

## МЕТОДОЛОГІЯ ВИМІРЮВАННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ РОТОРУ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН

Кучерук В.Ю., Кухарчук В.В., Дудикевич В.Б., Поджаренко А.В.  
Вінницький державний технічний університет  
Державний університет "Львівська політехніка"

Момент інерції ротора електричних машин (ЕМ) є одним із важливих параметрів, який визначає їх динамічні властивості. Але в довідниках даний параметр у відповідності з державними стандартами подається з великими технологічними відхиленнями від номінального значення (до  $\pm 10\%$ ).

При проектуванні різноманітних електроприводів і систем автоматики розробників цікавлять більш точні значення моментів інерції ЕМ (а іноді й у зборі з виконавчими механізмами), оскільки вони визначають швидкодію та тепловий режим роботи ЕМ. Визначити момент інерції ротора чи рухомої частини можна розрахунковими та експериментальними методами.

Розрахунки моменту інерції є трудомісткими через неоднорідності матеріалів та складність геометричної форми ротора ЕМ. Крім того такі методи не характеризуються високою точністю і тому використовуються рідко.

Експериментально момент інерції визначається багатьма методами [1]. Державні стандарти на випробування ЕМ передбачають три найбільш поширені методи визначення моменту інерції: метод допоміжного маятника, метод само гальмування, метод крутильних коливань.

Недоліками методу допоміжного маятника є те, що він характеризується низькою точністю, тому що важко визначити відстань центру ваги маятника від осі обертання, оскільки при цьому повинна бути врахована маса важеля. Ротор повинен бути відбалансованим, тому що його неврівноваженість спотворює результати вимірювань. За періодом  $T$  коливань маятника знаходять момент інерції  $J = (GaT^2)/(4\pi^2)$ , де  $G$  – вага ротора;  $a$  – відстань центра тяжіння від осі обертання.

При використанні методу крутильних коливань ротор підвішують на пружній проволочі і приводять в крутильний коливальний рух. При цьому визначається період малих коливань, який потім порівнюється із періодом коливань зразкового тіла з відомим моментом інерції  $J = J_3 (T_x/T_3)^2$ , де  $J_3$  – момент інерції зразкового тіла;  $T_3$  – період коливань зразкового тіла;  $T_x$  – період коливань ротора, момент інерції якого визначають.

Вимагається, щоб перед дослідом ротор був відбалансованим і точка підвісу знаходилась точно на осі обертання. Якщо точка підвісу буде зміщена з осі обертання, то зростає похибка визначення моменту інерції. Основні недоліки цього методу такі: необхідність розбору ЕМ та значна трудомісткість проведення вимірювального експерименту.

Метод самогальмування вимагає попереднього визначення механічних втрат (наприклад, з досліду холостого ходу). Недоліком цього методу є те, що механічні втрати задаються як константа, коли в дійсності вони є функцією від кутової швидкості. Це зумовлює низьку точність визначення моменту інерції ЕМ методом самогальмування.

Метою даної роботи є розробка сучасних методів вимірювання моменту інерції ротора ЕМ більш високої точності і швидкодії порівняно з відомими.

З метою розширення функціональних можливостей (як в умовах сертифікації, так і в умовах реальної експлуатації ЕМ в системах автоматики) в [2, 3] запропоновано вдосконалення методу самогальмування, суть якого полягає в тому, що спочатку вимірюють кутове прискорення самогальмування ротора  $\xi_{r1}$ , а потім кутове прискорення самогальмування  $\xi_{r2}$  із зразковим моментом інерції. Зразковий момент інерції  $J_3$  виконаний у вигляді простого тіла обертання, наприклад, диску чи циліндру. Момент інерції  $J_3$  визначають за його геометричними та ваговими параметрами. Рівняння руху ЕМ із зразковим моментом інерції та без нього мають вигляд:

$$\begin{cases} 0 = M_0(\omega_r) + M_{ВП}(\omega_r) + (J(\omega_r) + J_{ВП}(\omega_r)) \cdot \xi_{r1}(\omega_r); \\ 0 = M_0(\omega_r) + M_{ВП}(\omega_r) + (J(\omega_r) + J_{ВП}(\omega_r) + J_3(\omega_r)) \cdot \xi_{r2}(\omega_r), \end{cases} \quad (1)$$

де  $M_{ВП}$  – момент механічних втрат вхідного валу вимірювального перетворювача (ВП);  $J_{ВП}$  – момент інерції вхідного валу ВП.

Всі вищеперераховані величини представлені як функція від кутової швидкості  $\omega_r$ .

З рівнянь (1) при умовах  $J_{ВП} \ll J$  та  $M_{ВП} \ll M_0$  знаходять

$$J(\omega_r) = J_3 \cdot \frac{\xi_{r1}(\omega_r)}{\xi_{r2}(\omega_r) - \xi_{r1}(\omega_r)}, \quad M_0(\omega_r) = J_3 \cdot \frac{\xi_{r1}(\omega_r) \cdot \xi_{r2}(\omega_r)}{\xi_{r2}(\omega_r) - \xi_{r1}(\omega_r)} \quad (2)$$

Відмітимо, що даний метод дозволяє також визначити залежність  $M_0(\omega_r)$ .

Визначення моменту інерції зводиться до вимірювання кутової швидкості  $\omega_r$ , цифрового диференціювання  $\xi = d\omega_r/dt$ , згладжування результатів диференціювання та опосередкованого визначення моменту інерції.

Суттєвим недоліком засобів вимірювання моменту інерції, які реалізують даний метод, є значна похибка, що виникає за рахунок операції диференціювання експериментальних даних з виходу сенсора кутової швидкості.

Отже, виникає необхідність розробки таких методів вимірювання моменту інерції ротора, в яких відсутня операція цифрового диференціювання експериментальних даних  $d\omega_r/dt$ .

Розглянемо три можливих випадки методу самогальмування.

1. Самогальмування за рахунок пружних властивостей сенсора зусилля, коли обертальний момент на валу ЕМ прямує до нескінченності ( $M_{об} \rightarrow \infty$ ), внаслідок того, що ротор загальмовано за допомогою вимірювального важеля і сенсора зусилля.

Суть методу [4] полягає в тому, що в момент підключення напруги живлення на короткозамкненому роторі ЕМ створюється обертальний момент  $M_k$ , який через вимірювальний важіль діє на сенсор зусилля (рис. 1).

Оскільки сенсор зусилля є пружним елементом, то виникає перехідний процес, тривалість якого дорівнює  $t_*$ . Після закінчення перехідного процесу ЕМ знеструмують ( $U = 0$ ) і момент на виході перетворювача внаслідок

інерційних властивостей сенсора зусилля зменшується від величини  $M_k$  до 0 на протязі проміжку часу  $t$ .

Оскільки ротор ЕМ здійснює вільні затухаючі коливання, тривалість яких зумовлена величиною моменту інерції ротора  $J$ , жорсткістю  $C$  і коефіцієнтом заспокоєння  $P$  сенсора, то, вимірявши величини  $M_k$  і  $t_*$ , знаючи  $C$ , стає можливим знаходження  $J$ :

$$J = \frac{P \cdot t_*^0}{2 \cdot \ln \left( M_k \cdot \frac{g \cdot K1}{\delta \cdot C} \right)}, \quad (3)$$

де  $K1$  - стала тензорезистивного перетворювача;  $g$  - прискорення вільного падіння;  $\delta$  - нормоване значення абсолютної похибки, при якому закінчується перехідний процес у перетворювачі;  $P$  - коефіцієнт заспокоєння вільних недемпфованих коливань.

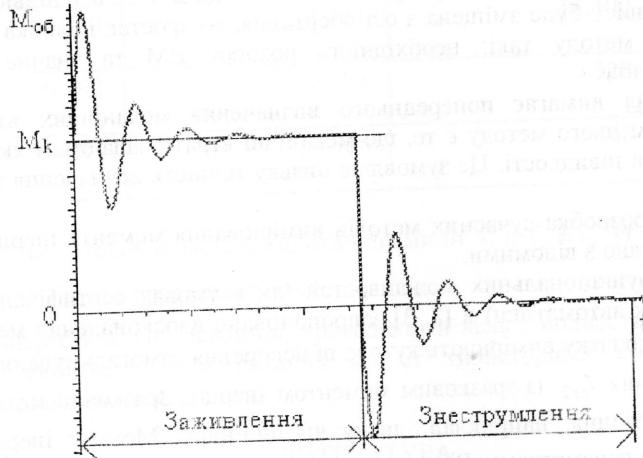


Рис. 1. До пояснення вимірювання моменту інерції при самогальмуванні за рахунок пружних властивостей сенсора зусилля

Галузь застосування засобів вимірювань, що здійснюють даний метод є високоточні вимірювання моменту інерції в процесі сертифікації електричних машин підвищеної швидкості. Дана позитивна якість досягається за рахунок введення в структурну схему засобу мікроконтролера і вимірювального перетворювача з емісійним тензорезистивним сенсором.

2. Самогальмування за рахунок механічних втрат, коли обертальний момент на валу ЕМ практично відсутній і в самогальмування в основному визначається моментом механічних втрат ( $M_{об} = M_0$ ). В даному випадку, після за живлення обмоток статора кутову швидкість ротора доводять до номінального значення  $\omega_{ном}$ .

і після цього знеструмлюють обмотки, а інформативний параметр визначають в проміжку часу, коли кутова швидкість ротора змінюється в межах від  $\omega_{\text{ном}}$  до 0 (рис. 2).

3. Самогальмування за допомогою махової маси, коли обертальний момент на валу визначається зразковим моментом  $M_3$  махової маси ( $M_{\text{об}} = M_3$ ). Тоді рівняння руху ротора ЕМ

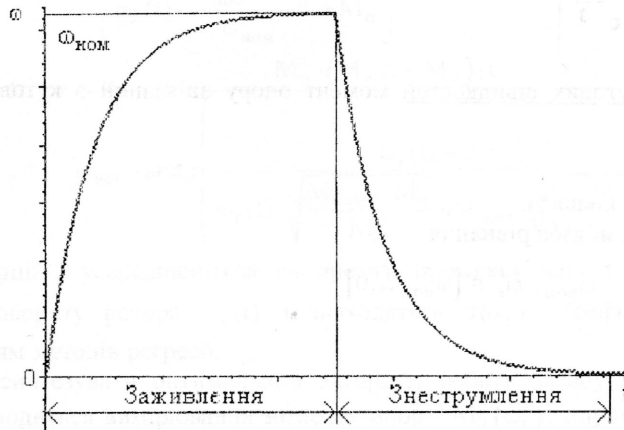


Рис. 2. До пояснення методу вимірювання моменту інерції при самогальмуванні за рахунок механічних втрат

$$(J + J_3) \cdot \frac{d\omega_r(t)}{dt} = -M_3, \quad (4)$$

де  $J_3$  - зразковий момент інерції.

Розв'язок рівняння (4) при початковій умові  $\omega_r(0) = \omega_{\text{ном}}$  матиме вигляд

$$J = \frac{M_3 \cdot t}{\omega_{\text{ном}} - \omega_r(t)} - J_3. \quad (5)$$

Недоліком даного методу є неврахування впливу моменту опору  $M_0$  на результати вимірювання. Для зменшення похибки від дії цієї впливової величини необхідно виконати умову  $M_3 \gg M_0$  або використати метод [5]. Але підвищення точності в даному методі досягається за рахунок суттєвого зменшення швидкодії зразкова махова маса суттєво "затягує" тривалість процесу самогальмування).

З метою підвищення точності та швидкодії пропонується наступна методологія вимірювання моменту інерції.

В режимі самогальмування кутова швидкість знаходиться із розв'язку диференціального рівняння руху ротора

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -M_0(\omega_r). \quad (6)$$

Для опису залежності моменту сил опору від параметрів руху можуть використовуватися наступні моделі.

В обмеженому діапазоні кутових швидкостей можна вважати, що момент опору лінійно зв'язаний з кутовою швидкістю

$$M_0(\omega_r) = a \cdot \omega_r, \quad (7)$$

де  $a$  - тангенс кута нахилу усередненої характеристики опору.

Тоді аналітичний розв'язок диференціального рівняння (6)

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -a \cdot \omega_r \text{ при } \omega_r(0) = \omega_{\text{ном}}, \omega_r \in [\omega_{\text{ном}} \dots 0] \quad (8)$$

має вигляд

$$\omega_r(t) = \omega_{\text{ном}} \cdot e^{-\frac{at}{J}}. \quad (9)$$

При лінійній апроксимації ділянки характеристики  $M_0(\omega_r)$  поблизу робочої кутової швидкості  $\omega_{\text{ном}}$  в

линійній моделі враховується також постійна складова моменту опору  $M_{\text{const}}$ :

$$M_0(\omega_r) = M_{\text{const}} + a \cdot (\omega_r - \omega_{\text{ном}}). \quad (10)$$

Тоді аналітичний розв'язок диференціального рівняння

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -(M_{\text{const}} + a \cdot (\omega_r - \omega_{\text{ном}})) \quad (11)$$

при  $\omega_r(0) = \omega_{\text{ном}}$ ,  $\omega_r \in [\omega_{\text{ном}} \dots 0]$ ; має вигляд

$$\omega_r(t) = \omega_{\text{ном}} - \frac{M_{\text{const}}}{a} \cdot \left(1 - e^{-\frac{at}{J}}\right). \quad (12)$$

В широкому діапазоні кутових швидкостей момент опору зв'язаний з кутовою швидкістю залежністю близькою до квадратичної

$$M_0(\omega_r) = b \cdot \omega_r^2, \quad (13)$$

де  $b$  - коефіцієнт пропорціональності.

При цьому аналітичний розв'язок рівняння

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -b \cdot \omega_r^2 \quad \text{при } \omega_r(0) = \omega_{\text{ном}}, \quad \omega_r \in [\omega_{\text{ном}} \dots 0] \quad (14)$$

має вигляд (рис. 5):

$$\omega_r(t) = \frac{J}{b \cdot t + \frac{J}{\omega_{\text{ном}}}}. \quad (15)$$

Узагальненням моделей самогальмування, (7), (10) та (13) пропонується модель на базі

$$M_0(\omega_r) = M_{\text{п}} + (M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}) \cdot \left(\frac{\omega_r}{\omega_{\text{ном}}}\right)^n, \quad (16)$$

де  $M_{\text{п}}$  - пусковий момент;  $n$  - показник, що залежить від конструкції механізму і характеризує ступінь залежності механічних втрат від кутової швидкості;  $n = 1 \div 2$ .

При  $n=1$  аналітичний розв'язок рівняння (16)

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -\left(M_{\text{п}} + (M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}) \cdot \left(\frac{\omega_r}{\omega_{\text{ном}}}\right)\right) \quad (17)$$

має вигляд

$$\omega_r(t) = \frac{\omega_{\text{ном}}}{M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}} \cdot \left( M_{\text{ном}} \cdot e^{-\frac{M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}}{J \cdot \omega_{\text{ном}}} t} - M_{\text{п}} \right), \quad \omega_r(t) \in [\omega_{\text{ном}} \dots 0]. \quad (18)$$

При  $n=2$  аналітичний розв'язок рівняння (16)

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -\left( M_{\text{п}} + (M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}) \cdot \left(\frac{\omega_r}{\omega_{\text{ном}}}\right)^2 \right) \quad (19)$$

має вигляд

$$\omega_r(t) = -\omega_{\text{ном}} \sqrt{\frac{M_{\text{п}}}{M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}}} \cdot \text{tg} \left( \frac{M_{\text{п}} \cdot (M_{\text{ном}} - M_{\text{п}})}{\omega_{\text{ном}} \cdot J} \cdot t - \arctg \sqrt{\frac{M_{\text{ном}} - M_{\text{п}}}{M_{\text{п}}}} \right) \quad \text{при } \omega_r(t) \in [\omega_{\text{ном}} \dots 0]. \quad (20)$$

За допомогою аналітичних перетворень розв'язків диференціального рівняння (6) для моделей  $M_0(\omega_r)$  (7), (10), (13), (16) можна отримати вирази для моменту інерції ротора  $J$ :

$$1. \text{ Лінійна } M_0(\omega_r) = a \cdot \omega_r \Rightarrow J(t) = \frac{a \cdot t}{\ln \left( \frac{\omega_{\text{ном}}}{\omega_r(t)} \right)}. \quad (21)$$

$$2. \text{ Лінеаризована поблизу робочої точки } M_0(\omega_r) = M_{\text{const}} + a \cdot (\omega_r - \omega_0) \Rightarrow$$

$$J(t) = \frac{a \cdot t}{\ln \left( (\omega_r(t) - \omega_0) \cdot \frac{a}{M_{\text{const}}} + 1 \right)}. \quad (22)$$

$$3. \text{ Квадратична } M_0(\omega_r) = b \cdot \omega_r^2 \Rightarrow J(t) = \frac{\omega_r(t) \cdot b \cdot t}{1 - \frac{\omega_r(t)}{\omega_{\text{ном}}}}. \quad (23)$$

$$4. \text{ Узагальнена (n=1)} \Rightarrow J(t) = \frac{(M_{\text{НОМ}} - M_{\text{П}}) \cdot t}{\ln \left( \frac{M_{\text{НОМ}}}{\omega_r(t) \cdot \frac{M_{\text{НОМ}} - M_{\text{П}}}{\omega_{\text{НОМ}}} + M_{\text{П}}} \right)} \cdot \omega_{\text{НОМ}} \quad (24)$$

$$5. \text{ Узагальнена (n=2)} \Rightarrow J(t) = \frac{M_{\text{П}} \cdot (M_{\text{НОМ}} - M_{\text{П}}) \cdot t}{\omega_{\text{НОМ}} \cdot \arctg \left( \frac{\omega_r(t) - \omega_{\text{НОМ}}}{\omega_r(t) \cdot \sqrt{\frac{M_{\text{НОМ}} - M_{\text{П}}}{M_{\text{П}}}} + \omega_{\text{НОМ}} \cdot \sqrt{\frac{M_{\text{П}}}{M_{\text{НОМ}} - M_{\text{П}}}}} \right)} \quad (25)$$

Значення моменту інерції  $J$  усереднюються на пролязі проміжку часу  $t$  або кутова швидкість  $\omega_r(t)$  перераховується в кут повороту ротора  $\alpha_r(t)$  і знаходяться  $J(\alpha_r)$ . Коєфіцієнти залежностей  $M_0(\omega_r)$  знаходяться з використанням методів регресії.

Таким чином, можна синтезувати оптимальний алгоритм роботи засобу вимірювання моменту інерції ротору ЕМ. Спочатку проводиться вимірювання моменту опору  $M_0(\omega_r)$ , апроксимація вимірюваної залежності  $M_0(\omega_r)$  і вибір найбільш придатної моделі  $M_0(\omega_r)$  із варіантів (7), (10), (13), (16) по критерію мінімізації середньоквадратичної похибки апроксимації. Потім, в залежності від вибраної моделі, проводиться безпосереднє обчислення моменту інерції.

З метою встановлення ЕМ на усталений режим роботи необхідно визначити тривалість перехідного процесу. Для цього використаємо спрощену лінеаризовану характеристику ЕМ у вигляді [6]

$$\begin{cases} T_{\text{ео}} \frac{dM_d(t)}{dt} + M_d(t) \gamma_0 = 1 - \frac{\omega_r(t)}{\omega_0}; \\ J \frac{d\omega_r(t)}{dt} = M_d(t) - M_0, \end{cases} \quad (26)$$

де  $M_d$  - електромагнітний обертальний момент ЕМ;  $T_{\text{ео}} = 1/(\omega_c S_k)$  - електромагнітна постійна часу;  $\gamma_0 = S_k / (2M_k)$  - крутизна статичної характеристики;  $\omega_r$  - частота обертання ротора;  $\omega_0$  - частота обертання для ідеального холостого ходу;  $\omega_c = 2\pi f_c$  - частота обертання поля статора;  $S_k, M_k$  - критичні значення ковзання та обертального моменту.

Аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь (26) відносно  $\omega_r(t)$  при нульових початкових умовах  $M_d(0) = 0, \omega_r(0) = 0$  матиме вигляд

$$\omega_r(t) = \omega_0 \left( 1 - \gamma_0 M_c - F_1 e^{-\gamma_0 t / 2T_{\text{ео}}} \cos\left(\frac{F}{2} t\right) + F_2 e^{-\gamma_0 t / 2T_{\text{ео}}} \sin\left(\frac{F}{2} t\right) \right), \quad F = \frac{1}{T_{\text{ео}}} \sqrt{\frac{4T_{\text{ео}}}{\omega_0 J \gamma_0} - 1},$$

$$F_1 = 1 - \gamma_0 M_c + \frac{\omega_0 J \gamma_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{T_{\text{ео}}} \right), \quad F_2 = \frac{\gamma_0 T_{\text{ео}}^2 (\omega_0 J + 2T_{\text{ео}} F M_c - F \omega_0 J \gamma_0 M_c)}{4T_{\text{ео}} - \omega_0 J \gamma_0} \quad (27)$$

Визначимо тривалість перехідного процесу  $t_{\text{пер}}$  з умови

$$\exp\left(-\frac{t_{\text{пер}}}{2T_{\text{ео}}}\right) = \delta_{\text{норм}}, \quad (28)$$

де  $\delta_{\text{норм}}$  - нормоване значення динамічної похибки.

Розв'язавши рівняння (28) відносно  $t_{\text{пер}}$ , отримаємо:

$$t_{\text{пер}} = 2T_{\text{ео}} \cdot \ln \left[ \frac{1}{\delta_{\text{норм}}} \right]. \quad (29)$$

На рис. 3 наведена поверхня, яка ілюструє залежність часу  $t_{\text{пер}}$  від параметрів ЕМ.

Структурна схема для реалізації запропонованої методології вимірювання моменту інерції наведена на рис. 4. Мікропроцесорна система MPS проводить сумісні вимірювання кутової швидкості  $\omega_r$  та часу  $t$ , які необхідні для визначення моменту інерції. На схемі  $\omega_m$  - кутова швидкість на виході муфти спряження.

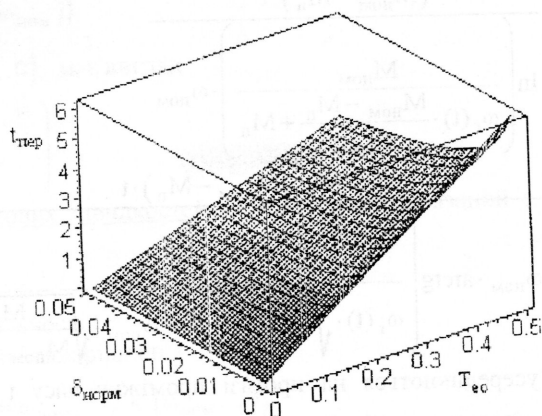


Рис. 3. Залежність  $t_{пер}$  ( $\delta_{норм}$ ,  $T_{eo}$ )

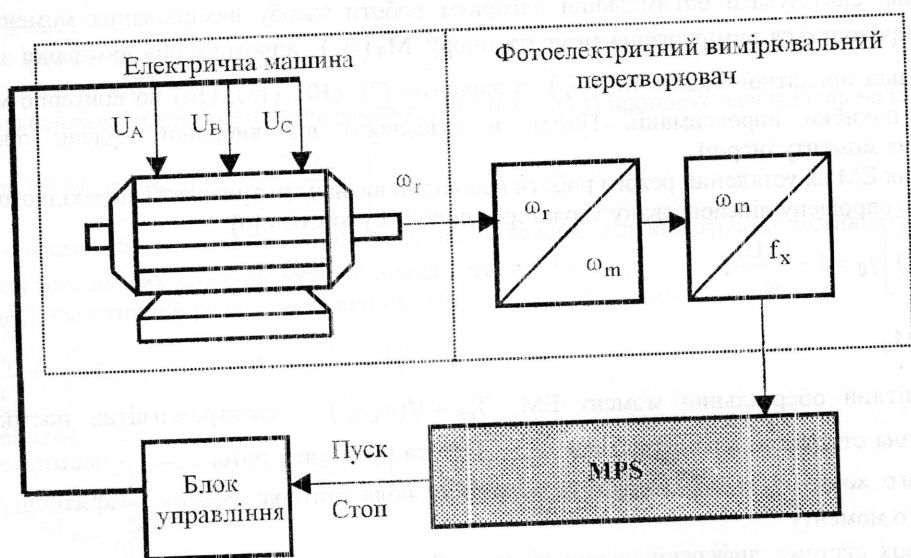


Рис. 4. Структурна схема реалізації методу вимірювання моменту інерції

Висновки:

1. Проведено аналіз існуючих методів вимірювання моменту інерції ротора ЕМ, показано, що найбільш перспективними є група методів, які використовують режим самогальмування ЕМ.
2. Розглянуто моделі залежностей моменту опору від параметрів руху ЕМ. Встановлено, що вони можуть бути використані для розробки методу вимірювання моменту інерції.
3. Запропоновано метод вимірювання моменту інерції, який на відміну від існуючих має високу швидкість і можливість використання в процесі експлуатації ЕМ та враховує залежність моменту опору від параметрів руху ЕМ.
4. Розроблено структурну схему засобу вимірювань та узагальнений алгоритм практичної реалізації методу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гернет М.М., Ратобильский В.Ф. Определение моментов инерции. - М.: Машиностроение, 1985 - 248с.
2. Поджаренко В.О., Кучерук В.Ю., Гоменюк А.С. Новый способ вимірювання моменту інерції електричних машин. //Науково-технічний збірник «Автоматизація технологічних процесів та промислова екологія», Випуск 1, 1997, с.23-27.
3. Podzharenko V.A., Kucheruk V.Yu. New method of measurement of a moment of inertia of an electric machine. // XIV IMEKO World Congress, Tampere, Finland, 1-6 June 1997, Volume III, Topics 3, pp.90-95.
4. В.В. Кухарчук. Елементи теорії контролю динамічних параметрів електричних машин (монографія). Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1998. -125с.
5. Кучерук В.Ю. Спосіб визначення моменту опору електричних машин та пристрій для його реалізації. //Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - Хмельницький.-1999.-№3.-с.49-52.
6. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов.-Л.: Машиностроение, 1969.-370с.

1. Гернет М.М., Ратобыльский В.Ф. Определение моментов инерции. - М.: Машиностроение, 1985 - 248 с.
2. Поджаренко В.О., Кучерук В.Ю., Гоменюк А.С. Новий спосіб вимірювання моменту інерції електричних машин // Науково-технічний збірник "Автоматизація технологічних процесів та промислова екологія", Випуск 1, 1997, с. 23-27.
3. Podzharenko V.A., Kucheruk V.Yu New method of measurement of a moment of inertia of an electrical machines // XIV IMEKO World Congress, Tampere, Finland, 1-6 June 1997, Volume III, Topics 3, pp. 90-95
4. В.В. Кухарчук Елементи теорії контролю динамічних параметрів електричних машин (монографія). - Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. - 125с.
5. Кучерук В.Ю. Спосіб визначення моменту опору електричних машин та пристрій для його реалізації // Вимірювальна та обчислювальна техніка технологічних процесах. - Хмельницький. - 1999. - №3. - с. 49-52
6. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов. - Л.: Машиностроение, 1969. - 370с.