УДК 531.7.08

В. О. Поджаренко, д. т. н., проф.; В. Ю. Кучерук, к. т. н., доц.;
О. П. Войтович, студ.; В. М. Севастьянов, асп.

ТОЧНІСТЬ ВИМІРЮВАНЬ В СИСТЕМАХ ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ

Однією з основних характеристик систем технічної діагностики (СТД) в процесі їх проектування є необхідна точність вимірювання діагностувальних параметрів. Точність вимірювання цих параметрів визначає інструментальну вірогідність діагностики, ймовірність правильної оцінки СТД технічного стану об'єкта діагностування (ОД) за діагностувальними параметрами (ДП) (за придатністю або непридатністю для використання за призначенням).

Для визначення необхідної точності вимірювання діагностувальних параметрів ОД використаємо теорію точності вимірювань [1, 2]. Необхідно мати повну інформацію про ОД: діагностувальні параметри; їх закони розподілу ймовірностей; допуски на параметри і ймовірності браку за діагностувальними параметрами p_i

Приймемо, що ОД має, в загальному випадку, n незалежних ДП, тоді ймовірність браку

$$P = -\prod_{i=1}^{n}(1-p_i), \tag{1}$$

де p_i — ймовірність браку за ДП.

В результаті діагностики з наявністю похибок вимірювань СТД є повна група несумісних подій: A – придатний ОД визнаний придатним; $Б$ – непридатний ОД визнаний непридатним; $В$ – придатний ОД визнаний непридатним; $Г$ – непридатний ОД визнаний придатним. Ймовірність $P(В)=\alpha$ визначає величину ризику виробника (похибка 1-го роду), а ймовірність $P(Г)=\beta$ — величина ризику замовника (похибка 2-го роду). Згідно визначення, величина інструментальної метрологічної вірогідності діагностики

$$Д = 1-\alpha-\beta. \tag{2}$$

Щоб визначити необхідну точність вимірювання по i-му ДП, необхідно визначити допустиму величину ризику виробника α або замовника β через величини та за цим параметром. Характеристики інструментальної вірогідності діагностики α і β через величини α_i та β_i знаходяться [2]

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i-\alpha_i); \tag{3}$$

$$\beta = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i-\alpha_i+\beta_i) - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i-\alpha_i). \tag{4}$$

Тоді з виразів (2, 3, 4) отримаємо

$$Д = P + 2\prod_{i=1}^{n}(1-p_i-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i-\alpha_i+\beta_i). \tag{5}$$

Інструментальна метрологічна вірогідність діагностики ОД явно виражається не через інструментальну метрологічну достовірність діагностики окремих параметрів $Д_i = 1-\alpha_i-\beta_i$, а через їх характеристики α_i та β_i.

Найпридатнішим критерієм у разі задання вимог до точності вимірювань є ризик виробника [2]. При цьому критерій задання вимог до точності вимірювань СТД такий: точність вимірювань СТД повинна відповідати інструментальному ризику виробника α з заданими законами розподілу ймовірностей ДП ОД.

необхідно накласти додаткові достатні умови. Такими умовами можуть бути n рівнянь, що визначають функційну залежність величин α_i від коефіцієнтів впливу параметрів на величину ризику виробника. Якщо є пропорційна залежність величин α_i від коефіцієнтів впливу отримаємо систему n рівнянь:

$$\alpha_i = a\theta_i\,, \quad (i = 1, 2, .., n), \tag{6}$$

де a – коефіцієнт пропорційності; θ_i – коефіцієнт впливу i-го параметра на величину α.

Підставивши рівняння (6) в (3), отримаємо:

$$\alpha = 1 - p - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - a\theta_i)\,. \tag{7}$$

Шляхом математичних перетворень можна отримати [2] розв'язок рівняння (7) відносно a

$$a = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i + p_i\theta_i) + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta_i + p_i\theta_i)^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i^2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(p_i + \frac{p_i}{2}\right)^2 + \ln(1 - P - \alpha)\right]}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i^2}\,. \tag{8}$$

Коефіцієнти впливу θ_i визначаються з умови реалізації необхідної точності вимірювань за заданими α_i. Для симетричних законів розподілу ймовірності ДП можуть бути прийняті такі коефіцієнти впливу

$$\theta_i = \sqrt{p_i}\,. \tag{9}$$

Визначивши a та θ_i, можна знайти α_i. Далі, згідно з [1], визначається необхідна точність вимірювань за кожним ДП, тобто визначаються допустимі випадкова та систематична складові похибки вимірювання. Щоб визначити допустиму випадкову похибку вимірювання, необхідно за кожним ДП задати долю ризику виробника λ_i, що зумовлена випадковою похибкою вимірювання з нульовою систематичною похибкою.

Значення ризику виробника, зумовлене випадковою похибкою, визначається як $\alpha_{\Delta_i} = \alpha_i\lambda_i$. Знаючи значення середньоквадратичної похибки вимірювання Δ_i за кожним ДП, згідно з [1] можна визначити величину ризику замовника β за виразом (4) і значення метрологічної вірогідності діагностики за виразом (2) з реалізацією в СТД необхідної точності вимірювань.

В загальному випадку, рівняння для ризиків виробника та замовника по кожному ДП записуються

$$\alpha = \int\limits_{A}^{B} f(x)\left[\int\limits_{A-\Delta}^{A}\varphi(\Delta)d\Delta + \int\limits_{B}^{B+\Delta}\varphi(\Delta)d\Delta\right]dx\,; \tag{10}$$

$$\beta = \int\limits_{B}^{B+\Delta} f(x)\left[\int\limits_{B-\Delta}^{B}\varphi(\Delta)d\Delta\right]dx + \int\limits_{A-\Delta}^{A} f(x)\left[\int\limits_{A}^{A+\Delta}\varphi(\Delta)d\Delta\right]dx\,, \tag{11}$$

де $f(x)$ – густина розподілу ймовірностей ДП; $\varphi(\Delta)$ – густина розподілу ймовірностей випадкових похибок вимірювання ДП; Δ – границя допустимої похибки вимірювання ДП; A, B – границі допуску ДП.

Загальна кількість законів, яким підпорядковуються розподіли $f(x)$ та $\varphi(\Delta)$, порівняно велика. Для їх опису допускається використання нормального зрізаного, трикутного, рівномірного, трапецеїдального, Релея зрізаного, антимодального I і II законів розподілу [3]. В [1, 2] використовується лише нормальний закон розподілу.

Якщо припустити, що всі сім законів мають місце для ДП та похибок вимірювань, то число пар комбінацій складе $7^2 = 49$. Тому обчислення виразів (10), (11) для такої кількості комбінацій великі.

Тому скористаємось так званою функцією Іордана [4]

$$f_\varepsilon(y) = \frac{\cos y}{\sqrt{1+\varepsilon \sin^2 y}}. \qquad (12)$$

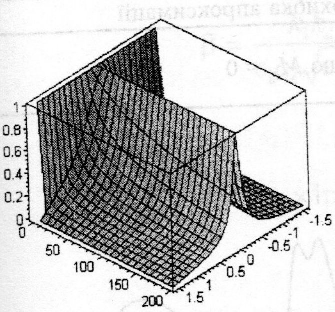


Рис. 1. Просторове зображення функції Іордана

Основною властивістю цієї функції є те, що зі зміною її параметра ε у діапазоні $-1 < \varepsilon \le \infty$ та зміною $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ форма функції змінюється від прямокутної до дельта-функції Дірака; якщо $\varepsilon = 0$, то функція Іордана приймає форму косинусоїди (рис. 1), тобто цією функцією можна описати будь-яку симетричну функцію густини розподілу.

Для того, щоб функцію Іордана можна було використовувати для аналітичного опису функції густини розподілу ймовірності, необхідно її дещо перетворити, оскільки з будь-яким значенням СКВ випадкової величини визначений інтеграл функції густини ймовірності в безкінечних межах повинен дорівнювати одиниці. Можна довести, що необхідним умовам відповідає така функція, що залежить від параметрів c та ε

$$\varphi_{\varepsilon,c}(y) = \frac{k\cos(cy)}{\sqrt{1+\varepsilon\sin^2(cy)}}, \qquad (13)$$

де $\begin{cases} k = c\sqrt{|\varepsilon|}/2\arcsin(\sqrt{|\varepsilon|}), & \text{якщо} \quad 1 \le \varepsilon < 0; \\ c/2, & \text{якщо} \quad \varepsilon = 0; \\ c\sqrt{\varepsilon}/2\ln(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{1+\varepsilon}), & \text{якщо} \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$; $c = \sigma(\varepsilon)/\sigma$; $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x^2 \varphi_\varepsilon(x)dx}$;

$\varphi_\varepsilon(y) = \varphi_{\varepsilon,c}(y)$, якщо $c = 1$; σ — реальне СКВ похибки для будь-якого виду закону розподілу. Вид закону розподілу визначається значенням ε.

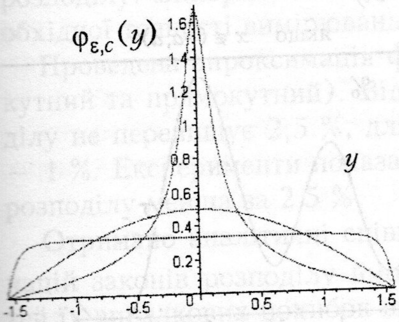


Рис. 2. Графік функції Іордана з різними значеннями ε

Графіки функції $\varphi_{\varepsilon,c}(y)$ з певними значеннями ε та $c = 1$ показані на рис. 2. Видно, що змінюючи ε в широких межах, можна змінювати вид густини ймовірностей від «тупих» до досить «гострих» функцій.

Було проведено ряд досліджень за допомогою пакету програм Table Curve, який призначений саме для апроксимації ряду даних певною функцією. Отримані залежності значення ε від реального СКВ σ заданих функцій розподілу густини ймовірності, а також залежності похибки апроксимації від σ. Досліди проведені для нормального, прямокутного та трикутного (Сімпсона) законів розподілу (рис. 3). Для нормального закону розподілу функція ε(σ) носить невизначений характер. Це можна пояснити тим, що апроксимація була проведена для повного нормального закону. Можливо, кращі результати можна отримати для зрізаної функції. Залежність ε(σ) для даних, розподілених за трикутним законом розподілу носить подібний характер.

Для прямокутного закону розподілу залежність ε(σ) носить степеневий характер, і описується просто за допомогою функції $y = Ax^B$. Похибка апроксимації в даному випадку носить рівномірний характер та становить 0,1 %.

Опишемо густину розподілу ймовірностей ДП $f(x)$ та густину розподілу ймовірностей випадкових похибок вимірювання ДП $\varphi(\Delta)$ за допомогою функції Іордана (13)

$$f(x) = \frac{k_1\cos(c_1 x)}{\sqrt{1+\varepsilon_1\sin^2(c_1 x)}}; \quad \varphi(\Delta) = \frac{k_2\cos(c_2\Delta)}{\sqrt{1+\varepsilon_2\sin^2(c_2\Delta)}}, \qquad (14)$$

де k_1, k_2, c_1, c_2 — коефіцієнти k і c для густин розподілу $f(x)$ і $\varphi(\Delta)$ відповідно.

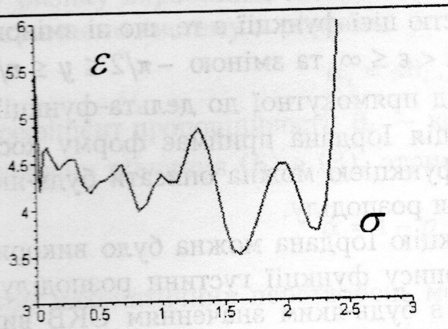
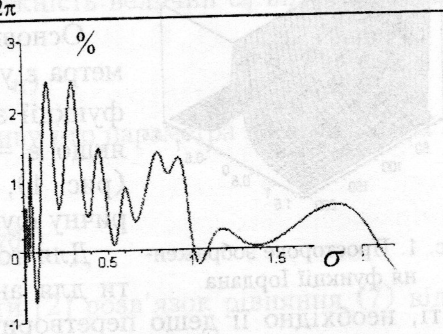
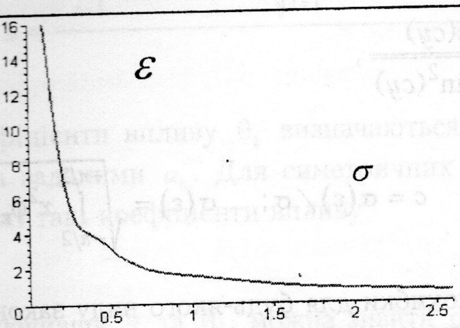
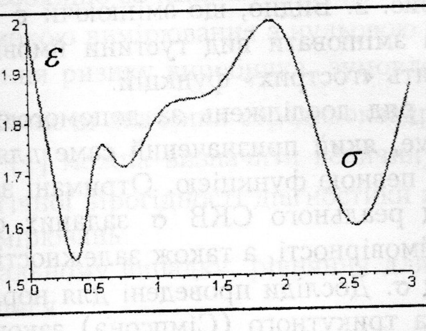
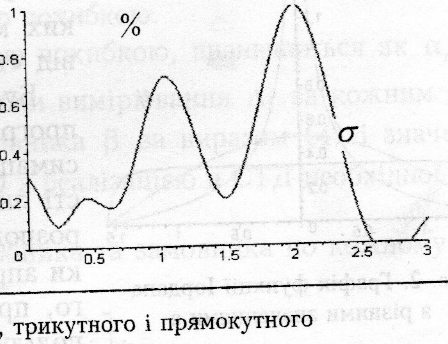
<table>
<tr><th>Залежність ε(σ)</th><th>Відн. похибка апроксимації</th></tr>
<tr><td colspan="2">Для нормального закону розподілу $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$, якщо $M_x = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Для прямокутного (рівномірного) закону розподілу $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & \text{якщо } x\in(-a;a);\\ 0, & \text{якщо } x\notin(-a;a)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td>0,1 % у всьому діапазоні σ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для трикутного (Сімпсона) закону розподілу $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & \text{якщо } x\in(-a;a);\\ 0, & \text{якщо } x\notin(-a;a)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Рис. 3. Результати апроксимації нормального, трикутного і прямокутного законів розподілу функцією Іордана

З використанням пакету прикладних програм Maple [5] отримано аналітичні залежності для ризиків α (10) і β (11) у разі підстановки в них функцій Іордана (14):

$$\alpha=\frac{k_1k_2}{c_1c_2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\left[\ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\sin\left((A-\Delta)c_2\right)+\sqrt{1+\varepsilon_2\sin^2\left((A-\Delta)c_2\right)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\sin\left(Ac_2\right)+\sqrt{1+\varepsilon_2\sin^2\left(Ac_2\right)}}\right]-\ln\left[\sqrt{\varepsilon_2}\sin\left((B+\Delta)c_2\right)+\sqrt{1+\varepsilon_2\sin^2\left((B+\Delta)c_2\right)}\right]+\ln\left[\sqrt{\varepsilon_2}\sin\left(Bc_2\right)+\sqrt{1+\varepsilon_2\sin^2\left(Bc_2\right)}\right]\right]\ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sin\left(Ac_1\right)+\sqrt{1+\varepsilon_1\sin^2\left(Ac_1\right)}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin\left(Bc_1\right)+\sqrt{1+\varepsilon_1\sin^2\left(Bc_1\right)}}\right]; \quad (15)$$

$$\beta = \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \left[\ln \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \sin\left((B-\Delta)c_2\right) + \sqrt{1+\varepsilon_2 \sin^2\left((B-\Delta)c_2\right)}}{\sqrt{\varepsilon_2} \sin(Bc_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 \sin^2(Bc_2)}} \right] \times \right.$$

$$\times \ln \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \sin(Bc_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 \sin^2(Bc_1)}}{\sqrt{\varepsilon_1} \sin\left((B+\Delta)c_1\right) + \sqrt{1+\varepsilon_1 \sin^2\left((B+\Delta)c_1\right)}} \right] - \qquad (16)$$

$$-\ln \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \sin(Ac_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 \sin^2(Ac_2)}}{\sqrt{\varepsilon_2} \sin\left((A+\Delta)c_2\right) + \sqrt{1+\varepsilon_2 \sin^2\left((A+\Delta)c_2\right)}} \right] \times$$

$$\left. \times \ln \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \sin(Ac_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 \sin^2(Ac_1)}}{\sqrt{\varepsilon_1} \sin\left((A-\Delta)c_1\right) + \sqrt{1+\varepsilon_1 \sin^2\left((A-\Delta)c_1\right)}} \right] \right].$$

Висновки

Розглянуто методику визначення необхідної точності вимірювань ДП у системах технічної діагностики. Показано, що метрологічна вірогідність діагностики явно виражається не через метрологічну вірогідність діагностики окремих параметрів $Д_i = 1 - \alpha_i - \beta_i$, а через їх характеристики α_i та β_i.

Для визначення ризиків виробника α_i та замовника β_i запропоновано використати функцію Іордана, за допомогою якої можна описати практично всі симетричні закони розподілу. Використання функції Іордана дозволяє узагальнити методику отримання необхідної точності вимірювань ДП.

Проведена апроксимація функцією Іордана ряду законів розподілу (нормальний, трикутний та прямокутний). Відносна похибка апроксимації для нормального закону розподілу не перевищує 2,5 %, для прямокутного закону розподілу — 0,1%, а для трикутного — 1 %. Експерименти показали, що для нормального зрізаного закону розподілу похибка розподілу менша за 2,5 %.

Отримано аналітичні співвідношення для α_i і β_i, які є загальними для різних комбінацій законів розподілу ймовірностей діагностованих параметрів і розподілу ймовірностей їх випадкових похибок вимірювання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дунаев Б. Б. Точность измерений при контроле качества. — К.: Техніка, 1981. —150 с.

2. Дунаев Б. Б. Определение требований к точности измерений в системах контроля / В кн. «Точность и надежность кибернетических систем», вып. 2. — 1974. — С. 90—94.

3. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. — Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. — 304 с.

4. Земельман И. А. О классификации погрешностей измерений // Измерительная техника. — 1985. — № 6. — С. 3—5.

5. Дьяконов В. П. Математическая система Maple V R3/R4/R5. — М.: Солон, 1998. — 400 с.

Поджаренко Володимир Олександрович — завідувач кафедри, ***Кучерук Володимир Юрійович*** — доцент.

Кафедра метрології та промислової автоматики;

Войтович Олеся Петрівна — студентка факультету автоматики та комп'ютерних систем управління, ***Севастьянов Володимир Миколайович*** — аспірант.

Кафедра метрології та промислової автоматики, Вінницький державний технічний університет