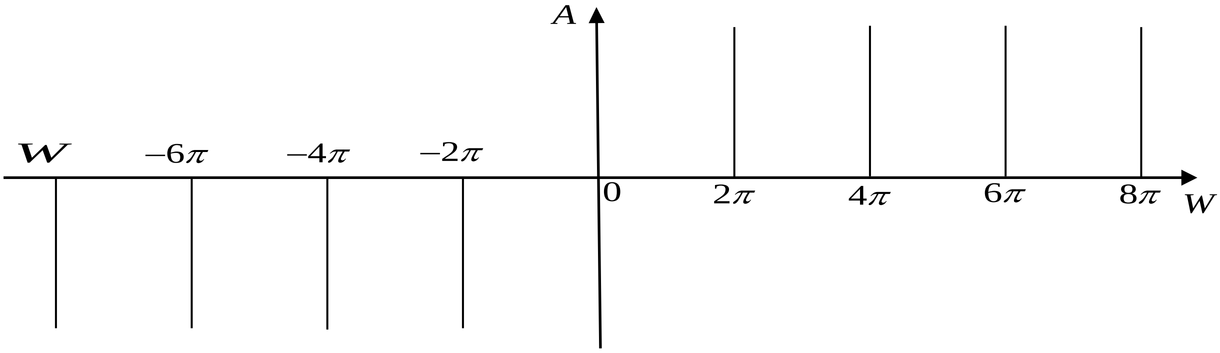
$$\varphi_0 = \arg C_0 = 0.$$

Амплітудний та фазовий спектри мають вигляд 1 та 2 відповідно.

1)



2)



6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

6.1. Невизначений інтеграл

6.1.1. Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$ $\int x e^{-x^2} dx;$ $\int \sqrt{x^2+4} dx;$ $\int \sqrt{9-x^2} dx;$ $\int e^{-x} \sin x dx;$ $\int \frac{3x+4}{x^2+x+1} dx;$

   $\int \frac{dx}{x^2(x+1)(x^2+4)};$ $\int e^{-x} \sin x dx;$ $\int \sin^4 x dx;$ $\int \sin 2x \cos 3x dx.$

2. $\int \frac{d\ x}{\sqrt{a+3x}};$ $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)};$ $\int \frac{dx}{x^2+x+1};$ $\int \sqrt{x} e^{x\sqrt{x}} dx;$ $\int \sin^3 x dx;$ $\int x \cos 5x dx;$

   $\int \cos 2x \sin 3x dx;$ $\int \cos^4 x dx;$ $\int \frac{dx}{x^2-x};$ $\int \sqrt{1-2x^2} dx.$

3. $\int \sqrt{2+3x} dx;$ $\int \frac{dx}{\sin^6 x};$ $\int x^3 \cos x^2 dx;$ $\int \cos^2 x dx;$ $\int \sqrt{x^2+4} dx;$ $\int \frac{dx}{2+\sin x};$

   $\int \frac{dx}{x(x-2)(x^2+1)};$ $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx;$ $\int \frac{dx}{x^2-3x+2};$ $\int x^2 e^x dx.$

4. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx;$ $\int \frac{dx}{x(x+2)^2};$ $\int \sqrt{\frac{1+x}{2x-1}} dx;$ $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$ $\int 2x \sin 3x dx;$ $\int \sin^4 x dx;$

   $\int \sqrt{x^2-16} dx;$ $\int \ln^2 x dx;$ $\int \frac{dx}{x^2+4x+5};$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

5. $\int tg^2 2x dx;$ $\int \frac{dx}{2+3x};$ $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx;$ $\int \frac{dx}{\sin^4 x};$ $\int \frac{dx}{x(x+1)^2};$ $\int arc\sin x dx;$

   $\int \frac{3x}{2+x^2} dx;$ $\int \frac{dx}{(2x^2+1)x};$ $\int \ln \sqrt{1+x^2} dx;$ $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

6. $\int sh^2 x dx;$ $\int \ln(1+e^{2x}) e^{2x} dx;$ $\int tg^3 x dx;$ $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)};$ $\int \frac{tg(\ln x)}{x} dx;$

   $\int \sin x \cos 2x dx;$ $\int x^2 e^{-x} dx;$ $\int x \ln x dx;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}};$ $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$

7. $\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$; $\int x\cdot arctgxdx$; $\int x^4e^{-2x^5}dx$; $\int\frac{5x}{1+2x}dx$; $\int ch^2xdx$; $\int\cos^3xdx$;

$\int x\ln(1+x)dx$; $\int\sin^4 2xdx$; $\int\frac{dx}{(x+2)(x-1)}$; $\int\frac{3dx}{\sqrt{2x+1}}$.

8. $\int\sqrt{4-x^2}dx$; $\int e^{-2x}\cos xdx$; $\int x\cos xdx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; $\int 2\ln\sqrt{x}dx$;

$\int\frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$; $\int x\cos^2xdx$; $\int x^2e^{2x}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^3 2x}$; $\int\frac{xdx}{x^2+4x+6}$.

9. $\int\frac{dx}{x^3+x^2}$; $\int arctg2xdx$; $\int\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{x+1}{x-1}dx$; $\int x\sin^2xdx$; $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

$\int\sin 2x\cos 7xdx$; $\int\sqrt{x^2+1}dx$; $\int\ln(2+3x)dx$; $\int\sqrt{5x-2}dx$.

10. $\int ctg^2xdx$; $\int 5\cos^2 2xdx$; $\int\ln x^2dx$; $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; $\int\frac{dx}{x(x-3)(x+1)}$;

$\int xe^{-x}dx$; $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$; $\int\frac{dx}{\sin x}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; $\int arctgxdx$.

11. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$; $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\sqrt{4-x^2}dx$; $\int\cos x\cos 4xdx$; $\int\frac{dx}{3+\sin x}$;

$\int xe^{-2x}dx$; $\int\cos^2x\sin^4xdx$; $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; $\int x^2e^xdx$; $\int\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$.

12. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}}$; $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int x\sin 3xdx$; $\int\frac{dx}{x(x+5)}$; $\int\frac{dx}{x^2+x+2}$;

$\int tg^2xdx$; $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int\sqrt{9-x^2}dx$; $\int x^2\ln xdx$; $\int\sin x\cos 2xdx$.

13. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{2+3x}}$; $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int 3\ln\sqrt[3]{x}dx$; $\int\frac{dx}{x^2-4}$; $\int\frac{x^3}{x+1}dx$; $\int x^2e^{-3x}dx$;

$\int\frac{dx}{x^2+x+4}$; $\int e^{-x}\cos 2xdx$; $\int\frac{dx}{\sin^4 2x}$; $\int\sqrt{x^2-4}dx$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{9+2x}}$; $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; $\int \frac{dx}{x^2-9}$; $\int \frac{x^2}{x-1}dx$; $\int x^3 \ln x dx$;

$\int \frac{dx}{2-\sin x}$; $\int \ln(x+2)dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$; $\int \sqrt{x^2+4}dx$.

15. $\int \sqrt[5]{3-2x}dx$; $\int xe^{-6x}dx$; $\int x arctg x^2 dx$; $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$;

$\int \frac{dx}{x(x^2+9)}$; $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$; $\int \frac{dx}{2-\cos x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$.

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int \frac{arctg(x+1)}{x^2+2x+2}dx$; $\int \frac{dx}{(2x-1)(x+3)}$; $\int \cos^6 x dx$; $\int \frac{x}{x^2+1}dx$;

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ $\int \frac{dx}{\cos x+6}$; $\int \sqrt{\frac{x}{3x+1}}dx$; $\int x\sin 7x dx$. $\int \cos^3(2x+1)dx$.

17. $\int \frac{x}{x^2+x+3}dx$; $\int (2x+1)\cos(x^2+x)dx$; $\int \ln\sqrt[5]{x+2}dx$; $\int x^2 \sin x dx$; $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

$\int \sin^3(2x+1)dx$; $\int \frac{x^2+x+1}{3x-1}dx$; $\int \sin x \cos 5x dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x}}dx$; $\int \frac{tg^5 3x dx}{\sin^2 3x}$.

18. $\int \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}dx$; $\int x^2 \sin 2x dx$; $\int \sin x\sqrt{\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}$; $\int \frac{dx}{x^2+4x}$;

$\int \frac{dx}{\sin 2x+3}$; $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}dx$; $\int \ln\sqrt[3]{x-3}dx$; $\int xe^{x^2+1}dx$; $\int arctg 3x dx$.

19. $\int x\sin(x^2+3)dx$; $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+x+10}$; $\int \frac{2x dx}{3x+4}$; $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$; $\int \frac{dx}{x\ln x}$; $\int \frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int \ln^2(x+2)dx$.

20. $\int \sqrt[3]{3-2x}dx$; $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int 5x\cos(6x+1)dx$; $\int \frac{dx}{x^2-3}$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$;

$\int x^3 \ln\sqrt{x}dx$; $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$; $\int \sin^5 x dx$; $\int \cos^4 2x dx$; $\int \sqrt{x^2+16}\,dx$.

21. $\int\sqrt{16+21x}dx$; $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x(x^2+16)}$; $\int\frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$; $\int\frac{dx}{x^2+3x+11}$;

$\int\arcsin xdx$; $\int x^2 arctgxdx$; $\int\cos^2 x\cdot\sin^4 xdx$; $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$; $\int\sqrt{x^2-16}dx$.

22. $\int\sqrt[3]{9+7x}dx$; $\int arctg(x+6)dx$; $\int e^{-3x}\cos 2xdx$; $\int\frac{dx}{x^2+5x+19}$; $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$;

$\int\frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}dx$; $\int\frac{dx}{x^3-3x^2+2x}$; $\int\cos^3 x\cdot\sin^3 xdx$; $\int x^3\cdot e^{-x^2}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}$.

23. $\int\sqrt{5+6x}dx$; $\int\frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$; $\int x\cdot 3^{2x}dx$; $\int\frac{dx}{\sin^6 x}$; $\int\frac{dx}{x^2+x+20}$;

$\int\sqrt{16-x^2}dx$; $\int\frac{dx}{x(2x+3)}$; $\int\cos 3x\cdot\sin xdx$; $\int\sin^4 xdx$; $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+1}$.

24. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{3x-1}}$; $\int\frac{arctg^2(x+1)}{x^2+2x+2}dx$; $\int\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$; $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}$;

$\int x^3\ln xdx$; $\int\frac{dx}{x(x-4)}$; $\int\sin 5x\cdot\cos 2xdx$; $\int\frac{dx}{\cos^4 2x}$; $\int\sqrt{16+4x^2}dx$.

25. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x+7}}$; $\int\frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}}dx$; $\int x^2\cos 5xdx$; $\int\frac{dx}{x(x-3)^2}$; $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$;

$\int ctg^2 2xdx$; $\int\cos 6x\cdot\sin xdx$; $\int\sqrt{x^2+x+4}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{1+\sqrt{x}}$; $\int\frac{dx}{\sin^6 x}$.

26. $\int\sqrt{3x+10}dx$; $\int\frac{\cos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}dx$; $\int\sqrt{x}\cos\sqrt{x^3}dx$; $\int\frac{dx}{1-3\sqrt{x}}$; $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$;

$\int\frac{dx}{\cos^6 2x}$; $\int\cos^2 x\cdot\sin^6 xdx$; $\int\cos 4x\cdot\sin xdx$; $\int x^3\cdot e^{x^2}dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

27. $\int x^3 e^{-x^4}dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{b+ax}}$; $\int\cos^3 2xdx$; $\int\frac{dx}{(x+2)(x^2+81)}$; $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$;

$\int 3x\cdot\sin 2x$; $\int\cos 5x\cdot\cos 2xdx$; $\int\sin^4 xdx$; $\int\sqrt{3-5x^2}$; $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

28. $\int\sqrt{3+7x}dx;$ $\int\frac{dx}{x(x+2)(x^2+4)};$ $\int\cos^2 5xdx;$ $\int\frac{dx}{x^2-5x+6};$ $\int\frac{dx}{\sin^6 3x};$

$\int\sin 4x\cdot\sin 3xdx;$ $\int\frac{dx}{3+\sin x};$ $\int 3x^2\cdot e^{-2x}dx;$ $\int\frac{\sqrt{x}dx}{3+2\sqrt{x}};$ $\int\sqrt{2x^2+4}dx.$

29. $\int\frac{arctg^2 2x}{1+4x^2}dx;$ $\int\frac{dx}{\sin^3 2x};$ $\int(5x+1)\sin 2xdx;$ $\int\sqrt{\frac{1+2x}{2-3x}}dx;$ $\int\frac{dx}{\sin^3 2x};$

$\int\cos^4 3xdx;$ $\int\frac{dx}{x^2+3x+5};$ $\int\frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}dx;$ $\int(\ln 3x)^2dx;$ $\int\sqrt{4x^2-1}dx.$

30. $\int\frac{dx}{3+4x};$ $\int\sqrt{2x}\cdot e^{\sqrt{3x}}dx;$ $\int\arcsin 2xdx;$ $\int tg^2 3xdx;$ $\int\frac{dx}{\sin^4 2x};$

$\int\frac{4x}{7+9x^2}dx;$ $\int\frac{dx}{x(4x^2+1)};$ $\int\frac{dx}{x(5x+1)^2};$ $\int\ln(x+2)dx;$ $\int\frac{dx}{x\cdot\ln 2x}.$

6.2. Визначений інтеграл

6.2.1. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_0^1\frac{\left(arctg\sqrt{x}\right)}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}dx;$ $\int_0^1\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx;$ $\int_0^{2\pi}x^2cosxdx;$

$\int_1^3 arctg\sqrt{x}dx;$ $\int_1^2\frac{x+1}{x^4+4x^2}dx;$ $\int_1^2\frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2x\cdot cos^2xdx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{8}}cos^4(2x)dx.$

2. $\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}dx;$ $\int_1^5 x\sqrt{2x-1}dx;$ $\int_0^1 arcsin\sqrt{x}dx;$

$\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot arctgxdx;$ $\int_1^2\frac{x^4-x+1}{x^4+4x^2}dx;$ $\int_0^1\frac{x}{x^4-9}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^4x}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos^5x}dx.$

3. $\int_0^2 x\cdot 2^{x^2}dx;$ $\int_1^2 e^{x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{x^3}dx;$ $\int_0^{\frac{1}{2}}arccosxdx;$

$\int_0^{e-1} ln(x+1)dx;$ $\int_1^2 \frac{x^2-x+1}{x(x^2-x+3)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x}{(x+3)(x^2+2)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^4(5x)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^3 xdx.$

4. $\int_1^e \frac{(1+lnx)}{x}dx;$ $\int_0^1 (e^x-1)^5 e^x dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} cosxdx;$

$\int_0^1 xe^{-x}dx;$ $\int_2^3 \frac{x^5+x}{(x-1)(x^2+9)}dx;$ $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)(x^2+x+4)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+cosx}dx.$

5. $\int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{4-x}}dx;$ $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx;$ $\int_0^1 (x^2-1)e^{-x}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5x+6)cos(2x)dx;$ $\int_2^3 \frac{1-x}{x^2(x^2+3)}dx;$ $\int_{-1}^0 \frac{x+4}{(x-1)(x^2+5)}dx;$

$\int_0^1 sh^3 xdx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^4 xdx.$

6. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}dx;$ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx;$ $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx;$

$\int_1^e ln^2 xdx;$ $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x-1)(x^2+2)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x+1}{x^4-4}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{3+sin^2 x}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^6 xdx.$

7. $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx;$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$ $\int_1^e \frac{ln(lnx)}{x}dx;$

$\int_0^1 x^2 e^{-x}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+27}dx;$ $\int_1^2 \frac{x^2+2}{x(x^2+25)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x \cdot cos^4 x dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^3 x}{cos^4 x} dx.$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2 x^2} dx;$ $\int_1^3 x\sqrt{x+4} dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x) sin2x dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x cos(3x) dx;$ $\int_0^2 \frac{1-2x}{(x+4)(x^2+2)} dx;$ $\int_0^1 \frac{x}{x^3-3} dx;$

$\int_0^1 ch^4 x dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx.$

9. $\int_0^1 x sin(1-x^2) dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctgx dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x sin(4x) dx;$

$\int_0^1 (1-x) 4^x dx;$ $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx;$ $\int_2^3 \frac{x}{x^3-1} dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(5x) cos(x) dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 x}{1+sin^2 x} dx.$

10. $\int_0^1 \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx;$ $\int_{ln1}^{ln\frac{1}{2}} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$ $\int_0^4 (x-4) e^{5x} dx;$

$\int_0^1 (1-x) arctg(2x) dx;$ $\int_1^2 \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x} dx;$ $\int_1^2 \frac{1}{x^4+x^2} dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{8}} cos^3(4x) dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{sin(2x)}{1+sin(2x)} dx.$

11. $\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{3x+2}} dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{tgx}}{cos^2 x} dx;$ $\int_0^1 x^2 3^x dx;$

$\int_0^1 ln^2(x+1) dx;$ $\int_2^3 \frac{1}{1+x^3} dx;$ $\int_2^3 \frac{x^2}{1-x^4} dx;$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4(3x) dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 x}{sin^3 x} dx.$

12. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(ctg)^{\frac{3}{2}}}{sin^2 x} dx;$ $\quad \int\limits_0^1 x^5\sqrt{5-x^2}\,dx;$ $\quad \int\limits_0^7 (x-7)\,sin(5x)dx;$

$\int\limits_9^{e+8} ln(x-8)dx;$ $\quad \int\limits_2^3 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx;$ $\quad \int\limits_1^2 \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x}dx;$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)cos(2x)dx;$ $\quad \int\limits_0^{\frac{1}{3}} sh(3x)dx.$

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3^{sinx}\cos x 2x dx;$ $\quad \int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \frac{x}{sinx^2}dx;$ $\quad \int\limits_0^1 x^2 5^x\,dx;$

$\int\limits_0^1 arcsin\sqrt{x}dx;$ $\quad \int\limits_0^1 \frac{x}{(x-4)(x^2+1)}dx;$ $\quad \int\limits_1^2 \frac{5x-3}{x(x^2+x+4)}dx;$

$\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{sin^3(4x)}dx;$ $\quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-cosx}dx.$

14. $\int\limits_1^e \frac{1}{x(4-ln^2x)}dx;$ $\quad \int\limits_1^2 \frac{ln(x^2+x+1)\cdot(2x+1)}{x^2+x+1}dx;$ $\quad \int\limits_{-4}^0 (x-7)cos(\pi x)dx;$

$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} arccos(3x)dx;$ $\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{cos(2x)}dx;$ $\quad \int\limits_0^1 \frac{x-2}{x^2+2x+5}dx;$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+8}dx;$ $\quad \int\limits_0^1 ch^3(2x)dx.$

15. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{(1-lnx)}}dx;$ $\quad \int\limits_0^1 x\sqrt{x-1}dx;$ $\quad \int\limits_1^3 (x^2-4)lnxdx;$

$\int\limits_0^{\frac{e}{25}} ln(1-x)dx;$ $\quad \int\limits_2^3 \frac{x^4+2x-1}{x^3-1}dx;$ $\quad \int\limits_0^1 \frac{x^3+4}{x^2+x+3}dx;$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^3x}dx;$ $\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^5(3x)dx.$

16. $\int\limits_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^3}dx;$ $\quad \int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln^2x)}dx;$ $\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)cosxdx;$

$\int_{1}^{2}(1-x)2^{-x}dx;$ $\int_{-2}^{0}\frac{3x+4}{(x+3)(x^2+4)}dx;$ $\int_{0}^{1}\frac{x^2-5+1}{(x+7)(x^2+4)}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{sin^2(2x)}dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cox(3x)}{sin^3(3x)}dx.$

17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3^{cosx}sinxdx;$ $\int_{0}^{2}x\cdot\sqrt[5]{5+x^2}dx;$ $\int_{0}^{1}arctg\sqrt{x}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}x\cdot sin(3x)cos(3x)dx;$ $\int_{1}^{2}\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}dx;$ $\int_{1}^{2}\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+3x+4)}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-cosx}dx;$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}cos^2(2x)dx.$

18. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{\sqrt{3+x^4}}dx;$ $\int_{1}^{e}\frac{ln^2(3x)}{x}dx;$ $\int_{1}^{2}(x+1)e^{-3x}dx;$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi+4}{4}}cos^3(2x-1)dx;$ $\int_{-1}^{0}\frac{(2x-1)}{(x-2)(x^2+4)}dx;$ $\int_{1}^{2}\frac{x-2}{x(x^3+x+3)}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{10}}cos^2(\omega t+\varphi)dt;$ $\int_{0}^{\pi}(2x+1)sinxdx.$

19. $\int_{0}^{1}4x\cdot e^{-2x^2}dx;$ $\int_{1}^{e}\frac{1}{x(ln^2(2x))}dx;$ $\int_{0}^{1}x\cdot arctg(2x)dx;$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}ctg^3(5x)dx;$ $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^3-27}dx;$ $\int_{2}^{3}\frac{x^5-1}{x^2+x+5}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos^6(4x)}dx;$ $\int_{0}^{\frac{1}{2}}(3x-1)e^{2x}dx.$

20. $\int_{0}^{4}\frac{x+3}{\sqrt{1+x}}dx;$ $\int_{0}^{3}\frac{4+3x}{\sqrt{1+x}}dx;$ $\int_{1}^{e^2}\frac{ln(2x)}{\sqrt{x}}dx;$

$\int_{0}^{\pi}(1-3x)sinxdx;$ $\int_{1}^{3}\frac{x+3}{x(x^2+9)}dx;$ $\int_{2}^{3}\frac{2x-1}{(x-1)(x^2+4)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{sin(2x)}{1+sin(2x)}dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin^6 x}dx.$

21. $\int_2^3 \frac{e^x}{1-e^{2x}}dx;$ $\int_1^e \frac{sin(ln(2x))}{x}dx;$ $\int_1^e (1-x^2)lnxdx;$

$\int_1^e ln^2(5x)dx;$ $\int_0^1 \frac{3+x}{x^2-4x+6}dx;$ $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+9)}dx;$

$\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{\pi}{5}-1} \frac{1}{cos^3(5x+1)}dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^4 x}{sin^2 x}dx.$

22. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx;$ $\int_0^{-3} \frac{1}{\sqrt{5-3x}}dx;$ $\int_0^1 (x+4)e^x dx;$

$\int_0^{\pi} (4x-3)cos\frac{x}{2}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^3+2}{x^2-x+4}dx;$ $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x+x^3)}dx;$

$\int_0^{\pi} sin^4(3x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(2x)sin(6x)dx.$

23. $\int_1^e \frac{cos(ln\sqrt{x})}{x}dx;$ $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx;$ $\int_0^2 (4-x^2)\cdot e^{2x}dx;$

$\int_0^{\frac{1}{2}} (2-x)cos(\pi x)dx;$ $\int_1^2 \frac{2x+3}{x(4x^2+1)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x^2+1)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3(3x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sinx\cdot cos(2x)dx.$

24. $\int_0^2 \sqrt{2x+5}dx;$ $\int_1^e \frac{1}{x\left(ln8x\right)}dx;$ $\int_0^1 (3x-2)\cdot sin\pi xdx;$

$\int_0^2 (x+3)\cdot cos\frac{\pi x}{2}dx;$ $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x^2+x+5)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2+3x+16}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} sinx\cdot sin(3x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{8}} sin^5(2x)dx.$

25. $\int_0^{-1} \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx;$ $\int_0^1 \frac{4^x}{\sqrt{1+16^x}}dx;$ $\int_1^3 arctg(5\sqrt{x})dx;$

$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} arccos\sqrt{x+1}dx;$ $\int_{1}^{2}\frac{x^3-1}{x^4+9x^2}dx;$ $\int_{1}^{2}\frac{1+x}{x^3+3x}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin^2(2x)\cdot cos^2(2x)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^4(3x)}dx.$

26. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{arctg3\sqrt{x}}{(1+9x)x}dx;$ $\int_{-1}^{3}(x+1)\sqrt{2x+3}dx;$ $\int_{0}^{\pi}(x^2+x+1)\cdot cosxdx;$

$\int_{0}^{1}(3-x)\cdot arctgxdx;$ $\int_{1}^{2}\frac{x^3-x+1}{x^4+x^2}dx;$ $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{x^4-16}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} cos^4(6x)dx;$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{cos^5(2x)}dx.$

27. $\int_{0}^{2} x\cdot 5^{x^2}dx;$ $\int_{1}^{2} e^{\frac{1}{x^4}}\cdot\frac{1}{x^5}dx;$ $\int_{0}^{e-2}\ln(x+2)dx;$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} arcsinxdx;$ $\int_{1}^{2}\frac{x^2}{x(x^2+x+4)}dx;$ $\int_{0}^{1}\frac{x-1}{(x-3)(x^2+4)}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} tg^2(3x)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{8}} ctg^3(4x)dx.$

28. $\int_{1}^{e}\frac{1+ln^2x}{x}dx;$ $\int_{0}^{1}(e^x+1)^4\cdot e^x dx;$ $\int_{0}^{2} e^{2x}sinxdx;$

$\int_{0}^{1}\frac{x+1}{e^{2x}}dx;$ $\int_{2}^{3}\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+4)}dx;$ $\int_{2}^{3}\frac{x^5+x}{(x-1)(x^2+9)}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{cos^6(2x)}dx;$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+2cosx}dx.$

29. $\int_{0}^{3}\frac{3x-1}{\sqrt{4+3x}}dx;$ $\int_{4}^{9}\frac{x+1}{4+\sqrt{x}}dx;$ $\int_{0}^{1}(x+1)e^{3x}dx;$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 5x\cdot cos(3x)dx;$ $\int_{2}^{3}\frac{x+1}{x^2(x^2+3)}dx;$ $\int_{-1}^{0}\frac{x}{(x+2)(x^2+4)}dx;$

$\int_{0}^{1} sh^3(2x)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} ctg^4(3x)dx.$

30. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(5-x^3)}dx;$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2^x \cdot cosxdx;$ $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{x}{cos^2x^2}dx;$

$\int_{1}^{5} x \cdot \sqrt{1+4x}dx;$ $\int_{-4}^{1} \frac{x^3+2}{x(x^2+9)}dx;$ $\int_{2}^{3} \frac{3-x}{x(x^2+2x+8)}dx;$

$\int_{0}^{\pi} sin(7x) \cdot cos(3x)dx;$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(4x)}{1+cos^2(2x)}dx.$

6.2.2. Обчислити довжину кривої:

1. $y = lnx,\ x \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right];$ $\rho = 2(1-cos\varphi),\ \varphi \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right].$

2. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{lnx}{2},\ x \in [1,2];$ $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}},\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$

3. $y = \sqrt{1-x^2} + arcsinx,\ x \in \left[0, \frac{7}{9}\right];$ $\begin{cases} x = 4(t - sint), \\ y = 4(1 - cost), \end{cases} t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right].$

4. $y = ln\frac{5}{2x},\ x \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right];$ $\begin{cases} x = 8(cost + tsint), \\ y = 8(sint - tcost), \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

5. $y = -ln(cos x),\ x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right];$ $\rho = 5(1-cos\varphi), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right].$

6. $y = 2 + arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2}, x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right];$ $\rho = 2\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{3}{4}\right].$

7. $y = e^x + 6,\ x \in \left[ln\sqrt{8}, ln\sqrt{15}\right];$ $\rho = 2cos\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$

8. $y = \sqrt{1-x^2} + arccosx,\ x \in \left[0, \frac{8}{9}\right];$ $\rho = 6cos\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$

9. $y = ln(x^2-1),\ x \in [2,3];$ $\rho = 8sin\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

10. $y = ln(1-x^2),\ x \in \left[0, \frac{1}{4}\right];$ $\rho = 8cos\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

11. $y = 2 + chx,\ x \in [0,1];$ $\rho = 2sin\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$

12. $y = 1 - ln(cosx),\ x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right];$ $\begin{cases} x = 6cos^3 t, \\ y = 6sin^3 t, \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$

13. $y = e^x + 13,\ x \in \left[ln\sqrt{15}, ln\sqrt{24}\right];$ $\begin{cases} x = 2(t - sint), \\ y = 2(1 - cost), \end{cases} t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$

14. $y = -arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\ x \in \left[0, \frac{1}{4}\right];$ $\begin{cases} x = 2(t - sint), \\ y = 2(1 - cost), \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

15. $y = 2 - e^x,\ x \in \left[ln\sqrt{3}, ln\sqrt{8}\right];$ $\rho = 1 - sin\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right].$

16. $y = arcsinx - \sqrt{1 - x^2},\ x \in \left[0, \frac{15}{16}\right];$ $\rho = 4\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{3}{4}\right].$

17 $y = 1 - ln(sinx),\ x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right];$ $\rho = 8cos\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

18. $y = 1 - ln(x^2 - 1),\ \ x \in [3,4];$ $\rho = 8(1 - cos\varphi),\ \varphi \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right].$

19. $y = \sqrt{x - x^2} - arccos\sqrt{x} + 5,\ x \in \left[\frac{1}{9}, 1\right];$ $\rho = 3\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{4}{3}\right].$

20. $y = -arccosx + \sqrt{1 - x^2} + 1,\ x \in \left[0, \frac{9}{16}\right];$ $\rho = 2\varphi,\ \varphi \in \left[0, \frac{12}{5}\right].$

21. $y = ln(sinx),\ x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right];$ $\begin{cases} x = 5(t - sint), \\ y = 5(1 - cost), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

22. $y = ln7 - lnx,\ x \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right];$ $\begin{cases} x = 4(cost + sint), \\ y = 4(sint - tcost), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

23. $y = chx + 3,\ \ x \in [0,1];$ $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}},\ \varphi \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

24. $y=-arccosx+\sqrt{1-x^2}+5,\ x\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right];$ $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\ \varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right].$

25. $y=ln(cosx)+2,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right];$ $\begin{cases}x=10cos^3t,\\ y=10sin^3t,\end{cases}\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

26. $y=e^x+26,\ x\in\left[ln\sqrt{8},ln\sqrt{24}\right];$ $\rho=2(1-cos\varphi),\ \varphi\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right].$

27. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+3,\ x\in[0,2];$ $\rho=3(1+sin\varphi),\ \varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{6},0\right].$

28. $y=arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4,\ x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right];$ $\begin{cases}x=2cos^3t,\\ y=2sin^3t,\end{cases}\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right].$

29. $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+3}{4},\ \ x\in[0,2];$ $\rho=1-sin\varphi,\ \varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right].$

30. $y=e^x+e^{-x},\ x\in\left[ln\sqrt{3},ln\sqrt{15}\right];$ $\rho=6(1+sin\varphi),\ \varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right].$

6.2.3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями, зробити схематичний рисунок:

1. $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y^2=\dfrac{3}{2}x;\end{cases}$ $\rho=2cos(3\varphi);$ $\begin{cases}x=(2\sqrt{2})cos^3t,\\ y=(2\sqrt{2})sin^3t.\end{cases}$

2. $\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}x^2,\\ y=3x-\dfrac{1}{2}x^2;\end{cases}$ $\rho=2(1+cos\varphi);$ $\begin{cases}x=a(t-sint),\\ y=a(1-cost).\\ 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

3. $\begin{cases}y=sinx,\\ y=2x,\\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\rho=4cos\varphi;$ $\begin{cases}x=acost,\\ y=bsint.\end{cases}$

4.	$\begin{cases} y = e^x - 1, \\ y = e^{2x} - 3, \\ x = 0; \end{cases}$	$\rho = 2sin(2\varphi);$	$\begin{cases} y = 3t - t^3, \\ x = 3t^2. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} y^2 = x^3, \\ x + y = 1, \\ x = 0; \end{cases}$	$\rho = 3cos(3\varphi);$	$\begin{cases} x = t^2 - 4, \\ y = t^3 - 4t. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} y = \dfrac{2}{1+x^2}, \\ y = x^2; \end{cases}$	$\rho = 2(2 + cos\varphi);$	$\begin{cases} x = 2cost, \\ y = 2sint, \\ x = t,\ y = 2t. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2, \\ y = 3x - \dfrac{1}{2}x^2; \end{cases}$	$\rho = 2(1 + cos\varphi);$	$\begin{cases} x = t - sint, \\ y = 1 - cost, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 100, \\ y = 1,\ (y \ge 1); \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = 4cos(3\varphi), \\ \varphi \in [0, \dfrac{\pi}{6}]; \end{cases}$	$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 - t. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} y = lnx, \\ y = ln^2 x; \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = 3\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}; \end{cases}$	$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$
10.	$\begin{cases} y = 3 - e, \\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0; \end{cases}$	$\rho = 2(3 + cos\varphi);$	$\begin{cases} x = \sqrt{3t^2}, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} y = lnx + 1, \\ y = 0,\ x = 1,\ x = e; \end{cases}$	$\rho = a(1 + sin\varphi);$	$\begin{cases} x = t^3 - 3t^2, \\ y = 2t - t^2. \end{cases}$
12.	$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4x^3; \end{cases}$	$\rho = a\varphi,$ $\varphi \in [0, 2\pi];$	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} y = 2x, \\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3; \end{cases}$	$\rho = sin(3\varphi);$	$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}(t^3 - 3t), \\ y = 2(t^2 + 1). \end{cases}$
14.	$\begin{cases} y = 1 - ln(x), \\ x = 1,\ x = e,\ y = 0; \end{cases}$	$\rho = 2 - sin\varphi;$	$\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y=\sqrt[3]{x}+2, \\ y=0,\ x=1; \end{cases}$ $\rho=1-2sin\varphi;$ $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y=cos\dfrac{\pi x}{2}, \\ x+y=1; \end{cases}$ $\rho=4cos(2\varphi);$ $\begin{cases} x=t^3-3t, \\ y=t^2-1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y^2=6x, \\ y^2=-\dfrac{4}{3}x+33; \end{cases}$ $\rho=3+2cos\varphi;$ $\begin{cases} x=t^3-3t^2, \\ y=t^2-2t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y=e^x-1, \\ y=e^{2x}-3, \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} \rho=2sin\varphi, \\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=t^3-3t, \\ x=t^2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=1, \\ x=0,\ y=0; \end{cases}$ $\rho=2-3cos\varphi;$ $\begin{cases} x=2t^2, \\ y=-5(t^5-t^3). \end{cases}$

20. $\begin{cases} y=\arccos x, \\ y=\dfrac{\pi}{2}, \\ y=0,\ x=0; \end{cases}$ $\rho=3+3cos\varphi;$ $\begin{cases} x=t^4, \\ y=t^3-t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y^2=x^3, \\ y=2,\ y=0, \\ x=1; \end{cases}$ $\rho=2-cos(4\varphi);$ $\begin{cases} x=a(2cost-cos2t), \\ y=a(2sint-sin2t). \end{cases}$

22. $\begin{cases} y=x^2, \\ y=\sqrt{x}; \end{cases}$ $\rho=\dfrac{1}{\varphi+\dfrac{\pi}{2}},\ \varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}];$ $\begin{cases} x=8at^2, \\ y=3a(t^3-t). \end{cases}$

23. $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=0; \end{cases}$ $\rho=1+cos\varphi;$ $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=t(1-t), \\ y=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y=x^2-2x+1, \\ y=x+1; \end{cases}$ $\rho=cos^2\varphi;$ $\begin{cases} x=cost, \\ y=tsint, \\ 0\le t\le\pi,\ y=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2+y^2=18, \\ 3y \ge x; \end{cases}$ $\rho = sin^2\varphi;$ $\begin{cases} x = cost, \\ y = tsint, \\ 0 \le t \le \pi,\ y=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 8x; \end{cases}$ $\rho = 2-\cos\varphi;$ $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t^3-4t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} xy = 20, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ $\rho = 1+cos\varphi,$ $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}];$ $\begin{cases} x = tsint, \\ y = cost, \\ y=0,\ \frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ x=3,\ x=1; \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 2cos\varphi, \\ \varphi \in [0;\frac{\pi}{4}]; \end{cases}$ $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(t-1), \\ y = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \varphi^2, \\ \varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2(t-sint), \\ y = 2(1-cost), \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y^2 = \frac{3}{2}x; \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 2e^{-\varphi}, \\ \varphi = 0,\ \varphi = 2\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 4t-t^3. \end{cases}$

6.2.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого при обертанні навколо осі Ox фігури,
обмеженої лініями (зробити схематичний рисунок):

1. $\begin{cases} x = 2(t-sint), \\ y = 2(1-cost), \\ y=0,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 3, \\ x = 0, \\ y = ch(2x). \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y^2 = x^3, \\ x = 4, \\ x = 8. \end{cases}$

4. $\left\{ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1. \right.$ 5. $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2, \\ y = 3x-\frac{1}{2}x^2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ 2x+2y-3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}sin^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}cos^3 t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 8, \\ y = x + 4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = x\left(x+2\right), \\ y = -x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 1 + sint, \\ y = 1 - cost. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 1 - cos(2t), \\ y = sin(2t). \end{cases}$

12. $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = (x^2+1)^2, \\ y = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x, \\ x = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = x, \\ xy = 1, \\ y = 0, \\ x = 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = ch(3x), \\ x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y = \sqrt{x-1}, \\ y = 0, \\ x = 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y = \sqrt{1-x}, \\ x = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y = 2, \\ y = x^2, \\ x = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y = x - x^2, \\ y = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y = arcsinx, \\ y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = arctgx, \\ y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = 0, \ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y = tgx, \\ y = 0, \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \ . \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = ctgx, \\ y = 0, \\ \dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = xe^x, \\ y = 0, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = \sqrt{arctgx}, \\ y = 0, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2, \\ x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$

6.2.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1. $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=3x, \\ z=0. \end{cases}$

2. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1.$

3. $\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ y^2+z^2=4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}, \\ z=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y^2+x^2=z^2, \\ z=0, \\ z=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2+z^2=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} z=1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y^2=x, \\ x=y^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} z=0, \\ z=1, \\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=z^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} z=y^2-y, \\ x=0, \\ x=z, \\ x=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} z=x^2-2x, \\ z=y, \\ y=0, \\ y=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} z^2+x^2=y^2, \\ y=0, \\ y=1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+z^2=y, \\ y=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y=2\sqrt{x}, \\ z=2x, \\ x=1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ z-x=1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} z=y^2, \\ z-x=1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} z=y^3, \\ y=0, \\ z=1, \\ x=0, \\ x=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0, \\ z>0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} z=y^2, \\ z+y=2, \\ z-y=2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z^2=x^2+y^2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=-y, \\ z=y, \\ z>0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ y=0, \\ z=2y, \\ z=1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x=0, \\ z=1, \\ y>0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=2y, \\ y>0. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=y, \\ z=0. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=y, \\ z=-y, \\ z=1. \end{cases}$

28. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{8}=1.$ 29. $\begin{cases} x+\frac{y^2}{4}=1, \\ z=-x, \\ z=0. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} z=y^2, \\ z=x^2. \end{cases}$

6.2.6. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

1. $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3x}}dx;$ $\int_0^{\infty}\frac{1}{3+\sqrt[3]{x}+cosx}dx;$ $\int_0^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx;$ $\int_0^{1}\frac{2^{\frac{x}{3}}}{(2^x-1)^3}dx.$

2. $\int_0^{\infty}\frac{sin(2x)}{cos^4(2x)}dx;$ $\int_2^{\infty}\frac{1}{(x^2-1)^4}dx;$ $\int_0^{1}\frac{2x}{x^3-1}dx;$ $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$

3. $\int_0^{\infty}\frac{arctg\,\frac{x}{3}}{x^3+9}dx;$ $\int_2^{\infty}\frac{\sqrt[5]{x}}{e^{5x}-1}dx;$ $\int_2^{4}\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx;$ $\int_{-1}^{0}\frac{x}{(x+1)^4(x+3)}dx.$

4. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx;$ $\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\sqrt[5]{x^2+4}}dx;$ $\int_2^{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}dx;$ $\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2-1}}dx.$

5. $\int_2^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}dx;$ $\int_0^{\infty}\sqrt{x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx;$ $\int_0^{1}\frac{1}{x^2+7x}dx;$ $\int_0^{1}\frac{1}{e^{\sqrt{3x}}-1}dx.$

6. $\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}dx;$ $\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt{x}+x}dx;$ $\int_0^{e}\frac{1}{x\cdot ln^4(2x)}dx;$ $\int_0^{1}\frac{cosx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}dx.$

7. $\int_0^{\infty}\frac{3x}{(x^2+25)^2}dx;$ $\int_0^{\infty}\frac{x-3}{\sqrt[4]{x^3+7}+sinx}dx;$ $\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}dx;$ $\int_0^{1}\frac{1}{x^5-2x}dx.$

8. $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+4}dx;$ $\int_0^{\infty}x^4\cdot e^{\frac{-x}{3}}dx;$ $\int_2^{3}\frac{x}{x^2-4}dx;$ $\int_0^{2}\frac{sinx}{(x+7)\cdot\sqrt{x^2-4}}dx.$

9. $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx;$ $\int_0^{\infty}\frac{1}{cos^2x+x^4+1}dx;$ $\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x\cdot ln^2x}dx;$ $\int_0^{3}\frac{cosx}{x^4-81}dx.$

10.	$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{ln(2x)}}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{sin^2x+\sqrt[3]{x}+1}dx;$	$\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx;$	$\int_{0}^{1}\frac{2^{\frac{x}{3}}}{(2^x-1)^2}dx.$
11	$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^5}dx;$	$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x\cdot sin^2(5x)}dx;$	$\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+x-6}dx;$	$\int_{-1}^{1}\frac{ln(4+\sqrt{x})}{\sqrt[4]{3x}}dx.$
12.	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+7}dx;$	$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^4-3}dx;$	$\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx;$	$\int_{0}^{1}\frac{cos^3x}{\sqrt{x^6+\sqrt{x^3}}}dx.$
13.	$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x(x+2)}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{arctg(2x)}{x^4+3}dx;$	$\int_{1}^{3}\frac{ln(x-1)}{1-x}dx;$	$\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx.$
14.	$\int_{2}^{\infty}\frac{2x}{4+x^2}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{x-1}{x^3+4x+3}dx;$	$\int_{1}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{xln^5x}dx;$	$\int_{3}^{4}\frac{x^2+4}{(x-3)^4(x-5)}dx.$
15.	$\int_{0}^{\infty}x\sin(2x)dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+1}};$	$\int_{\frac{1}{3}}^{2}\frac{1}{xln(3x)}dx;$	$\int_{-1}^{0}\frac{1}{(2-x)(1-x^4)}dx.$
16.	$\int_{0}^{\infty}e^{-3x}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^5+1}dx;$	$\int_{1}^{e}\frac{1}{x\,lnx}dx;$	$\int_{-1}^{1}\frac{x+2}{\sqrt[6]{x^3}}dx.$
17.	$\int_{0}^{\infty}xe^{-2x^2}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{3x}{(1+x)^2+\sqrt{x^3}}dx;$	$\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx;$	$\int_{-1}^{1}\frac{x+3}{\sqrt[4]{x^5}}dx.$
18.	$\int_{0}^{\infty}\frac{ln(x+4)}{x+4}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{5-x^3}dx;$	$\int_{-3}^{0}\frac{1}{x+3}dx;$	$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx.$
19.	$\int_{1}^{\infty}\frac{x^3+3}{x^5+1}dx;$	$\int_{1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^2}dx;$	$\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx;$	$\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{x^3}dx.$
20.	$\int_{e}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{ln^2 3x}}dx;$	$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt{5x}-4}dx;$	$\int_{0}^{3}\frac{1}{9-x^2}dx;$	$\int_{1}^{2}\frac{x}{(x+3)\sqrt[5]{1-x^4}}dx.$
21.	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{x^3+4x+3}dx;$	$\int_{2}^{\infty}\frac{xarctg5x}{\sqrt[3]{3+x^4}}dx;$	$\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}dx;$	$\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt[5]{1-x^4}}dx.$
22.	$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+16}dx;$	$\int_{0}^{\infty}\frac{5x}{6x+x^3}dx;$	$\int_{2}^{4}\frac{1}{2-\sqrt{2x}}dx;$	$\int_{0}^{1}\frac{1}{e^{\sqrt{5x}}-1}dx.$

23.	$\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx;$	$\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^5+1}}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{1}{\sqrt{2x}}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{1}{e^{3x}-cosx}dx.$
24.	$\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}dx;$	$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x^4+2}}dx;$	$\int\limits_{-2}^{3}\frac{1}{(1+x)^3}dx;$	$\int\limits_1^{\pi/4}\frac{ln(sin(2x))}{\sqrt{x}-1}dx.$
25.	$\int\limits_0^{\infty}\frac{arctg\,\frac{x}{5}}{x^2+25}dx;$	$\int\limits_0^{\infty}\frac{5x}{\sqrt{x}+x^2-4}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt[3]{5x}}{e^{sinx}-1}dx.$
26.	$\int\limits_0^{\infty}\frac{3x}{1+3^x}dx;$	$\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{x^5+\sqrt{x^3}-1}dx;$	$\int\limits_0^{3}\frac{x^3}{\sqrt{(x^4-81)^3}}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{1}{x-\sqrt[3]{x^4}}dx.$
27.	$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3}{4+x^4}dx;$	$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{x^7+1}+x}dx;$	$\int\limits_0^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx;$	$\int\limits_0^{4}\frac{1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{(3x)^3}}dx.$
28.	$\int\limits_0^{\infty}\frac{arctg\,\frac{x}{2}}{x^2+4}dx;$	$\int\limits_2^{\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{2^{x^2}+3}dx;$	$\int\limits_0^{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}dx;$	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x}{(x+1)^5(x+3)}dx.$
29.	$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x^2+x-3}dx;$	$\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt[5]{x^2+2}}dx;$	$\int\limits_1^{3}\frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}dx;$	$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-2x}-x+\frac{1}{2}}dx.$
30.	$\int\limits_2^{\infty}\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx;$	$\int\limits_0^{\infty}\sqrt{3x}\cdot e^{-3x}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{1}{x^2-3x}dx;$	$\int\limits_0^{1}\frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}dx.$

6.2.7. Обчислити інтеграл використовуючи:

а)формулу прямокутників;

б)формулу Сімпсона, розбивши проміжок інтегрування на 10 частин, і знайти похибку, порівнюючи з точним значенням інтеграла.

1.	$\int\limits_0^{1}x\cdot\sqrt{1+x^2}dx.$	2.	$\int\limits_0^{3}\frac{1}{x+2}dx.$	3.	$\int\limits_1^{5}\frac{1}{x(1+lnx)}dx.$
4.	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos^2x}dx.$	5.	$\int\limits_1^{2}\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx.$	6.	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x^2dx.$

7. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}dx.$ 8. $\int_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}dx.$ 9. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx.$

10. $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \cdot lnx}dx.$ 11. $\int_{1}^{2} \frac{1}{2x-1}dx.$ 12. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx.$

13. $\int_{0}^{2} \frac{1}{5x+1}dx.$ 14. $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{x^2}cos\left(\frac{1}{x}\right)dx.$ 15. $\int_{0}^{2} \frac{1}{1+2x}dx.$

16. $\int_{0}^{1} \sqrt{1+3x}dx.$ 17. $\int_{1}^{2} \frac{ln(x+1)}{x+1}dx.$ 18. $\int_{2}^{7} \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx.$

19. $\int_{0}^{2} (x^4-3)dx.$ 20. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1+2x^2}dx.$ 21. $\int_{0}^{1} \frac{1}{4-2x}dx.$

22. $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$ 23. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin^2(3x)}dx.$ 24. $\int_{1}^{3} \sqrt{3x-1}dx.$

25. $\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}dx.$ 26. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} cos^2(3x)dx.$ 27. $\int_{2}^{7} \sqrt[3]{1+x}dx.$

28. $\int_{0}^{1} 5^x dx.$ 29. $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}}dx.$ 30. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$

6.3. Диференціальні рівняння

6.3.1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

1. а) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy;$ б) $y' = -\frac{x+y}{y};$

в) $xy' + y = 3x^2e^{-x};$ г) $xy' + y = y^2lnx.$

2. а) $2xy' + y^2 = 1;$ б) $y' = \frac{y}{x} - 4;$

в) $y = x(y' - xcosx);$ г) $xy' + y = y^2 lnx.$

3. а) $(1 - x^2)dy + xydx = 0;$ б) $(x - y)ydx - x^2 dy = 0;$

в) $2x(x^2 + y) = y';$ г) $y' - ytgx + y^2 cosx = 0.$

4. а) $x^2 y' - 2xy = 3y;$ б) $xln\frac{x}{y}dy - ydx = 0;$

в) $y' + xy = x^3 e^{\frac{x}{2}};$ г) $y' - y - y^2 cosx = 0.$

5. а) $xy' - y = y^3;$ б) $xy' = ycos\frac{y}{x};$

в) $y' = ytgx - 4cosx;$ г) $xy' - 4y - x^2 y^2 = 0.$

6. а) $xyy' = 1 - x^2;$ б) $xy' - y = (x + y)ln\frac{x + y}{x};$

в) $xy' + y = lnx;$ г) $y' - y - y^2 cosx = 0.$

7. а) $y - xy' = 1 - x^2 y;$ б) $\left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy;$

в) $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0;$ г) $y - y'cosx = y^2 cosx(1 - sinx).$

8. а) $3e^x tgydx + \frac{1 - e^x}{cos^2 y}dy = 0;$ б) $(x + 2y)dx - xdy = 0;$

в) $y' - \frac{y}{x} = x^3;$ г) $y' - 2y = y^2 e^{2x}.$

9. а) $y'tgx = y;$ б) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}};$

в) $(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2;$ г) $y' + ytgx = y^3.$

10. а) $y'sinx = ylny$; б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; г) $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = y^3$.

11. а) $y' = xe^y$; б) $y' + ytgx = y$;

в) $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$; г) $y' - \dfrac{e^x}{1+e^x}y = y^2$.

12. а) $xy' + y = xylnx$; б) $xln\dfrac{x}{y}dy - ydx = 0$;

в) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$; г) $y' + y\dfrac{x}{1+x^2} = y^3$.

13. а) $x^2(y+1) + (x^3-1)(y-1)y' = 0$; б) $y' = \dfrac{y}{x} + tg\dfrac{y}{x}$;

в) $xy' + 2y = e^{3x}$; г) $y' + y\dfrac{x}{x+1} = y^2$.

14. а) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$; б) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$;

в) $y' = 3ytg(3x) + 3cos(3x)$; г) $y' = yctgx + \dfrac{y^3}{sinx}$.

15. а) $y' = e^{x+y}$; б) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$;

в) $y' + ycosx = sinx \cdot cosx$; г) $3y' = -3y^3 + ysinx$.

16. а) $y' = -\dfrac{xsinx}{ycosy}$; б) $\left(x^2 + xy\right)y' = x\sqrt{x^2+y^2} + x^2y' + y^2$;

в) $y' - y\dfrac{2x-1}{x^2-x} = 1$; г) $y' + xy = x^3y$.

17. а) $\left(1+y^2\right)xdx + \left(1+x^2\right)dy = 0$; б) $(x+3y)dy + xdx = 0$;

в) $y'cosx - ysinx = sin(2x)$; г) $xy' = -y + y^2$.

18. а) $xydy + \sqrt{1-x^2}dy = 0;$ б) $y' - \frac{y}{x} = cos\frac{y}{x};$

в) $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0;$ г) $y' = y^4 cosx + ytgx.$

19. а) $ye^{2x}dx - (1-e^{2x})dy = 0;$ б) $y' = \frac{y}{x} + sin\frac{y}{x};$

в) $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0;$ г) $2xy' - y = xy^3.$

20. а) $2^x tgydx + (1+2^x)sec^2 ydy = 0;$ б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$

в) $xy' + y - e^x = 0;$ г) $y' + 2y = y^2 e^x.$

21. а) $3x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2);$ б) $(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0;$

в) $y' - \frac{2y}{x} = xcos(3x);$ г) $y' - 2xy = y^2 e^{-x^2}.$

22. а) $e^x sin^3 y + (1+e^{2x})cosy \cdot y' = 0;$ б) $5x^3 y' = y^2(2x - y);$

в) $y' + 3ytgx = \frac{1}{cosx};$ г) $(xy' - y^2)lnx = 2y.$

23. а) $ysin^2 xdx + cosx \cdot lnydy = 0;$ б) $xy' + xe^{-\frac{y}{x}} = y;$

в) $xy' - 2y = x^3 + 1;$ г) $y' - \frac{x}{2(x^2+1)}y = y^2.$

24. а) $y' = sin(x - y);$ б) $y + (2\sqrt[3]{x^2 y} - x)y' = 0;$

в) $y' = \frac{3x^2}{1+x^3}y + (1+x^3);$ г) $y^3 y' = 1.$

25. а) $\left(a^2 + y^2\right)dx + 2\sqrt{ax - x^2}dy = 0;$ б) $(y - x)xdy = y^2 dx;$

в) $y' - 3yctg(3x) = \frac{1}{sin(3x)};$ г) $y' - \frac{y}{x-1} = y^2(x-1).$

26. а) $x^2y'cosy+1=0$; б) $y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{cos\frac{y}{x}}$;

в) $y'+yctg(2x)=cos(2x)$; г) $y'+\frac{y}{x+3}=4y^2(x+3)^2$.

27. а) $x^2y'+cos(3y)=1$; б) $y'+3xy^2=4xy$;

в) $y'+\frac{y}{x+1}=e^x$; г) $y'=\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2\cos x}$.

28. а) $x^3y'-siny=1$; б) $xy'+ytg\frac{y}{x}=0$;

в) $y'+\frac{y}{x}=\frac{sinx}{x}$; г) $xy'+y+5y^2e^{-\frac{1}{x}}=0$.

29. а) $(1+x^2)y'-\frac{1}{2}cos^2 2y=0$; б) $2x^2y'=x^2+y^2$;

в) $y'-yctgx=sinx$; г) $y'+\frac{y}{x}=\frac{2lnx+1}{x^2}y^2$.

30. а) $e^y=y'(x+1)$; б) $xy'=y(lny-lnx)$;

в) $y'-\frac{y}{x}=x^2+1$; г) $((x-1)y'-y^2)ln(x-1)=y$.

6.3.22. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

1. а) $y''=\frac{ctgx}{\sin^2 x}$; б) $y''=\frac{1}{3x}(y')^2$.
2. а) $y''=\sqrt{x+4}$; б) $yy'+(y')^2+yy''=0$.
3. а) $y''=3^{5x}$; б) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$.
4. а) $y''=e^{x-4}$; б) $3y''=y'-yy'$.
5. а) $y''=\sqrt[3]{3-x}$; б) $xy''+x(y')^2-y'=0$.
6. а) $y''=\sqrt[3]{x+5}$ б) $(y')^2+2yy''=0$.

7. а) $y''=\dfrac{1}{x+2}$; б) $2xy''+(y'^2-64)y'=0$.

8. а) $y''=sin(5x-1)$; б) $yy''-yy'lny=(y')^2$.

9. а) $y''=\dfrac{1}{x-1}$; б) $y^3y''=-1$.

10. а) $y''=2x+sinx$; б) $y''=-3(y')^2$.

11. а) $y''=x+e^{3x-1}$; б) $(x+3)y''=y'$.

12. а) $y''=(x+1)^3$ б) $y''\sqrt{y}=\dfrac{1}{8}$.

13. а) $y''=cos(3x-1)$; б) $y''=x(y')^2$.

14. а) $y''=\sqrt{(x-4)^3}$; б) $xy'y''=(y')^2+4$;

15. а) $y''=\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$; б) $2y''-3(y')^2=0$.

16. а) $y''=ln(1+x)$; б) $2xy'y''=(y')^2-1$.

17. а) $y''=sin(3x)-2x$; б) $\dfrac{y''}{y'}=x^3$.

18. а) $y''=2^{3x-2}$; б) $y''\sqrt[3]{y+1}=y'$.

19. а) $y''=3x^2+e^{2x}$; б) $(5x-1)^2y''=(y')^2$.

20. а) $y''=ln(3-x)$; б) $y''-y'x=e^x$.

21. а) $y''=\dfrac{1}{x+4}$; б) $\dfrac{y''}{y'}=(y')+y$.

22. а) $y''=sin(x+4)$; б) $x^2y''-3xy'=\dfrac{6(y')^2}{x^2}$.

23. а) $y''=e^{5x-4}$; б) $xy'''-x(y')^2=3y'$.

24. а) $y'=\sqrt[3]{2x-5}$; б) $y''=\left(1-\dfrac{y'}{x}\right)$.

25. а) $y'=ln(3x+2)$; б) $y'y''=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

26. а) $y'' = x^2 + e^{1-x}$; б) $y''cos(3y) - 3(y')^2 sin(3y) = 0$.

27. а) $y'' = \dfrac{1}{cos^2(x-1)}$; б) $y'' + y'tgx = 0$.

28. а) $y'' = cos^2(5x-1)$; б) $y'' = \sqrt[3]{x-2}$.

29. а) $y'' = \sqrt[4]{5-4x}$; б) $(y')^5 y'' = 1$.

30 а) $y'' = 4^x + x^3$; б) $y'' = 3yy''$.

6.3.3. Знайти розв'язок диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові умови:

1. 1) $\begin{gathered} y'' - 3y' = x + 2 \\ y(0) = 0,\ y(0) = 1; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' + 2y' + y = e^x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} y'' - y' + y = cos(2x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{gathered}$

2. 1) $\begin{gathered} y'' - 3y' + 2y = x^2 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' - 2y' + 3y = e^{4x} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} y'' + 9y = xcosx \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{gathered}$

3. 1) $\begin{gathered} y'' - 6y' + 2y = 1 - 3x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' - 2y' + y = 6xe^x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} y'' + y' + 3y = 2cosx \\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1. \end{gathered}$

4. 1) $\begin{gathered} y'' + 6y' = x^2 + 2 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' + 6y' + 9y = e^{3x} \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} y'' + 2y' + y = sin(5x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{gathered}$

5. 1) $\begin{gathered} y'' - \frac{4}{5}y' = x \\ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 1; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' - y' + \frac{1}{4}y = e^{x-1} \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} 4y'' + y' + 3y = 4cos(3x) \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$

6. 1) $\begin{gathered} y'' + 2y' - 3y = x^2 \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' + 2y' + y = (3x+2)e^{-x} \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} 6y'' + 3y' + 4y = cos\frac{x}{4} \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$

7. 1) $\begin{gathered} y'' - 2y' - 3y = x + 5 \\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' - 2y' + y = (x+7)e^2 \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} 3y'' + 10y' + 8y = sin\frac{x}{2} \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$

8. 1) $\begin{gathered} y'' - y' - 3x = 1 - 4x \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1; \end{gathered}$ 2) $\begin{gathered} y'' + y' + \frac{1}{7}y = xe^{-\frac{x}{2}} \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0; \end{gathered}$ 3) $\begin{gathered} 3y'' + y' + 7y = 3cos\frac{x}{3} \\ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$

9. 1) $y'' - 3y' = x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$ 2) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 2e^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$ 3) $y'' + y' + 6y = sin(2x)$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

10. 1) $y'' - y' = (x-1)^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$ 2) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 4e^{-4x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$ 3) $y'' + 3y' + 7y = sinx$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

11. 1) $y'' + 3y' - y = 8x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1;$ 2) $\frac{y''}{2} + 3\sqrt{2}y' + 9y = e^{-\frac{x}{3}}$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0;$ 3) $3y'' + 6y' + 8y = \sin(2x)$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

12. 1) $y'' + 3y' + 2y = x^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$ 2) $\frac{1}{5}y'' - 2y' + 5y = (4-5x)e^{3x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$ 3) $y'' - 4y' + 6y = sin(6x)$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

13. 1) $y'' - 3y' - 2y = 5x$, $y(0) = 1, y'(0) = -1;$ 2) $5y'' - 2y' + \frac{1}{5}y = e^{x-\frac{1}{2}}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = -1;$ 3) $8y'' + 3y' + y = xsin(4x)$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

14. 1) $y'' - 3y' - 3y = 6x + 1$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$ 2) $6y'' + 12y' + 6y = (x-1)e^{-x}$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0;$ 3) $4y'' + 2y' + y = xcos(3x)$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

15. 1) $y'' + 3y' - 3y = 3 - x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$ 2) $\frac{1}{2}y'' - 2y' + 2y = e^{\frac{3}{2}x-2}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$ 3) $8y'' + 7y' + 3y = (x+1)cosx$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

16. 1) $y'' - y' - 4y = (x-1)^2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$ 2) $16y'' - 4y' + \frac{1}{4}y = e^{-5x}$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 1;$ 3) $y'' + 9y' - 12y = sin(3x)$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

17. 1) $y'' + y' - 4y = 3x + 2$, $y(0) = 2, y'(0) = 1$ 2) $3y'' - 4\sqrt{3}y' - 4y = e^{-\frac{x}{5}}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$ 3) $3y'' + 5y' + 5y = xsin(7x)$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

18. 1) $y'' - 2y' - 4y = 5x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = -1;$ 2) $y'' - \sqrt{2}y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{3}}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$ 3) $5y'' + 6y' + 3y = (x+2)sinx$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

19. 1) $y'' + 2y' - 4y = x + 12$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -1;$ 2) $6y'' - 12y' + 6y = e^{1-x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$ 3) $3y'' + 4y' + 5y = xsin(2x)$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

	1)	2)	3)
20.	$y''-3y'-4y=12x$, $y(0)=0,\ y'(0)=1;$	$\frac{y''}{5}+2y'+5y=xe^{-3x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0;$	$5y''+2y'+y=(1+x)sin(3x)$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
21.	$y''+3y'-4y=4x$, $y(0)=1,\ y'(0)=-1;$	$y''+4y'+4y=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1;$	$7y''+8y'+3y=(5-x)sinx$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
22.	$y''+4y'-4y=x^2$, $y(0)=0,\ y'(0)=0;$	$3y''+2y'+\frac{1}{3}y=xe^{\frac{x}{4}}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1;$	$y''-3y'+6y=4sin(2x)$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1.$
23.	$y''-4y'=5x$, $y(0)=2,\ y'(0)=1;$	$\frac{1}{4}y''-3y'-9y=(x+4)e^{-x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0;$	$y''-3y'+6y=(6-x)sinx$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1.$
24.	$y''-y'-5y=1-3x$, $y(0)=1,\ y'(0)=0;$	$y''+2y'+2y=(x-3)e^{\frac{x}{3}}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0;$	$2y''+7y'+8y=4sin(2x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$
25.	$y''+y'-5y=10x$, $y(0)=1,\ y'(0)=-1;$	$9y''-3y'-\frac{1}{4}y=e^{5x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0;$	$3y''+10y'+9y=(7-2x)sinx$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
26.	$y''-5y'+y=4$, $y(0)=1,\ y'(0)=2;$	$9y''+3y'+\frac{1}{4}y=(3x-5)e^{-x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0;$	$y''+5y'+6y=8xsin(3x)$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
27.	$y''+5y'+y=12-3x$, $y(0)=1,\ y'(0)=1;$	$y''+3y'+\frac{9}{4}y=xe^{3x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0;$	$y''-5y'+6y=(4-3x)sin(3x)$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
28.	$y''-5y'-y=1$, $y(0)=1,\ y'(0)=3;$	$\frac{1}{2}y''-3\sqrt{2}y'+9y=e^{5-2x}$, $y(0)=-1,\ y'(0)=0;$	$3y''+5y'+7y=e^{x}sin(4x)$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
29.	$y''+5y'-y=5x$, $y(0)=2,\ y'(0)=1;$	$y''-5y'+\frac{25}{4}y=e^{\frac{x}{3}}$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1;$	$8y''+4y'+3y=(7x-4)sinx$, $y(0)=0,\ y'(0)=0.$
30.	$y''+2y'-5y=7x+2$, $y(0)=1,\ y'(0)=1;$	$16y''-8y'+y=xe^{-7x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0;$	$7y''+9y'+3y=sin(7x)$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

6.3.4. Знайти загальний розв'язок системи:

1. $\begin{cases} y'(t) = -2x(t) + 3y(t), \\ x'(t) = y(t). \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 5y(t). \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = 4x(t) + 4y(t). \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = 5x(t) - 6y(t). \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t), \\ y'(t) = x(t) - 3y(t). \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 5y(t). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), \\ y'(t) = y(t) - 4x(t). \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 5y(t). \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t). \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) - y(t). \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t). \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 4y(t) - x(t). \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t), \\ y'(t) = 4x(t) - y(t). \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x'(t) = 2y(t) - 3x(t), \\ y'(t) = y(t) - 2x(t). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = -3x(t) - y(t). \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$

19. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + y(t). \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t), \\ y'(t) = x(t) - 5y(t). \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = x(t) + 5y(t). \end{cases}$

22. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 7y(t), \\ y'(t) = 2y(t) - x(t). \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 4y(t), \\ y'(t) = x(t) + 3y(t). \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x'(t) = 5y(t), \\ y'(t) = x(t) + 7y(t). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t). \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 7y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x'(t) = -6y(t), \\ y'(t) = -2x(t) - 3y(t). \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = x(t) - 3y(t). \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x'(t) = y(t) - 2x(t), \\ y'(t) = x(t) + 6y(t). \end{cases}$

6.3.5. Розв'язати задачу:

1. Знайти лінію, де будь-яка дотична перетинається з віссю абсцис в точні, однаково віддаленій від точки дотику і початку координат.

2. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(2,4)$, якщо відрізок, який відсікає на осі абсцис дотична проведена в будь-якій точці лінії, дорівнює кубу абсциси і очки дотику.

3. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(2,-1)$, якщо кутовий коефіцієнт будь-якої її дотичної пропорційний квадрату ординати точки дотику і коефіцієнт пропорційності дорівнює 3.

4. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(1,2)$, якщо відрізок, який відгинається її дотичною на осі ординат, дорівнює абсцисі точки дотику.

5. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(1,2)$, якщо добуток кутового коефіцієнта дотичної в будь-якій її точці на суму координат точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

6. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(1,2)$, якщо відношення ординати будь-якої точки до абсциси пропорційне кутовому коефіцієнту її дотичної ($k=3$).

7. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(1,3)$, якщо площа трикутника утвореного будь-якою її дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис. дорівнює 2.

8. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,1), якщо відстань від початку координат до будь-якої точки її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

9. Знайти рівняння лінії, для якої квадрат довжини відрізка, що відгинається на осі координат будь-якою її дотичною, дорівнює добутку координат точки дотику.

10. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,3), якщо кутовий коефіцієнт її дотичної в 2 рази менший кутового коефіцієнта радіус-вектора точки дотику.

11. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (4,3), якщо будь-яка її піддотична дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику.

12. Знайти рівняння лінії, для якої відношення відрізка, що відгинається нормаллю на осі абсцис, до радіус-вектора точки дотику є величина стала, що дорівнює 4.

13. Знайти рівняння лінії, для якої відношення довжини відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, до довжини відрізка, що відтинається нормаллю на осі абсцис, є величина постійна яка дорівнює 5.

14. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений віссю ординат, дотичною і радіус-вектором точки перетину - рівнобедрений.

15. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,1), якщо відстань будь-якої її дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику

16. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо площа трикутника утвореного її дотичною, віссю абсцис і ординатою точки дотику дорівнює 5.

17. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (ОД), якщо її піддотична дорівнює сумі координат точки дотику.

18. Знайти рівняння лінії, для якої будь-яка дотична перетинається з віссю ординат в точці, рівновіддаленій від точки дотику і від початку координат.

19. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо будь-яка її дотична перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою, рівній подвоєній абсцисі точки дотику.

20. Знати рівняння лінії, яка проходить через точку (1,-1), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі абсцис її дотичною дорівнює добутку координат точки дотику.

21. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,0). якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її дотичною, дорівнює потроєній абсцисі точки дотику.

22. Знайти рівняння лінії, якщо відрізок будь-якої її дотичної, розміщеної між точкою дотику і віссю абсцис, ділиться віссю ординат навпіл.

23. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,4), якщо добуток кутового коефіцієнта її дотичної на різницю ординати і абсциси точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

24. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,3), якщо кожна її дотична перетинає пряму $y = 2$ в точці з абсцисою, рівною подвоєній абсцисі точки дотику.

25. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $(0,e)$, якщо її піддотична дорівнює одиниці.

26. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,1), якщо площа трапеції, утвореної її дотичною. ординатою точки дотику і координатними осями, дорівнює $0,5$.

27. Знати рівняння лінії, яка проходить через точку (4,3), якщо її дотична і перетинається з віссю ординат в точці, яка віддалена від початку координат па таку ж відстань, що й точка дотику від початку координат.

28. Знайти лінію, яка проходить через (2,3), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її нормаллю, дорівнює 3.

29. Знайти лінію, яка проходить через точку $(0,e)$, якщо її піддотична дорівнює 3.

30. Знайти лінію, яка проходить через точку (1,2), якщо кутовий коефіцієнт її дотичної дорівнює потроєному кутовому коефіцієнту радіус-вектора точки дотику.

6.3.6. Розв'язати фізичну задачу:

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю V пропорційно квадрату часу. Знайти залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо відомо, що при $t = 0c$, $S = 2ì$, а в момент $t = 1c$, $V = 3\, {}^{м}\!/_{c}$.

2. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, вона зазнає протидії середовища з силою, пропорційною його швидкості. Знайти залежність шляху від часу.

3. Моторний човен рухаються у спокійній воді зі швидкістю $V = 12\, {}^{км}\!/_{год}$. На повній швидкості її мотор був включений, і через 10 с

швидкість човна зменшилась до $V = 6 \, {}^{км}\!/_{год}$. Опір середовища пропорційний швидкості руху човна. Знайти швидкість човна через 1 хв. після зупинки мотора.

4. Куля, що рухається зі швидкістю $V = 400 \, {}^{м}\!/_{с}$, входить в достатньо товсту стіну. Опір стіни надає кулі негативне прискорення, пропорційне квадрату її швидкості з коефіцієнтом пропорційності $k = 7$. Знайти швидкість кулі через $0,001 с$ після входу в стіну.

5. Температура тіла за $10 \ хв$ зменшилась від 120^0 до $60^0 \ C$. Температура навколишнього середовища $20^0 \ C$. Через скільки хвилин температура тіла стане рівною $30^0 \ C$, , якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

6. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорційним добутку швидкості руху на квадрат часу. Знайти залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнює V_0.

7. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часу руху. Знайти залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнює нулю.

8. Матеріальна точка масою m притягується кожним з двох центрів з силою, пропорційною відстані з коефіцієнтом пропорційності 1с. Відстань між центрами дорівнює $2C$. В початковий момент точка знаходилась на лінії з'єднання центрів на відстані a від її середини. Початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти закон руху.

9. Знайти швидкість в момент t в полі з достатнім опором R і самоіндукцією L при ЕРС, що лінійно наростає за законом $E = kt$, якщо в початковий момент часу сила струму дорівнювала нулю.

10. На тіло масою $m = 1$ діє сила пропорційна квадрату часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). На яку максимальну висоту підійметься точка?

11. Матеріальна точка масою m підкинута вертикально в верх з початковою швидкістю V_0. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості руху (коефіцієнт пропорційності дорівнює k) На яку максимальну висоту підійметься точка?

12. Знайти залежність температури T від часу t, якщо тіло, нагріте до $200^0\ C$ занесене в кімнату з температурою $20^0\ C$. Через який час тіло зовсім охолоне? (Вважати, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіл і середовища).

13. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, пропорційної часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4), який пройшов з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю. Крім того, на точку діє сила опору середовища, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). Знайти залежність швидкості від руху.

14. Відомо, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіла і середовища. Знайти залежність температури тіла T від часу t, якщо за 10 хв. температура тіла знизилась від $120^0\ C$ до $50^0\ C$, а температура була $20^0\ C$.

15. Матеріальна точка масою m рухається під дією сили прямо пропорційно часу руху і обернено пропорційно швидкості руху. Встановити залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент часу швидкість руху дорівнювала нулю.

16. На тіло масою $m = 2$ діє сила, пропорційна добутку швидкості руху на час (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4). В початковий момент швидкість руху дорівнювала $1\,{}^{м}\!/_{с}$. Якою буде швидкість руху через $1\,хв$ після початку руху?

17. Матеріальна точка масою $m = 2\ г$ рухається прямолінійно. На неї діє в напрямку руху сила, пропорційна часу, який пройшов з моменту, коли швидкість точки дорівнювала нулю, з коефіцієнтом пропорційності 4 кг·м/с.

Крім того, рух точки гальмується опором середовища, пропорційним швидкості руху з коефіцієнтом пропорційності 3 г/с. Знайти швидкість точки через 5 c після початку руху.

18. Матеріальна точка рухається по прямій з постійним прискоренням a. Знайти закон руху точки.

19. Швидкість тіла, що рухається, збільшується обернено пропорційно пройденому шляху. В початковий момент руху тіло знаходилось на відстані 5 м від початку відліку і мало деяку швидкість. Знайти пройдений шлях і швидкість тіла через 10 с після початку руху.

20. Матеріальна точка масою m рухається по осі під дією відродженої сили, направленою до початку координат і пропорційної відстані від початку руху точки. Середовище, в якому відбувається рух, спричиняє опір, пропорційний швидкості руху. Знайти закон руху.

21. Матеріальна точка масою m розміщена на кривій AB, яка рухається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю ω. Знайти рівняння кривої AB, якщо матеріальна точка знаходиться в рівновазі в довільному положенні на кривій.

22. Знайти силу в котушці в момент t, якщо опір її R, коефіцієнт індуктивності L, початковий струм $I = 0$, ЕРС змінюється за законом $E = E_0 \sin t$.

23. Крива, яка проходить через точки A(5,7) і B(6,6), має радіус кривизни $R = 5$. Знайти рівняння цієї кривої.

24. Температура тіла за 20 хв. знизилась від $100^0 C$ до $40^0 C$. Температура навколишнього середовища $20^0 C.$. Через скільки хвилин температура тіла буде дорівнювати $25^0 C$, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

25. Матеріальна точка масою m вільно падає під дією сили тяжіння. Початкове положення точки, що падає, відносно точки відліку $y(0) = y_0$,

початкова швидкість $V(0)=V_0$. V(0)=V0. Не беручи до уваги опір повітря, знайти закон руху.

26. Матеріальна точка масою m вільно рухається вздовж осі OY, і на неї в кожний момент часу діє сила, пропорційна відхиленню точки від початку координат і направлена до початку координат. Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент вона мала ординату у і швидкість V_0.

27. Матеріальна точка масою m знаходиться на продовжені осі тонкого однорідного стержня масою M, довжиною 1 м на відстані a від її лівого кінця. Знайти силу взаємодії стержня і точки.

6.3.7. Задачі для ігрових занять:

1. Прискорення локомотива, який має початкову швидкість, прямо пропорційну силі тяги F і обернено пропорційну масі поїзда m. Сила тяги локомотива $F=b-kV$, де V - швидкість, b і k - сталі величини. Знайти силу тяги локомотива за деякий час, якщо в початковий момент при $t=0$: $F_0=b-kV_0$.

2. У кімнаті, де підтримується температура 20°С, деяке тіло охололо за 20 хв. від 100°С до 50°С. Знайти закон охолодження тіла. Через скільки хвилин воно набуде кімнатної температури?

3. Швидкість знецінення устаткування внаслідок його зносу пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість, дорівнювала A_0. Знайти вартість устаткування через 8 років.

4. У посудині знаходиться 10 л водного розчину солі. В посудину втікає чиста вода із швидкістю 4 л/хв, а суміш витікає з тією ж швидкістю. В початковий момент в розчині було 1 кг солі. Скільки солі буде в посудині через 30 хв. після початку процесу?

5. Ракета з початковою масою m_0 кг, злітає в вертикальному напрямку. Гази викидаються з постійною інтенсивністю a (кг/с), з постійною

швидкістю b (м/с), відносно ракети, де $a=0$ і $b=0.$ Знайти швидкість ракети і відстань, пройдену за час $t,$ не беручи до уваги дії зовнішніх сил на ракету.

6. Ракету з початковою масою m_0 запускають вертикально з початковою швидкістю V_0. Маса ракети рівномірно зменшується і в момент t спадає до $m=m_0-kt,$ де k - коефіцієнт. Вважаємо, що маса викидів рухається назад зі сталою швидкістю b відносно ракети. Знайти висоту підйому ракети в будь-який момент часу t, враховуючи лише її силу тяжіння mg.

7. Стальний дріт довжиною 1 з поперечним перерізом P розтягується з силою, що постійно зростає до величини $P.$ Знайти роботу розтягу.

8. Стальний дріт довжиною L закріплений в одному із кінців, під дією своєї ваги знаходиться в положенні рівноваги. Знайти видовження дроту. Густина сталі $y \, {}^{m}\!/_{м}$.

9. Знайти закон зміни яскравості світла після проходження через скляну пластинку, якщо при проходженні через шар товщиною $x_1=2{,}5ì\,ì$ яскравість світла B складала 30 міжн.од., а на поверхні ($x=0$) початкова яскравість $B_0=100$ міжн.од. Промені падають на поверхню пластини під будь-яким кутом, а його зміна відбивається на величині коефіцієнта $k.$

10. Знайти кількість теплоти, яка необхідна для нагріву 1 кг заліза від 20°C до 21°C, питома теплоємність C заліза показує залежність $C=0{,}1053+0{,}000142t,$ де t - температура.

11. Пластина з графіту товщиною 10 мм на поверхнях має постійні температури t_1=1300°C і t_2=100°C. Знайти питому ємність теплоти g, яка проходить через графітну пластину з коефіцієнтом теплопровідності 1,44·103.

12. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хв. складає від 100°C до 60°C. Температура навколишнього повітря 25°C. Через який час від початку охолодження температура хліба знизиться до 30°C?

13. В колі з опором R і самоіндукцією L діє періодична електрорушійна сила $E_1 = a\sin 2\pi / T - t,$ де a - стале число, яке дорівнює, очевидно, максимальному значенню величини E_1; T - період; t - час. Знайти силу струму I в колі в будь-який момент часу, якщо в початковий момент при $t = 0$ сила струму дорівнює нулю.

14. Нормаль відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює квадрату радіуса-вектора будь-якої точки кривої. Знайти рівняння кривої, якщо вона проходить через точку (0,3).

15. Середнє геометричне координат точки дотику дорівнює відношенню відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, до подвоєної ординати точки дотику. Знайти рівняння кривої, якщо вона проходить через точку (1,1).

16. Тіло масою m падає під дією сили тяжіння в середовищі, опір якого пропорційний квадрату швидкості падіння. Знайти закон руху тіла.

17. Електровоз рухається горизонтальною залізничною колією зі швидкістю 72 км/год. Машиніст включає гальма, і опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 ваги електровоза. Знайти час від моменту включення гальм до повної зупинки електровоза і відстань, пройдену за цей час.

18. Тіло кинуте вертикально вверх з початковою швидкістю V_0. Знайти закон руху, вважаючи, що тіло рухається тільки під впливом сили тяжіння.

19. Стержень довжиною $2l$ площею поперечного перерізу S на кінцях має однакову температуру t_0. По стержню протікає постійний струм $I,$ густина якого $i = I/S$. Знайти розподіл теплоти по стержню, якщо максимальна температура в центрі стержня t_{max}. Нехтуємо втратою теплоти в навколишнє середовище.

20. Різниця потенціалів на зажимах котушки рівномірно падає від $E_0 = 2B$ до $E_1 = 1B$ за 10с. Яким буде струм на 10-й секунді, якщо на початку

експерименту він був 163,2 А? Опір котушки 0,12 Ом, коефіцієнт індуктивності 0,1 Гн.

21. В посудині знаходиться 80 л водяного розчину солі. В нього надходить чиста вода зі швидкістю 5 л/хв., а суміш витікає з тією ж швидкістю, при чому концентрація розчину підтримується рівномірною шляхом перемішування. В початковий момент в розчині було 10 кг солі. Скільки солі буде в посудині через 10 хв. після початку процесу?

22. Футбольний м'яч масою 0,3 кг кинули вертикально вверх зі швидкістю 22 м/с. Знайти час і максимальну висоту підйому м'яча.

23. Матеріальна точка масою $m=4г$ без початкової швидкості поволі опускається у рідину. Опір рідини пропорційний швидкості опускання з коефіцієнтом пропорційності $k=4\,{}^{г}\!/_{с}$. Знайти швидкість точки через 1 хв. після початку опускання.

6.4. Ряди

6.4.1 Ряди з додатними членами

1. Дослідити на збіжність ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n}$, *якщо:*

1. а) $a_n=\dfrac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$; б) $a_n=\dfrac{n+3}{n^3-2}$; в) $a_n=\dfrac{1}{(\ln n)^n}$, $n\ge 2$;

г) $a_n=\dfrac{n^{10}}{(n+1)!}$; д) $a_n=\dfrac{1}{4n^2+4n}$.

2. а) $a_n=\left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; б) $a_n=\dfrac{n}{n^2+2}$; в) $a_n=\left(\dfrac{3}{n}\right)^n$;

г) $a_n=\dfrac{n^3}{3^n}$; д) $a_n=\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

3. а) $a_n=\dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$; б) $a_n=\dfrac{3n^2-2}{n^4+5n}$; в) $a_n=\left(\dfrac{3n}{n+2}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; д) $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

4. а) $a_n = \sqrt{\dfrac{3n+4}{5n+1}}$; б) $a_n = \dfrac{1}{3n-2}$; в) $a_n = 3^n\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{n!2^n}{n^n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, $n \geq 2$.

5. а) $a_n = 5^n tg\dfrac{1}{5^{2n}}$; б) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)^2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-2)}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geq 2$,.

6. а) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$; б) $a_n = \dfrac{n}{3n^3-1}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$; д) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n n!}$.

7. а) $a_n = (n+2)\ln\dfrac{n^2+1}{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{n^2+3}{4n^3+5n}$; в) $a_n = 3^{2n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n^2-4n+5}$.

8. а) $a_n = (n+1)arctg\dfrac{1}{n+2}$; б) $a_n = \dfrac{n}{n^3+3}$; в) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n^2-n}$; д) $a_n = \left(\dfrac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$.

9. а) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n+3}\arcsin\dfrac{1}{n+2}$; б) $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$; в) $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

г) $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n(n+1)!}$; д) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

10. а) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$; б) $a_n = \sin\dfrac{\pi}{2n^2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{3n-2}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{3^n n!}$; д) $a_n = \dfrac{\ln n + 1}{n \ln^2 n}$, $n \geq 2$.

11. а) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$; б) $a_n = \dfrac{2}{5n}$; в) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{n^2}{(2n)!}$; д) $a_n = \dfrac{5\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

12. а) $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$; б) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$; в) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$; д) $a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{3n-1}}}{\sqrt{3n-1}}$.

13. а) $a_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$; б) $a_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$; в) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$; д) $a_n = \dfrac{n(1+\ln(n^2-1))}{n^2-1}$.

14. а) $a_n = \dfrac{n}{1000n+1}$; б) $a_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; в) $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{5n+3}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{n^3}{e^n}$; д) $a_n = \dfrac{\ln^3 n}{n(\ln^4 n + 1)}$.

15. а) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$; б) $a_n = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; в) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

г) $a_n = \dfrac{n^2+5}{2^n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n + 4)^6}$.

16. а) $a_n = \ln\dfrac{2n+1}{3n+1}$; б) $a_n = \sin\dfrac{1}{n^2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln^2 n + 1)}$.

17. а) $a_n = \dfrac{5n^2+1}{2n^2+4n-1}$; б) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$; в) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)^n}$;

г) $a_n = \dfrac{e^{2n+1}}{n!}$; д) $a_n = \dfrac{5-\sqrt{\ln n}}{n}$.

18. а) $a_n = \dfrac{2n-5}{4n+8}$; б) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; в) $a_n = \dfrac{10^n}{(5n+1)^n}$;

г) $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{(n-3)\ln(n-3)}$, $n \ge 5$.

19. а) $a_n = \dfrac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+3n^2+2}}$; б) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; в) $a_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}$;

г) $a_n = \dfrac{n^{100}}{2^n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

20. а) $a_n = \dfrac{5n+7}{10n+4}$; б) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)^{2n}}$; в) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n^n}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n\ln^{\frac{3}{2}} n}$, $n \ge 2$; д) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$, $n \ge 2$.

21. а) $a_n = \dfrac{2n^2+5}{3n^2-1}$; б) $a_n = tg\,\dfrac{\pi}{4n}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n-3}{7n+2}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{n!}{2^n+1}$; д) $a_n = ne^{-n}$.

22. а) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2n}}$; б) $a_n = \left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$; в) $a_n = \left(\dfrac{n^2+4}{n^2+3}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$; д) $a_n = \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}}{\sqrt{n}}$.

23. а) $a_n = \dfrac{6n-1}{3n+5}$; б) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n$;

г) $a_n = \dfrac{2n-1}{3^n}$; д) $a_n = ne^{-2n^2}$.

24. а) $a_n = \dfrac{7n+3}{9n-2}$; б) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$; в) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{5n+7}{5n+4}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{2^n}{n^4}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n^2+3n+4}$.

25. а) $a_n = n^2 \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^4}}$; б) $a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$; в) $a_n = \frac{6^n}{(n+4)2^n}$;

г) $a_n = \frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n}}$; д) $a_n = \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$.

26. а) $a_n = \frac{2n}{n-1}$; б) $a_n = \sqrt{n+1}\,arctg\frac{4}{\sqrt{n^5}}$; в) $a_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$;

г) $a_n = \frac{4^n(n+1)!}{n^n}$; д) $a_n = \frac{n\ln(n^2+9)}{n^2+9}$.

27. а) $a_n = \frac{2n}{\sqrt{3n^2+2}}$; б) $a_n = 5^n\left(\frac{n}{5n-4}\right)^{2n}$; в) $a_n = \frac{5^n(n+1)!}{n^n}$;

г) $a_n = \frac{1}{n\ln n}$, $n \geq 2$,; д) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

28. а) $a_n = \frac{3n+1}{4n-3}$; б) $a_n = 2^n \arcsin\frac{\pi}{3^n}$; в) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \frac{2n+2}{2n^2+5n+1}$; д) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{n!3^n}$.

29. а) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$; б) $a_n = \ln\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^n$; в) $a_n = \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \frac{n^3}{2^{n+3}n!}$; д) $a_n = \frac{1}{n^2+4n+3}$.

30. а) $a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{3n^2+2n+3}}$; б) $a_n = \sqrt{n^3}\ln\left(1+\frac{2}{n^4}\right)$; в) $a_n = \frac{2^{n+1}}{(5n+4)^n}$;

г) $a_n = \frac{5^{n-1}}{(n+2)!}$; д) $a_n = \frac{1}{n^2+2n}$.

6.4.2. Ряди Лейбніца

1. З'ясувати, які з рядів $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n}$ *збігаються абсолютно, умовно, розбігаються.*

1. $a_n = \frac{1}{2n-1}$. 2. $a_n = \frac{1}{(2n-1)^3}$. 3. $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$.

4. $a_n = \dfrac{1}{n2^n}$. 5. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. 6. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

7. $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$. 8. $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{n!}$. 9. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

10. $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$. 11. $a_n = \dfrac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\sqrt[5]{n+1}}$. 12. $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

13. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{n+2}$. 14. $a_n = \dfrac{1}{3n-1}$. 15. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

16. $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$. 17. $a_n = \dfrac{1}{n^3+4n}$. 18. $a_n = \dfrac{1}{(n+1)2^{2n}}$.

19. $a_n = \dfrac{1}{1+e^{2n}}$. 20. $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$. 21. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^6+n+3}}$.

22. $a_n = \dfrac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$. 23. $a_n = arctg\,\dfrac{1}{n^2}$. 24. $a_n = n\arcsin\dfrac{\pi}{n^3}$.

25. $a_n = \dfrac{1}{2n(3n-1)}$. 26. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+5}}$. 27. $a_n = \dfrac{1}{n^2+\sin^2 n}$.

28. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+3}$. 29. $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+4}$. 30. $a_n = \dfrac{n}{3n+2}$.

6.4.3. Степеневі ряди

1. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *та дослідити на кінцях інтервалу:*

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)$. 2. $u_n = \dfrac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2 n}$. 3. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$.

4. $u_n = \dfrac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$. 5. $u_n = \dfrac{x^n}{2n+1}$. 6. $u_n = \dfrac{5^n+(-3)^n}{n+1}x^n$.

7. $u_n = \dfrac{n}{3^n(n+1)}x^n$. 8. $u_n = \dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$. 9. $u_n = \dfrac{(x+4)^n}{5n-4}$.

10. $u_n = \dfrac{3^n x^n}{n+1}$. 11. $u_n = \dfrac{(x+3)^{2n}}{n(2n-1)}$. 12. $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{(3n-2)n}$.

13. $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{2^n(5n-3)}$. 14. $u_n = \dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$. 15. $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{nx^n}{3^{n-1}}$.

16. $u_n = 3^{n^2}x^{n^2}$. 17. $u_n = 3^n(x+1)^n$. 18. $u_n = \dfrac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$.

19. $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$. 20. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n$. 21. $u_n = 2^n x^{n^2}$.

22. $u_n = \dfrac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n$. 23. $u_n = \dfrac{(x-1)^n}{(n+4)2^n}$. 24. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(x-3)^{2n}}{5n+4}$.

25. $u_n = \dfrac{(2x)^n}{2x+1}$. 26. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(5x)^n}{(2n+1)n}$. 27. $u_n = \dfrac{x^n}{n^3 5^n}$.

28. $u_n = \dfrac{(x+5)^n}{2n4^n}$. 29. $u_n = \dfrac{4^n(x+4)^n}{n^2+1}$. 30. $u_n = \dfrac{nx^n}{(n+2)3^{2n}}$.

2. Записати перші п'ять членів розкладу функції в ряд Тейлора в околі точки x_0:

1. $y = \cos x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1$.
3. $y = \dfrac{1}{x+2}, \quad x_0 = -3$.
4. $y = e^x, \quad x_0 = 1$.
5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x_0 = 5$.
6. $y = \sin x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
7. $y = \ln(x+3), \quad x_0 = -2$.
8. $y = 2^{x-3}, \quad x_0 = 4$.
9. $y = 3^{-5x}, \quad x_0 = 1$.
10. $y = e^{1-6x}, \quad x_0 = \dfrac{1}{6}$.
11. $y = \sin^2(3x+1), \quad x_0 = -\dfrac{1}{3}$.
12. $y = \sqrt[3]{(5-x)^2}, \quad x_0 = 4$.

13. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right),\quad x_0=-\dfrac{\pi}{4}.$

14. $y=\dfrac{2}{5x+4},\quad x_0=-1.$

15. $y=\dfrac{2}{x^2-1},\quad x_0=2.$

16. $y=\dfrac{1}{x^2},\quad x_0=-1.$

17. $y=\sin^2 x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}.$

18. $y=\ln(x-1),\quad x_0=2.$

19. $y=\dfrac{1}{2x-1},\quad x_0=-1.$

20. $y=\dfrac{1}{(x+1)^2},\quad x_0=2.$

21. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}},\quad x_0=-3.$

22. $y=e^{5x+4},\quad x_0=-2.$

23. $y=\cos(5x-4),\quad x_0=\dfrac{4}{5}.$

24. $y=\cos^2(x-4),\quad x_0=4$

25. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3x-2}},\quad x_0=1.$

26. $y=e^{2x+8},\quad x_0=-8.$

27. $y=\dfrac{1}{(5x-1)^3},\quad x_0=-1.$

28. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+11}},\quad x_0=-1.$

29. $y=\sqrt[5]{3x+7},\quad x_0=1.$

30. $y=\ln(5x-4),\quad x_0=1.$

3. Розкласти в ряд Маклорена функцію:

1. $y=x\sqrt[3]{27-2x}.$

2. $y=\dfrac{7}{12-x-x^2}.$

3. $y=\dfrac{\sin^2 x}{5x^2}.$

4. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

5. $y=x^2e^{-5x}.$

6. $y=x\ln(1+x).$

7. $y=x\cos x^2.$

8. $y=\dfrac{1-\cos x^2}{x}.$

9. $y=2x\cos^2\dfrac{x}{2}.$

10. $y=x^3\sqrt{27-2x}.$

11. $y=5xe^{-3x^3}.$

12. $y=x\sin 2x.$

13. $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}.$

14. $y=\dfrac{e^{2x}-1}{x}.$

15. $y=\dfrac{x}{9+x^2}.$

16. $y=x\cos 2x.$

17. $y=\dfrac{1}{x^2-4}.$

18. $y=x\sqrt{2+x^2}.$

19. $y=\frac{2x+4}{x^2-1}$.

20. $y=x-arctgx^2$.

21. $y=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$.

22. $y=x^2\sin x^2$.

23. $y=\frac{1-\cos x^3}{x^6}$.

24. $y=\frac{1}{\sqrt{9-3x}}$.

25. $y=\ln(1-2x)$.

26. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

27. $y=xe^{-3x}$.

28. $y=\sqrt[5]{1+3x}$.

29. $y=xe^{\frac{x^2}{2}}$.

30. $y=\cos^2 x$.

4. Обчислити перші чотири відмінні від нуля члени розв'язку диференціального рівняння:

1. $y'-y=0, \quad y(0)=1$.

2. $\left(1+x^2\right)y'=1, \quad y(0)=0$.

3. $y'=\cos x+y^2, \quad y(0)=1$.

4. $y''-xy'+y=e^x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$.

5. $y'=2e^y-xy, \quad y(0)=0$.

6. $y''=-x^2y'-2xy+1, \quad y(0)=y'(0)=0$.

7. $y'=x^2+y^2, \quad y(0)=2$.

8. $y'=y\cos x+x, \quad y(0)=1$.

9. $y'=\left(\cos^2 x\right)y+1, \quad y(0)=1$.

10. $y'=e^x+y^2, \quad y(0)=0$.

11. $y'=e^x+y, \quad y(0)=4$.

12. $y'=\left(\sin x^2\right)y+y, \quad y(0)=1$.

13. $y'=x+x^2+y^2, \quad y(0)=0$.

14. $y'=x^2y+e^{5y}, \quad y(0)=0$.

15. $y'=\cos xy-5x, \quad y(0)=1$.

16. $y'=\sin x+y^2, \quad y(0)=1$.

17. $\left(1-x^2\right)y''-xy'=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$.

18. $y''+xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$.

19. $y''=x^2y, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$.

20. $y'=y+y^2, \quad y(0)=3$.

21. $y'=2\cos x-xy^2, \quad y(0)=0$.

22. $y''=-2xy, \quad y(0)=y'(0)=1$.

23. $y'=e^{x+y}+y, \quad y(0)=0$.

24. $y'=2e^y+xy, \quad y(0)=0$

25. $y'=y-7e^{xy}, \quad y(0)=0$.

26. $y'=e^{\cos x}-y^2, \quad y(0)=0$.

27. $y'=\sin x+\frac{1}{2}y^2, \quad y(0)=1$.

28. $y'=e^{x^2y}+x, \quad y(0)=0$.

29. $y' = \sin y^2 - x, \quad y(0) = 0.$

30. $y' = x^3 + y \sin 5x, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

5. Обчислити з точністю до 0,001

1. а) $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$; б) $\cos 1^\circ$.

2. а) $\int_{0}^{0,8} x^{10} \sin x dx$; б) $\cos 10^\circ$.

3. а) $\int_{0}^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; б) $e^{0,37}$.

4. а) $\int_{0}^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2} dx$; б) $\cos 36^\circ$.

5. а) $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\sqrt[3]{250}$.

6. а) $\int_{0}^{1} \sin x^2 dx$; б) $\ln 1,08$.

7. а) $\int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\sin 1^\circ$.

8. а) $\int_{0}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$; б) $\sqrt[3]{68}$.

9. а) $\int_{0}^{0,5} \frac{arctgx}{x} dx$; б) $\sqrt[3]{130}$.

10. а) $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$; б) $\ln 1,2$.

11. а) $\int_{0}^{0,5} e^{x^2} dx$; б) $\sin \frac{\pi}{5}$.

12. а) $\int_{0}^{0,8} \frac{dx}{1+x^5}$; б) $e^{0,43}$.

13. а) $\int_{0}^{1} \cos x^2 dx$; б) $\sin 24^\circ$.

14. а) $\int_{1}^{2} \frac{e^{-x}}{x} dx$; б) $\sin 10^\circ$.

15. а) $\int_{2}^{4} e^{\frac{1}{x}} dx$; б) $\cos 9^\circ$.

16. а) $\int_{0,1}^{0,6} \frac{\sin 2x^3}{x^3} dx$; б) $\ln \frac{4}{5}$.

17. а) $\int_{0,2}^{0,3} \cos^2 3x dx$; б) $\sqrt[4]{700}$.

18. а) $\int_{0,1}^{0,6} \frac{\sin 2x^3}{x^3} dx$; б) $e^{0,18}$.

19. а) $\int_{0,01}^{0,25} \sqrt{x} e^{-5x^2} dx$; б) $\sqrt[3]{70}$.

20. а) $\int_{0,1}^{0,2} \frac{\ln(1+x^3)}{x} dx$; б) $\cos 3^\circ$.

21. а) $\int_{0}^{0,1} \sin \frac{x^3}{3} dx$; б) $\sin 18^\circ$.

22. а) $\int_{0}^{1} \cos^2 2x dx$; б) $\sqrt[3]{129}$.

23. а) $\int_{0}^{9} \sqrt{x} e^{x^2} dx$; б) $e^{0,33}$.

24. а) $\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{1-e^{-6x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\cos 28^\circ$.

25. а) $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt[10]{1+x^3}dx$; б) $\ln 1,4$.

26. а) $\int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^2}}dx$; б) $e^{0,23}$.

27. а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{1+x^3}dx$; б) $\ln 2,3$.

28. а) $\int_{0,3}^{0,6} \frac{1-\cos x}{x}dx$; б) $\ln 1,2$.

29. а) $\int_{0,1}^{0,4} \frac{\sin 3x^2}{x}dx$; б) $\cos 20^\circ$.

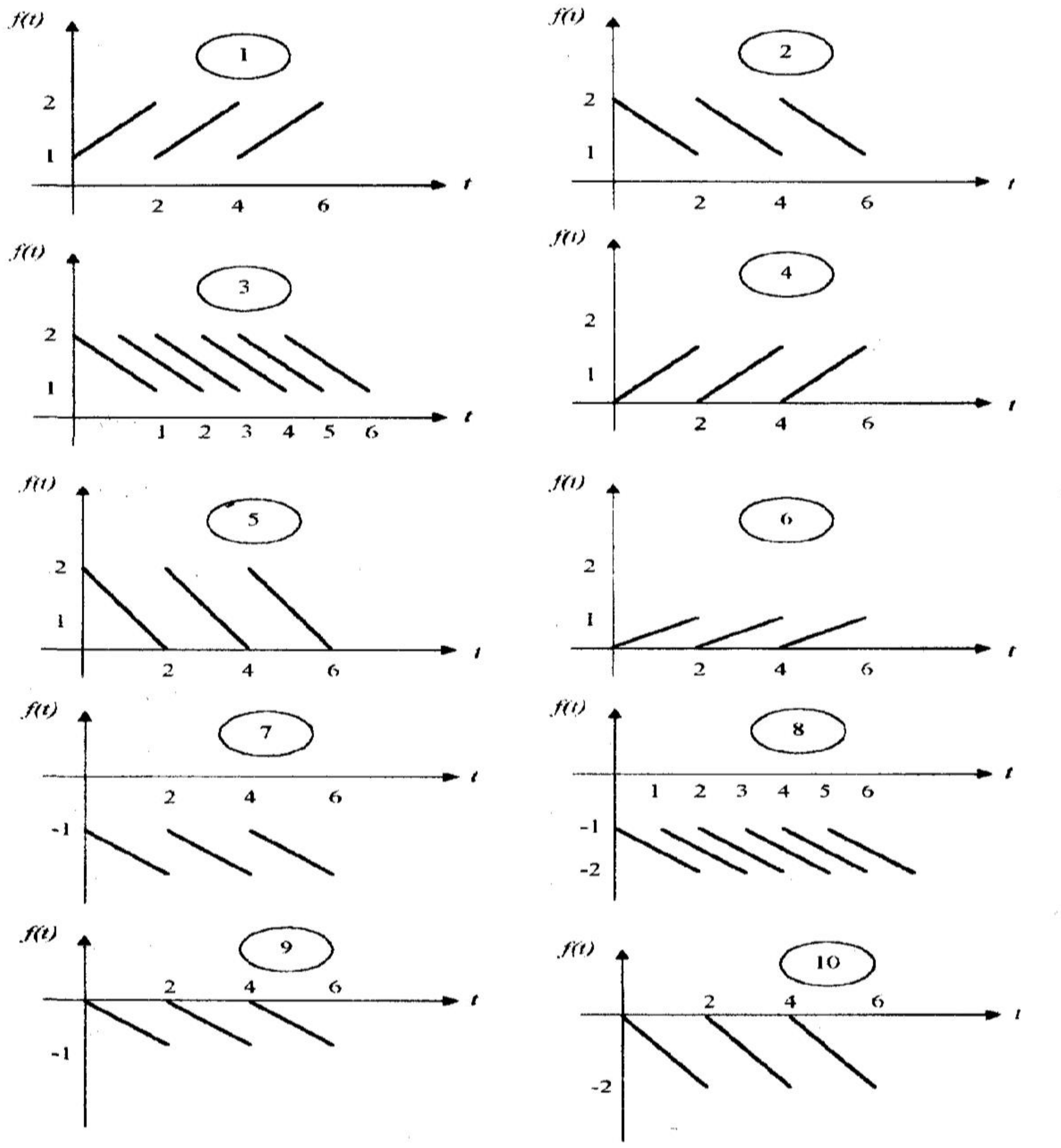
30. а) $\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x^2}dx$; б) $\sin 12^\circ$.

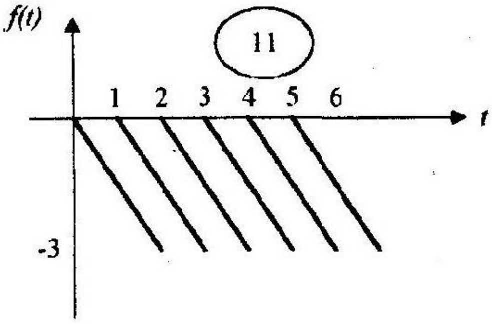
6.4.4. Ряди Фур'є

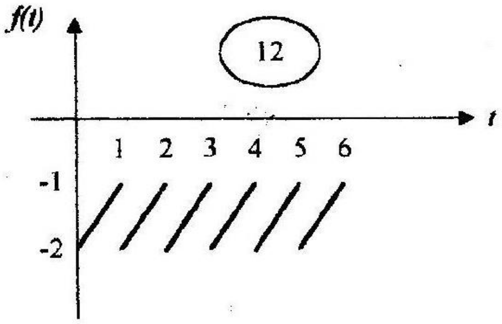
1. Розкласти в ряд Фур'є

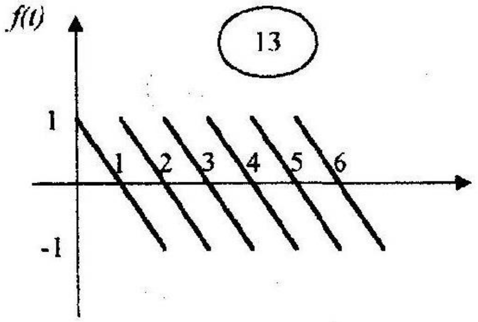
1. $y=1+x,\quad (0,\pi)$.
2. $y=\frac{\pi-x}{2},\quad (0,\pi)$.
3. $y=1+2x,\quad (0,1)$.
4. $y=x^2,\quad (0,\pi)$.
5. $y=-2x,\quad (0,2)$.
6. $y=\cos 2x,\quad (0,\pi)$.
7. $y=\frac{x}{2},\quad (0,\pi)$.
8. $y=3x+2,\quad (0,2)$.
9. $y=-2x-1,\quad (0,2)$.
10. $y=-x+3,\quad (0,\pi)$.
11. $y=x+3,\quad (0,\pi)$.
12. $y=\frac{x}{3},\quad (0,\pi)$
13. $y=-3x,\quad (0,2)$.
14. $y=2+x,\quad (0,\pi)$.
15. $y=2x,\quad (0,1)$.
16. $y=x^2+1,\quad (0,2)$.
17. $y=x,\quad (0,\pi)$.
18. $y=1-2x,\quad (0,2)$.
19. $y=x-1,\quad (0,1)$.
20. $y=x^3,\quad (0,\pi)$.
21. $y=2-x,\quad (0,\pi)$.
22. $y=-2x+1,\quad (0,\pi)$.
23. $y=-x+1,\quad (0,2)$.
24. $y=2x+1,\quad (0,1)$.
25. $y=\frac{x}{3},\quad (0,3)$.
26. $y=-x-3,\quad (0,1)$.
27. $y=3x,\quad (0,\pi)$.
28. $y=1-3x,\quad (0,2)$.
29. $y=2x+1,\quad (0,\pi)$.
30. $y=\frac{x}{2}-1,\quad (0,1)$.

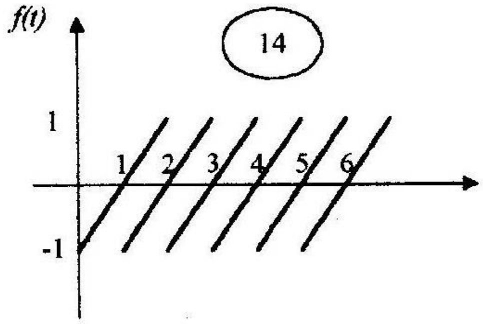
2. Розкласти в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію, задану графіком. Побудувати амплітудний та фазовий спектри.

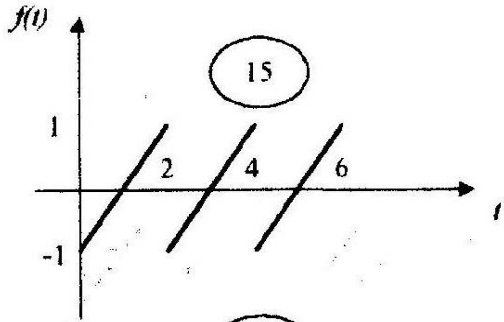


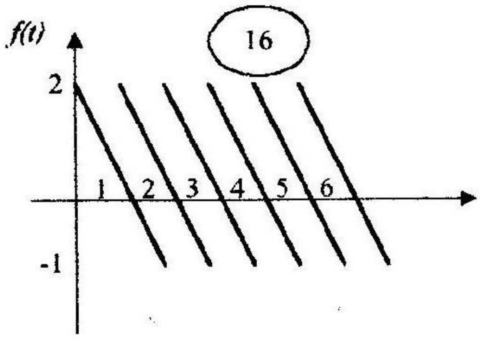

f(t)
11
1 2 3 4 5 6
t
-3

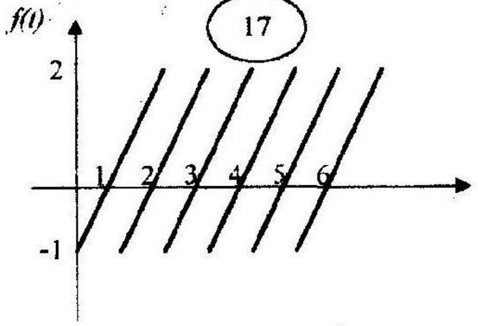

f(t)
12
t
1 2 3 4 5 6
-1
-2

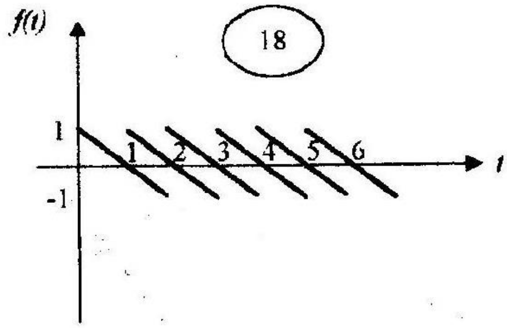

f(t)
13
1
1 2 3 4 5 6
-1

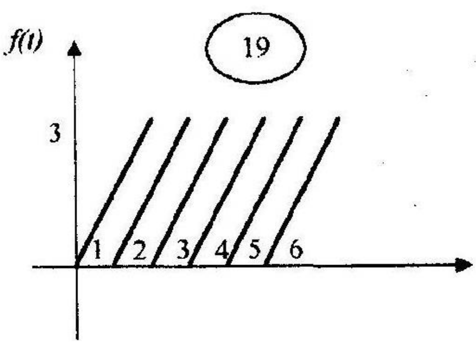

f(t)
14
1
1 2 3 4 5 6
-1

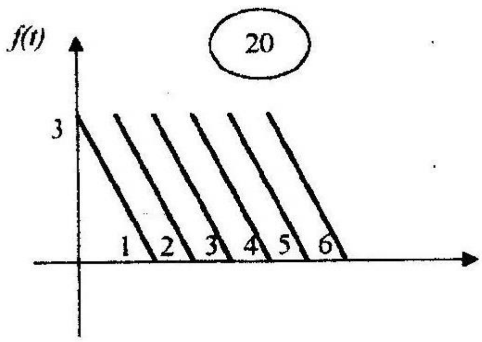

f(t)
15
1
2 4 6
t
-1

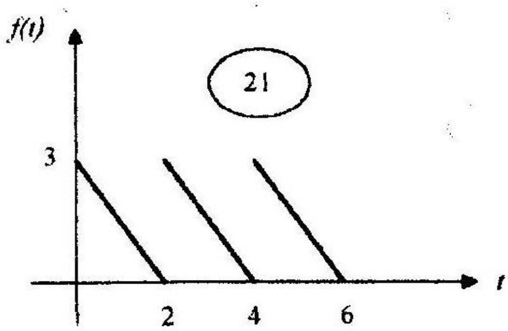

f(t)
16
2
1 2 3 4 5 6
-1

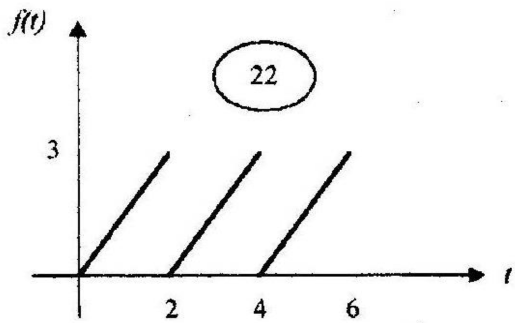

f(t)
17
2
1 2 3 4 5 6
-1

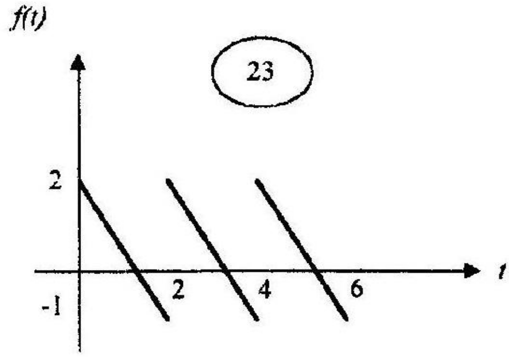

f(t)
18
1
1 2 3 4 5 6
t
-1

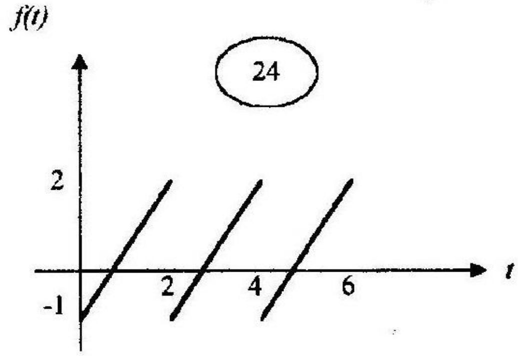

f(t)
19
3
1 2 3 4 5 6

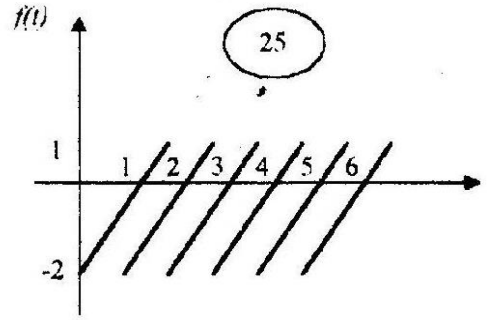

f(t)
20
3
1 2 3 4 5 6

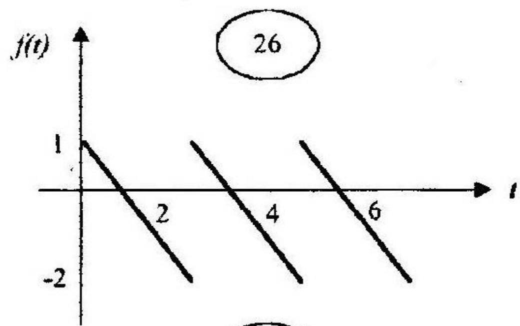

f(t)
21
3
2
4
6
t

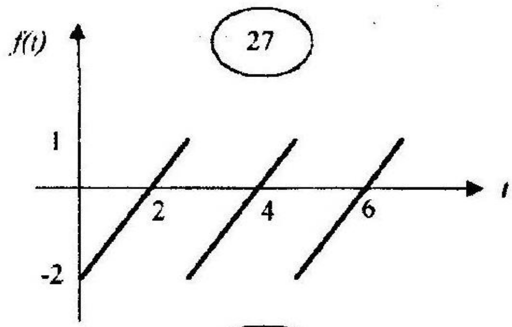

f(t)
22
3
2
4
6
t

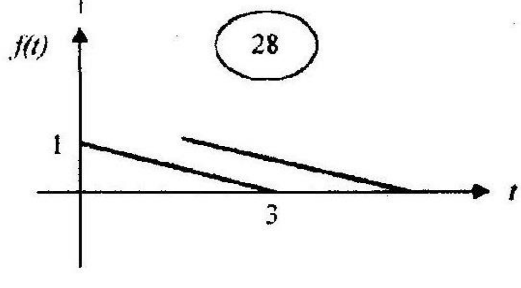

f(t)
23
2
-1
2
4
6
t

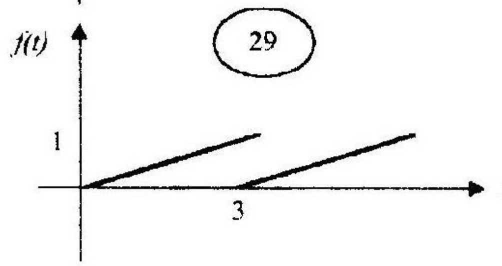

f(t)
24
2
-1
2
4
6
t

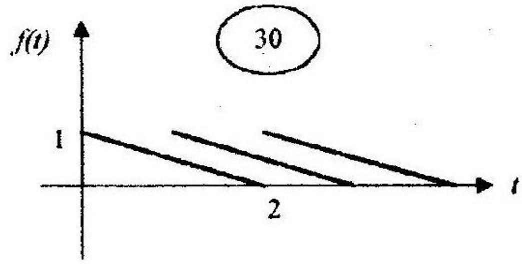

f(t)
25
1
-2
1
2
3
4
5
6


f(t)
26
1
-2
2
4
6
t


f(t)
27
1
-2
2
4
6
t


f(t)
28
1
3
t


f(t)
29
1
3
t


f(t)
30
1
2
t

ЛІТЕРАТУРА

1. Петрук В.А., Педорченко Л.І.,Петрунін В.С Збірник індивідуальних завдань з вищої математики ”Дференціальні рівняння”, частина 5**.** Навчальний посібник, Вінниця, 2005, 121с.

2. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.Л. Краснов. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1989. – 345 с.