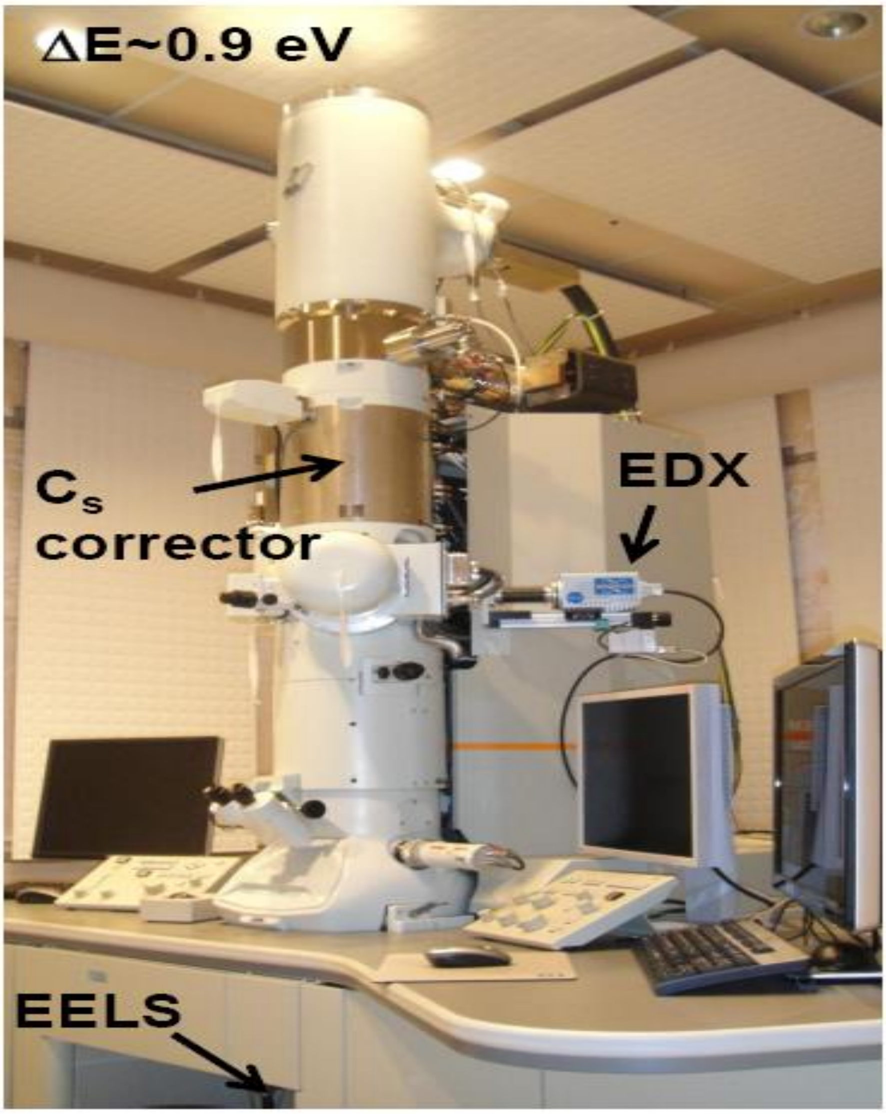
Методичні вказівки
для практичних занять і самостійної роботи з фізики ч.1



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки для практичних занять і самостійної роботи з фізики ч.1

Вінниця
ВНТУ
2018

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №__ від _________ р.)

Рецензенти:

О.І.Жмурко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і інформаційних технологій, Вінницького державного педагогічного університету ім.М.М. Коцюбинського

М.В.Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент загальної фізики, ВНТУ

Методичні вказівки для практичних занять і самостійної роботи з фізики ч.1 / Уклад. В.М. Бурдейний. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 98 с.

У даних методичних вказівках подано загальні правила розв'язання текстових задач з фізики, з детальним поясненням наведено зразки розв'язування біля 50-ти задач з першої частини курсу загальної фізики, запропоновано більш, ніж 100 задач для самостійної роботи студентів.

ЗМІСТ

Вступ

Практичні заняття є органічною невід'ємною частиною втузівського курсу фізики. Основна мета цього виду занять полягає у засвоєнні законів і закономірностей, притаманних найпростішим, а саме, фізичним, формам руху матерії. Вказана мета досягається шляхом розв'язування задач, серед них чи не найбільш інструктивними є кількісні текстові задачі, розв'язуючи які, набуваємо досвід і навички застосовувати фізичні закони, засвоюємо методи отримання аналітичних результатів, удосконалюємо техніку числових розрахунків, навчаємося давати критичну оцінку одержаних результатів.

Розв'язування задач з фізики у високій мірі алгоритмізоване. Дотримуючись певних формальних правил, можна знайти розв'язок великої кількості стандартних задач. Ці правила зводяться до наступних дій:

1) Уважно прочитати умову задачі;
2) Встановити, які фізичні явища є предметом розгляду у задачі;
3) Пригадати основні якісні і кількісні закономірності, які описують чи пояснюють ці явища;
4) З'ясувати, які величини необхідно знайти в результаті розв'язання задачі;
5) Чітко виділити величині, задані в умові, звернувши увагу також на ті, які можуть бути представлені у прихованій формі;
6) Доповнити дані, приєднавши необхідні табличні значення;
7) Виразити числові дані в основних одиницях системи СІ;
8) Проілюструвати постановку задачі схематичними рисунками з нанесенням відомих величин і тих, які підлягають встановленню;
9) Записати в аналітичній формі зв'язки між фізичними величинами і закони, які описують досліджуванен фізичне явище;
10) Розв'язавши одержану систему рівнянь (рівняння), знайти шукані фізичні величини. виражені через дані умови задачі;
11) Перевірити розмірність, одержаних результатів;
12) Виконавши обчислення, знайти числове значення;

Зрозуміло, що не всі елементи є обов'язковими. Деякі з них можуть бути опущені на основі інтуїції та набутого досвіду.

Запропоновані тут «Методичні вказівки…» містять біля 50-ти прикладів розв'язування типових задач та майже сотню задач для самостійної роботи, які охоплюють розділи «Механіка», «Електромагнетизм», «Коливання та хвилі» курсу загальної фізики.

Тема 1. КІНЕМАТИКА РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.

План

1.Способи описання руху матеріальної точки.

2.Вектор переміщення шлях. Швидкість і прискорення.

3.Тангенційне і нормальне прискорення.

4. Кутова швидкість і кутове прискорення.

5. Зв'язок лінійних і кутових кінематичних величин.

Основні означення і співвідношення.

1.

$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t) -$ радіус-вектор матеріальної точки;

тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} -$орти системи координат, $x(t), y(t), z(t) -$декартові координати точки

2.

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) -$вектор переміщення.

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} -$миттєва швидкість; $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt} -$прискорення.

3.

$a_\tau = \dfrac{dv}{dt} -$тангенційне прискорення;

$a_n = \dfrac{v^2}{R} -$нормальне прискорення.

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

4.

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} -$кутова швидкість

$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} -$кутове прискорення.

5.

$\vec{v} = [\omega \times \vec{r}] -$зв'язок лінійної і кутової швидкостей;

$a_n = \omega^2 r -$нормальне прискорення.

$a_\tau = \varepsilon r -$тангенційне прискорення.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1.

Швидкості двох тіл, які рухаються вздовж осі x змінюються за законом $v_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ і $v_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 2$ м/с; $B_1 = 5$ м/с²; $A_2 = 10$ м/с; $B_2 = 1$ м/с²; $C_1 = C_2 = 0{,}3$ м/с³.Перше починає рух з точки $x_1 = 0$, а друге– з точки $x_2 = 10$ м. Знайти прискорення тіл в той момент часу, коле перше тіло наздожене друге.

Дано:

$v_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$;

$v_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$;

$A_1 = 2$ м/с; $B_1 = 5$ м/с²;

$A_2 = 10$ м/с; $B_2 = 1$ м/с²;

$C_1 = C_2 = 0{,}3$ м/с³.

$x_1 = 0$,

$x_2 = 10$ м;

$x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$.

Знайти : прискорення a_1 і a_2 в момент часу $\tilde{t}$.

Розв'язування.

В той момент часу $\tilde{t}$, коли перше тіло наздожене друге їх координати будуть рівними. Якщо відомо закон руху кожного із тіл, то цей момент знайдемо, прирівнявши координати, задані як функції часу. Таким чином, перш за все слід встановити закони руху тіл, тобто залежності координат від часу. Для цього звернемося до означення швидкості

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

Тут, як і в подальшому розгляді, маються на увазі проекції кінематичних величин на вісь x. Перепишемо визначення (1) у формі, яка дозволяє перехід до інтегрування, а саме:

$$dx = v dt \qquad (2)$$

Інтегрування в межах від 0 до t дає:

$$x = x_0 + \int_0^t v(t_1) dt_1 \qquad (3)$$

де x_0 –значення координати в початковий момент час, а t_1 позначає змінну інтегрування.Підстановкою швидкостей в залежності від часу отримаємо:

$$x_1(t) = \int_0^t (A_1 + B_1 t_1 + C_1 t_1^2) dt_1 \quad (4)$$

$$x_2(t) = x_2 + \int_0^t (A_2 + B_2 t_1 + C_2 t_1^2) dt_1 \quad (5)$$

Після інтегрування дістаємо:

$$x_1(t) = \int_0^t (A_1 + B_1 t_1 + C_1 t_1^2) dt_1 = \left(A_1 t_1 + \frac{B_1 t_1^2}{2} + \frac{C_1 t_1^3}{3} \right) \Bigg|_0^t = A_1 t + \frac{B_1 t^2}{2} + \frac{C_1 t^3}{3} \quad (6)$$

$$x_2(t) = x_2 + \int_0^t (A_2 + B_2 t_1 + C_2 t_1^2) dt_1 = \left(x_2 + A_2 t_1 + \frac{B_2 t_1^2}{2} + \frac{C_2 t_1^3}{3} \right) \Bigg|_0^t = \\ = x_2 + A_2 t + \frac{B_2 t^2}{2} + \frac{C_2 t^3}{3} \quad (7)$$

Прирівнявши координати, для шуканого моменту часу $\tilde{t}$ матимемо рівняння:

$$A_1 \tilde{t} + \frac{B_1 \tilde{t}^2}{2} + \frac{C_1 \tilde{t}^3}{3} = x_2 + A_2 \tilde{t} + \frac{B_2 \tilde{t}^2}{2} + \frac{C_2 \tilde{t}^3}{3} \quad (8)$$

Зведенням подібних одержуємо:

$$\frac{(B_1 - B_2)\tilde{t}^2}{2} + (A_1 - A_2)\tilde{t} - x_2 = 0 \quad (9)$$

Розв'язки рівняння (9) записуються у наступному вигляді

$$\tilde{t} = \frac{-(A_1 - A_2) + \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 2x_2(B_1 - B_2)}}{(B_1 - B_2)} \quad (10)$$

Оскільки $x_2 > 0$ і $B_1 - B_2 > 0$, то залишаємо лише додатній розв'язок, як єдиний, який має фізичний зміст. Тепер слід звернутися до означення прискорення:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (11)$$

Підстановкою швидкостей як явних функцій часу, одержуємо:

$$a_1(t) = \frac{d(A_1 + B_1 t + C_1 t^2)}{dt} = B_1 + 2C_1 t \quad (12)$$

$$a_2(t) = \frac{d(A_2 + B_2 t + C_2 t^2)}{dt} = B_2 + 2C_2 t \quad (13)$$

<u>Аналіз одиниць вимірювання</u>:Встановимо одиницю вимірювання виразу $\sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 2x_2(B_1 - B_2)}$. Одержуємо:

$$[\sqrt{(A_1-A_2)^2+2x_2(B_1-B_2)}]=\sqrt{[(A_1-A_2)^2+2x_2(B_1-B_2)]}=((\text{м/с})^2)^{1/2}=\text{м/с} \quad (14)$$

Тут враховано, що $[x_2(B_1-B_2)]=[x_2][(B_1-B_2)]=$ м·(м/с²)=м²/с². Прийнявши до уваги (14) , дістаємо:

$$[\tilde{t}\,]=\frac{[(A_1-A_2)]}{[(B_1-B_2)]}=\text{(м/с)·(с}^2\text{/м)=с} \quad (15)$$

Оскільки $[C_1 t]=[C_1][t]=$(м/с³)·с=м/с², то для формул (12) і (13) знаходимо:

$$[a_1(t)]=[B_1+2C_1 t]=\text{м/с}^2 \quad (16)$$

$$[a_2(t)]=[B_2+2C_2 t]=\text{м/с}^2 \quad (17)$$

<u>Обчислення</u>:

Обчислимо $\tilde{t}$ у відповідності з (10) і результат підставимо в (12) і (13).

$$\tilde{t}=\frac{-(A_1-A_2)+\sqrt{(A_1-A_2)^2+2x_2(B_1-B_2)}}{(B_1-B_2)}=$$
$$=\frac{-(2-10)+\sqrt{(2-10)^2+2\cdot10\cdot(5-1)}}{(5-1)}=\frac{8+\sqrt{64+80}}{4}=\frac{8+12}{4}=5(s) \quad (18)$$

$$a_1=B_1+2C_1\tilde{t}=5+2\cdot0{,}3\cdot5=8(\text{м/с}^2) \quad (19)$$

$$a_2=B_2+2C_2\tilde{t}=1+2\cdot0{,}3\cdot5=4(\text{м/с}^2) \quad (20)$$

Відповідь: $a_1=8$ м/с² ; в загальному вигляді $a_1=B_1+2C_1\tilde{t}$;

$a_2=4$ м/с² ; в загальному вигляді $a_2=B_2+2C_2\tilde{t}$;

перше тіло наздожене друге через проміжок часу

$$\tilde{t}=\frac{-(A_1-A_2)+\sqrt{(A_1-A_2)^2+2x_2(B_1-B_2)}}{(B_1-B_2)}$$ після початку руху.

Приклад 2

Матеріальна точка здійснює прямолінійний рух (вздовж осі Ох), кінематичне рівняння руху якої має такий вигляд $x(t)=A+Bt+Ct^3$, де $\mathrm{A}=4\text{м}$, $B=2\ \text{м}/c$, $\mathrm{C}=-0{,}5\text{м}/\text{c}^3$. Визначити координату точки, миттєву швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ для моменту часу $t=2\ c$після початку руху.

Дано:

$x(t)=A+Bt+Ct^3$

$\mathrm{A}=4\text{м}$

$B = 2$ м/c
$C = -0{,}5$м/с^3
$t = 2\ c$

Знайти: $x(t) - ?$
$v(t) - ?$
$a(t) - ?$

Розв'язування

Координату точки $x(t)$ знаходимо, в рівняння руху підставляємо час $t = 2\ c$: $x(t) = A + Bt + Ct^3 = 4 + 2 \cdot 2 + (-0{,}5) \cdot 2^3 = 4$ м.

Миттєву швидкість $v(t)$ знаходимо, продиференціювавши координату x за часом t (взяти похідну): $v(t) = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 2 + 3 \cdot (-0{,}5) \cdot 2^2 = -4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знак мінус вказує на те, що в заданий момент часу точка рухається в від'ємному напрямку координатної осі Ох.

Миттєве прискорення $a(t)$ в довільний момент часу, знаходимо, взявши другу похідну від координати x за часом t або першу похідну від швидкості за часом t: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6Ct = 6 \cdot (-0{,}5) \cdot 2 = -6$ м/с^2. Знак мінус вказує на те, що в заданий момент часу прискорення направлено в від'ємному напрямку координатної осі Ох.

Відповідь: 4м,-4м/с, -6 м/с^2.

Приклад 3

Матеріальна точка здійснює обертальний рух, кінематичне рівняння руху якої має такий вигляд: $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$рад, $B = 2$ рад/c, $C = -0{,}5$рад/с^3. Визначити кутову координату точки, миттєву кутову швидкість $\omega(t)$ та кутове прискорення $\varepsilon(t)$ для моменту часу $t = 2\ c$ після початку руху.

Дано:
$\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$
$A = 4$ рад
$B = 2$ рад/c
$C = -0{,}5$ рад/с^3
$t = 2\ c$

Знайти:$\varphi(t)-?\omega(t)-?\varepsilon(t)-?$

Розв'язування

Кутову координату точки $\varphi(t)$ знаходимо, в рівняння руху підставляємо час $t = 2\ c$: $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3 = 4 + 2 \cdot 2 + (-0{,}5) \cdot 2^3 = 4$ рад.

Миттєву кутову швидкість $\omega(t)$ знаходимо, продиференціювавши кутову координату φза часом t (взяти похідну): $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{B} + 3\mathrm{C}t^2 = 2 + 3 \cdot (-0{,}5) \cdot 2^2 = -4\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Миттєве кутове прискорення $\varepsilon(t)$ в довільний момент часу, знаходимо, взявши другу похідну від кутової координати φ за часом t або першу похідну від кутової швидкості за часом t: $\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 6Ct = 6 \cdot (-0{,}5) \cdot 2 = -6$ рад/с^2.

Відповідь: 4рад, -4рад/с, -6 рад/с^2.

Приклад 4

Тіло обертається навколо нерухомої осі. Залежність кута повороту тіла від часу задана рівнянням $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$, де $\mathrm{A} = 10$ рад, $\mathrm{B} = 20$ рад/с, $\mathrm{C} = -2$ рад/с^2. Знайти модуль повного прискорення точки $|\vec{a}|$, розміщеної на відстані $R = 0{,}1$ м від осі обертання, в момент часу $t = 4\ c$.

Дано:

$\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$

$\mathrm{A} = 10$ рад,

$\mathrm{B} = 20$ рад/с

$\mathrm{C} = -2$ рад/с^2

$t = 4\ c$

$R = 0{,}1$ м

Знайти: $|\vec{a}|-?$

Розв'язування

Повне прискорення точки $\vec{a}$, яка рухається по кривій лінії, можна знайти як геометричну суму тангенціального прискорення $\overrightarrow{a_\tau}$, направленого по дотичній до траєкторії, та нормального прискорення $\overrightarrow{a_n}$, направленого до центра кривизни траєкторії:

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (1)

Оскільки вектори взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення:

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. (2)

Тангенціальне та нормальне прискорення точки тіла, що обертається, виражаються за формулами:

$a_\tau = \varepsilon R$, $a_n = \omega^2 R$,

де ε—кутове прискорення тіла; ω – кутова швидкість тіла.

Замінимо у формулі (2) a_τ і a_n на відповідні вирази. Тоді знайдемо:

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. (3)

Кутову швидкість ω обчислюємо за першою похідною від кута повороту за часом t:

$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct = 20 + 2 \cdot (-2) \cdot 4 = 4$ (рад/с).

Кутове прискорення ε знаходимо, взявши першу похідну від кутової швидкості ω за часом t:

$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = 2C = 2 \cdot (-2) = -4$ (рад/с^2).

Кутове прискорення заданого руху є сталим, тобто не залежить від часу. Підставимо значення ω і ε та задане значення R у формулу (3):

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$,

$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65$ (м/с^2).

Відповідь: 1,65 м/с^2.

Приклад 5

Матеріальна точка масою $m = 5$кг кинута з початковою швидкістю $v_0 = 2$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Знайти рух цієї точки в просторі під дією сили земного тяжіння, тобто визначити модуль вектора переміщення $|\vec{r}(t)|$ для моменту часу $t = 10$ с та знайти рівняння траєкторії.

Дано:

$m = 5$кг

$v_0 = 2$ м/с

$\alpha = 30^\circ$

$t = 10$ с

Знайти:$\vec{r}(t)-?$
$z(y)-?$

Розв’язування
Для спрощення початкове положення тіла приймемо за початок координат системи відліку, зв’язаного з поверхнею Землі. Систему координат розмістимо так, щоб початкова швидкість знаходилась у площині YOZ, вісь Zспрямуємо вертикально вгору, а вісь Y – горизонтально.
На точку А діє лише сила земного тяжіння $\vec{F}=m\vec{g}$. За такого вибору системи координат проекції сили на осі координат дорівнюватимуть:$F_x=F_y=0$, $F_z=-mg$.
Початковими кінематичними характеристиками руху точки будуть:
$t=0, x_0=y_0=z_0=0, v_{0x}=0, v_{0y}=v_0 cos\alpha, v_{0z}=v_0 sin\alpha$.
З цих умов диференціальними рівняннями руху точки є:
$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, m\frac{d^2y}{dt^2}=0, m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg$.
Скоротивши ліві і праві частини наведених рівнянь на m, дістанемо:
$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=0, \frac{d^2z}{dt^2}=-g$.
Проінтегруємо перше з цих рівнянь:
$\frac{dx}{dt}=C_1$.
Оскільки $\frac{dx}{dt}=v_x=C_1$. Тобто проекція швидкості $\vec{v}$на вісь X є величина стала під час руху точки. Оскільки в початковий момент часу$v_x=v_{0x}=0$, то $C_1=0$. Врахувавши це отримаємо: $\frac{dx}{dt}=0$, звідки $x=C_2$. Для початкового моменту часу $x=x_0=C_2=0$.
Отже, розв’язок першого диференціального рівняння – це $x(t)=0$.
З другого диференціального рівняння знаходимо $\frac{dy}{dt}=v_y=C_3$.$C_3=v_{0y}=v_0 cos\alpha$. Проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо
$y(t)=v_0 cos\alpha t+C_4$.
З початкових умов випливає, що $C_4=0$. Тоді розв’язок другого диференціального рівняння має вигляд: $y(t)=v_0 cos\alpha\, t$.
Проінтегрувавши третє рівняння $\frac{d^2z}{dt^2}=-g$, дістанемо: $\frac{dz}{dt}=-gt+C_5$.
Константу C_5 визначаємо з початкових умов. При $t=0$, $v_{0z}=v_0 sin\alpha=C_5$.

Отже, $\frac{dz}{dt} = v_0 sin\alpha - gt$. Проінтегруємо отримане рівняння: $z(t) = v_0 sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} + C_6$. З початкових умов при $t = 0$, $z_0 = C_6 = 0$.

Розв’язком третього диференціального рівняння є:

$$z(t) = v_0 sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Отже, кінематичні рівняння руху точки в параметричній формі такі:

$$x(t) = 0,\; y(t) = v_0 cos\alpha t,\; z(t) = v_0 sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Модуль вектора переміщення $|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{0^2 + (v_0 tcos\alpha)^2 + \left(v_0 tsin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)^2}$$

$$|\vec{r}(10)| = \sqrt{0^2 + (2 \cdot 10 \cdot cos30^0)^2 + \left(2 \cdot 10 \cdot sin30^0 - \frac{9{,}8 \cdot 10^2}{2}\right)^2} = 480{,}31 \text{ (м)}$$

Виключивши з цих рівнянь параметр t, знайдемо рівняння траєкторії даної матеріальної точки в координатах:

$$z = ytg\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}.$$

Згідно з цим рівнянням, матеріальна точка, кинута під кутом до горизонту, на яку діє лише сила земного тяжіння, рухається по параболі.

Відповідь: 480,31 м; $z = ytg\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}$

Задачі самостійної роботи для по Темі 1.

1. Рівняння руху точки вздовж прямої лінії має вигляд: $x = At + Bt^3$, де $A = 6$ *м/с* і $B = 0{,}125$ ì/ñ ^{3}. Визначити прискорення в момент часу $t = 2$ *с*.

2. Матеріальна точка рухається прямолінійно без початкової швидкості так,що її прискорення змінюється в часі за співвідношенням $a = a_0 + a_1 \cdot t^2$ з $a_0 = 4{,}0$ м/с^2, $a_1 = -0{,}6$ м/с^4. Знайти швидкість, переміщення, і пройдений шлях в момент часу $t = 10$ с.

3. Визначити повне прискорення точки на ободі колеса радіусом *0,5 м*, в момент часу $t = 3c$. Рівняння обертання колеса: $\varphi = At + Bt^3$, де $A = 2$ *рад/с*, $B = 0,2$ *рад/с³* .

4.Прямолінійний рух матеріальної точки описується рівнянням $\tilde{o} = 0,5t^3 - 8t^2$. Знайти екстремальне значення швидкості точки υ_1 та момент часу t_1 від початку руху, коли ця швидкість стає екстремальною.У який момент часу t_2 швидкість $\upsilon_2 = 0$? Як змінюється картина руху при $t > t_2$

5. Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 4\,м$. Рух її описується рівнянням $S = A + Ct^2$, де $A = 8\,м$, $C = -2\,\frac{м}{c^2}$. Визначити момент часу, коли нормальне прискорення точки дорівнює $a_n = 9\,м/с^2$. Знайти швидкість, тангенціальне і повне прискорення точки у цей момент часу.

6. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x(t) = at + bt^2 + ct^3$,де $a = 5,0$ м/с, $b = 0,20$ м/c^2, с $= 0,10$ м/c^3. Визначити швидкість точки в момент часу $t_1 = 2,0$ с і $t_2 = 4,0$ с, а також середню швидкість в проміжку часу відt_1до t_2.

7. Визначити траєкторію руху точки, заданої рівняннями:$x(t) = 4t^2 + 2$; $y(t) = 6t^2 - 3$;$z(t) = 0$. Побудувати графік залежності шляху, пройденого точкою, від часу.

8. Рух матеріальної точки задано рівняннями: $x(t) = 8t^2 + 4$; $y(t) = 6t^2 - 3$; $z(t) = 0$. Визначити модулі швидкості і прискорення точки в момент часу t=10 с.

9. Який шлях пройде тіло за час $t = 10$ cвід початку руху, якщо рівняння його руху $x(t) = 2t^2 + 3t - 4$; $y(t) = 3t^2 + 4t - 2$; $z(t) = 0$?

10.Прямолінійний рух точки описується рівнянням$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 8t\vec{k}$.Знайти шлях, пройдений точкою за перші 4 с руху.

Тема 2. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ.

1. Закони Ньютона. Маса. Сила.
2. Сили в механіці: гравітаційні сили, сили пружності. сили тертя.
3. Імпульс і його зв'язок з імпульсом сили. Закон збереження імпульсу.

Основні означення і співвідношення

1.Маса є мірою інертності. Вимірювання маси зводиться до вимірювання прискорень, наданих при одній і тій же дії даному тілу і еталону маси.

2.Сила-міра дії одного тіла на інше, результатом якої є прискорення або деформації.

3.Сила підлягає принципу суперпозиції, за яким

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \cdots + \vec{F}_{ii-1} + \vec{F}_{ii+1} + \cdots + \vec{F}_{in} = \sum_{j \neq i}^{n} \vec{F}_{ij}$$

4.Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона) у векторній формі має вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F},$$

або у випадку, коли m = const

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \vec{F}_{ij},$$

5. Сила пружності

$$F = -kx,$$

де k – коефіцієнт пружності;
x – абсолютна деформація.

6. Сила гравітаційної взаємодії

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

де G – гравітаційна стала;
m1 і m2 – маси взаємодіючих тіл;
r_{12} – відстань між матеріальними точками або тілами.

7. Сила тертя ковзання

$$F_{\text{тр}} = fN\ ,$$

де f – коефіцієнт тертя;

N – сила нормального тиску.

8. Координати центра мас системи матеріальних точок

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$

де m_i – маса і-ї матеріальної точки;

x, y, z – координати цієї точки.

9.Центр мас рухається відповідно рівнянню

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Приклади розв’язання задач

Приклад 1

Проволока витримує вантаж масою $m_1 = 110$ кг , коли його з деяким прискоренням піднімати вверх. і вантаж масою при $m_2 = 690$ кг , коли його опускати вниз із таким же за модулем прискоренням, Яка максимальна маса вантажу, який може витримати проволока, якщо його піднімати з постійною швидкістю?

Дано:

$m_1 = 110$ кг;

$m_2 = 690$ кг;

$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$;

$a = 0$.

Знайти: масу m вантажу.

Розв'язування.

Для того, щоб розв'язати задачу, використовуємо другий закон Ньютона. Позначимо як $\vec{F}$ те максимальне значення сили пружності, при якому поволока розірветься. Звернемося тепер до Рис., на якому схематично зображено три випадки, про які іде мова в умові задачі.

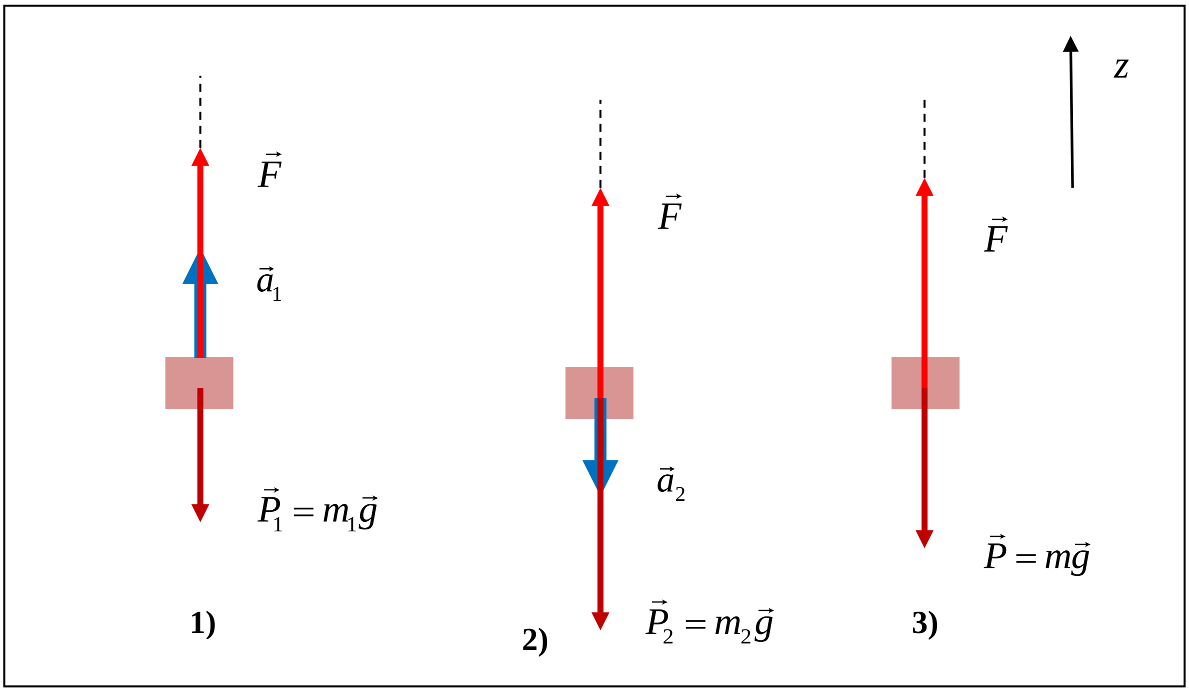


Рис.1 Схематичне представлення умови задачі.

В кожному із випадків окрім сили $\vec{F}$ на вантаж діє сила тяжіння, яка виражається через відповідну масу і вказана на рисунку. Отже, для кожного із випадків другий закон Ньютона має нижче поданий вигляд:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F} + m_1\vec{g} \tag{1}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F} + m_2\vec{g} \tag{2}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} \tag{3}$$

де через m позначено шукану масу. Перейдемо від векторних рівнянь (1)-(3) до їх скалярних відповідників. Для цього запишемо проекції на вісь z. Враховуючи, що $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, а $\vec{a} = 0$, одержуємо:

$$m_1a_1 = F - m_1g \tag{4}$$

$$-m_2a_1 = F - m_2\vec{g} \tag{5}$$

$$0 = F - mg \tag{6}$$

А тепер рівняння (4) помножимо на m_2, а рівняння (5) – на m_1. Додаванням одержаних результатів, після спрощень прийдемо до співвідношення:

$$F(m_2 + m_1) - 2m_1m_2g = 0 \tag{7}$$

Звідси випливає максимальне значення сили пружності:

$$F = \frac{2m_1m_2g}{m_2 + m_1} \tag{8}$$

Підстановка (8) в (6) дає шукану масу:

$$m = \frac{2m_1m_2}{m_2 + m_1} \tag{9}$$

Аналіз одиниць вимірювання:

$$[m]=\frac{[m_1m_2]}{[m_2+m_1]}=\text{кг}^2/\text{кг}=\text{кг} \qquad (10)$$

Обчислення:

$$m=\frac{2m_1m_2}{m_2+m_1}=\frac{2\cdot 110\cdot 690}{690+110}=\frac{15{,}18\cdot 10^4}{8\cdot 10^2}=190\,(\text{кг}) \qquad (11)$$

Відповідь: $m=190\,\text{кг}$; в загальному вигляді $m=\dfrac{2m_1m_2}{m_2+m_1}$

Приклад 2.

Тіло масою $m=5$ кг рухається вздовж шершавої поверхні з прискоренням $a=8\,\text{м/с}^2$ під дією сили $F=50$ Н, напрям якої вказано на рисунку. Знайти коефіцієнт тертя ковзання μ між поверхнею і тілом, якщо кутс $\alpha=60^0$.

Дано:

$m=5$ кг;

$a=8\,\text{м/с}^2$;

$F=50$ Н;

$\alpha=60^0$;

$g=9{,}8\,$**м/с²**.

Знайти: коефіцієнт тертя ковзання μ.

Розв'язування.

Установочні дані до задачі представлено на Рис.1

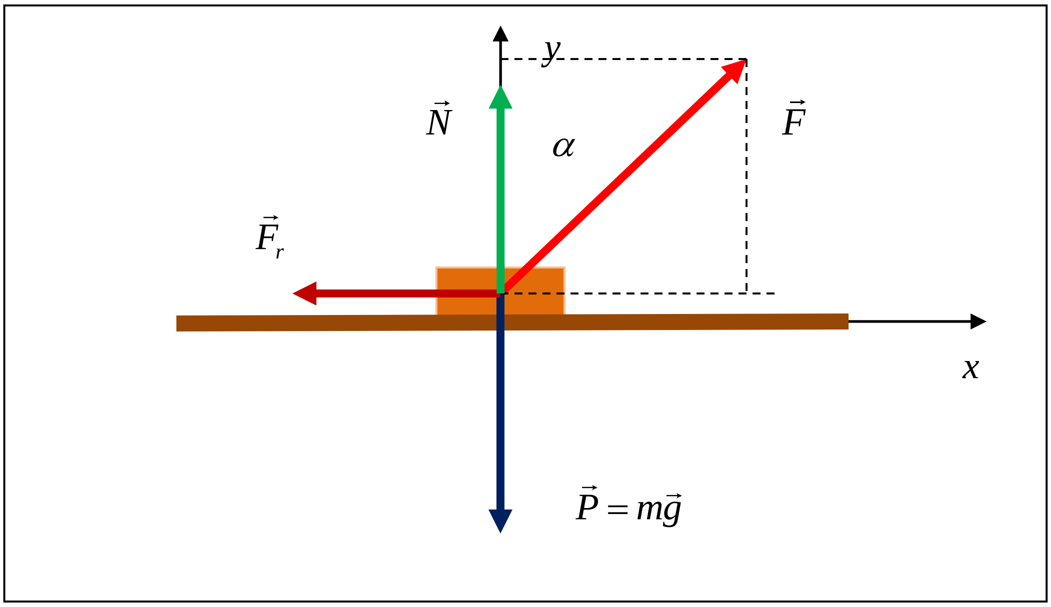


Рис.1 до задачі **Приклад 2.**

На Рис.1, вказані сили,які діють на тіло, а саме: $\vec{F}$ –зовнішня сила, $\vec{F}_f$ –сила тертя ковзання, $\vec{P}$ –сила тяжіння, $\vec{N}$ – сила нормальної реакції; а також система координат, в якій будемо описувати рух. Тіло рухається так, як вимагається другим законом Ньютона. Якщо позначити прискорення як $\vec{a}$, то згідно із другим законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_f + \vec{P} + \vec{N} \qquad (1)$$

Перейдемо від векторного рівняння (1) до системи скалярних рівнянь. Для цього запишемо проекції рівняння (1) на осі системи координат. Позначивши $a_x = a$ і врахувавши, що внаслідок руху лише в горизонтальному
напрямі $a_y = 0$, одержуємо:

$$ma = F_x + F_{fx} + P_x + N_x \qquad (2)$$

$$0 = F_y + F_{fy} + P_y + N_y \qquad (3)$$

Звернувшись до Рис.1, для проекцій сил на осі системи координат знаходимо:

$$F_x = F\sin\alpha \;\; ; \;\; F_{fx} = -F_f \;\; ; \;\; P_x = 0 \;\; ; \;\; N_x = 0 \qquad (4)$$

$$F_y = F\cos\alpha \;\; ; \;\; F_{fy} = 0 \;\; ; \;\; P_y = -mg \;\; ; \;\; N_y = N \qquad (5)$$

Підстановка (4) в (2) і (5) в (3) приводить до наступної системи рівнянь:

$$ma = F\sin\alpha - F_f \qquad (6)$$

$$N + F\cos\alpha - mg = 0 \qquad (7)$$

Систему рівнянь (6)-(7) слід доповнити співвідношенням зв'язку між силою тертя ковзання і силою нормальної реакції, відомим як закон Кулона-д'Амонтона:

$$F_f = \mu N \qquad (8)$$

З рівняння (6) маємо:

$$F_f = F\sin\alpha - ma \qquad (9)$$

Рівняння (7) дає вираз для сили реакції:

$$N = mg - F\cos\alpha \qquad (10)$$

Комбінуючи (9) . (10) і (8), знаходимо:

$$F\sin\alpha - ma = \mu(mg - F\cos\alpha) \qquad (11)$$

Розв'язавши (11) відносно коефіцієнта тертя μ, одержуємо шуканий результат:

$$\mu = \frac{F\sin\alpha - ma}{mg - F\cos\alpha} \qquad (12)$$

Аналіз одиниць вимірювання:

$$[\mu] = \frac{[F\sin\alpha - ma]}{[mg - F\cos\alpha]} = \text{Н/Н=1} \qquad (13)$$

Тут враховано, що величини ma , mg вимірюються в Ньютонах (Н).

Обчислення:

$$\mu = \frac{F\sin\alpha - ma}{mg - F\cos\alpha} = \frac{50\cdot\sin 60^0 - 5\cdot 8}{5\cdot 9{,}8 - 50\cdot\cos 60^0} = \frac{50\cdot 0{,}866 - 5\cdot 8}{5\cdot 9{,}8 - 50\cdot 0{,}5} = \frac{3{,}3}{24} = 0{,}14$$

(14)

ВІДПОВІДЬ: $\mu = 0{,}14$; в загальному вигляді $\boxed{\mu = \frac{F\sin\alpha - ma}{mg - F\cos\alpha}}$

Приклад 3.

Куля масою 9 г, швидкість якої 600 м/с, попадає в дерев'яну стінку й застрягає в ній. Знайти середню силу удару й імпульс, отриманий стінкою, якщо час зіткнення 10 мс.

Дано:

m = 9 г = 9·10-3 кг

υ= 600 м/с

Δt = 10 мс = 10·10-3 с

Знайти: <F > – ? Δpc – ?

Розв’язування.

Відповідно до закону збереження імпульсу для довільної замкнутої системи тіл сумарний імпульс системи з часом не змінюється. Це означає, що

$$\sum_{з=1}^{N} m_i\upsilon_i = const.$$

Куля до удару мала імпульс mυ. Оскільки удар непружний, то цей імпульс буде повністю переданий стінці

Δpc = mυ,

де Δpc – зміна імпульсу стінки;

mυ – зміна імпульсу кулі.

За другим законом Ньютона для середніх значень маємо

$<F>\Delta t = \Delta pc = m\upsilon$.

Звідки середня сила удару кулі <Fc> дорівнює

$$<F> = \frac{m\,\upsilon}{\Delta t}.$$

Проведемо необхідні розрахунки:

$\Delta pc = m\upsilon = 9{\cdot}10\text{-}3{\cdot}600 = 5{,}4$ кг·м/с;

$$<F> = \frac{\Delta p_c}{\Delta t} = \frac{5{,}4}{10\cdot 10^{-3}} = 5{,}4\cdot 10^2\,\text{Н}.$$

При цьому сила <Fc> спрямована вздовж вектора початкової швидкості кулі, яку вона мала перед ударом.

Приклад 4

На горизонтальній ділянці шляху довжиною 3 км швидкість автомобіля зросла від 36 км/год до 72 км/год. Маса автомобіля 3 т, коефіцієнт тертя 0,01. Знайти роботу , яку виконує двигун автомобіля.

Дано:

$s = 3\text{км} = 3\cdot 10^3\,\text{м}$;

$v_1 = 36\,\text{км/ч} = 10\,\text{м.с}$;

$v_2 = 72\,\text{км.ч} = 20\,\text{м/с}$;

$m = 3\,\text{т} = 3\cdot 10^3\,\text{кг}$;

$\mu = 0{,}01$

$g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

Знайти: работу A, яка виконується двигуном.

Розв'язування.

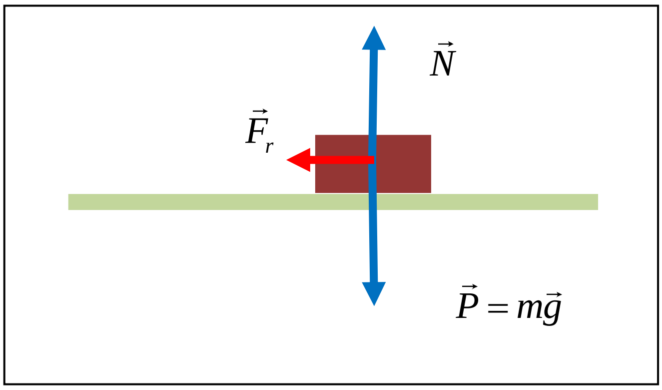


Рис. Схематичне представлення умови задачі.

Двигуном автомобіля розвивається деяка сила тяги. Робота двигуна, яку позначимо як A, і є роботою сили тяги. Згідно із теоремою про кінетичну енергію зміна кінетичної енергії ΔK дорівнює роботі всіх сил, тобто:

$$\Delta K = A + A_r \qquad (1)$$

Звідси одержуємо:

$$A = \Delta K - A_r \qquad (2)$$

Приймаючи до уваги означення кінетичної енергії

$$K = \frac{mv^2}{2} \qquad (3)$$

для її приросту ΔK знаходимо:

$$\Delta K = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (4)$$

Так як в процесі руху сила тертя залишається сталою, а ділянка шляху є горизонтальною, то для роботи сили тертя можемо записати:

$$A_r = F_r \cdot s \cdot \cos\alpha \qquad (5)$$

Тут α- кут між силою тертя і вектором переміщення. Оскільки $\alpha = 180^0$, то співвідношення (5) набуває такого вигляду:

$$A_r = -F_r \cdot s \qquad (6)$$

Що стосується сили тертя, то за законом Кулона-д'Амонтона маємо:

$$F_r = \mu N \qquad (7)$$

Звернувшись до Рис. і проектуючи сили на вертикальну вісь, знаходимо силу нормальної реакції, яка за третім законом Ньютона за модулем дорівнює силі нормального тиску, яка і визначає силу тертя. Отже, одержуємо:

$$N = P = mg \qquad (8)$$

Підстановка (8) в (7) дає:

$$F_r = \mu mg \qquad (9)$$

Комбінуючи (9) і (6), одержуємо вираз для роботи сили тертя:

$$A_r = -\mu mg \cdot s \qquad (10)$$

Прийнявши до уваги (10) і (4), із співвідношення (2) знаходимо:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + \mu mg \cdot s \qquad (11)$$

<u>Аналіз одиниць вимірювання:</u>

Спочатку з'ясуємо якою є розмірність кожного із доданків формули (11).

$$\left[\frac{mv_2^2}{2}\right] = \left[\frac{mv_1^2}{2}\right] = [m]\cdot[v^2] = \text{кг}\cdot(\text{м}^2/\text{с}^2) = (\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2)\cdot\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж} \qquad (12)$$

$$[\mu mg \cdot s] = [mg]\cdot[s] = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж} \qquad (13)$$

Кожен із доданків формули (11) має розмірність енергії. Отже,

$$[A] = \text{Дж} \qquad (14)$$

<u>Обчислення:</u>

$$A=\frac{3\cdot10^3(20^2-10^2)}{2}+0.01\cdot3\cdot10^3\cdot9{,}8\cdot3\cdot10^3=1{,}33\cdot10^6\,(\text{Дж})\qquad(15)$$

Відповідь: $A=1{,}33\cdot10^6\,(\text{Дж})$, в загальному вигляді $A=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}+\mu mg\cdot s$

.

Приклад 5.

У кузов візка з піском загальною масою 40 кг, що рухається горизонтально зі швидкістю 5 м/с, попадає камінь масою 10 кг і застрягає в піску. Знайти швидкість візка після зіткнення з каменем, якщо камінь перед попаданням у візок летів зі швидкістю 5 м/с під кутом 60о до горизонту назустріч візку. Сили зовнішнього опору руху візка не враховувати.

Дано:

M = 40 кг

υ1= 5 м/с

m = 10 кг

υ2 = 5 м/с

α = 60о

Знайти: u – ?

Розв'язування.

Оскільки силами опору в задачі можна знехтувати, то для такого руху система є замкнутою й для цієї системи тіл виконується закон збереження імпульсу (точніше, закон збереження горизонтальної складової імпульсу).

Запишемо закон збереження імпульсу в напрямі руху візка

$M\upsilon-m\upsilon\cos\alpha=(M+m)u,$

де M – маса візка з піском;

m – маса каменя;

υ – швидкість візка;

$\upsilon\cos\alpha$ – горизонтальна складова швидкості каменя;

u – швидкість візка і каменя після непружної взаємодії.

Звідси одержуємо

Відповідь: $u=\frac{M\upsilon-m\upsilon\cos\alpha}{M+m}=\frac{40\cdot5-10\cdot\cos60}{40+10}=3{,}5\,ì/ñ.$

Приклад 6.

Ковзаняр рухався рівномірно із швидкістю υ, а потім почав рухатися рівносповільнено і, пройшовши шлях $S = 50 м$ за час $t = 20 с$, зупинився. Маса ковзаняра $m = 55 кг$. Знайти υ і коефіцієнт тертя μ.

Розв'язування.

На відрізку рівносповільненого руху ковзаняр рухався під дією однієї тільки сили тертя $F_T = \mu mg$. За другим законом Ньютона

$F_T = ma$, $\mu mg = ma$.

Шлях S, який пройшов ковзаняр, згідно з кінематичною формулою, дорівнює

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

Знайдемо звідси прискорення:

$$a = \frac{2S}{t^2}.$$

Тоді $\mu mg = m\frac{2S}{t^2}$ і $\mu = \frac{2S}{gt^2}$.

Підставимо числові значення величин S, t, g:

$$\mu = \frac{2 \cdot 50}{9{,}81 \cdot 20^2} \approx 0{,}025.$$

Використовуючи кінематичну формулу рівнозмінного руху $\upsilon = at$, знаходимо швидкість ковзаняра:

$$\upsilon = \frac{2S}{t^2} \cdot t = \frac{2S}{t}.$$

Підставимо значення величин:

Відповідь: $\upsilon = \frac{2 \cdot 50}{20}\frac{м}{с} = 5\frac{м}{с}$.

Задачі самостійної роботи для по Темі 2.

1. Тіло зсувається з похилої площини, яка утворює кут 45^o з горизонтом. Пройшовши шлях *36,4 см*, тіло набуває швидкості *2 м/с*. Чому дорівнює коефіцієнт тертя тіла об площину.
Відповідь: $\mu = 0{,}2$.

2. Схил крижаної гори направлений під кутом 30^o до горизонту. Рухаючись по схилу знизу вверх, тіло в деякій точці має швидкість *10 м/с*. Коефіцієнт

тертя ковзання $0,1$. Яку швидкість буде мати це тіло після його повернення в початкове положення?
Відповідь: $\upsilon = 8,4$ *м/с*.

3. У вагоні, що рухається горизонтально та прямолінійно з прискоренням $a = 2$ *м/с*^{2}, висить на шнурі вантаж масою $m = 0,2$ *кг*. Знайти силу натягу шнура і кут відхилення шнура від вертикалі.
Відповідь: $F_н = 2,04$ *Н*; $\varphi = 11,3^o$.

4. Під час руху автомобіля масою 10^3 *кг* на нього діє сила тертя, яка дорівнює $0,1$ його сили тяжіння. Яку силу тяги має розвивати двигун автомобіля, у випадках: а) рівномірного руху; б) руху з прискоренням $a = 2,4$ *м/с²* ?
Відповідь: $F_1 = 1000$ *Н*; $F_2 = 3400$ *Н*.

5.Тіло зсувається з похилої площини,яка утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. Якої швидкості набуде тіло,пройшовши шлях *364 мм* ,якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,25?

6. На гладенькому столі лежить брусок масою $m = 4$ *кг*. До бруска прив'язані два шнури, перекинуті через нерухомі блоки, прикріплені до протилежних країв столу. До кінців шнурів підвішені гирі, маса яких $m_1 = 1$ *кг* і $m_2 = 2$ *кг*. Знайти прискорення a, з яким рухається брусок, і силу Т натягу кожного зі шнурів. Масою блоків і тертям в них знехтувати.
Відповідь: $a = 1,4$ *м/с*^{2}; $T_1 = 11,2$ *Н*; $T_2 = 16,8$ *Н*.

7. Початкова швидкість υ_0 кулі дорівнює 800 *м/с*. При русі в повітрі за час $t = 0,8$ *с* її швидкість зменшилася до $\upsilon = 200$ *м/с*. Маса m кулі дорівнює *10 г.* Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості, визначити коефіцієнт опору $к$. Дією сили тяжіння знехтувати.
Відповідь: $к = 4,7 \cdot 10^{-5}$ *кг/м*.

8. Тягарець, прив'язаний до нитки довжиною $l = 1$ *м*, описує коло у горизонтальній площині. Визначити період T обертання, якщо нитка відхилена на кут $\varphi = 60°$ від вертикалі.
Відповідь: $T = 2,47$ *с*.

9. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи із гарматою $M = 15\ т$. Гармата стріляє вгору під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту в напрямі рейок. З якою швидкістю υ_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20\ кг$ і він вилітає зі швидкістю $\upsilon_2 = 600\ м/с$?

Відповідь: *0,4 м/с*.

10.Початкова швидкість υ_0 кулі масою *10 г* дорівнює *800 м/с*. Якою буде швидкість через $t = 1,2\ с$ якщо коефіцієнт опору $к = 4,7 \cdot 10^{-5}\ кг/м$,а сила опору пропорційна квадрату швидкості? Дією сили тяжіння знехтувати.

Тема3. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ. РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ.

1. Момент сили, момент імпульсу. Рівняння моментів. Момент інерції.
2. Закон збереження моменту імпульсу.
3. Кінетична енергія. Кінетична енергія обертального руху.
4. Робота, потужність.Зв'язок роботи з кінетичною енергією.
5. Потенціальна енергія. Закон збереження енергії.

Основні співвідношення і означення.

1. Для обчислення кінетичної енергії тіл, яке обертається навколо осі використовується співвідношення:

$$T = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2 = \frac{J_z\omega^2}{2}.$$

Тут

$$J_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$$ -

момент інерції тіла відносно осі z , причому перше із співвідношень використовується для
дискретного , а друге для неперервного розподілу маси по об*єму.

2.Мірою дії сили при обертальному русі є момент сили визначений так:

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right].$$

3.Кількісною мірою обертального руху є момент імпульсу

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right] = \left[\vec{r}_i \times \underline{p}_i\right].$$

Модуль моменту сили та моменту імпульсу обчислюються на основі означення векторного добутку, наприклад:

$$M_i = r_i F_i Sin\angle(\vec{r}_i, \vec{F}_i).$$

4.Момент імпульсу змінюється в часу так,як встановлює рівняння динаміки обертального руху:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

Тут $\vec{L}$-момент імпульсу системи, а $\vec{M}$ -головний момент зовнішніх сил.

5.При обертанні тіла навколо осі z рівняння динаміки приводиться до форми:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

6.Момент імпульсу замкненої системи зберігається, тобто

якщо $\vec{M} = 0$, то

$\vec{L} = const$

7. Елементарна робота сили визначається так:

$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = FdrCos\varphi$ або $\Delta A = F\Delta r\cos\alpha$,

де α – кут між напрямками векторів сили F та переміщення Δr.

8. Робота, яка виконується змінною силою:

$$A = \int \vec{F}d\vec{r}$$

де інтегрування здійснюється вздовж траєкторії..

9. Середня потужність за інтервал часу Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

10. Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt}$$

або

$$N = F\upsilon\cos\alpha.$$

11.Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad \hat{E} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

12. Потенціальна енергія тіла визначається як робота консервативної сили при переміщенні з деякої фіксованої точки з даної точки поля М у фіксовану точку О,тобто

$$U(M) = \int_M^O \vec{F}d\vec{r}$$

13.Сила визначається за потенціальною енергією співвідношенням

$$\vec{F} = -gradU$$

або

$$\vec{F} = -(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}})$$

де i, j, k – орти (одиничні вектори в напрямі осей x, y, z).

14. Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла

$$U = \frac{\mathrm{kx}^2}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2}V.$$

15. Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (тіл) масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

.

14.Механічна енергія замкненої системи зберігається,тобто

$$\hat{E} + U = \text{const}.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1Маховик у вигляді суцільного диска, що має радіус $R = 0{,}2$ м і масу $m = 50$ кг, розкрутили до частоти обертання $\nu_0 = 480$ хв$^{-1}$ і залишили в такому стані. Під дією сили тертя маховик зупинився через час $t = 50\ c$. Знайти момент сили тертя.

Дано:

$R = 0{,}2$ м

$m = 50$ кг

$\nu_0 = 480$ хв$^{-1} = 8\ c^{-1}$

$t = 50\ c$

М–?

Розв'язування

Розв'яжемо задачу, скориставшись основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла навколо осі:

$M = \frac{dL}{dt}$, або $dL = Mdt$, (1)

де dL – зміна моменту імпульсу маховика, що обертається навколо осі, яка збігається з його віссю симетрії, за інтервал часу dt;

М – момент сили тертя, що діє на маховик відносно тієї самої осі.

Момент сил тертя можна вважати сталим $(M = const)$, тому проінтегрувавши рівняння динаміки (1), дістанемо вираз:

$$\int_0^L dL = M\int_0^t dt, \quad \text{або} \quad \Delta L = Mt. \quad (2)$$

Під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі зміна моменту імпульсу рівна:

$$\Delta L = I\Delta\omega, \quad (3)$$

де I – момент інерції маховика як диска відносно осі;

$\Delta\omega$ – зміна кутової швидкості маховика.

Тому з врахуванням виразів (2) та (3) можна записати:

$$Mt = I\Delta\omega,\ M = \frac{I\Delta\omega}{t}. \qquad (4)$$

Момент інерції маховика як диска, згідно означення, $I = \frac{1}{2}mR^2$, а зміна кутової швидкості $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 2\pi\nu - 2\pi\nu_0 = 2\pi(\nu - \nu_0)$.

Отже,

$$M = \frac{mR^2 \cdot 2\pi(\nu-\nu_0)}{2t} = \frac{mR^2 \cdot \pi(\nu-\nu_0)}{t}. \qquad (5)$$

Підставимо числове значення фізичних величин до робочої формули(5), і виконаємо обчислення:

$$M = \frac{mR^2 \cdot \pi(\nu-\nu_0)}{t} = \frac{50 \cdot 0{,}2^2 \cdot 3{,}14(0-8)}{50} = -1\ (\text{Н} \cdot \text{м}).$$

Знак « - »вказує на те, що сила тертя чинить на маховик гальмівну дію.

Відповідь: -1 Н · м.

Приклад 2.Тонкий стержень масою $m = 0{,}3$ кг і завдовжки $l = 0{,}5$ м обертається з кутовою швидкістю у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через середину стержня. Продовжуючи обертатись у тій самій площині, стержень переміщується так, що вісь обертання тепер проходить через кінець стержня. Знайти момент інерції I_2 і кутову швидкість ω_2 після переміщення стержня.

Дано:

$m = 0{,}3$ кг

$l = 0{,}5$ м

$\omega_1 = 10\ \text{с}^{-1}$

$\mathrm{I}_2 - ?$

$\omega_2 - ?$

Розв'язування

Скористаємось законом збереження моменту імпульсу $\mathrm{I}\vec{\omega} = const$, де I – момент інерції стержня відносно осі обертання; $\vec{\omega}$ – кутова швидкість стержня.

Для ізольованої системи тіл момент імпульсу залишається величиною сталою. У цій задачі внаслідок зміни розподілу маси стержня відносно осі обертання момент інерції також змінюється:

$\mathrm{I}_1\vec{\omega}_1 = \mathrm{I}_2\vec{\omega}_2$.

Момент інерції стержня відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до стержня (перший стан), визначається за формулою

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{12}\mathrm{m}l^2.$$

За теоремою Штейнера $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1 + ml_1^2$, де I_2 – момент інерції стержня відносно будь-якої осі обертання; I_1 – момент інерції стержня відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас стержня; l_1– відстань від центра мас стержня до осі обертання.

Знайдемо момент інерції стержня відносно осі, яка проходить через його кінець і перпендикулярна до нього (після переміщення стержня):

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо:

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{3}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5^2 = 0{,}025\ (\text{кг}\cdot\text{м}^2).$$

Підставимо вирази моментів інерції I_1 і I_2 у формулу закону збереження моменту імпульсу:

$$\mathrm{I}_1\vec{\omega}_1 = \mathrm{I}_2\vec{\omega}_2 = \frac{1}{12}\mathrm{m}l^2\vec{\omega}_1 = \frac{1}{3}ml^2\vec{\omega}_2,$$

звідки $\vec{\omega}_2 = \frac{1}{4}\vec{\omega}_1$; $\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$.

Після підстановки числових значень , отримаємо:$\omega_2 = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2{,}5\ \text{с}^{-1}$.

Відповідь: $0{,}025\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$; $2{,}5\ \text{с}^{-1}$.

Приклад 3.Матеріальна точка масою $m = 5$ кг рухається по колу радіусом $r = 3$ м в площині *XOY*, причому рух її заданий такими кінематичними рівняннями: $x = 3sin4\pi t$; $y = 3cos4\pi t$. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на цю точку в момент часу $t = 1c$.

Дано:

$r = 3$ м

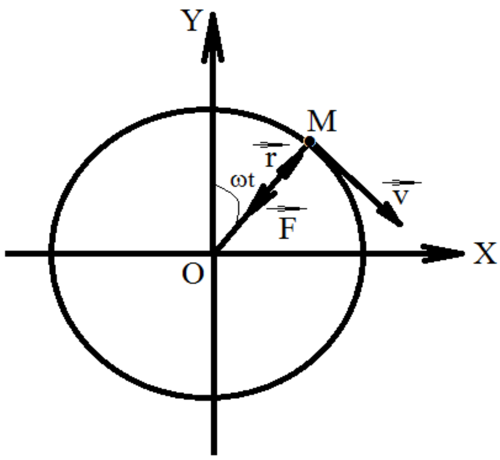
$m = 5$ кг

$x = 3sin4\pi t$

$y = 3cos4\pi t$

$t = 1c$

Знайти: силу $\vec{F}$.



Рисунок

Розв’язування

За відомими кінематичними рівняннями руху точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$та її масою знайдемо силу, що діє на точку в будь-який момент часу.

Розв’язок цієї задачі одержуємо безпосередньо з другого закону Ньютона в диференціальній формі. Для цього знаходимо проекції сили на осі координат:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2},\ F_y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ F_z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

за проекціями сили визначаємо модуль сили $\vec{F}$: $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, а також її напрямок у будь-який момент часу t.

Із заданих рівнянь знаходимо проекції прискорення на осі координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -(4\pi)^2 3sin4\pi t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -(4\pi)^2 3cos4\pi t.$$

Помноживши ці рівняння на масу матеріальної точки, дістанемо проекції сили на ці осі:

$$F_x = ma_x = -m(4\pi)^2 3sin4\pi t,\ F_y = ma_y = -m(4\pi)^2 3cos4\pi t.$$

Модуль шуканої сили визначимо за формулою:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-m(4\pi)^2 3sin4\pi t)^2 + (-m(4\pi)^2 3cos4\pi t)^2} = m16\pi^2 3.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$|\vec{F}| = 5 \cdot 16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 3 = 2366{,}3\ (H).$$

Визначимо напрямок сили $\vec{F}$. Для цього знайдемо напрямні косинуси:

$$cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{i}}\right) = \frac{F_x}{F} = \frac{-m(4\pi)^2 3sin4\pi t}{m16\pi^2 3} = -sin4\pi t;$$

$$cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{j}}\right) = \frac{F_y}{F} = \frac{-m(4\pi)^2 3cos4\pi t}{m16\pi^2 3} = -cos4\pi t.$$

Одночасно напрямні косинуси радіуса-вектора $\vec{r}$ можна виразити так:

$$cos\left(\widehat{\vec{r}, \vec{i}}\right) = \frac{x}{r} = \frac{3sin4\pi t}{3} = sin4\pi t;$$

$$cos\left(\widehat{\vec{r}, \vec{j}}\right) = \frac{y}{r} = \frac{3cos4\pi t}{3} = cos4\pi t.$$

Отже, ці вектори спрямовані по одній прямій, але в протилежних напрямах. Тому силу визначають за такою формулою: $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$. З цього рівняння видно, що сила є силою притягання, оскільки її напрямок протилежний до напрямку радіуса-вектора і вона пропорційна масі точки та її відстані до центра притягання, який знаходиться в центрі кола (див. рис.6).

Відповідь: $\boxed{2366{,}3\text{ Н}}$.

Приклад 4.

Однорідний стержень довжиною $l = 1{,}5$ м і масою $M = 10$ кг може обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через верхній кінець стержня. В центр стержня попадає куля масою $m = 10$ г, яка летить перпендикулярно до стержня і осі обертання зі швидкістю $v = 500$ м/с. Вважаючи удар абсолютно непружним, знайти кут, на який відхиляється стержень після удару.

Дано:

$l = 1{,}5$ м;

$M = 10$ кг;

$m = 10\text{ г} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ кг;

$v = 500$ м/с;

$g = 9{,}8$ м/с^2;

$l_C = \dfrac{l}{2}$.

Знайти: кут α, на який відхиляється стержень від вертикалі.

Розв'язування.

На Рис.1 схематично зображено стержень і куля безпосередньо перед ударом і стержень разом із кулею, яка в ньому застрягла, в стані максимального відхилення на кут α.

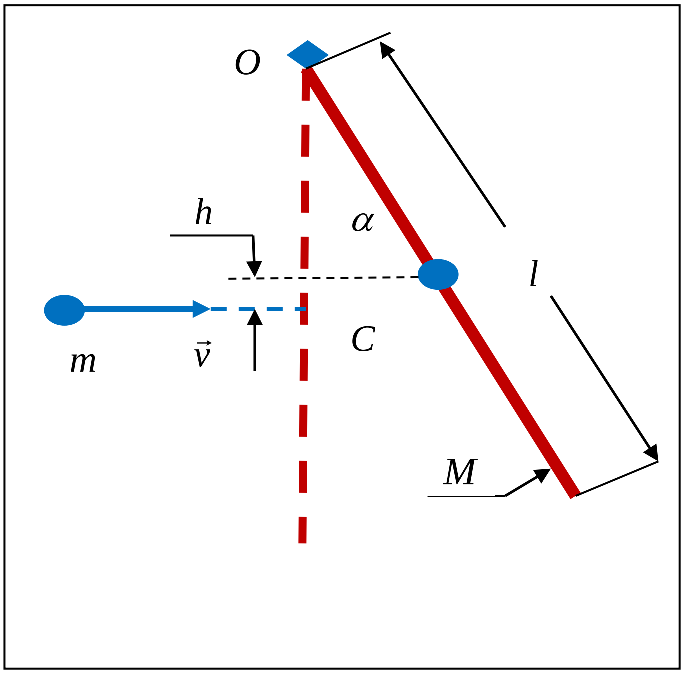


Рисунок до задачі.

Розглянемо тепер непружний удар в системі «стержень+куля». На стержень діють сила тяжіння і реакції осі.Лінія дії цих сил в момент удару проходить через горизонтальну вісь O. Таким чином, моменти цих сил відносно осі обертання дорівнюють нулю, а тому ці сили не показані на Рис.Моментти сил опору, які діють при ударі на кулю і на стержень не дорівнюють нулю. Проте, ці сили є внутрішніми і за третім законом Ньютона результуючий момент цих сил дорівнює нулю. Отже, при ударі проекція моменту імпульсу на вісь обертання зберігається, що ми використаємо для розв'язання задачі. До удару стержень знаходиться в спокої, а тому його момент імпульсу дорівнює нулю. Позначивши момент імпульсу кулі перед ударом як L_1, а момент імпульсу системи одразу ж після удару- як L_2, закон збереження моменту імпульсу запишемо в такій формі:

$$L_1 = L_2 \tag{1}$$

Модуль імпульсу кулі в момент удару визначається рівністю:

$$p = mv \tag{2}$$

В момент удару кут між імпульсом $\vec{p}$ і радіус-вектором OC дорівнює 90^0 . А тому, врахувавши означення моменту імпульсу, знаходимо:

$$L_1 = p \cdot l_C \cdot \sin 90^0 = \frac{1}{2} mvl \tag{3}$$

В результаті удару стержень разом із кулею здійснює обертальний рух навколо осі O. Момент імпульсу системи одразу після удару зручно виразити через початкову кутову швидкість цього ω . Якщо J – момент інерції системи відносно осі обертання, то

$$L_2 = J\omega \tag{4}$$

Підстановка співвідношень (3) і (4) в закон збереження проекції моменту імпульсу на вісь обертання, виражений формулою (1), знаходимо:

$$\frac{1}{2} mvl = J\omega \tag{5}$$

Звідси одержуємо значення кутової швидкості після удару:

$$\omega = \frac{mvl}{2J} \tag{6}$$

Система після удару матиме кінетичну енергію E_k, яка перетворюється в потенціальну енергію. Потенціальна енергія в стані максимального відхилення досягає значення E_p. Вважаючи, що опором можна знехтувати, приходимо до висновку, що механічна енергія системи зберігається. При відхиленні на кут α стає рівною нулю. Таким чином, закон збереження механічної енергії набуває наступного вигляду:

$$E_k = E_p \tag{7}$$

Звернувшись до виразу, яким визначається кінетична енергія при обертальному русі, запишемо:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} \tag{8}$$

Підстановкою кутової швидкості із формули (6), одержуємо:

$$E_k = \frac{(mvl)^2}{8J} \tag{9}$$

Після удару центр мас системи піднімається на висоту h, вказану на Рис. Маса системи дорівнює $M + m$. Таким чином, для потенціальної енергії E_p знаходимо:

$$E_p = (M + m)gh \tag{10}$$

Звернувшись до Рис. , отримуємо:

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) \tag{11}$$

Підстановка (11) в (10) дає:

$$E_p = \frac{(M + m)gl}{2}(1 - \cos\alpha) \tag{12}$$

Комбінуючи (12) . (9) і (7) . приходимо до рівняння:

$$\frac{(mvl)^2}{8J} = \frac{(M + m)gl}{2}(1 - \cos\alpha) \tag{13}$$

Після спрощень дістаємо:

$$1 - \cos\alpha = \frac{m^2 v^2 l}{4(M + m)Jg} \tag{14}$$

З рівняння (14) випливає:

$$\alpha = \arccos\left[1 - \frac{m^2 v^2 l}{4(M + m)Jg}\right] \tag{15}$$

Тепер залишилося знайти момент інерції стержня з кулею.Момент інерції стержня відносно горизонтальної осі, яка проходить через його центр мас, визначається співвідношенням:

$$J_C = \frac{1}{12}Ml^2 \tag{16}$$

Застосовуючи теорему Штейнера і враховуючи момент інерції кулі, який дорівнює $ml^2/4$, одержуємо:

$$J = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}\left(M + \frac{3}{4}m\right)l^2 \tag{17}$$

Підстановка (17) в (15) дає остаточний результат:

$$\alpha = \arccos\left[1 - \frac{3m^2 v^2}{4(M + m)(M + 3m/4)l\,g}\right] \tag{18}$$

Аналіз одиниць вимірювання.

Другий доданок в аргументі арккосинуса має бути безрозмірним. Для цього доданку знаходимо:

$$\left[\frac{3m^2v^2}{4(M+m)(M+3m/4)l\,g}\right]=\frac{[m^2][v^2]}{[M+m][M+3m/4][l][g]}=$$

=(кг^2)·(м^2/с^2)·(с^2/(кг^2· м^2))=1 (19)

<u>Обчислення</u>:

$$\alpha=\arccos\left[1-\frac{3m^2v^2}{4(M+m)(M+3m/4)l\,g}\right]=\arccos\left[1-\frac{3\cdot 1\cdot 10^{-4}\cdot 25\cdot 10^4}{4\cdot 10{,}01\cdot 10{,}008\cdot 1{,}5\cdot 9{,}8}\right]=$$

$$=\arccos\left[1-\frac{75}{5891}\right]=\arccos 0{,}9872=9{,}2^0$$

Відповідь: $\alpha=\arccos 0{,}9872=9{,}2^0$; в загальному вигляді

$$\alpha=\arccos\left[1-\frac{3m^2v^2}{4(M+m)(M+3m/4)l\,g}\right]\approx\arccos\left[1-\frac{3m^2v^2}{4M^2lg}\right]$$

Приклад 5. Куля масою *1кг,* рухаючись горизонтально, зіштовхується з нерухомою кулею масою *12 кг*. Кулі абсолютно пружні, удар прямий, центральний. Яку частину своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дано:

$m_1 = 1$ *кг*

$m_2 = 12$ *кг*

$\upsilon_2 = 0$

<u>Удар пружний</u>

Знайти: $E=\frac{\hat{E}_{\hat{e}2}}{\hat{E}_{\hat{e}1}}$

Розв'язування.

При абсолютно пружному центральному зіткненні виконуються закони збереження імпульсу й енергії. Тому з урахуванням того, що друга куля до зіткнення була нерухома, одержуємо два рівняння

$m_1\upsilon_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$,

$$\frac{m_1\upsilon_1^{\,2}}{2}=\frac{m_1u_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2u_2^{\,2}}{2}, \qquad (1)$$

де υ_1 – швидкість першої кулі до удару;

u_1 й u_2 – швидкості першої й другої куль після удару.

При цьому із закону збереження імпульсу треба враховувати, що після удару перша й друга кулі рухаються уздовж прямої, по якій рухалася перша куля до удару.

Частина енергії, передана першою кулею другій, визначається співвідношенням

$$E = \frac{K_{k2}}{K_{k1}} = \frac{m_2 u_2^2/2}{m_1 \upsilon_1^2/2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{\upsilon_1}\right)^2, \qquad (2)$$

де K_{k1} – кінетична енергія першої кулі до удару;

K_{k2} – кінетична енергія другої кулі після удару.

Розв'язавши системy (1), одержуємо

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}.$$

Підставивши u_2 у формулу (2) і скоротивши на υ_1 і m_1, знаходимо

$$Å = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1\upsilon_1}{\upsilon_1(m_1+m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}. \qquad (3)$$

Співвідношення (3) симетричне відносно мас куль m_1 і m_2, тому частина переданої енергії не зміниться, якщо маси куль поміняти місцями.

Підставляючи у вираз (3) числові значення m_1 і m_2, одержимо

Відповідь: $Å = \frac{4\cdot 1\cdot 12}{(1+12)^2} = 0{,}284$.

Приклад 6.

Маніпулятор за $t = 2$ с рівноприскорено переміщує вантаж масою $m = 5$ кг по дузі, радиус якої $R = 1{,}5$ м. Знайти максимальну потужність приводу маніпулятора, якщо відомо:1) момент інерції манипулятора $J = 15$ кг·м^2; 2) кут повороту $\Delta\varphi = 90^0$; 3) вантаж можна вважати точковою масою.

Дано:

$t = 2$ с ;

$m = 5$ кг;

$R = 1{,}5$ м;

$J = 15$ кг·м^2;

$\Delta\varphi = 90^0 \to \Delta\varphi = \pi/2$;

Знайти: максимальну потужність $N_{\max}$

Розв'язування.

Маніпулятор разом із вантажем схематично зображено на Рисунку. Рівноприскорене обертання вантажу свідчить про те, що приводом (двигуном) розвивається постійний момент сил $\vec{M}$, напрямлений вздовж осі обертання і пов'язаний з напрямом руху правилом правого гвинта, як це показано на Рис. Нехай за проміжок часу dt вантаж здійснює кутове переміщення груз $d\varphi$. Виконана при цьому робота dA виражається співвідношенням:

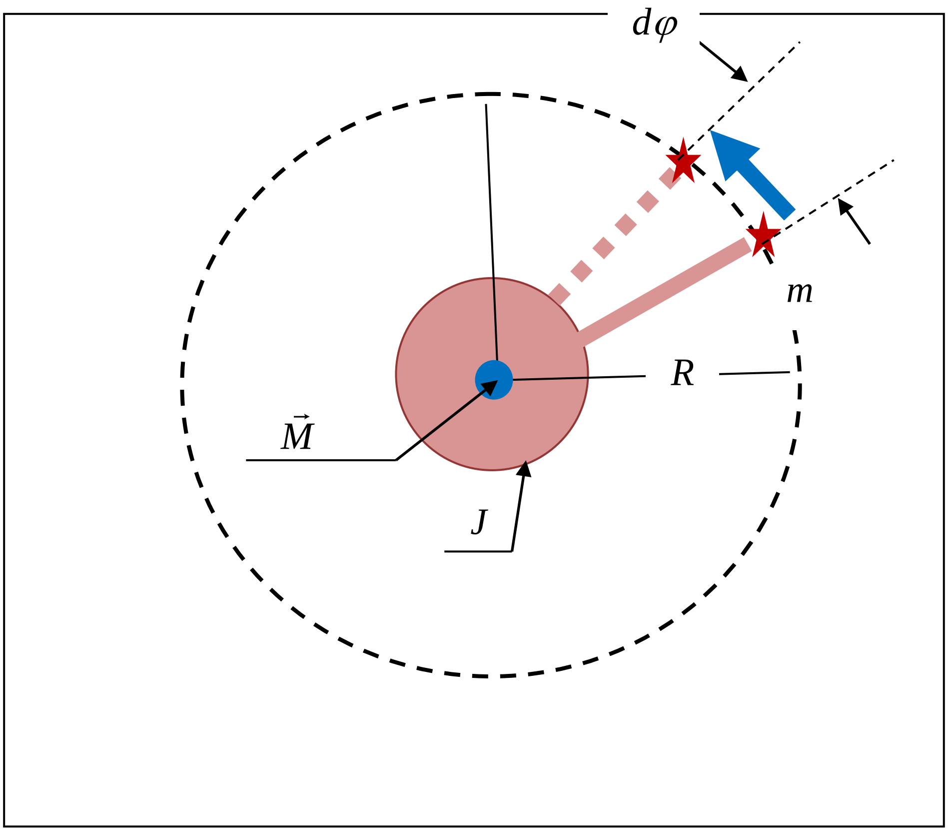


Рис. Схематичне зображення маніпулятора, описаного в задачі.

$$dA = Md\varphi \qquad (1)$$

Формально розділивши (1) на час руху dt і прийнявши до уваги означення кутової швидкості

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (2)$$

для миттєвої потужності N одержуємо наступний вираз:

$$N = \frac{dA}{dt} = M \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M\omega \qquad (3)$$

При рівноприскореному обертальному русі максимальною з кінцева кутова швидкість, яку ми позначимо через ω_m. Таким чином, для максимальної потужності маємо наступну формулу:

$$N_{\max} = M\omega_m \qquad (4)$$

Для того, щоб знайти момент сили слід звернутися до рівняння динаміки обертального руху тіла відносно нерухомої

$$\varepsilon = \frac{M}{J_t} \tag{5}$$

в якому $\varepsilon -$кутове прискорення, а $J_t -$момент інерції системи «маніпулятор-вантаж». Із рівняння (5) випливає:

$$M = J_t \varepsilon \tag{6}$$

Комбінуючи (6) і (4), знаходимо:

$$N_{\max} = J_t \varepsilon \omega_m \tag{7}$$

Тепер звернемося до визначення кутового прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \tag{8}$$

яке перетворимо до такого вигляду:

$$d\omega = \varepsilon dt \tag{9}$$

Інтегруючи (9) при початковому значенні $\omega_0 = \omega\big|_{t=0} = 0$ одержуємо вмраз для миттєвої кутової швидкості:

$$\omega = \varepsilon t \tag{10}$$

Підстановка (10) в (2) з подальшим інтегруванням дає:

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{11}$$

де $t -$заданий в умові проміжок часу , за який виконується кутове переміщення $\Delta\varphi$. Формула (11) з врахуванням (10) перетворюється до такого вигляду:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_m t}{2} \tag{12}$$

Тепер із (11) і (12) знаходимо:

$$\varepsilon = \frac{2\Delta\varphi}{t^2} \tag{13}$$

$$\omega_m = \frac{2\Delta\varphi}{t} \tag{14}$$

Приймаючи до уваги визначення моменту інерції матеріальної точки масою m відносно осі, яка знаходиться на відстаніо R, одержуємо:

$$J_t = J + mR^2 \tag{15}$$

Після підстановки (13)-(15) в (7) приходимо до шуканого результату:

$$N_{\max} = \frac{4(\Delta\varphi)^2}{t^3} \cdot (J + mR^2) \tag{16}$$

Аналіз одиниць вимірювань:

$$[N_{\max}] = \frac{[\Delta\varphi]^2}{[t]^3} \cdot [J + mR^2] = (\text{кг}\cdot\text{м}^2)/\text{с}^3 = (\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2)/\text{с} = \text{Дж}/\text{с} = \text{Вт} \tag{17}$$

Обчислення:

$$N_{\max} = \frac{4(\Delta\varphi)^2}{t^3}\cdot(J + mR^2) = \frac{3{,}14^2(15 + 5\cdot 1{,}5^2)}{2^3} = 32{,}4\,(\text{Вт}) \qquad (18)$$

Відповідь: $N_{\max} = 32{,}4\,\text{Вт}$; в загальному вигляді $N_{\max} = \frac{4(\Delta\varphi)^2}{t^3}\cdot(J + mR^2)$

Приклад 7.

З похилої площини висотою *1м* і довжиною *10 м* зсувається тіло масою *1 кг* (рис.1). Знайти:

а) кінетичну енергію тіла біля основи похилої площини;

б) швидкість тіла біля основи похилої площини. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати постійним і рівним *0,05*.

Дано:

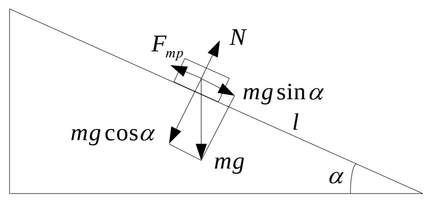
h = 1 м

l = 10 м

m =1 кг

f = 0,05

Знайти $E_к$ – ? υ – ?



Рисунок

Роз'язування.

Потенціальна енергія тіла при зсуванні з похилої площини переходить у кінетичну енергію й роботу проти сили тертя

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + F_{тр.}l \quad . \qquad (1)$$

Але $h = l\,sin\alpha$, де α – кут нахилу похилої площини.

$F_{тр.} = f\,mg\,cos\alpha$.

1. Кінетичну енергію тіла знайдемо з (1)

$$К_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = mgh - F_{\eth\eth.}l = \mathrm{mgl}\ (\sin\alpha - \mathrm{f}\cos\alpha)\ ,$$

де $\sin\alpha = h / l = 0{,}1$ і $\cos\alpha = 0{,}995$.

Підставляючи чисельні значення, одержуємо $К_k = 4{,}9$ *Дж.*

2. Швидкість тіла одержимо з формули кінетичної енергії

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\hat{E}_k}{m}} = 3{,}1 \text{ ì/ñ} \quad .$$

Приклад 8. При вертикальному підніманні вантажу масою *4 кг* на висоту *9 м* постійною силою була виконана робота *80Дж.* З яким прискоренням піднімали вантаж?

Дано:

m = 4 кг

h = 2 м

A = 80 Дж

Знайти a – ?

Розв'язування.

Зовнішні сили виконують роботу, яка йде на збільшення потенціальної енергії вантажу й на надання йому прискорення

$A = mgh + mah$.

Звідси

$a = \frac{A - mgh}{mh}$.

Підставляючи чисельні значення, одержуємо

Відповідь $a = \frac{80 - 4 \cdot 9{,}81 \cdot 2}{4 \cdot 2} = 0{,}19 \text{ ì/ñ}^{\ 2}$.

Приклад 9. Сталева пружина під дією сили *300 Н* видовжується на *2 см*. Яку потенціальну енергією буде мати ця пружина при її видовженні на *10 см*?

Дано:

$F_1 = 300$ *Н*

$x_1 = 2$ *см* $= 2 \cdot 10^{-2}$ *м*

$x_2 = 10$ *см* $= 10^{-1}$ *м*

Знайти E_n – ?

Розв'язування.

Потенціальна енергія розтягнутої пружини дорівнює

$$\Pi_n = \frac{kx_2^{\,2}}{2}\ . \qquad (1)$$

При цьому коефіцієнт жорсткості пружини можна визначити із закону Гука
$F = kx$,
де F – величина зовнішньої сили. Звідси одержуємо

$$k = F/x = F_1 / x_1. \qquad (2)$$

Якщо вираз (2) підставити в (1), одержуємо

$$\Pi_n = \frac{F_1 x_2^2}{2x_1}\ .$$

Підставляючи чисельні значення сили й деформацій, знаходимо

Відповідь $\Pi_\text{n} = \frac{300}{2}\frac{10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}} = 75$ *Дж.*

Задачі для самостійної роботи по Темі 3.

1.Суцільний циліндр масою *m = 2 кг* котиться без ковзання по горизонтальній поверхні. Лінійна швидкість осі циліндра *1 м/с*. Визначити повну кінетичну енергію цього циліндра.

2.На барабан радіусом *0,5м* намотана мотузка, до кінця якої прив'язаний вантаж масою *10 кг.* Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що вантаж опускається з прискоренням *2,04 м/с²*?

3. Блок, що має форму диска масою *0,4 кг*, обертається під дією сили натягу мотузки, до кінців якої підвішені тягарці масами *0,3 кг* і *0,7 кг*. Визначити сили натягу мотузки з обох боків блока.

4.Через блок, що має форму диска, перекинутий шнур. До кінців шнура прив'язали тягарці масами $m_1 = 100$ *г* і $m_2 = 110$ *г*. З яким прискоренням *а* будуть рухатися тягарці, якщо маса m блока дорівнює *400 г*? Тертям при обертанні блока знехтувати.

5. Знайти роботу, що виконується при підніманні вантажу масою *m*=10 кг на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45^\circ$ на відстані $s = 2$ м, якщочас піднімання t=2,0 с, а коефіцієнт тертя μ=0,10.

6.Парашутист масою m=70 *кг* робить затяжний стрибок і через t=14 смає швидкість $v = 60$ м/с. Вважаючи рух парашутиста рівноприскореним,знайти роботу з подолання опору повітря.

7.Яку потужність повинен розвивати трактор при переміщенні причепа масою $m = 5 \cdot 10^3$ кгнагору зі швидкістю $v = 1{,}0$ м/с, якщо кут нахилу$\alpha = 20^{\circ}$, а коефіцієнт тертя причепа μ=0,20?

8. Тіло масою m=1,0 кг кинули з поверхні Землі під кутом $\alpha = 30^{\circ}$до обрію з початковою швидкістю $v_0 = 8{,}0$ м/с. Знайти потужність сили тяжіння в момент часу t=5,0 с. Чому дорівнює робота цієї сили за час t= 5,0с? Опором повітря знехтувати.

9. Яку роботу виконують двигуни електропотягу на шляху 100м при розгоні з прискоренням 1,5 м/с^2 нагору з кутом нахилу 10°, якщо маса електропотягу $1{,}2 \cdot 10^5$ кг, а коефіцієнт тертя 0,05?

10.Стрижень довжиною *1,5 м* і масою *10 кг* може обертатися навколо нерухомої осі, яка проходить через верхній кінець стрижня (рис.2). У нижній кінець стрижня вдаряє куля масою *10 г*, що летить у горизонтальному напрямі зі швидкістю *500 м/с*, і застрягає в ньому. На який кут відхилиться стрижень після удару?

11.Кінетична енергія маховика, що обертається навколо нерухомої осі з постійною швидкістю, яка відповідає частоті n = 5 *об/с*, дорівнює $W_k = 60$ *Дж*. Знайти момент імпульсу маховика.

Тема 4. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ. ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ.

1. Електричний заряд. Закон збереження заряду. Закон Кулона.
2. Напруженість електричного поля. Напруженість поля точкового заряду.
3. Принцип суперпозиції і його застосування.

Основні поняття та співвідношення

1.Сила,з якою точковий заряд q_1 діє на заряд q_2.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12},$$

2.Наруженість електричного поля як сила,яка в даній точці поля на одиничний пробний заряд визначається так:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

3.Напруженість поля точкового заряду обчислюється за формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\ .$$

4.Електричні поля задовольняють принципу суперпозиції, який для поля системи зарядів дає:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_k \equiv \sum_{i=1}^{k}\vec{E}_i\ .$$

5.Потік напруженості електричного поля через деяку елементарну площадку пропорційний кількості силових ліній,які її пронизують і визначається співвідношенням:

$$d\hat{O} = E_n dS = \vec{E}\vec{n}dS = E\cos\alpha dS$$

6.Потік через довільну поверхню обчислюється інтегруванням елементарного потоку,тобто

$$\hat{O} = \int_S E_n dS = \int_S E\cos\alpha\ dS\ .$$

7.Для електричного поля має місце теорема Остроградського-Гаусса,за якою

$$\oint \vec{E}\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i\ .$$

8.Напруженість поля найпростіших систем зарядів обчислюється за співвідношеннями:

8.1 $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ -напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої площини.

8.2 $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$-напруженість поля лінійного рівномірно розподіленого заряду.

8.3 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$-напруженість поля рівномірно зарядженої сфери за її межами.

8.4 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}$-напруженість поля всередині рівномірно зарядженої кулі.

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1.

На відстані $r = 3$ м один від одного розміщено два точкових негативних заряди $q_1 = -9$ нКл і $q_2 = -36$ нКл. Коли у якійсь точці вмістити заряд q_0, то всі три заряди будуть у рівновазі. Знайти заряд q_0 і відстань x між зарядами q_1 і q_0.

Дано:

$r = 3$ м

$q_1 = -9$ нКл

$q_2 = -36$ нКл

$q_0 - ?$

Знайти $x - ?$

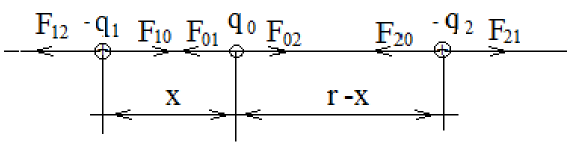


Рис.1

Розв’язування

Позначимо сили буквою F з двома індексами, з яких перший показує, на який заряд діє сила, а другий – з боку якого заряду вона діє (наприклад, F_{01}– сила, що діє на заряд q_0з боку заряду q_1. За початок відліку O візьмемо точку, де лежить заряд q_1, а за додатний напрям – напрям від заряду q_1 до q_2 (див. рис.1). Закон Кулона не дає можливості визначити напрям сили. Наприклад, обидві сили F_{12} і F_{21}, знайдені за законом Кулона з урахуванням знаків зарядів q_1 і q_2, мають додатний знак, тоді як за третім законом Ньютона їх напрями протилежні. Тому за законом Кулона визначатимемо лише абсолютну величину сили, а знак сили вважатимемо додатним, коли сила направлена в додатному напрямі осі *Ox*, і від’ємним – у протилежному.

На кожний з трьох зарядів діють з боку двох інших по дві сили. Для рівноваги необхідно, щоб ці дві сили були протилежні за напрямом. Легко побачити, що ця умова виконується лише тоді, коли заряд q_0 буде на осі OX між зарядами q_1 і q_2 і матиме протилежний порівняно з q_1 і q_2 знак. Нехай відстань між зарядами q_1 і q_0 дорівнює $x(0 < x < r)$. Тоді на заряди діятимуть сили (див. рис.12):

1) на заряд q_0 діють сили $F_{01} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_1|}{x^2}$ і $F_{02} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_2|}{(r-x)^2}$;
2) на заряд q_1 діють сили $F_{10} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1||q_0|}{x^2}$ і $F_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$;
3) на заряд q_2 діють сили $F_{20} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_2||q_0|}{(r-x)^2}$ і $F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_2||q_1|}{r^2}$.

При рівновазі всіх трьох зарядів виконуються такі умови:

$$F_{01} + F_{02} = 0, \qquad (1)$$
$$F_{12} + F_{10} = 0, \qquad (2)$$
$$F_{21} + F_{20} = 0. \qquad (3)$$

З виразу (1) випливає таке квадратне рівняння:

$$F_{01} + F_{02} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_1|}{x^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_0||q_2|}{(r-x)^2}=0,$$
$$x^2|q_2| - (r-x)^2|q_1| = 0,$$
$$x^2|q_2| - r^2|q_1| + 2rx|q_1| - x^2|q_1| = 0,$$
$$(|q_2| - |q_1|)x^2 + 2r|q_1|x - r^2|q_1| = 0.$$
$$D = b^2 - 4ac = 4r^2|q_1|^2 + 4(|q_2| - |q_1|)r^2|q_1| = 4r^2|q_1||q_2|.$$

Корені цього рівняння виражаються так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2r|q_1| \pm 2r\sqrt{|q_1||q_2|}}{2(|q_2| - |q_1|)}.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо:

$$x_{1,2} = \frac{-2r|q_1| \pm 2r\sqrt{|q_1||q_2|}}{2(|q_2| - |q_1|)} = \frac{-2\cdot3\cdot9 + 2\cdot3\sqrt{9\cdot36}}{2(36-9)} = \frac{-54+108}{54} = \frac{54}{54} = 1 \text{ м}.$$

З рівності (2) випливає:

$$\frac{|q_0 q_1|}{x^2} = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

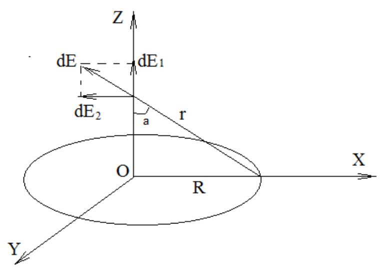
Звідси $|q_0| = \frac{|q_2|x^2}{r^2} = \frac{36\cdot10^{-9}\cdot1^2}{3^2} = 4\cdot10^{-9}$ Кл.

Відповідь: 1 м; $4\cdot10^{-9}$ Кл.

Приклад 2

Тонке кільце радіусом $R = 15$ см несе заряд з рівномірно розподіленою лінійною густиною $\tau = 2\,\frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Визначити напруженість електростатичного поля в точці, що рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань $r = 50$ см.

Дано:
$R = 15$ см
$\tau = 2\,\frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$
$r = 50$ см
Знайти Е−?



Рисунок

Розв'язування

Розмістимо прямокутну систему координат так, щоб кільце лежало в координатній площині *XOY*, а початок координат О збігався з центром кільця (див. Рис.).

При цьому точка М, що знаходиться на осі OZ, рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань r. Для обчислення напруженості поля заряду, що знаходиться на кільці, розділимо довжину кільця на елементи дуги dl. Заряд dq на такому елементі дуги дорівнює $dq = \tau dl$. Напруженість поля цього заряду:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Напрямок $d\vec{E}$збігається з напрямком радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки, що лежить на середині елемента дуги dl, в точку М.

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: в напрямку осі OZ$-d\vec{E}_1$ і в напрямку $d\vec{E}_2$, перпендикулярному до $d\vec{E}_1$.

Скориставшись міркуванням симетрії, побачимо, що сума всіх векторів $d\vec{E}_2$ дорівнює нулю. Сума складових $d\vec{E}_1$, які перпендикулярні до площини кільця і мають однаковий напрямок (вздовж осі OZ), можна виразити інтегралом

$$dE = dE_1 cos\alpha,\ E = \int_0^{2\pi R} \frac{\tau cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dl = \frac{\tau cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\tau R cos\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}.$$

З трикутника ΔMON знайдемо $cos\alpha = \frac{OM}{R}$. Врахувавши, що $OM = \sqrt{r^2 - R^2}$(теорема Піфагора),

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}.$$

Підставимо значення $cos\alpha$в отриману формулу і знайдемо робочу формулу для обчислення напруженості поля зарядженого кільця в точці М:

$$E = \frac{\tau R cos\alpha}{2\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0 r^2}\frac{\sqrt{r^2-R^2}}{r} = \frac{\tau R\sqrt{r^2-R^2}}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

Обчислимо значення напруженості поля:

$$E = \frac{2\cdot10^{-6}\cdot0{,}15\sqrt{0{,}5^2-0{,}15^2}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}5^3} = 30850\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right).$$

Відповідь: 30850 $\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)$.

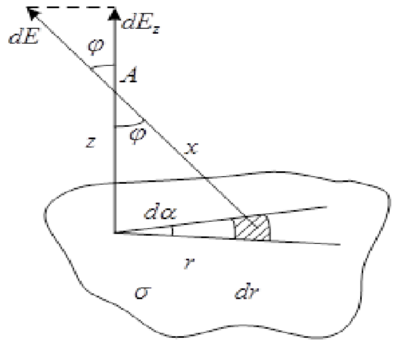
Приклад 5

Визначити напруженість електричного поля біля безмежної, рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною зарядів $\sigma = 5\ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$ (див. Рис.).

Дано:

$\sigma = 5\frac{\text{мКл}}{\text{м}^2}$

Знайти $E-?$



Рисунок

Розв'язування

Скористаємось формулою напруженості точкового заряду:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}, \qquad (1)$$

де dq – це заряд заштрихованої безмежно малої ділянки поверхні;

x – відстань від цієї ділянки до точки А, в якій розраховується напруженість електричного поля E.

З рисунка видно, що $x^2 = z^2 + r^2$, а $dq = rd\alpha dr\sigma$, й $dE_z = dEcos\varphi$.

З урахуванням цих позначень одержуємо:

$$dE_z = \frac{\sigma r dr\cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(z^2+r^2)}. \qquad (2)$$

Але, оскільки $cos\varphi = \frac{z}{x}$, тому:

$$dE_z = \frac{\sigma z r dr d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d(z^2+r^2)}{(z^2+r^2)^{3/2}}d\alpha.$$

Інтегруємо цей вираз у межах: для r від 0 до ∞; для α від 0 до 2π, одержимо:

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty \frac{d\left(z^2+r^2\right)}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\cdot\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\int_0^\infty (z^2+r^2)^{-3/2} d(z^2+r^2)\cdot\int_0^{2\pi} d\alpha =$$

$$= -\frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\Bigg|_0^\infty \cdot 2\pi = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{z}\cdot 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

З розрахунків видно, що напруженість електричного поля біля безмежної, рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною зарядів σ, визначається досить простою формулою і не залежить від відстані до самої площини:

Відповідь: $\boxed{\boldsymbol{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\,\varepsilon_0}}$**.**

Приклад 4

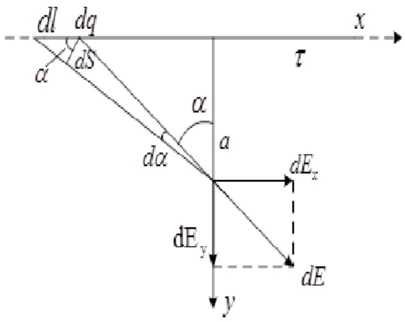
Визначити напруженість електричного поля на відстані $a = 10$ см від тонкої, досить довгої, рівномірно зарядженої нитки, із лінійною густиною зарядів $\tau = 20\frac{\text{нКл}}{\text{м}}$(див. Рис.).

Дано:

$a = 10$ см

$\tau = 20\frac{\text{нКл}}{\text{м}}$

Знайти E–?



Рисунок

Розв'язування

Скористаємось формулою для напруженості поля точкового заряду:

$$\text{dE} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}. \qquad (1)$$

З рисунка 16 видно, що: $dq = \tau dl$ і $dS = rd\alpha$, а також $dS = dl\cdot cos\alpha$.

З урахуванням цих залежностей одержуємо величину точкового заряду:

$$\text{dq} = \frac{\tau\ rd\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Тоді напруженість електричного поля у напряму осі y E_y – буде дорівнювати:

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{\tau r d\alpha \cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2 \cos\alpha} = \frac{\tau\ d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Величину радіуса-вектора $\vec{r}$ виразимо через відстань a і кут α:

$$\boldsymbol{r} = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

З урахуванням останнього одержимо:

$$dE_y = \frac{\tau\cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}. \qquad (3)$$

Інтегруємо останній вираз у межах зміни α від 0 до $\pi/2$, помноживши весь вираз на 2 (враховується друга, симетрична частина нитки).

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\cdot d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}\cdot 2\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}.$$

Таким чином,одержано досить просту залежність напруженості електричного поля біля довгої, рівномірно зарядженої нитки або циліндра:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}. \qquad (4)$$

$$\mathrm{E} = \frac{20\cdot 10^{-9}}{2\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1} = 3{,}59\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{Н}}{\mathrm{Кл}}.$$

Паралельна складова напруженостіE_x, завдяки симетричності нитки, буде дорівнювати нулю.

Відповідь:$3{,}59\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{Н}}{\mathrm{Кл}}$.

Приклад 5

Визначити напруженість$\mathrm{E_A}$ електричного поля, що створюється точковим зарядом $Q = 10$ нКл на відстані $r = 10$ см від нього. Діелектрик – масло $\varepsilon = 2{,}2$.

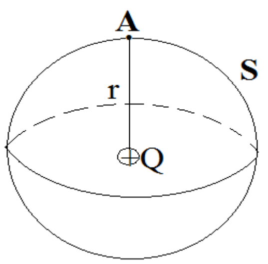
Дано:

$Q = 10$ нКл10^{-8} Кл

$r = 10$ см$0{,}1$ м

$\varepsilon = 2{,}2$

Знайти $\mathrm{E_A}-?$



Рисунок

Розв'язування

Для розв'язування цієї задачі використаємо теорему Остроградського-Гаусса:

$$\Phi_E = \int E_A dS = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В цьому випадку слід правильно вибрати замкнуту поверхню S. Її вибирають у вигляді сфери, радіус якої r, а поверхня сфери проходить через точку А, заряд Q знаходиться в центрі сфери. Тоді теорема Гаусса матиме вигляд:

$$\Phi_E = \int_0^{4\pi r^2} E_A dS = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$E_A \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ звідси}$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо:

$$E_A = \frac{10^{-8}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1^2} = 4089{,}3\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Відповідь: $4089{,}3\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Приклад 6.

Електричне поле створене нескінченною рівномірно зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду $\sigma = -1$ мкКл/м^2 і точковим зарядом $q = -2$ мкКл, який знаходиться на відстані $a = 0{,}5$ м від площини. Знайти напруженість електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані $r_1 = 0{,}2$ м від площини і $r_2 = 0{,}5$ м від заряду.

Дано:

$\sigma = -1$ мкКл/м^2 $-1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2;

$q = -2$ мкКл $-2{,}0 \cdot 10^{-6}$ Кл;

$a = 0{,}5$ м;

$r_1 = 0{,}2$ м;

$r_2 = 0{,}5$ м;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Знайти: напруженість електричного поля $\vec{E}$

Розв'язування.

Система зарядів і точка спостереження подані на Рис.1

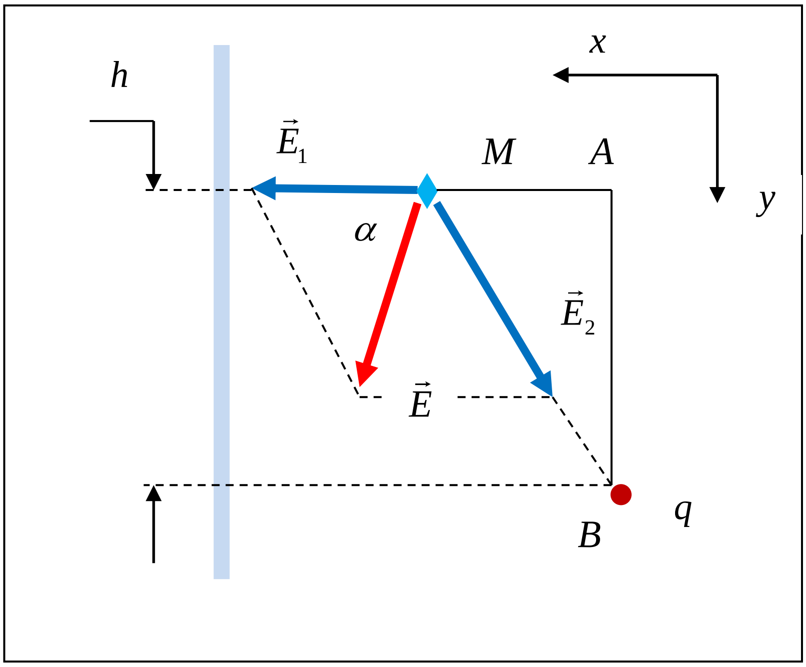


Рис.Система зарядів і їх поля в точці спостереження M .

Якщо напруженість електричного поля, створеного площиною дорівнює $\vec{E}_1$, а напруженість поля заряду q - $\vec{E}_2$, то згідно із принципом суперпозиції напруженість результуючого поля виражається співвідношенням:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad (1)$$

Застосуванням теореми Остроградського-Гаусса до рівномірно зарядженої площини для модуля напруженості поля, створеного однорідним розподілом заряду отримується наступний результат:

$$E_1 = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (2)$$

де враховано, що площина несе від'ємний заряд. Модуль напруженості поля точкового заряду q визначається законом Кулона, а саме:

$$E_2 = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \qquad (3)$$

Позначимо як β кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$, напрями яких вказані на Рис.1, де прийнято до уваги знаки відповідних зарядів. Піднесенням співвідношення (1) до квадрату отримуємо:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\beta} \qquad (4)$$

Звернемося до $\triangle MAB$, в якому за побудовою $\angle MBA = 90^0$ і тому $AB = h = 0,4$м. Сторони цього трикутника $: MB = r_2 = 0,5$ м , $AM = a - r_1 = 0,3$м . Таким чином, для $\cos\beta$ одержуємо:

$$\cos\beta = -\frac{a-r_1}{r_2} = -\frac{0,5-0,2}{0,5} = -\frac{3}{5} \qquad (5)$$

Підстановка (2) , (3) і (5) в (4) дає:

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{q}{2\pi r_2^2}\right)^2 - \frac{3}{5}\cdot\frac{\sigma\cdot q}{\pi r_2^2}} \qquad (6)$$

Напрям вектора $\vec{E}$ визначається α. Застосуванням теореми косинусів, знаходимо:

$$\cos\alpha = \frac{E_1^2 + E^2 - E_2^2}{2E_1\cdot E} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 E}\left(1 - \frac{3|q|}{10\pi|\sigma|r_2^2}\right) \qquad (7)$$

<u>Аналіз одиниць вимірювання:</u>

Напруженість результуючого поля визначається формулою (1). Тому слід встановити розмірність кожного із доданків. Отже, маємо:

$$[E_1] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon_0]} = (\text{Кл/м}^2)\cdot(\text{м/Ф}) = (\text{Кл/Ф})/\text{м} = \text{В/м} \qquad (8)$$

$$[E_2] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0][r_2^2]} = \text{Кл}\cdot(\text{м/Ф})/\text{м}^2 = \text{В/м} \qquad (9)$$

Таким чином,

$$[E] = [E_1] + [E_2] = \text{В/м} \qquad (10)$$

<u>Обчислення:</u>

$$E = \frac{10^{-6}}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\sqrt{1 + \left(\frac{2}{2\cdot 3,14\cdot 0,5^2}\right)^2 - \frac{3}{5}\cdot\frac{1\cdot 2}{3,14\cdot 0,5^2}} =$$
$$= \frac{10^6}{17,7}\cdot\sqrt{1+1,623-1,529} = \frac{10^6}{17,7}\cdot\sqrt{1,094} = 0,6\cdot 10^5\,(V/m) \qquad (11)$$

$$\cos\alpha = \frac{10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}\cdot 0,6\cdot 10^5}\left(1 - \frac{3\cdot 2}{10\cdot 3,14\cdot 1\cdot 0,5^2}\right) = \frac{10}{5,31}(1-0,7643) = 0,444$$

$$\alpha = 63,6^0 \qquad (12)$$

Відповідь: $E = 0,6\cdot 10^5$ В/м , $E = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \left(\dfrac{q}{2\pi r_2^2}\right)^2 - \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sigma\cdot q}{\pi r_2^2}}$;

$\alpha = 63,6^0$, $\alpha = \arccos\left[\dfrac{|\sigma|}{\varepsilon_0 E}\left(1 - \dfrac{3|q|}{10\pi|\sigma|r_2^2}\right)\right]$.

Приклад 7.

Різниця потенціалів між катодом і анодом електронної лампи дорівнює $90\,\text{В}$, а відстань ними $24\,\text{мм}$. З яким прискоренням рухається електрон від катода до аноду? Яка швидкість електрону в момент удару об анод? За який час електрон пролітає відстань від катоду до аноду? Яку роботу при цьому виконує електричне поле? Поле вважати однорідним.

Дано:

$U = 90$ В;

$d = 24\,\text{мм} = 2,4 \cdot 10^{-2}$ м;

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл;

$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг;

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Знайти: 1) прискорення a электрона; 2) швидкість v электрона; 3) час руху время t; 4) роботу A електричного поля.

Розв'язання.

1) На электрон, який знаходиться в електричному полі з напруженістю $\vec{E}$ діє сила, яка виражається співвідношенням:

$$\vec{F} = -e\vec{E} \tag{1}$$

де $-e$ - заряд электрона. Приймаючи до уваги другий закон Ньютона, для прискорення запишемо:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m} \tag{2}$$

Вектор напруженості електричного поля має напрям від аноду електронної лампи до катоду. Згідно із формулою (2) прискорення електрона має протилежний , тобто від катода до аноду. Для обчислення напруженості електричного поля використаємо її зв'язок з потенціалом, виражений наступним співвідношенням:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{r} \tag{3}$$

Оскільки поле однорідне, то інтегруючи (3), одержимо:

$$U = \int_0^d E dr = Ed \tag{4}$$

Звідси знаходимо:

$$E = \frac{U}{d} \tag{5}$$

Підстановка (5) в (2) дає:

$$a = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \tag{6}$$

2) Електричне поле потенціальне, внаслідок чого виконується закон збереження механічної енергії. Позначимо через φ_K і φ_A потенціали катоду і аноду. За фізичним змістом потенціал- потенціальна енергія позитивного одиничного заряду. А тому закон збереження енергії запишемо так:

$$\frac{mv_0^2}{2} - e\varphi_K = \frac{mv^2}{2} - e\varphi_A \tag{7}$$

Із співвідношення (7) знаходимо зміну кінетичної енергії, тобто:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=e\varphi_A-e\varphi_K=eU \qquad (8)$$

Підстановкою у (8) початкової швидкості $v_0=0$, одержуємо:

$$v=\sqrt{\frac{2eU}{m}} \qquad (9)$$

3) Формула (6) показує, что електрон рухається з постійним прискоренням. Звернувшись до визначення прискорення при рівноприскореному русі, запишемо:

$$a=\frac{v-v_0}{t} \qquad (10)$$

Звідси із врахуванням значення початкової швидкості і формули (6) випливає:

$$t=\frac{v\cdot md}{eU} \qquad (11)$$

Комбинуючи (11) і (9), приходимо до остаточного результату:

$$t=\frac{md}{eU}\sqrt{\frac{2eU}{m}}=d\sqrt{\frac{2m}{eU}} \qquad (12)$$

4) Робота поля визначається зміною кінетичної енергії, тобто

$$A=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2} \qquad (13)$$

Враховуючи (8), знаходимо:

$$A=eU \qquad (14)$$

Аналіз одиниць вимірювання:

1) $[a]=\frac{[e]\cdot[U]}{[m]\cdot[d]}=$(Кл·В)/(кг·м)=Дж/(кг·м)=(Н·м)/(кг·м)=Н/кг=м/с^2 (15)

2) $[v]=\sqrt{\frac{[e]\cdot[U]}{[m]}}=$(Кл·В/кг)$^{1/2}$=(Дж/кг)$^{1/2}$=(м^2/с^2)$^{1/2}$=м/с (16)

3) $[t]=[d]\cdot\sqrt{\frac{[m]}{[e]\cdot[U]}}=$м·((кг/Кл·В))$^{1/2}$=м·((кг/Дж))$^{1/2}$=м(с^2/м^2)$^{1/2}$=с (17)

4) $[A]=[e]\cdot[U]=$Кл·В=Кл·(Дж/Кл)=Дж (18)

Обчислення:

1) $$a=\frac{e\cdot U}{m\cdot d}=\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot90}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot2{,}4\cdot10^{-2}}=\frac{1{,}6\cdot90}{9{,}1\cdot2{,}4}\cdot10^{14}=6{,}6\cdot10^{14}\,(\text{м/с}^2) \qquad (19)$$

2) $$v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot90}{9{,}1\cdot10^{-31}}}=10^6\sqrt{\frac{2\cdot1{,}6\cdot90}{9{,}1}}=5{,}6\cdot10^6\,(\text{м/с}) \qquad (20)$$

3) $$t=d\sqrt{\frac{2m}{eU}}=2{,}4\cdot10^{-2}\sqrt{\frac{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot90}}=2{,}4\cdot10^{-8}\sqrt{\frac{2\cdot9{,}1}{1{,}6\cdot90}}=0{,}85\cdot10^{-8}\,(\text{с}) \qquad (21)$$

4) $$A = eU = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot90 = 1{,}44\cdot10^{-17}\,(\text{Дж}) \qquad (22)$$

Відповіді: 1) $a = 6{,}6\cdot10^{14}$ м/с^2 , в загальному вигляді $a = \dfrac{e\cdot U}{m\cdot d}$.

2) $v = 5{,}6\cdot10^{6}$ м/с , в загальному вигляді $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$;

3) $t = 0{,}85\cdot10^{-8}$ с , в загальному вигляді $t = d\sqrt{\dfrac{2m}{eU}}$;

4) $A = 1{,}44\cdot10^{-17}$ Дж ,в загальному вигляді $A = eU$.

Задачі для самостійної роботи по Темі 4.

1. Точкові заряди q1 = 20 мкКл і q2 = -10 мкКл знаходяться на відстані 5 см один від одного. Визначити силу, яка діє на точковий заряд qо = 1 мкКл, розміщений у точці, на відстані 3 см від першого і 4 см від другого заряду.

Відповідь: F = 207,7 Н.

2. Два точкових заряди q1 = -50 нКл і q2 = 100 нКл знаходяться на відстані 20 см один від одного. З якою силою ці заряди будуть діяти на третій заряд qо = -10 нКл, якщо він перебуває на однаковій відстані 20 см від перших двох зарядів.

Відповідь: F = 194 мкН.

3. Дві кульки масою 1 г кожна підвішені на нитках, верхні кінці яких з'єднані разом. Довжина кожної нитки 10 см. Які однакові заряди треба надати кулькам, щоб нитки розійшлися на кут 60о?

Відповідь: q = 800 нКл.

4. Дві довгі рівнобіжні нитки знаходяться на відстані 5 см одна від одної, на нитках рівномірно розподілені заряди з лінійними густинами τ1 = -5 нКл/см і τ2 = 10 нКл/см. Визначити напруженість електричного поля у точці, віддаленій від першої нитки на відстань 3 см і від другої на відстань 4 см.

Відповідь: E = 5,4.103 В/м.

5. Дві кульки, масою т = 0,1 г кожна, підвішені в одній точці на нитках довжиною l = 20 см. Отримавши однаковий заряд, кульки розійшлись так, що нитки утворили між собою кут а = 60°. Знайти заряд кожної кульки.

Відповідь: нКл.

6. Прямий металевий стрижень діаметром d = 5 см і довжиною l = 4 м має рівномірно розподілений вздовж його поверхні заряд q = 500 нКл. Визначити напруженість E поля в точці, яка розміщена проти середини стрижня на відстані a = 1 см від його поверхні.

Відповідь: 64,3 кВ/м.

7. Тонке кільце радіусом R = 10 см має рівномірно розподілений по його довжині заряд Q = 0,1 мкКл. На перпендикулярі до площини кільця, проведеного з його середини знаходиться точковий заряд Q1 = 10 нКл. Визначити силу F, яка діє на точковий заряд Q з боку зарядженого кільця, якщо він віддалений від центра кільця на а) l1 = 20см; б) l2 = 2м.

Відповідь: а) мН; б) мкН.

8. Тонкий стрижень довжиною l = 12 см заряджений з лінійною густиною τ = 200 нКл/м. Знайти напруженість E електричного поля в точці, яка перебуває на відстані r = 5 см від стрижня проти його середини.

Відповідь: 55,7 кВ/м.

9. Безмежна пряма нитка має рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною τ1= 1 мкКл/м. На одній осі з ниткою розташоване тонке кільце, заряджене рівномірно з лінійною густиною τ2 = 10 нКл/м. Визначити силу F, яка розтягує кільце. Взаємодією між окремими елементами кільця знехтувати.

Відповідь: 1,13 мН.

Тема 5. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНИКАХ. КОНДЕНСАТОРИ.

1. Потенціал. Потенціал поля точкового заряду.
2. Розподіл заряду і електричне поле в провідниках.
3. Електроємність. Конденсатори і їх з'єднання.
4. Енергія зарядженого конденсатора. Енергія електричного поля.

Основні поняття та співвідношення.

1. Потенціал електростатичного поля

$$\varphi = \frac{E_p}{q}.$$

2.Потенцал поля точкового заряду q на відстані r від нього:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

3. Потенціал зарядженої нескінченно довгої прямолінійної нитки

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln r + const$$

4.Електроємність відокремленого провідника

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\partial q}{\partial \varphi}$$

5.Електроємність конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}$$

6.Електроємність найпростіших конденсаторів:

$a)$ $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ плоский конденсатор

$b)$ $C = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(r_2 / r_1)}$ циліндричний конденсатор

$c)$ $C = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon r_2 r_1}{r_2 - r_1}$ сферичний конденсатор

7.Ємність батареї конденсаторів:

$a)$ $C = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i$ паралельне з'єднання

$b)$ $\dfrac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{C_i}$ послідовне з'єднання.

8.Енергія зарядженого конденсатора і електричного поля:

$$a) \quad W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}$$

$$b) \quad W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$$

Приклади розв'язання задач.

Приклад 1

Два точкові електричні заряди $q_1 = 1$ нКл та $q_2 = -2$ нКл перебувають у повітріна відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити напруженість і потенціал поля, створюваного цими зарядами в точці А, віддаленій від першого заряду на відстань $r_1 = 9$ см та від другого заряду на відстань $r_2 = 7$ см.

Дано:

$q_1 = 1$ нКл $= 10^{-9}$Кл

$q_2 = -2$ нКл $= -2 \cdot 10^{-9}$Кл

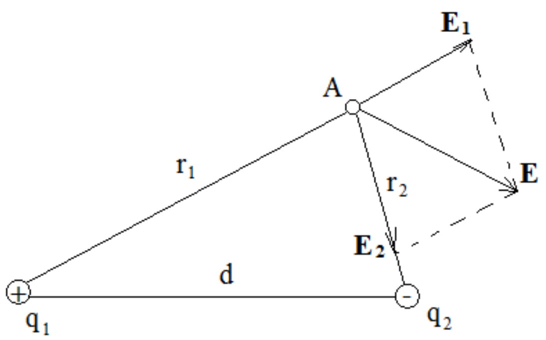
$d = 10$ см $= 0{,}1$ м

$r_1 = 9$ см $= 0{,}09$ м

$r_2 = 7$ см $= 0{,}07$ м

Знайти $E_A - ?$

$\varphi - ?$



Розв'язування

За принципом суперпозиції полів напруженість поля в точці може бути знайдена як векторна сума напруженостей полів, створюваних кожним із зарядів окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напруженості полів, створюваних зарядами q_1іq_2, дорівнюють (у повітрі $\varepsilon = 1$):

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}, \qquad (1)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} \qquad .(2)$$

Вектор $\vec{E}_1$ напрямлений по силовій лінії від позитивного заряду q_1, вектор $\vec{E}_2$ напрямлений по силовій лінії до негативного заряду q_2(див. рис.14). Модуль вектора напруженості результуючого поля знаходимо за теоремою косинусів:

$$\mathrm{E} = \sqrt{\mathrm{E}_1^2 + \mathrm{E}_2^2 + 2\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2 cos\alpha}, \qquad (3)$$

де α – кут між векторами $\vec{\mathrm{E}}_1$ та $\vec{\mathrm{E}}_2$.

З трикутника випливає, що

$$cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{0{,}1^2 - 0{,}09^2 - 0{,}07^2}{2\cdot 0{,}09\cdot 0{,}07} = -0{,}238.$$

Підставляючи вирази E_1 та E_2 з формул (1) та (2) у формулу (3), дістанемо:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{2q_1q_2}{r_1^2r_2^2}cos\alpha}.$$

Виконуємо обчислення:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{0{,}09^4} + \frac{(2\cdot 10^{-9})^2}{0{,}07^4} + 2\frac{10^{-9}\cdot 2\cdot 10^{-9}}{0{,}09^2\cdot 0{,}07^2}\cdot(-0{,}238)} = 3{,}58\cdot 10^3\left(\frac{\mathrm{В}}{\mathrm{м}}\right)$$

.

Потенціал результуючого поля визначаємо згідно з принципом суперпозиції електричних полів:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Потенціали полів, створюваних зарядами, дорівнюють

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1};\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}.$$

У даному разі маємо:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right).$$

Виконуємо обчислення:

Відповідь $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{10^{-9}}{0{,}09} + \frac{-2\cdot 10^{-9}}{0{,}07}\right) = -157\ \mathrm{В}$.

Приклад 2.

На тонкому стрижні, довжина якого l, рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10\,\frac{нКл}{м}$. Знайти потенціал, створений розподіленим зарядом в точці, яка розміщена на осі стрижня і віддалена від ближчого кінця на відстань l.

Розв'язування

Виділимо на стрижні малий елемент завдовжки dx, заряд якого $dq = \tau dx$ можна вважати точковим. Потенціал в точці A можна визначити за формулою

$$d\varphi = K\frac{dq}{x} = K\frac{\tau dx}{x}.$$

Згідно з принципом суперпозицій електричних полів потен-

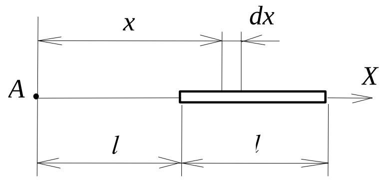


Рисунок до задачі

ціал електричного поля, створеного зарядженим стрижнем в точці A, знайдемо інтегруванням цього виразу:

$$\varphi = \int_l^{2l} K\frac{\tau dx}{x} = K\tau\int_l^{2l}\frac{dx}{x} =$$

$$= K\tau\, lnx\Big|_l^{2l} = K\tau\, ln2.$$

Підставимо числові значення:

Відповідь $\varphi = 9\cdot 10^9\cdot 10\cdot 10^{-9}\, ln2 =$

Приклад 3.

Визначити електричну ємність плоского конденсатора з двома шарами діелектриків: фарфору $(\varepsilon_1 = 5{,}0)$ товщина якого d_1= 2 мм і ебоніту $(\varepsilon_2 = 3{,}0)$ товщина якого d_2= 1,5 мм, якщо площа пластин $S = 100 см^2$.

Розв'язування

Ємність конденсатора $C = \frac{q}{U}$, де q – заряд на пластині конденсатора; U – різниця потенціалів пластин. Замінимо різницю потенціалів U конденсатора сумою $U_1 + U_2$ напруг на шарах діелектриків:

$$C = \frac{q}{U_1 + U_2}.$$

Оскільки

$$q = \sigma S, U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}d_1,$$

$$U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2}d_2,$$

то

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2}d_2},$$

де σ – поверхнева густина заряду на пластинах; E_1 і E_2 – напруженості поля в першому і другому шарах діелектрика; D – електричне зміщення в діелектриках, причому $D = \sigma$.

Отже,

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}.$$

Підставимо числові значення:

Відповідь	$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{5} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}} = $ $= 98{,}3\ (пФ).$

Задачі для самостійної роботи по темі 5

1. Електричне поле створене нескінченно довгою зарядженою ниткою,лінійна густина заряду якої τ =20 *нКл/м.* Визначити різницю потенціалів Uдвох точок поля, віддалених від нитки на відстань $r_1 = 8$ *см і* $r_2 = 12$ *см.*

2. Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною густиною τ =*200 нКл/м.* Визначити потенціал φ поля в точці перетину діагоналей.

3. Пилинка масою *200 мкг,* яка несе на собі заряд*Q=40 нКл* влетілав електричне поле в напрямі силових ліній. Після проходження різниці потенціалів *U=200 В* пилинка мала швидкість $\vec{V}_0$ =10*м/с.* Визначити швидкість пилинки до того, як вона влетіла в поле.

4. Електрон з кінетичною енергією *Т=10 еВ* влетів в однорідне електричне полев напрямі силових ліній поля. Яку швидкість буде мати електрон, пройшовши в цьому полі різницю потенціалів *U=8 В* ?

5. Електрон з енергією *Т =400 еВ* (в нескінченності і рухається вздовж силової лінії до поверхні металевої зарядженої сфери радіусом *R=10 см.* Визначити мінімальну відстань, на яку наблизиться електрон до поверхні сфери, якщо заряд її Q=*-10 нКл.*

6. Електрон, пройшовши в плоскому конденсаторі шлях від однієї пластини до другої, мав швидкість $\vec{v} = 10$ м/с. Відстань між пластинами *d=8 мм.* Знайти: 1) різницю потенціалів *U*між пластинами; 2) поверхневу густину заряду σна пластинах.

7. Електрон з деякою початковою швидкістю влітає в плоскийконденсаторпаралельно до пластин на однаковій відстані від них. До

пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів 300 В. Відстань міжпластинами2 см, довжина конденсатора 10 см. Якою повинна бутигранична початкова швидкість електрона, щоб електрон не вилетів ізконденсатора?

8. Два конденсатори ємністю $C_1 = 5$ *мкФ* і C_2 =*8мкФ* з'єднані послідовно і приєднані до батареї з е.р.с. $\varepsilon = 80$ В. Визначити заряди Q_1 і Q_2конденсаторів та різницю потенціалів U_1 і U_2 між їх обкладками.

9. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом*R=10см* кожна. Відстань між пластинами *d=2мм.* Конденсатор приєднаний до джерела струму з напругою *U=80 В.* Визначити заряд *Q*і напруженість *E* поля конденсатора в двох випадках: а) діелектрик - повітря; в) діелектрик - скло.

10.Два однакових плоских повітряних конденсатори з'єднали послідовно в *батарею*, яка під'єднана до джерела струму з е.р.с. $\varepsilon = 12$ В. Визначити, на скільки зміниться напруга на одному з конденсаторів,якщо другий занурити в трансформаторне мастило.

11.Плоский повітряний конденсатор складається із двох круглих пластин радіусом *r = 10 см* кожна. Відстань d_1між пластинами дорівнює *1 см*. Конденсатор зарядили до різниці потенціалів *U = 1,2 кВ* і від'єднали від джерела струму. Яку роботу *A* потрібно здійснити, щоб, віддаляючи пластини одна від одної, збільшити відстань між ними до d_2 = *3,5 см*?

Тема 6. ЗАКОНИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.

1. Постійних струм і його характеристики.
2. Закон Ома. Опір провідника. З'єднання резисторів.
3. Електрорушійна сила. Закон Ома для повного кола.
4. Робота і потужність струму. Закон Джоуля-Ленца.

Основні визначення і співвідношення

1. Сила постійного струму:

$$I = q/t,$$

де q – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час t.

2.Густина електричного струму є векторна величина, яка дорівнює відношенню сили струму до площі S поперечного перерізу провідника:

$$\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{k},$$

де k – одиничний вектор, який за напрямком збігається з напрямком руху позитивних носіїв заряду.

3.Опір однорідного провідника:

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір речовини провідника; l – його довжина.

4. Залежність питомого опору від температури:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t),$$

де ρ і ρ_0 – питомі опори відповідно при t і $0^\circ C$; t – температура (за шкалою Цельсія);

α – температурний коефіцієнт опору.

5. Опір послідовно з'єднаних резисторів:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i .$$

для паралельно з'єднаних резисторів:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i},$$

де R_i – опір i-го резистора; n –їх кількість.

6. Закон Ома в інтегральній формі:

– для неоднорідної ділянки кола

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R + \mathrm{r}};$$

– для однорідної ділянки кола ($\varepsilon_{12} = 0$)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R};$$

– для замкнутого кола ($\varphi_1 = \varphi_2$)

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

де ($\varphi_1 - \varphi_2$) – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола; $\varepsilon_{1,2}$ – е.р.с. джерел струму, що входять у цю ділянку; U – напруга на ділянці кола; R – опір кола (ділянки кола);

7. Правила Кірхгофа.

Перше правило: алгебраїчна сума сил струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

де n – кількість струмів, що сходяться у вузлі.

Друге правило: у замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруги на всіх ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i,$$

де I – сила струму на і-й ділянці; R_i – активний опір на і-й ділянці; ε_1 – е.р.с. джерел струму на і-й ділянці; n – кількість ділянок, що містять активний опір; k – кількість джерел струму на всіх ділянках замкнутого контуру.

8. Робота, яка виконується електростатичним полем і сторонніми силами на ділянці кола постійного струму за час t:

$$A = IUt.$$

9. Потужність струму:

$$P = IU.$$

10. Закон Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 Rt,$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на ділянках кола за час t.

Закон Джоуля - Ленца має місце за умови, що ділянка кола нерухома і в ній не здійснюються хімічні перетворення, струм постійний

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Сила струму в провіднику змінюється за законом $I(t) = 2t + 3t^2$протягом часу $t = 10\ с$. Визначити заряд q, що пройшов у провіднику.

Дано:

$I(t) = 2t + 3t^2$

$t = 10\ c$

Знайти $q-?$

Розв'язування

За означенням сили струму маємо: $I = \frac{dq}{dt}$, звідки $dq = I(t)dt$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно проінтегрувати його ліву та праву частини:

$$\int_0^q dq = \int_0^t I(t)dt \overrightarrow{звідси} q = \int_0^t (2t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3)_0^{10} = 10^2 + 10^3 = 1100\ (Кл)$$

.

Відповідь: 1100 Кл.

Приклад 2

Визначити густину струму j в залізному провіднику довжиною$l = 10$ м, якщо провідник знаходиться під напругою $U = 6$ В. Питомий опір провідника $\rho = 9{,}8$ нОм · м.

Дано:

$l = 10$ м

$U = 6$ В

$\rho = 9{,}8$ нОм · м

Знайти $j-?$

Розв'язування

За означенням густини струму та за законом Ома для ділянки кола знайдемо: $I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho\frac{l}{S}}$. Тоді $j = \frac{I}{S} = \frac{US}{\rho l S} = \frac{U}{\rho l}$.

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$j = \frac{6}{9{,}8 \cdot 10^{-9} \cdot 10} = 6 \cdot 10^6 \frac{А}{м^2} = 6 \left(\frac{МА}{м^2}\right).$$

Відповідь: $6\frac{\text{мА}}{\text{м}^2}$.

Приклад 3

Визначити заряд q, що проходить через провідник опором $R = 3$ Ом при рівномірному зростанні напруги на кінцях провідника від $U_0 = 2$В до $U = 4$ В протягом часу $t = 20$ c.

Дано:

$R = 3$ Ом

$U_0 = 2$В

$U = 4$ В

$t = 20$ c

Знайти q–?

Розв'язування

За означенням сили струму маємо: $I = \frac{dq}{dt}$, звідки $dq = I(t)dt$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно проінтегрувати його ліву та праву частини:

$$\int_0^q dq = \int_0^t I(t)dt = \int_0^t \frac{U(t)}{R} dt. \qquad (1)$$

Напруга в даному випадку є змінною. Тому при рівномірному зростанні напруги вона може бути виражена формулою:

$$U = U_0 + kt, \qquad (2)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Підставивши цей вираз у формулу (1), знайдемо:

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R}\right) dt = \frac{U_0}{R}\int_0^t dt + \frac{k}{R}\int_0^t tdt.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}(2U_0 + kt). \qquad (3)$$

Значення коефіцієнта пропорційності k знайдемо із формули (2), якщо врахувати, що $t = 20$ c, $U_0 = 2$ В, $U = 4$ В:

$$k = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4-2}{20} = 0{,}1\ \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

Підставляючи значення фізичних величин у формулу (3), знайдемо

$$q = \frac{20}{2\cdot 3}(2\cdot 2 + 0{,}1\cdot 20) = 20\ (\text{Кл}).$$

Відповідь: 20 Кл.

Приклад 4

Два джерела струму з електрорушійними силами $\varepsilon_1 = 1{,}5$ В та$\varepsilon_2 = 1{,}5$ В під'єднані в коло постійного струму, електрична схема якого показана на рис.23. Внутрішній опір кожного джерела струму $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 3$ Ом. Опір зовнішнього навантаження $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5$ Ом.Знайти струми I_i на кожному провіднику електричного кола.

Дано:

$\varepsilon_1 = 1{,}5$ В

$\varepsilon_2 = 1{,}5$ В

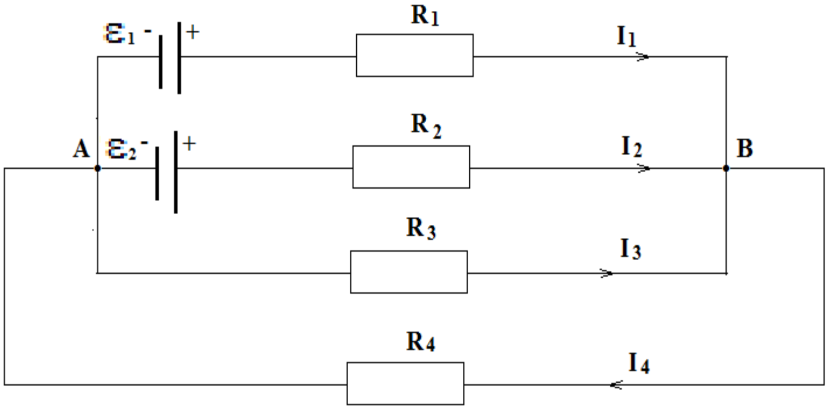
$r_1 = 2$ Ом

$r_2 = 3$ Ом

$R_i = 5$ Ом

$i = 1..4$

Знайти I_i –?



Рисунок

Розв'язування

Відповідно до першого правила Кірхгофа алгебраїчна сума сили струмів в електричному вузлі дорівнює нулю. Для цього слід врахувати правило знаків: струмам, які входять до електричного вузла надають знак “плюс”, а струмам, які виходять з електричного вузла надають знак “мінус”.

Математично це записується так:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Для нашої електричної схеми, зокрема для вузла А маємо:

$$I_4 - I_1 - I_2 - I_3 = 0. \qquad (1)$$

Відповідно до другого правила Кірхгофа алгебраїчна сума електрорушійних сил Е в замкнутому електричному контурі дорівнює сумі спадів напруг на кожному елементі контура, враховуючи спад напруги на джерелі. Для цього теж враховують правило знаків: якщо струм за напрямком співпадає з вибраним напрямком обходу контура (за годинниковою стрілкою), то відповідний спад напруги (добуток струму на опір IR) входить в рівняння з знаком “плюс”, в іншому випадку спад напруги входить в рівняння з знаком “мінус”.Якщо електрорушійна сила Е при обході контура змінює свій знак всередині джерела з “мінуса” на “плюс”, то її приписують знак “плюс”, в іншому випадку її приписують знак “мінус”.

За другим правилом Кірхгофа отримаємо відповідно для контурів: AR_1BR_2A, AR_2BR_3A, AR_3BR_4A такі рівняння:

$$I_1R_1 - I_2R_2 + I_1r_1 - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (2)$$

$$I_2R_2 - I_3R_3 + I_2r_2 = \varepsilon_2, \quad (3)$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \quad (4)$$

Підставимо в рівняння (2) −(4) значення відповідних опорів і електрорушійних сил, тоді отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$-I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0,$$
$$5I_1 - 5I_2 + 2I_1 - 3I_2 = 1{,}5 - 1{,}5,$$
$$5I_2 - 5I_3 + 3I_2 = 1{,}5,$$
$$5I_3 + 5I_4 = 0.$$

Необхідно розв'язати систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими. Для цього можна використати різні методи, зокрема метод Гаусса, метод детермінантів. Для цього перепишемо рівняння в наступному вигляді:

$$-I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0,$$
$$7I_1 - 8I_2 + 0 + 0 = 0,$$
$$0 + 8I_2 - 5I_3 + 0 = 1{,}5,$$
$$0 + 0 + 5I_3 + 5I_4 = 0.$$

Значення відповідних струмів знайдемо із таких виразів:

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta}, I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta}, I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta}, I_4 = \frac{\Delta_{I_4}}{\Delta},$$

де Δ − визначник системи рівнянь;

Δ_{I_1}, Δ_{I_2}, Δ_{I_3}, Δ_{I_4} −визначники, отримані заміною відповідних стовпців визначника Δ стовпцями, складеними із вільних членів чотирьох рівнянь системи. Знайдемо:

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{-120}{-935} = 0{,}128\ (\text{А}), I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{-105}{-935} = 0{,}112\ (\text{А}),$$

$$I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta} = \frac{112{,}5}{-935} = -0{,}12\ (\text{А}), I_4 = \frac{\Delta_{I_4}}{\Delta} = \frac{-112{,}5}{-935} = 0{,}12\ (\text{А}).$$

Струм I_3 отримали від'ємним.Це означає, що на рисунку слід змінити його напрямок на протилежний, тобто в дійсності він протікає від вузла В до вузла А.

Відповідь: $I_1 = 0{,}128\ (\text{А}), I_2 = 0{,}112\ (\text{А}), I_3 = -0{,}12\ (\text{А}), I_4 = 0{,}12\ (\text{А})$

Задачі для самостійної роботи по темі 6.

1. Е.р.с. батареї ε=80 В, внутрішній опір = 5 Ом. Зовнішнє коло споживає потужність P=100 Вт. Визначити силу струму в колі, напругу U, під якою знаходиться зовнішнє коло та її опір R.

2. Від батареї, е.р.с. якої ε=600 В,треба передати енергію на відстаньl=1км. Споживана потужність P=5 кВт. Визначити мінімальні втрати потужності в колі, якщо діаметр мідних підвідних дротів d = 0,5 см.

3. Е.р.с. батареї ε=24 В. Найбільша сила струму, яку може дати батарея,I_max=10 А. Визначити максимальну потужність Pmax,яка може виділитися в зовнішньому колі.

4. При зовнішньому опорі 8 Ом сила струму в колі I_1=0,8 А, при опорі =15 Ом сила струмуI_2=0,5 А. Визначити силу струму короткого замикання джерела е.р.с.

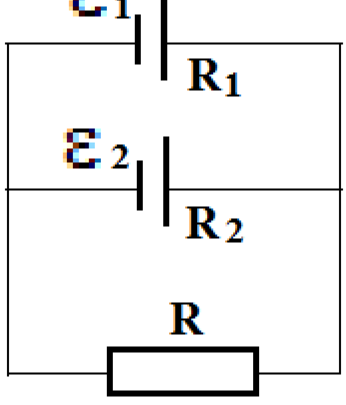
5. Сила струму в провіднику з опором R=10 Ом за час t=50 с рівномірно зростає від   I_1=5 Адо I_2=10 А. Визначити кількість теплоти Q,яка виділиться за цей час у провіднику.

6. В провіднику за час t=10 с прирівномірному зростанні сили струмувід I_1=5 А до I_2=10 А виділилось кількість теплоти Q= 5 кДж. Знайти опірRпровідника.

7. Визначити силу струму в кожному елементі і напругу на реостаті(див. рис. 2),якщо ε_1 = 12В, R_1 = 1 Ом, ε_2 = 6В, R_2= 1,5 Ом і R = 20 Ом.

8. Визначити силу струму на всіх ділянках електричної мережі(див. рис. 3), якщо

ε_1 = 8 В, E_2= 12 В,$R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 4$ Ом,$R_4 = 2$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.



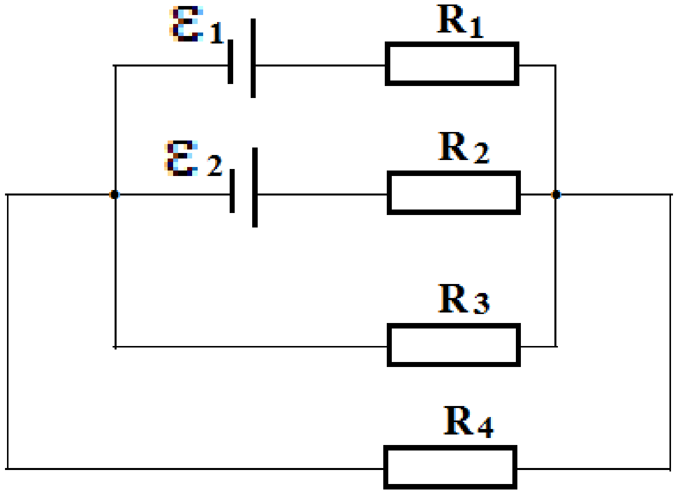


Рисунок 2 Рисунок 3

9. Дві батареї (ε_1= 12 В, R1 = 2 Ом, ε_2= 24 В, R2= 6 Ом) і провідник з опором R=16 Ом з'єднані, як показано на рис. 24. Визначити силу струму в батареях та резисторі.

10.Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I=I_0 \sin\omega t$. Знайти заряд Q, що проходить через поперечний переріз провідника за часрівний половині періоду Т, якщо початкова сила струмуI_0=10 А,циклічна частота ω =50 π $с^{-1}$.

Тема 7. МАГНІТНЕ ПОЛЕ СТРУМУ. ЗАКОН АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА.

1. Елемент струму. Закон Ампера. Сила Лоренца. Закон Біо-Савара-Лапласа.
2. Принцип суперпозиції. Магнітне поле прямолінійного струму і соленоїда.
3. Робота переміщення провідника зі струмом в магнітному полі.
4. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея.

Основні поняття і співвідношення:

1. Закон Біо-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right],$$

де $d\vec{B}$– індукція магнітного поля, яку створює елемент провідника зі струмом;

μ – магнітна проникність;

μ_0 – магнітна стала ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м);*

$d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем довжині dl провідника і збігається за напрямком зі струмом у провіднику;

I – сила струму;

$\vec{r}$ – радіус-вектор точки спостереження відносно елементу струму;

2. Магнітна індукція поля довгого прямого провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

де r_0 – відстань від осі провідника до точки спостереження.

3.Магнітна індукція поля безмежно довгого провідника зі струмом виражається формулою:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r_0}$$

4.Магнітна індукція B пов’язана з напруженістю H магнітного поля співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

5. Магнітна індукція у центрі колового провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{I}{R},$$

де R – радіус кривизни провідника.

6.Магнітна індукція поля, яку створює соленоїд у середній його частині (або на осі тороїда)

$$B = \mu_0 \mu n I ,$$

де n – кількість витків, які припадають на одиницю довжини соленоїда або тороїда;

I – сила струму в одному витку.

7.Закон Ампера. Сила, яка діє на провідник зі струмом в магнітному полі:

$$\vec{F} = \left[\vec{l}\vec{B}\right] I ,$$

де I – сила струму;

$\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем довжині l провідника і збігається за напрямком зі струмом.

8.Сила взаємодії двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1і I_2, розміщених на відстані d один від одного, що діють на відрізок провідника довжиною l, виражається формулою:

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l .$$

9.Магнітний момент контуру зі струмом:

$$\vec{P}_m = I\vec{S} ,$$

де $\vec{S}$ – вектор, який дорівнює за модулем площі S, яку охоплює контур, і збігається за напрямком з нормаллю до його площини.

10.Механічний момент, який діє на контур зі струмом, розміщений в однорідному магнітному полі:

$\vec{M} = [\vec{P}_m \times \vec{B}]$

11. Магнітний потік Φ через плоский контур площею S:

−у випадку однорідного поля:

$\Phi = \mathrm{BS}\cos\alpha$ або $\Phi = \mathrm{B_n} S$,

де a – кут між вектором нормалі до площини контуру і вектором магнітної індукції $\vec{B}$;

B_n – проекція вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{\mathrm{n}}$ $(B_n = B\cos a)$

−у випадку неоднорідного поля:

$$\Phi = \int_S \mathrm{B_n} dS ,$$

де інтегрування ведеться через всю площу S.

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1.

Напруженість магнітного поля у центрі квадратної рамки з струмом дорівнює *30 А/м.* Знайти силу струму, що протікає по рамці, якщо довжина її сторін *10 см*.

Дано:

$H = 30$ *А/м*

$a = 10$ *см* $= 10^{-1}$ *м*

Знайти I – ?

Розв'язування

Відомо, що напруженість магнітного поля пов'язана з вектором магнітної індукції співвідношенням:

$$\mu\mu_0\vec{H} = \vec{B},$$

звідки

$$B = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 30 = 3{,}77 \cdot 10^{-5} \ Тл.$$

У центрі рамки всі вектори магнітної індукції, що відповідають магнітному полю струмів, які протікають по різних сторонах рамки, однакові за величиною й напрямком. Тому $B = 4B_1$, де B_1 – магнітна індукція магнітного поля , створеного струмом однією зі сторін:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0{}^2}{4\pi r_0} \cdot 2\cos\alpha ,$$

де r_0 – відстань від центра рамки до кожної зі сторін;

$r_0 = a/2 = 5$ *см* $= 0{,}05$ *м.*

Кут α для квадратної рамки дорівнює 45^o і $\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тому

$$B = 4B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi \cdot a/2} \cdot \sqrt{2} \qquad \text{або} \qquad I = \frac{B \cdot a \cdot \pi}{2\sqrt{2}\mu\mu_0} .$$

Виконаємо необхідні розрахунки, підставивши всі дані в системі *СІ* ,

$B = 3{,}77 \cdot 10^{-5}$ *Тл;* $a = 0{,}1$ *м;* $\mu = 1$; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ *Гн/м.*

$$I = \frac{3{,}77 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}14}{2\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 3{,}33\,A.$$

Відповідь: $3{,}33\,A$

Приклад 2

Індукція магнітного поля у центрі мідного дротяного кільця зі струмом дорівнює *10*$^{-5}$ *Тл*. Який переріз має дріт цього кільця, якщо після увімкнення до його кінців різниці потенціалів в *0,2 В*, по кільцю тече струм силою *2 А*. Питомий опір міді ρ = *1,7·10*$^{-8}$ *Ом·м.*

Дано:

B = 10^{-5} *Тл*

U = 0,2 В

I = 2 А

ρ = 1,7·10^{-8} *Ом·м*

Знайти *S – ?*

Розв'язування

Індукція магнітного поля у центрі кільця з струмом

$$B = \frac{\mu\mu_0{}^2}{2r} \; . \qquad (1)$$

Із закону Ома для ділянки кола маємо:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho \cdot \frac{l}{S}} = \frac{US}{\rho l} \; , \qquad (2)$$

де *l = 2πr* – довжина кільця; *r*– радіус кільця; *R* – опір дроту кільця.

Підставляючи вираз для *l* в (2), одержимо:

$$I\rho 2\pi\, r = US \, .$$

Звідки

$$r = \frac{US}{I\rho 2\pi},$$

і

$$B = \frac{\mu\mu_0 2\pi\rho I^2}{2US}.$$

З останньої формули знаходимо переріз:

$$S = \frac{\mu\mu_0 \pi\rho I^2}{BU} \; .$$

Підставимо числові дані:

$$S=\frac{1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\pi\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 4}{10^{-5}\cdot 0{,}2}=1{,}341\cdot 10^{-7}\,м^2=0{,}134\ мм^2.$$

Відповідь: *0,134 мм²*

Приклад 3.

Два колових витки зі струмом лежать в одній площині і мають спільний центр. Радіуси витків дорівнюють 12 и 8 см. Напруженість магнітного поля в центрі витків дорівнює 50 А/м, якщо струми течуть в одному напрямі і дорівнює нулю, якщо ці напрями протилежні. Знайти сили струмів в кожному із витків.

Дано:

$R_1=12\,см=0{,}12\,м;$

$R_2=8\,см=0{,}08\,м;$

$H'=50$ А/м;

$H''=0.$

Знайти: сили струмів I_1 і I_2.

Розв'язування.

Розташування витків, напрями струмів і векторів напруженостей магнітних полів кожного з них показані на Рис.1.

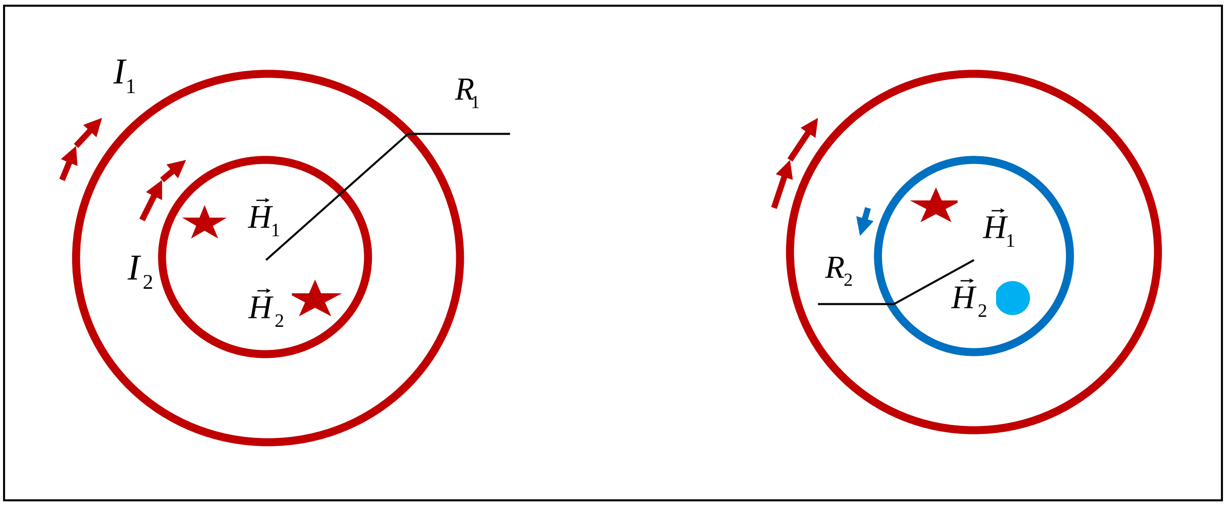


Рис.1

Магнітне поле створене системою двох струмів. Позначимо струми через I_1 і I_2, а напруженості полів відповідно $\vec H_1$ и $\vec H_2$. Прийнявши до уваги принцип суперпозиції, для напруженості магнітного поля в центрі витків запишемо:

$$\vec H=\vec H_1+\vec H_2 \qquad (1)$$

У першому випадку напрями струмів співпадають. Тому співпадаючими є напрями векторів $\vec H_1$ і $\vec H_2$. Вибравши вісь у напрямі вектора $\vec H_1$, рівність (1) для цього випадку подамо так:

$$H_1 + H_2 = H' \quad (2)$$

У другому випадку вектор напруженості поля, створеного струмом I_2 має протилежний напрям. Тому, проектуючи (1) на раніше вибрану вісь, одержуємо:

$$H_1 - H_2 = H'' \quad (3)$$

Напруженість магнітного поля у центрі колового витка розраховується сумісним застосуванням закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції. З таким підходом для H_1 і H_2 дістаємо:

$$H_1 = \frac{I_1}{2R_1} \quad (4)$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2R_2} \quad (5)$$

Підстановка (4) і (5) разом із значенням $H'' = 0$ в співвідношення (2) і (3) приводить до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{I_1}{2R_1} + \dfrac{I_2}{2R_2} = H' \\ \dfrac{I_1}{2R_1} - \dfrac{I_2}{2R_2} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Із другого рівняння знаходимо :

$$I_2 = \frac{R_2}{R_1} \cdot I_1 \quad (7)$$

Комбінуючи (9) з першим із рівнянь системи (6),

$$\frac{I_1}{2R_1} + \frac{I_1}{2R_1} = H' \quad (8)$$

Звідси випливає:

$$I_1 = H' \cdot R_1 \quad (9)$$

Тепер з врахуванням (9) і (7) знаходимо силу струму у другому витку:

$$I_2 = H' \cdot R_2 \quad (10)$$

Аналіз одиниць вимірювання:

$$[I_1] = [H'] \cdot [R_1] = (\text{А/м}) \cdot \text{м} = \text{А} \quad (11)$$

$$[I_2] = [H'] \cdot [R_2] = (\text{А/м}) \cdot \text{м} = \text{А} \quad (12)$$

Обчислення:

$$I_1 = 50 \cdot 0{,}12 = 6(\text{А}) \quad (13)$$

$$I_2 = 50 \cdot 0{,}08 = 4(\text{А}) \quad (14)$$

Відповідь: $I_1 = 6$ А , в загальному вигляді $I_1 = H' \cdot R_1$

$I_2 = 4$ А, в загальному вигляді $I_2 = H' \cdot R_2$.

Приклад 4.

Електрон, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів 50 В, влітає в однорідне магнітне поле під кутом 30° до ліній індукції. Визначити величину вектора магнітної індукції, якщо радіус гвинтової лінії, по якій рухається електрон, дорівнює 10 см.

Дано:
U = 50 В
$\alpha = 30°$
R = 10 см = 10^{-1} м

Знайти В – ?

Розв'язання

У магнітному полі електрон під дією сили Лоренца бере участь у двох рухах: рівномірному русі в напрямку силових ліній магнітного поля і русі по колу в площині, перпендикулярній до силових ліній. Рівномірний рух відбувається зі швидкістю $\upsilon_{11} = \upsilon_0 \cos\alpha$, а рух по колу характеризується швидкістю $\upsilon_\perp = \upsilon_0 \sin\alpha$. Рух по колу відбувається під дією сили Лоренца, яка є доцентровою:

$$F_л = ma_n = \frac{m\upsilon_\perp^2}{R},$$

де R – радіус кола.З урахуванням того, що сила Лоренца дорівнює $F_л = e\upsilon_\perp B$, одержуємо співвідношення:

$$B = \frac{m\upsilon_\perp}{eR}. \qquad (1)$$

Величина швидкості електрона визначається пройденою різницею потенціалів:

$$eU = \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Звідки $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ й $\upsilon_\perp = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\sin\alpha$.

Тоді, відповідно до формули (1), знаходимо

$$B = \frac{\sin\alpha}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Підставимо числові дані, переводячи величини в систему СІ:

$$B=\frac{\sin 30^o}{0,1}\sqrt{\frac{2\cdot 50\cdot 9,1\cdot 10^{-31}}{1,6\cdot 10^{-19}}}=\frac{1}{0,2}\cdot 10^{-5}\cdot\sqrt{\frac{9,1}{1,6}}=1,19\cdot 10^{-4}$$ Тл.

Відповідь: $1,19\cdot 10^{-4}$ Тл.

Задачі для самостійної роботи по Темі 7.

1.Два кругових витки розташовані в двох взаємно перпендикулярних площинах так, що центри цих витків збігаються. Радіус кожного витка R=2 *см,* струми у витках $I_1 = I_2 = 5$ A.Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі цих витків.

2.В дротяній рамці, що має форму правильного шестикутника,протікає струм I=*2 A.* При цьому в центрі рамки утвориться магнітне поле напруженістю $\vec{H}$ *=33 А/м.* Знайти довжину дроту, з якого зроблена рамка.

3.В обмотці дуже короткої котушки радіусом *r=16 см* проходить струм силою I=*5* А. Скільки витків *N* дроту намотано на котушку, якщо напруженість магнітного поля в її центрі дорівнює 800 *А/м* ?

4.Довгий прямий соленоїд із дроту діаметром *d=0,5мм* намотаний так, що витки щільно прилягають один до одного. Яка напруженість $\vec{H}$ магнітного поля всередині соленоїда при силі струму I=*4 А?* Товщиною ізоляції знехтувати.

5.В провіднику, який має форму кільця радіусом R=20 см проходить струм величиною I=100 A Перпендикулярно площині кільця виникає однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$=20 мТл. Розрахувати силу, з якою розтягується кільце.

6.Тонке кільце радіусом R=10 см несе заряд Q=10 нКл. Кільце рівномірно обертається з частотою f=10 c^{-1} відносно осі,що перпендикулярна площині кільця та проходить через його центр. Знайти: 1) магнітний момент кругового струму, обумовленого кільцем: 2)відношення магнітною моменту до моменту імпульсу, якщо маса кільця дорівнює 10г.

7.Рамка з провідника площею Sрівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ навколо осі, яка перпендикулярна напряму поля. Період обертання рівний Т. Виразити магнітний потік Ф, який перетинає рамку, і ЕРС індукції в рамці як функцію часу.

8.Електрон зі швидкістю $\vec{V}$=1 Мм/с влетів до однорідного магнітного поля з індукцією $\vec{B} = 30\ мТл$ під кутом $\alpha = 30°$ до напряму лінії індукції. Визначити радіус *R*і крок *h*гвинтової лінії, якою буде рухатися електрон.

9.Квадратна рамка з провідника розташована в одній площині з довгим прямим провідником. Дві сторони рамки паралельні провіднику. В рамці і провіднику проходить однаковий струм величиною I=1 кА. Визначити силу, що діє на рамку, якщо найближча до провідника сторона рамки знаходиться на віддалі, рівній її довжині.

10.Провідник має форму півкільця радіусом R=10 см і знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$=50 мТл. В провіднику тече струм величиною I=10 А. Знайти силу $\vec{F}$, яка діє на провідник, якщо площина півкільця перпендикулярна лініям індукції.

Тема 8. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ. ЗГАСАЮЧІ І ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ.

1.Диференціальне рівняння коливань. Гармонічні коливання.
2. Гармонічні коливання маятника. Ідеальний коливальний контур.
3.Згасаючі коливання.
4. Вимушені коливання. Резонанс.

Основні визначення і співвідношення.

1.Зміщення, швидкість і прискорення матеріальної точки при гармонійних коливаннях визначаються рівняннями:

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$, $a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$,

де A– амплітуда коливань;

ω– циклічна частота;

φ_0– початкова фаза коливань.

2.Зв'язок циклічної частоти ω з періодом коливань T і частотою ν:

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$

3. Сила, яка діє на тіло при вільних гармонічних коливаннях (квазіпружна сила):

$F = ma = -m\omega^2 x = -kx,$

де $k = m\omega^2$–коефіцієнт квазіпружної сили, який вимірюється силою, що викликає зміщення $x = 1$.

4.Диференціальні рівняння малих коливань:

а) математичний маятник:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{l}x = 0$, де $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$, звідки $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$;

б) пружинний маятник:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\kappa}{m}x = 0$, де $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, звідки $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$;

в) фізичний маятник:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{mgl}{I}x = 0$, де $\omega_0^2 = \dfrac{mgl}{I}$, звідки $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$,

де I– момент інерції маятника відносно осі коливань;

l– відстань від осі коливань до центра мас маятника; $\dfrac{I}{ml} = L$ – зведена довжина.

5. При додаванні двох однаково направлених гармонічних коливань однакового періоду одержуємо гармонічне коливання того ж періоду, амплітуда якого A і початкова фаза φ_0 визначаються рівняннями:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},\ tq\ \varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2},$$

де A_1і A_2– амплітуди коливань, що складаються; φ_1 іφ_2– початкові фази цих коливань.

6. При додаванні двох однаково направлених гармонічних коливань однакової амплітуди і близьких частот ($\omega_1\approx\omega_2$) одержуємо биття, яке описується рівнянням:

$$x=\left|2A\cdot\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|\cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t,$$ де $\left|2A\cdot\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$– амплітуда биття.

7. При додаванні двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань з однаковою частотою в напрямі координатних осей x і y матимемо рівняння траєкторії результуючого руху матеріальної точки:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1\cdot A_2}cos(\varphi_2-\varphi_1)=sin^2(\varphi_2-\varphi_1),$$ де A_1 і A_2– амплітуди коливань, що додаються; $\varphi_2-\varphi_1$– різниця фаз цих коливань.

8. Диференціальне рівняння згасаючих коливань :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0\quad \text{або}\quad \frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0,$$

9. Добротність коливальних систем:

$$\theta=2\pi\frac{W_t}{\Delta W_{(t=T)}}\quad \text{або}\quad \theta=\frac{\pi}{\delta}=\frac{\pi}{\beta T}=\frac{\omega_0}{2\beta},$$

10. Диференціальне рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t\quad \text{або}\quad \ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t,$$

11. Загальний розв’язок диференціального рівняння вимушених коливань, які протягом певного часу встановлюються під дією вимушувальної сили має вигляд:

$x=A\cos(\omega t+\alpha)$, де A– амплітуда вимушених коливань; α– зсув за фазою вимушених коливань і вимушувальної сили.

12. Амплітуда вимушених коливань:

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}},$$ де $f_0=\frac{F_0}{m}$;

13. Зсув фази вимушених коливань:

$tg\alpha = -\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

14. Резонансна частота і резонансна амплітуда: $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; $A_{рез} = \dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Матеріальна точка масою $m = 5$ кг здійснює гармонічні коливання, рівняння руху яких має такий вигляд $x(t) = 0{,}02cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Визначити усі характеристики гармонічних коливань для моменту часу $t = 1\ c$. Чому дорівнює період Т та частота ν гармонічного коливання? Максимальну силу $\vec{F}_{max}$, що діє на точку. Фізичні величини подані в системі SI.

Дано:

$m = 5$ кг

$x(t) = 0{,}02cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$t = 1\ c$

Знайти $\varphi -?$, $\varphi_0 -?$, $\omega -?$, $\mathrm{T} -?$, $\nu -?$

$x(t) -?$, $v(t) -?$, $a(t) -?$,

$\mathrm{E}_{\text{кін.}} -?$, $\mathrm{E}_{\text{пот.}} -?$, $\mathrm{E}_{\text{повн.}} -?$,

$\vec{F}_{max} -?$

Розв'язування

З рівняння гармонічних коливань $x(t) = 0{,}02cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ випливає, що фаза коливань φ даного коливання для моменту часу $t = 1\ c$ обчислюється за формулою $\varphi = \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{3}\pi = 420^{\circ}$.

Початкова фаза даного коливання $\varphi_0 = \frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$.

Циклічна частота $\omega = 2\pi\ \left(\frac{\text{рад}}{\text{c}}\right)$.

Період коливань $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ (\text{c})$.

Частота коливань $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1$ (Гц).

Зміщення гармонічного коливання для моменту часу $t = 1\ c$ визначається з рівняння гармонічного коливання

$$x(1) = 0{,}02 cos\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}02\ cos420^{\circ} = 0{,}02 \cdot 0{,}5 = 0{,}01 \text{ м.}$$

Швидкість матеріальної точки для моменту часу $t = 1\ c$ визначається як похідна від координати $x(t)$ за часом t:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0{,}02 \cdot 2\pi \cdot sin\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$v(1) = \frac{dx}{dt} = -0{,}02 \cdot 2\pi \cdot sin\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = -0{,}108 \text{ м/с.}$$

Прискорення матеріальної точки для моменту часу $t = 1\ c$ визначається як похідна від швидкості $v(t)$ за часом t:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0{,}02 \cdot (2\pi)^2 \cdot cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$a(1) = \frac{dv}{dt} = -0{,}02 \cdot (2\pi)^2 \cdot cos\left(2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}394 \text{ м}/c^2.$$

Кінетична енергія матеріальної точки для моменту часу $t = 1\ c$ визначається за формулою:

$$E_{\text{кін.}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{5 \cdot (-0{,}108)^2}{2} = 0{,}029 \text{ Дж.}$$

Повна енергія матеріальної точки обчислюється за формулою:

$$E_{\text{повн.}} = \frac{mv_{max}^2}{2},\ v_{max} = A \cdot \omega.$$

$$E_{\text{повн.}} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m(A \cdot \omega)^2}{2} = \frac{5 \cdot (0{,}02 \cdot 2\pi)^2}{2} = 0{,}039 \text{ Дж.}$$

Потенціальна енергія обчислюється із закону збереження енергії:

$$E_{\text{повн.}} = E_{\text{кін.}} + E_{\text{пот.}}\text{, звідси}$$

$$E_{\text{пот.}} = E_{\text{повн}} - E_{\text{кін.}} = 0{,}039 - 0{,}029 = 0{,}01 \text{ Дж.}$$

Максимальна сила $\vec{F}_{max}$, що діє на точку визначається за другим законом Ньютона:

$$\vec{F}_{max} = m \cdot \vec{a}_{max},\ a_{max} = A \cdot \omega^2.$$

Тоді максимальна сила $F_{max} = m \cdot A \cdot \omega^2 = 5 \cdot 0{,}02 \cdot (2\pi)^2 = 3{,}947$ Н.

Приклад 2

Частинка здійснює гармонічні коливання вздовж осі x біля положення рівноваги $x = 0$. Циклічна частота коливань $\omega = 4\ c^{-1}$. В момент часу $t = 0$ координати частинки $x_0 = 25{,}0$ *см*, а її швидкість $\upsilon = 100$ *см/с*. Знайти координату x і швидкість υ цієї частинки через $t = 2{,}40$ *с*.

Дано:

$\omega = 4\ c^{-1}$
$x_0 = 25{,}0$ *см*
$\upsilon = 100{,}0$ *см/с*
$t = 2{,}40$ *с*

Знайти $x - ?\ \ \upsilon - ?$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань має вигляд:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Швидкість частинки в довільний момент часу дорівнює:

$$\upsilon = -A\,\omega\sin(\omega t + \varphi)\,. \quad (2)$$

В початковий момент часу $t = 0$ величини x і υ відповідно дорівнюють x_0 і υ_0:

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad \text{і} \qquad \upsilon_0 = -A\omega\ \sin\varphi\,. \quad (3)$$

Розв'язавши систему рівнянь (3), одержимо значення амплітуди коливань і початкової фази:

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{\upsilon_0^2}{A^2 \cdot \omega^2} = 1, \text{звідки} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}\ ;\ \cos\varphi = \frac{x_0}{A}, \text{звідки}\ \varphi = arc\cos\frac{x_0}{A}\ .$$

Числові значення амплітуди і початкової фази в одиницях умови задачі

$$A = \sqrt{625 + \frac{10^4}{16}} = 35{,}5\ см, \quad \varphi = arc\cos\frac{25}{35{,}5} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Скориставшись значеннями амплітуди коливань і початкової фази, знаходимо координату x і швидкість υ в момент часу t:

$x = 35{,}5\cos(4\cdot 2{,}40 + \pi/4) = -20{,}2$ *см*, $\upsilon = -35{,}5\cdot 4\sin(4\cdot 2{,}40 + \pi/4) = 115{,}7$ *см/с*.

Відповідь: $x = -20{,}2$ *см*; $\upsilon = 115{,}7$ *см/с*.

Приклад 3

Матеріальна точка бере участь одночасно у двох гармонічних коливальних процесах, які відбуваються в одному напрямку з однаковим періодом $T = 2\ c$ та з амплітудами $A_1 = 0{,}03$ м і $A_2 = 0{,}04$ м. Різниця фаз між цими коливаннями дорівнює $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{4}$. Початкова фаза одного з цих коливань дорівнює нулю $\varphi_{01} = 0$. Знайти закон руху $x(t)$ результуючого процесу.

Дано:

$T_1 = T_2 = T = 2\ c$

$A_1 = 0{,}03$ м

$A_2 = 0{,}04$ м

$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{4}$

$\varphi_{01} = 0$

Знайти $x(t)$–?

Розв'язування

Закони руху для кожного з процесів у загальному вигляді можна записати рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1\,sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ x_2 = A_2 sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Закон руху точки, яка бере участь у двох коливальних процесах, буде

$$x(t) = x_1 + x_2 = A_1\,sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 sin(\omega t + \varphi_{02}), \qquad (2)$$

де $x(t)$ – зміщення точки від положення рівноваги.

Оскільки обидва коливання гармонічні, мають однакові частоти і напрямки поширення, то результуюче коливання також буде гармонічним і матиме таку саму частоту. Тому закон руху можна записати у вигляді:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi_0), \qquad (3)$$

де Aі φ_0 – відповідно амплітуда і початкова фаза результуючого коливання.

Їх можна знайти графічно методом векторних діаграм або аналітичним методом.

Скористаємось аналітичним методом. Прирівняємо праві частини рівностей (2) і (3):

$$Asin(\omega t + \varphi_0) = A_1\,sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 sin(\omega t + \varphi_{02}). \qquad (4)$$

Розкриємо синуси суми двох кутів і згрупуємо окремо члени, до складу яких входять $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$. Одержимо

$Asin\omega t cos\varphi_0 + Acos\omega t sin\varphi_0 = (A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02})sin\omega t + (A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02})cos\omega t$

.Цей вираз перетворюється на тотожність за будь-яких значень t, коли коефіцієнти біля $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$ у лівій і правій частинах рівняння будуть однаковими, тобто

$$Acos\varphi_0 = A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}; \qquad (5)$$

$$Asin\varphi_0 = A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}. \qquad (6)$$

Поділивши рівняння (6) на рівняння (5), дістанемо:

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}}{A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}}. \qquad (7)$$

Піднесемо ліві і праві частини рівнянь (5) і (6) до квадрата, додамо їх і згрупуємо члени. Отримаємо:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \qquad (8)$$

За формулою (7) знайдемо початкову фазу результуючого коливання:

$$tg\varphi_0 = \frac{0{,}03sin0 + 0{,}04sin\frac{\pi}{4}}{0{,}03cos0 + 0{,}04cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}49, \text{ або } \varphi_0 = arctg0{,}49 = 0{,}45 \text{ рад.}$$

За формулою (8) знайдемо амплітуду результуючого коливання:

$$A = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}04^2 + 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}04 \cdot cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}06 \text{ м.}$$

Циклічна частота коливання визначається за періодом:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Підставивши значення A, φ_0 і ωв рівняння (3), дістанемо закон руху результуючого коливання:

$$x(t) = 0{,}06sin(\pi t + 0{,}45) \ \text{(м)}.$$

Відповідь: $x(t) = 0{,}06sin(\pi t + 0{,}45)$м.

Приклад 4

Рух матеріальної точки задано рівняннями $x = 25\sin 4t$ см; $y = 12sin(4t + 1{,}57)$ см. Знайти рівняння траєкторії $f(x, y)$ і швидкість $v(t)$ руху точки в момент часу $t = 0{,}5\ c$.

Дано:

$x = 25\sin 4t$ см

$y = 12sin(4t + 1{,}57)$ см

$t = 0{,}5\ c$

Знайти $f(x, y)-?$

$v(\mathrm{t})-?$

Розв'язування

З рівнянь руху матеріальної точки видно, що точка одночасно здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою в напрямку координатних осей OX і OY.

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Для цього виключимо із заданих рівнянь час t. Із першого рівняння визначимо:

$$sin4t = \frac{x}{25},$$

друге перетворимо так:

$y = 12sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) = 12\,cos4t.$

З урахуванням першого рівняння друге запишемо у вигляді:

$$\frac{y}{12} = cos4t = \sqrt{1 - sin^2 4t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25^2}}.$$

Піднесемо його до квадрату:

$$\frac{y^2}{12^2} = 1 - \frac{x^2}{25^2},$$

звідки

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

Це рівняння результуючого коливання, що є рівнянням еліпса, осі якого зведені до координатних осей ОХ і ОУ, з півосями $a = 25$ см і$b = 12$ см (див. рис.37).

Знайдемо швидкість точки в момент часу $t = 0{,}5\ c$. Модуль швидкості, як відомо, дорівнює:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

де $v_x = \frac{dx}{dt} = 25 \cdot 4cos4t = 100cos4 \cdot 0{,}5 = -42\left(\frac{\text{см}}{c}\right),$

$v_y = \frac{dy}{dt} = -12 \cdot 4sin4t = -48sin4 \cdot 0{,}5 = -44\left(\frac{\text{см}}{c}\right).$

Тоді модуль швидкості матеріальної точки:

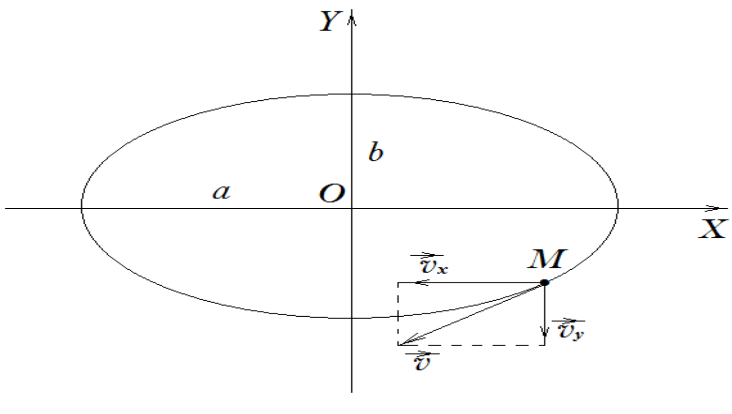
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-42)^2 + (-44)^2} = 61\ \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right).$$

Визначимо напрямок швидкості точки і, отже, напрямок її руху по еліптичній траєкторії. Для цього знайдемо координати точки в момент часу $t = 0{,}5\ c$, тобто її зміщення в напрямку осей *OX* і *OY*:

$$x = 25\sin 4t = 25sin4 \cdot 0{,}5 = 22{,}7\ (\text{см});$$

$$y = 12sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) = 12\,cos4t = 12cos4 \cdot 0{,}5 = -5{,}0\ (\text{см}).$$

Отже, в момент часу $t = 0{,}5\ c$ координати точки М становлять $x = 22{,}7$ (см), $y = -5{,}0$ (см). У точці М(22,7; -5,0) побудуємо проекції швидкостей v_x і v_y, тоді знайдемо напрямок швидкості $\vec{v}$ (див. рис.1).



Рисунок

З рисунка 1 видно,що точка рухається по еліпсу за годинниковою стрілкою.

Відповідь: рівняння траєкторії точки $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{144}=1$.

Приклад 5.

До спіральної пружинки приєднали тягарець, внаслідок чого пружина видовжилася на $x_{st}=0,04$ м. Після цього тягарець відхилили ще на $x_0=0,02$ м і поштовхом надали швидкість $v_0=1,2$ м/с у напрямі зміщення. Знайти амплітуду A і початкову фазу φ_0.

Дано:

$x_{st}=0,04$ м;

$x_0=0,02$ м;

$v_0=1,2$ м/с;

$g=9,8$ м/с^2

Знайти: амплітуду зміщення A; початкову фазу φ_0.

Розв'язування.

Тягарець, підвішений на пружині – пружинний маятник, зображений на Рис.1, де вказані точка підвісу C і точка O, яка відповідає точці рівноваги. Сила тяжіння, яка у стані рівноваги зрівноважується силою пружності, на Рис.1 не показана.

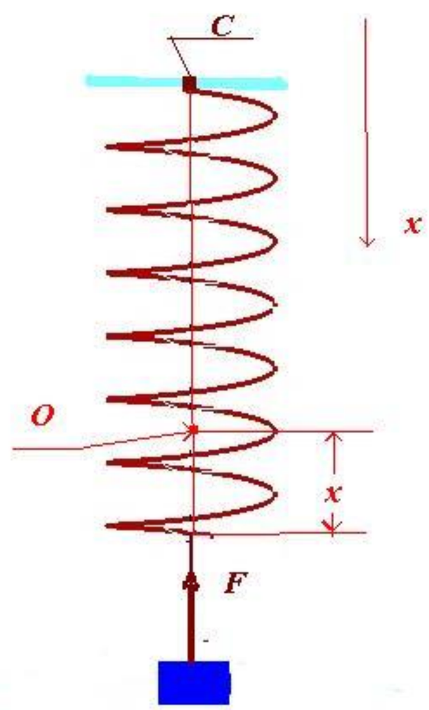


Рис. Схематичне зображення маятника .

Рух тягарця підпорядкований другому закону Ньютона. На тягарець діють дві сили: сила пружності і сила тяжіння.Движение груза подчиняется второму закону Ньютона. У рівновазі рівнодійна цих сил дорівнює нулю. Вважаючи, що виконується закон Гука, для стану рівноваги запишемо:

$$mg = kx_{st} \tag{1}$$

Тут k – коефіцієнт пружності, m – маса тягарця, а g – прискорення сили тяжіння. Виберемо за початок відліку положення рівноваги, тобто точку O, і позначимо як x відхилення від цього стану. Другий закон Ньютона в проекції на вертикальну вісь x набуває такої форми:

$$ma_x = -kx \tag{2}$$

Прийнявши до уваги означення прискорення

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{3}$$

приведемо рівняння руху тягарця до такого остаточного вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4}$$

Одержане співвідношення (4)- лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку без першої похідної і з додатними постійними коефіцієнтами. Рівняння з такою структурою описує гармонічні коливання і має своїми розв'язками функції косинус або синус. Виберемо розв'язок у косинусоїдальній формі, тобто запишемо:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{5}$$

Частота коливань виражається співвідношенням

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

яке отримується підстановкою (5) в (4)которое следует из уравнения (4). Умова рівноваги (1) дозволяє виключити невідому масу і виразити частоту через статичне зміщення x_{st}:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \tag{7}$$

Що стосується амплітуди A і початкової фази φ_0, то ці величини визначаються початковими умовами, а саме початковим зміщенням x_0 і початковою швидкістю v_0. Миттєву швидкість знаходимо диференціюванням зміщення (4):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A\cos(\omega t + \varphi_0)]}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{8}$$

Підстановка значення $t = 0$ у вирази (5) і (8) дає:

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \end{cases} \qquad (9)$$

Перетворимо систему рівнянь (9) до наступного вигляду:

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 / \omega = -A\sin\varphi_0 \end{cases} \qquad (10)$$

Піднесенням системи рівнянь (10) до квадрату і додаванням одержаних результатів приходимо до рівняння:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \qquad (11)$$

Приймаючи до уваги (7), знаходимо:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2 x_{st}}{g}} \qquad (12)$$

Підстановка (7) і (12) у друге рівняння системи (10) дає:

$$\sin\varphi_0 = -\frac{v_0}{A\omega} = -\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{x_0^2 g}{x_{st}}}} \qquad (13)$$

Звідси знаходимо:

$$\varphi_0 = -\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{x_0^2 g}{x_{st}}}} \qquad (14)$$

<u>Аналіз одиниць вимірювання:</u>

Встановимо одиниці вимірювання наступних величин: $\frac{v_0^2 x_{st}}{g}$ і $\frac{x_0^2 g}{x_{st}}$. Отже,

$$\left[\frac{v_0^2 x_{st}}{g}\right] = \frac{[v_0^2][x_{st}]}{[g]} = (\text{м}^2/\text{с}^2)\cdot\text{м}\cdot(\text{с}^2/\text{м}) = \text{м}^2 \qquad (15)$$

$$\left[\frac{x_0^2 g}{x_{st}}\right] = \frac{[x_0^2][g]}{[x_{st}]} = \text{м}^2\cdot(\text{м}/\text{с}^2)/\text{м} = (\text{м}/\text{с})^2 \qquad (16)$$

З врахуванням проміжних результатів (15) ї (16) одержуємо:

$$[A] = \sqrt{\left[x_0^2 + \frac{v_0^2 x_{st}}{g}\right]} = \sqrt{[x_0^2]} = [x_0] = \text{м} \qquad (17)$$

$$\frac{[v_0]}{\sqrt{\left[v_0^2 + \frac{x_0^2 g}{x_{st}}\right]}} = \frac{[v_0]}{\sqrt{\left[v_0^2\right]}} = \frac{[v_0]}{[v_0]} = 1 \qquad (18)$$

<u>Обчислення:</u>

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2 x_{st}}{g}}=\sqrt{2^2\cdot 10^{-4}+\frac{1,2^2\cdot 4\cdot 10^{-2}}{9,8}}=10^{-2}\sqrt{4+58,8}=8\cdot 10^{-2}\ \text{(м)} \qquad (19)$$

$$\varphi_0=-\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+\frac{x_0^2 g}{x_{st}}}}=-\arcsin\frac{1,2}{\sqrt{1,2^2+\frac{4\cdot 10^{-4}\cdot 9,8}{4\cdot 10^{-2}}}}=-\arcsin\frac{1,2}{\sqrt{1,538}}= \qquad (20)$$

$$=-\arcsin 0,9676=-75^0$$

Відповідь: амплітуда $A=8\cdot 10^{-2}$ м ; в загальному вигляді $\boxed{A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2 x_{st}}{g}}}$;

початкова фаза $\varphi_0=-75^0$; в загальному вигляді $\boxed{\varphi_0=-\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+\frac{x_0^2 g}{x_{st}}}}}$

Приклад 6.

Вантаж масою $m=500$ г, підвішений до пружини з жорсткістю $k=20\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, здійснює гармонічні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент затухання коливань $\theta=0{,}004$. Скільки коливань має здійснити вантаж, щоб їх амплітуда зменшилась удвічі? Скільки при цьому коливальна система втратить енергії? За який час t відбудеться це зменшення?

Дано:

$m=500$ г $0{,}5$ кг

$k=20\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$

$\theta=0{,}004$

$\frac{A_1}{A_n}=2$

Знайти $n-?\ \frac{\Delta W}{W_1}-?\ t-?$

Розв'язування

Вантаж зазнає затухаючих коливань. Амплітуда першого коливання $A_1=A_0e^{-\beta t}$, а n-го коливання $A_n=A_0e^{-\beta(t+nT)}$, де n – кількість коливань; Т – період затухаючого коливання; β – коефіцієнт затухання.

Знайдемо відношення амплітуд:

$$\frac{A_1}{A_n}=\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+nT)}}=e^{\beta nT}=e^{n\theta},$$

де $\theta = \beta T$ – логарифмічний декремент затухання коливань.

Визначимо з цієї формули кількість коливань n:

$$ln\frac{A_1}{A_n} = n\theta lne = n\theta,$$

звідки

$$n = \frac{ln\frac{A_1}{A_n}}{\theta} = \frac{ln2}{0{,}004} = 173.$$

Енергія коливального процесу пропорційна квадрату амплітуди. Тому можна записати:

$$\frac{W_1}{W_n} = \left(\frac{A_1}{A_n}\right)^2 = 2^2 = 4,$$

де W_1 і W_n – повна енергія коливальної системи відповідно в початковий момент і через n коливань.

З останньої формули знайдемо, що $W_n = \frac{1}{4}W_1$.

Тоді втрата енергії коливальної системи у відсотках

$$\eta = \frac{\Delta W}{W_1} \cdot 100\% = \frac{W_1 - \frac{1}{4}W_1}{W_1} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%.$$

Отже, втрата енергії за $n = 173$ коливань становить 75%.

Час, упродовж якого амплітуда коливань зменшується вдвічі і розсіюється 75% енергії, дорівнює:

$$t = nT,$$

де $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ – період затухаючих коливань;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклічна частота власних коливань пружинного маятника.

Період затухаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\theta}{T}\right)^2}}, \text{ звідки } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + \theta^2}{\omega_0^2}}.$$

Взявши до уваги, що $\theta \ll 4\pi^2$, значенням θ^2 у цій формулі можна знехтувати. Тоді:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Після підстановки, отримаємо остаточну формулу:

$$t = nT = n2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 173 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0.5}{20}} = 171{,}86 \text{ (с)}.$$

Відповідь: $n = 173$; $\eta = 75\%$; $t = 171{,}86\ c$.

Приклад 7.
Крижина масою $m = 100$ кг здійснює вільні коливання у воді. Знайти коефіцієнт опору води, якщо повна механічна енергія крижини зменшилася в $n = 7$ разів протягом часу $t = 20$ с

Дано:
$m = 100$ кг;
$t = 20$ с;
$W_0 / W(t) = n = 7$

Знайти: коефіцієнт опору r.

Розв'язування.

Постановка задачі схематично представлена на нижчеподаному рисунку.

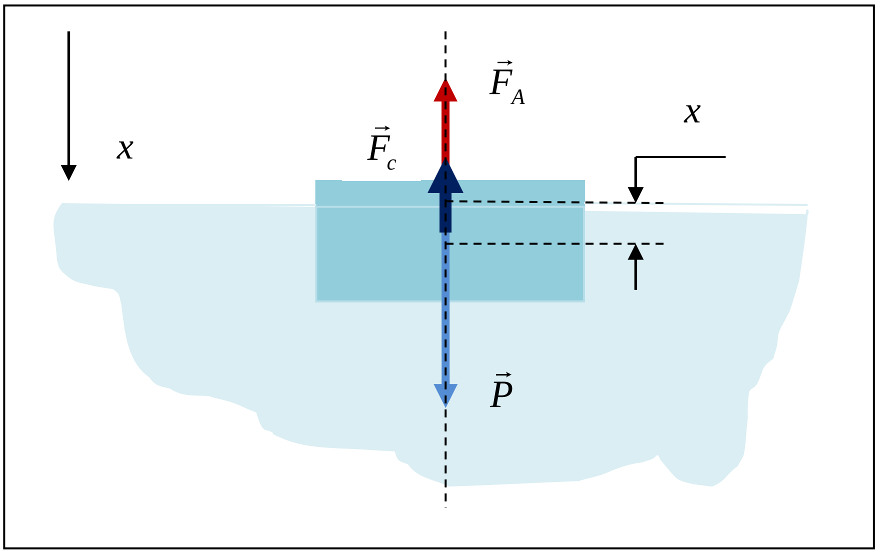


Рис.Ілюстрація до задачі

Для розв'язання задачі звернемося до другого закону Ньютона. На крижину діють такі сили: сила тяжіння $\vec{P}$, виштовхувальна сила $\vec{F}_A$ і, у випадку відносного руху крижини щодо води, -сила опору $\vec{F}_c$. Ці сили та їх миттєві напрями вказані на Рис. Отже, другий закон Ньютона має бути записаний у наступній формі:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_c \qquad (1)$$

Крижина виконує коливання у вертикальному напрямі. Тому від векторного рівняння (1) переходимо до скалярного проектуванням (1) на вісь x. В такий спосіб одержуємо:

$$ma_x = P_x + F_{xA} + F_{xc} \qquad (2)$$

причому

$$P_x = mg \qquad (3)$$

а

$$F_{xc} = -rv_x \tag{4}$$

При цьому припускається, що сила опору, як сила в'язкого тертя, пропорційна швидкості v_x. Нехай в стані рівноваги товщина зануреної у воду частини крижини дорівнює x_0. Коли крижина знаходиться в рівновазі, то її швидкість і прискорення дорівнюють нулю. Приймаючи до уваги закон Архімеда і рівняння (2) для стану рівноваги отримуємо:

$$mg - \rho g S x_0 = 0 \tag{5}$$

Тут $\rho-$густина води, а $S-$площа крижини. При додатковому зануренні крижини на глибину x для сили Архімеда з врахуванням її напряму маємо наступне співвідношення:

$$F_{xA} = -\rho S g (x_0 + x) \tag{6}$$

Підстановка (3) , (4) , (6) в рівняння (2) дає:

$$ma_x = mg - \rho S g (x_0 + x) - rv_x \tag{7}$$

Оскільки згідно із означеннями

$$v_x = \frac{dx}{dt} \tag{8}$$

і

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{9}$$

то, приймаючи до уваги умов рівноваги (5), яка дозволяє виключити із (7) постійні складові, приводимо рівняння (7) до остаточної форми:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{\rho S g}{m} x = 0 \tag{10}$$

Приймемо позначення

$$\beta = \frac{r}{2m} \tag{11}$$

для коефіцієнта згасання β і

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} \tag{12}$$

для частоти ω_0 вільних згасаючих коливань. Після цього рівняння (10) набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{13}$$

Одержане рівняння описує згасаючі коливання, які здійснюються за законом:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{14}$$

в якому частота ω визначається співвідношенням:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{15}$$

Амплітуда коливань $A(t)$ зменшується з часом за експоненціальним законом, тобто:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \qquad (16)$$

Повна механічна енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди. А тому для енергії W_0 в початковий момент часу і для енергії $W(t)$ через проміжок часу t маємо:

$$W_0 = \gamma A_0^2 \qquad (17)$$

$$W(t) = \gamma A^2(t) \qquad (18)$$

де $\gamma -$ коефіцієнт пропорційності. Тепер по членним діленням з врахуванням умови здачі одержуємо:

$$\frac{A_0^2}{A^2(t)} = n \qquad (19)$$

Підстановка (16) в (19) приводить до рівняння:

$$e^{2\beta t} = n \qquad (20)$$

розв'язуючи яке знаходимо:

$$2\beta = \frac{\ln n}{t} \qquad (21)$$

Комбінуючи (11) і (21), перетворимо останнє рівняння до наступного вигляду:

$$\frac{r}{m} = \frac{\ln n}{t} \qquad (22)$$

Звідси знаходимо шукану величину коефіцієнта опору:

$$r = \frac{m \ln n}{t} \qquad (23)$$

Аналіз одиниць вимірювання:

$$[r] = \frac{[m][\ln n]}{[t]} = \frac{[m]}{[t]} = \text{кг/с} \qquad (24)$$

Обчислення:

$$r = \frac{m \ln n}{t} = \frac{100 \ln 7}{20} = 5 \ln 7 = 9{,}7 \ \text{(кг/с)} \qquad (25)$$

Відповідь: $r = 9{,}7 \approx 10$ кг/с ; в загальному вигляді	$r = \frac{m \ln n}{t}$

Задачі для самостійної роботи по темі 8.

1.Математичний маятник підвішений до стелі вагона електропоїзда. В скільки разів зміниться його період коливань, якщо вагону надати горизонтальне прискорення a?

2.Кулька масою $m = 200$ г, підвішена на пружині, коливається з частотою $\nu = 5{,}0$ Гц. Визначити коефіцієнт пружності пружини.

3.Визначити мінімальну частоту коливань похилої площини (у поздовжньому напрямі), при якій тіло, що знаходиться на ній, почне сковзати. Кут нахилу площини α=10°, амплітуда коливань А=10 см коефіцієнт тертя тіла об похилу площину μ=0,4.

4.Склянка масою m_1=*20 г* і площею поперечного перерізу *S*=5 см^2 містить ртуть масою m_2=80 г і плаває на поверхні води. Під дією вертикальної сили склянка виводиться з положення рівноваги і відпускається. Визначити період коливань системи.

5.Знайти частоту коливань вантажу масою *m*=0,20 кг, підвішеного на пружині і поміщеного в олію, якщо коефіцієнт тертя в олії r=0,50 кг/с, а жорсткість пружини k=50 Н/м.

6.Стержень довжиною *l*=50 см здійснює коливання щодо горизонтальної осі, яка проходить через точку розташовану на відстані d=12,5 см від кінця стержня. Визначити частоту коливань стержня.

7.До стелі ліфта підвішений стрижень за один кінець так, що може виконувати коливання. Довжина стрижня 50 см. Визначити період коливань стержня, якщо ліфт рухається з прискоренням $12\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$, спрямованим вгору.

8.Однорідний диск радіусом R=0,10 м виконує коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через точку, розташовану на відстані R/2 від центра диска, і перпендикулярну до площини диска. Визначити частоту коливань диска.

9.Додаються три гармонічних коливання однакового напряму з однаковими періодами $T_1 = T_2 = T_3 = 5c$ та амплітудами $A_1 = A_2 = A_3 = 10\ см$. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \frac{\pi}{6}, \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд. Визначити амплітуду А та початкову фазу φ результуючого коливання.

10.Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t+\tau)$, де $A_1 = 5$ см; $A_2 = 10$ см; $\omega = \pi\ c^{-1}$; τ = 2с. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

11.Знайти число N повних коливань системи, під час яких енергія системи зменшилась в n=2 рази. Логарифмічний декремент загасання Θ =0,01.

12.Визначити період T загасаючих коливань, якщо період T_0 власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент загасання Θ =0,01.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1.Лопатинський І.Є., І.Р.Зачек, Г.А.Ільчук, Б.М.Романишин. Фізика. Підручник. – Львів: Афіша, 2013. 394 с.
2.Савельев И. В. Курс общей физики: Учеб. Пособие. В 3-х т. Т1. Механика. Молекулярная физика.- М.: Наука, 1986.- 432 с.
3.Воловик П.М. Фізика: Для ун-тів. – К.; Ірпінь: Перун, 2014. - 864 с.
4.Бушок Г.Ф., Півень Г.Ф. Курс фізики. - Київ: Вища школа, 1983, т.1-2.
5.Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учеб. пособие.- М.: Высш.шк., 2014.- 496 с.
6.Авдєєв С.Г. Бабюк Т.І.,Збірник задач з фізики, ч. 1,2,3, Вінниця: ВНТУ, 2010.
7. Лукіянець Б.А. та ін.,Основи квантової фізики. Вид. «Львівська політехніка»2011,с.420.
8. Андрейко А.М. та ін.,Збірник задач з фізики, Вид. «Львівська політехніка»,2012,с.320
9.Сивухин Д.В., Общий курс физики. В 6 –и томах. - М.: Висш. школа, 1979.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ INTERNET

1.www.lp.edu.ua ; 2.www.ekniga.ua; 3.www.physorg.ru;4.www.elementy.ru; 5.www.freescience.info; 6.www.arxiv.org;7. www.quant; 8.eqWorld

Навчальне видання

Методичні вказівки для практичних занять і самостійної роботи з фізики ч.1

Редактор В. Дружиніна

Укладач: Бурдейний Володимир Мефодійович

Оригінал-макет підготовлено В.М. Бурдейним

Підписано до друку ……..
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. …...
Наклад … пр. Зам. № 2018-

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32,
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.