

УДК 51 – 74:519.25

В.Ю. Кучерук, д.т.н.,
Г.С. Дунаєва

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗПОДІЛІВ В.В. НЕШИТОГО

Вінницький національний технічний університет
kucheruk@vntu.edu.ua

Розглянуто систему узагальнених законів розподілів В.В. Нешитого, яка дозволяє з високою точністю описати майже всю множину статистичних розподілів однорідних випадкових величин. На прикладі нормального закону розподілу представлено результати математичного моделювання закону розподілу В.В. Нешитого.

Ключові слова: випадкові величини, закони розподілу, вибірка, обробка експериментальних даних

Вступ та постановка завдання

При проведенні статистичного аналізу випадкових величин в математичній статистиці використовується вибірковий метод, в якому із генеральної сукупності відбирається вибірка, яка аналізується на належність до певного закону розподілу та оцінюються його параметри.

При знаходженні оцінок параметрів вибірок найчастіше використовується класичний метод моментів К. Пірсона та метод найбільшої правдоподібності Р. Фішера. Але ці методи мають недолік, який полягає у необхідності складання та вирішення системи n рівнянь з n невідомими (за кількістю параметрів розподілу). В результаті отримується досить складна система рівнянь, розв'язок якої є складним. При цьому основна мета дослідження – встановлення закону розподілу, який найбільш повно характеризує випадкову величину – може бути недосягнутою.

В.В. Нешитим [1, 2] розроблена теорія узагальнених розподілів, в яку входять системи неперервних та дискретних розподілів, методи обчислень оцінок параметрів розподілів. Узагальнені розподіли дозволяють з високою точністю описати майже всю множину статистичних розподілів однорідних випадкових величин.

Основною перевагою теорії узагальнених розподілів В.В. Нешитого є те, що для встановлення належності вибірки випадкової величини до певного закону розподілу не вимагається перевірки багаточисельних гіпотез за критеріями погодження.

Для опису статистичних розподілів параметрів виробничої системи В.В. Нешитой пропонує використовувати узагальнені чотирипараметричні розподіли, що утворюють єдину систему. Три основні рівняння безперервних розподілів В.В. Нешитого представлені такими щільностями розподілу:

$$p(x) = Ne^{\gamma x} \left[1 - \alpha u e^{\beta x} \right]^{\frac{1}{u}-1} ; p(t) = Nt^{\gamma-1} \left[1 - \alpha u t^{\beta} \right]^{\frac{1}{u}-1} ; p(y) = \frac{N(\ln y)^{\gamma-1}}{y} \left[1 - \alpha u (\ln y)^{\beta} \right]^{\frac{1}{u}-1} ,$$

де N – нормуючий множник; α, β, γ, u – певні параметри.

Метою даної роботи є демонстрація можливості використання узагальнених чотирипараметричних розподілів до оброблення випадкових величин.

Результати дослідження

Для отримання узагальненого закону розподілу В.В. Нешитого достатньо скористатися наступним алгоритмом:

- проведення серії з n вимірювань;
- знаходження математичного сподівання, дисперсії, центральних моментів 3 і 4 порядку (експес і контрекспес);
- розрахунок критерію L (показника гостровершинності), за допомогою якого визначається тип розподілу;
- згідно з вибраним типом розподілу знаходяться параметри розподілу В. В. Нешитого.

Розглянемо представлення узагальненого закону розподілу В.В. Нешитого на прикладі даних,

наближених до нормального закону розподілу (табл.).

Вибірка випадкових величин,
наближених до нормального закону
розподілу

m	t
10	7,5
64	12,5
129	17,5
136	22,5
115	27,5
45	32,5
15	37,5
3	42,5
1	47,5
5	52,5

Табл.

Знайдемо середнє значення, дисперсію, центральні моменти 3 та 4 порядку:

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^9 t_i \frac{m_i}{M} = 27,307; \quad \mu_2 = \sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^2 \frac{m_i}{M} = 47,1635;$$

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^3 \frac{m_i}{M} = 96,33744;$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^4 \frac{m_i}{M} = 6586,527.$$

Тоді середнє квадратичне відхилення S та коефіцієнт варіації V :

$$S = \sqrt{\mu_2} = 6,867569; \quad V = \frac{S}{\bar{t}} \cdot 100 = 25,149527.$$

Привіряючи емпіричні моменти відповідно до теоретичних, знайдемо показники асиметрії та гостровершинності, також критерій L :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0,088465; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 2,961041; \quad L = \frac{4\beta_2 - 3\beta_1}{4 + \beta_1} = 2,832057.$$

Згідно рис. 1 [1] знаходимо, що розподіл відноситься до 1 типу з параметром $\beta=1$, оскільки $L < 3$. В даному випадку оцінки параметрів знаходяться таким чином:

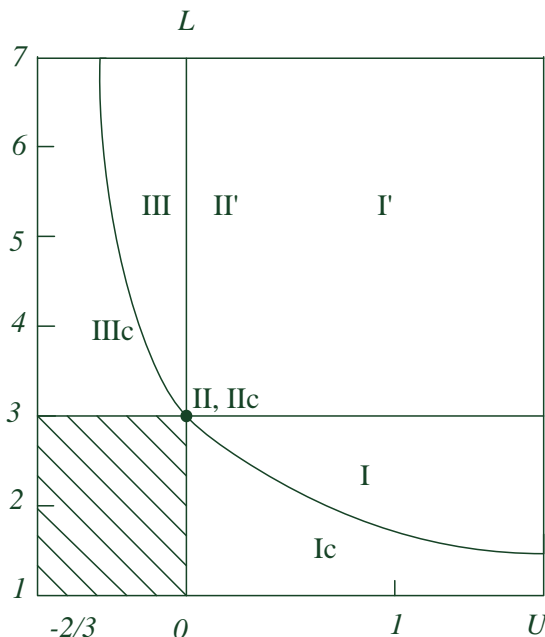


Рис. 1. Класифікація розподілів за критеріями u , L

$$a_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

$$Aa^2 + Ba + C = 0; \quad 1 = \bar{t} + a; \quad u = -\frac{AD}{6CE};$$

$$\alpha = -\frac{6aCE}{D^2}; \quad au = \frac{aA}{D}; \quad \gamma = \frac{6a^2E}{D}.$$

Де величини A, \dots, E виражені через показники β_1, β_2 і центральні моменти за допомогою формул:

$$A = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6;$$

$$B = \frac{\mu_3}{\mu_2} (3 + \beta_2); \quad C = \mu_2 (4\beta_2 - 3\beta_1);$$

$$D = 2C + aB; \quad E = \beta_2 - \beta_1 - 1.$$

Підставляючи в останні формули оцінки показників β_1, β_2 і відповідних центральних моментів, отримуємо:

$$A = -0,343314; \quad B = 12,17618; \quad C = 546,0952; \quad E = 1,872575.$$

Розв'язавши квадратне рівняння $Aa^2 + Ba + C = 0$, отримуємо $a_1 = -25,91447$; $a_2 = 61,38106$. Для одного з коренів має виконуватися рівність $a = -v_1$

$$a = -25,91447.$$

Тоді $D = 2C + aB = 776,6512$.

Отже, оцінки параметрів за формулами:

$$u = 0,0434569; \alpha u = 0,0114553; \gamma = 9,715141; l = v_1 + a = 1,392483.$$

Нормуючий множник N дорівнює

$$N = \frac{(\alpha u)^\gamma \Gamma(\gamma + 1/u)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1/u)} = 6,323485 \cdot 10^{-11}.$$

Розподіл Нешитого даної вибірки матиме вигляд

$$p(t) = N(t-l)^{\gamma-1} [1 - \alpha u(t-l)]_u^{\frac{1}{u}-1},$$

де $\gamma = k$.

Нормальний закон розподілу даної вибірки матиме вигляд

$$p1(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(t-ts)^2}{2S^2}\right)$$

На рис. 2 наведено графіки розподілу В.В. Нешитого та нормального закону розподілу.

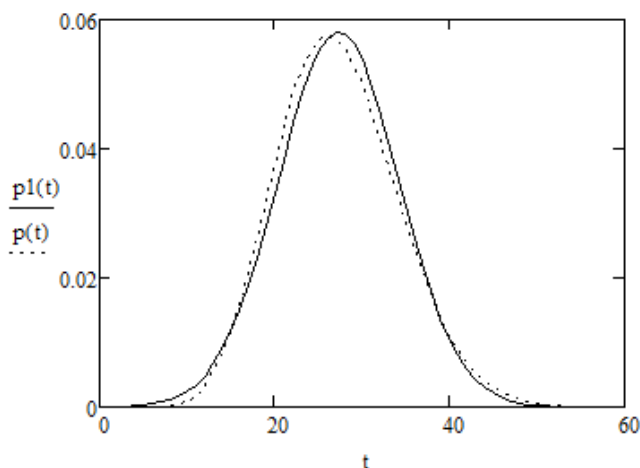


Рис. 2. Зображення розподілів В.В. Нешитого та Гауса

Висновки

Для підвищення ефективності статистичних методів у практичних дослідженнях, пов'язаних із визначенням статистичних параметрів, можливе використання універсальних імовірнісних моделей типу узагальненого розподілу В.В. Нешитого. Це дозволяє відобразити все різноманіття статистичних розподілів випадкових величин.

З результатів моделювання видно, що узагальнений закон розподілу В.В. Нешитого дозволяє досить точно зобразити випадкові величини, які описуються нормальним законом розподілу.

Список літератури

1. Нешитой, В. В. Методы статистического анализа на базе обобщенных распределений: учеб.-метод. пособие / В. В. Нешитой. – Мн.: Веды, 2001. – 168 с.
2. Нешитой, В. В. Статистический анализ и регулирование технологических процессов на базе обобщенных распределений с параметром сдвига: метод. рекомендации / В. В. Нешитой. – Мн.: БелГИСС, 2001. – 40 с.