УДК 621.311

П.Д.Лежнюк, С.В.Бевз (Вінницьк. держ. техн. ун-т, Україна)

ПОДІБНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ЯК ДВОЇСТА ЗАДАЧА КРИТЕРІАЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Стаття присвячена розгляду подібності оптимального процесу. Запропоновано способи визначення матриці зворотного зв'язку закону керування шляхом переходу від прямої задачі критеріального програмування до двоїстої та через встановлення безпосереднього зв'язку прямої задачі з двоїстими змінними

В оптимальному керуванні є клас задач, коли для отримання законів керування необхідно встановлювати зв'язок між оптимальними параметрами процесу, який оптимізується. Якщо при цьому використовується адаптивна система автоматичного керування (САК) з моделлю, то при подібному моделюванні передбачається визначення критеріїв подібності, оскільки керувальні дії u(t) в САК отримуються в цьому випадку за законом керування

$$u(t) = \pi\, y(t), \qquad (1)$$

де π, y(t) - вектори критеріїв подібності та спостереження.

Детермінація параметрів закону керування відбувається в результаті переходу від часткових залежностей до узагальнених. Це перетворення дозволяє зіставляти, синтезувати результати досліджень, поширювати їх на низку подібних випадків. Таке перетворення обумовлене тим, що кореляція основних фізичних ефектів, які визначають розвиток явища, для групи подібних явищ однакова, а всі їх кількісні ознаки, виражені у відносній формі, тотожні.

Слід зауважити, що перехід до нових безрозмірних величин — критеріїв подібності — докорінно змінює характер дослідження: відмовляючись від початкових величин, дослідник по-новому інтерпретує конкретне явище, розглядаючи його з позиції генералізації змінних, втрачаючи при цьому можливість фіксувати численні особливості конкретного процесу. На перший погляд узагальнені змінні π_i являють собою досить прості вирази. Проте ця простота лише зовнішня. Адже в принцип їх побудови вкладена глибока і важлива ідея, яка полягає в тому, що в угрупуванні величин, які утворюють узагальнені змінні, повинна бути відображена фізична модель процесу.

Критерії подібності не є самостійними факторами, оскільки вони об'єднують низку постійних і змінних параметрів, які визначають властивості процесу. Таке угрупування параметрів вносить важливі переваги [1]. Передусім — це зменшення кількості змінних і значне спрощення зв'язків між ними, що помітно полегшує обробку аналітичних та експериментальних досліджень. Крім цього, критерії подібності акумулюють сукупність факторів-складників характеристики процесу, їх внутрішні зв'язки і впливи, які можуть самоскомпенсовуватися і видозмінюватися в межах одного комплексу. Існує безліч шляхів

Примечание [V.M.1]:

отримання узагальнених критеріїв подібності, що відкриває широкі перспективи перед дослідником і дозволяє визначити парадигму різних випадків, об'єднаних загальними властивостями.

Критерії подібності за своїм змістом відповідають двоїстим змінним критеріального програмування (КП). Вони можуть бути визначені методами і за алгоритмами, розробленими стосовно розв'язання двоїстої задачі КП. В основі них лежить аналіз матриці розмірності (в теорії КП матриця показників).

Розглядаються два можливих випадки. Перший, коли всі критерії подібності вихідної задачі є визначальними, що відповідає задачі КП з нульовою мірою складності (s=0). Інший, коли тільки частина критеріїв подібності є визначальними (задача КП з s>0).

У першому випадку значення критеріїв подібності визначаються як результат розв'язання системи рівнянь, що об'єднує умови ортогональності та нормування:

$$\begin{cases} \alpha \pi = 0; \\ \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1, \end{cases} \qquad (2)$$

де α - матриця розмірностей (показників); m_1 - кількість членів цільової функції.

В другому випадку визначальні критерії подібності визначаються шляхом відповідного переформування матриці α:

$$\pi = \beta_0 + \sum_{j=1}^{s} \pi_j \beta_j ,$$

де β_0, β_j - вектори нормалізації і нев'язки, які отримуються в результаті стандартних процедур над матрицею α; π_j — базисні критерії подібності, опитимальні значення яких визначаються застосуванням чисельних методів оптимізації.

Вектори β_0 і β_j утворюють простір існування оптимальних значень критеріїв подібності. Стоїть задача вибрати в ньому серед схожих точок, в яких пропорціональні всі схожі параметри подібних процесів, які зіставляються. Серед можливих методів оптимізації, за допомогою яких серед схожих точок визначається оптимізуюча, віддана перевага КП.

Знайдені за допомогою КП критерії подібності, з одного боку, максимізують двоїсту функцію [2]

$$d(\pi) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{\pi_i} \right)^{\pi_i} \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda_k}{G_k} \right)^{\lambda_k},$$

де a_i — постійні коефіцієнти математичної моделі; $\lambda_k = \sum_{j \in K} \pi_j$ — нормовані множники Лагранжа обмежень виду $g(x) \le G_k$, k=1, p.

З іншого боку, використання знайдених таким чином π у САК як вектора зворотного зв'язку в законі керування завдяки реалізованому в КП принципу мінімакса забезпечує досягнення мінімуму критерію оптимальності (прямої задачі в термінах КП). Характерним тут є те, що за такого підходу π зв'язують саме оптимальні параметри процесу. Оптимізація останнього за допомогою САК не вимагає застосування чисельних методів у темпі реального часу.

Розроблено комплексний алгоритм розв'язання двоїстої задачі КП і визначення оптимальних значень критеріїв подібності, який реалізує лінійну програму (симплекс-метод), методи дихотомії та інтерполяції. В ньому залежно від характеру задачі та заданих умов автоматично обирається оптимальний шлях отримання значень π. Алгоритм характеризується надійністю та економічністю, в ньому максимально використовуються стандартні процедури. На рис. 1. показано логічну схему розв’язування двоїстої задачі КП при різних умовах. На ній виділено три основних блоки: 1 - подання критеріальної програми у вигляді лінійної та розв’язування її симплекс-методом; 2 - уточнення отри-маного симплекс-методом розв’язку методом дихотомії; 3 - уточнння розв’язку методом квадратичної інтерполяції. Даний метод, алгоритм і програма рекомендуються для оптимального керування системами з опуклою цільовою функцією та обмеженнями у вигляді поліномів.

Для визначення матриці критеріїв подібності, що традиційно здійснюється за допомогою переходу від прямої задачі до двоїстої, можна також скористатися системою лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \pi_i \cdot y_{\min}, \quad i = \overline{1,\, m_1}\ ; \\ a_r \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jr}} = \dfrac{\pi_r}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i}, \quad k = \overline{1,\, p}\ , \quad r = \overline{m_1+1,\, m_{p+1}}\ , \end{cases} \tag{3}$$

Прологарифмувавши обидві частини рівнянь та виконавши нескладні перетворення, із (3) отримуємо залежність показника ефективності y від вектора залежних критеріїв подібності π_i, $i = \overline{t+1,\, m_1}$:

$$y(\pi) = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i \prod_{i=1}^{m-t} \left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{n+1,i}} \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} \right)^{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,i}} ,$$

де $\beta_{n+1,i}$ — коефіцієнти оберненої матриці показників системи (3).

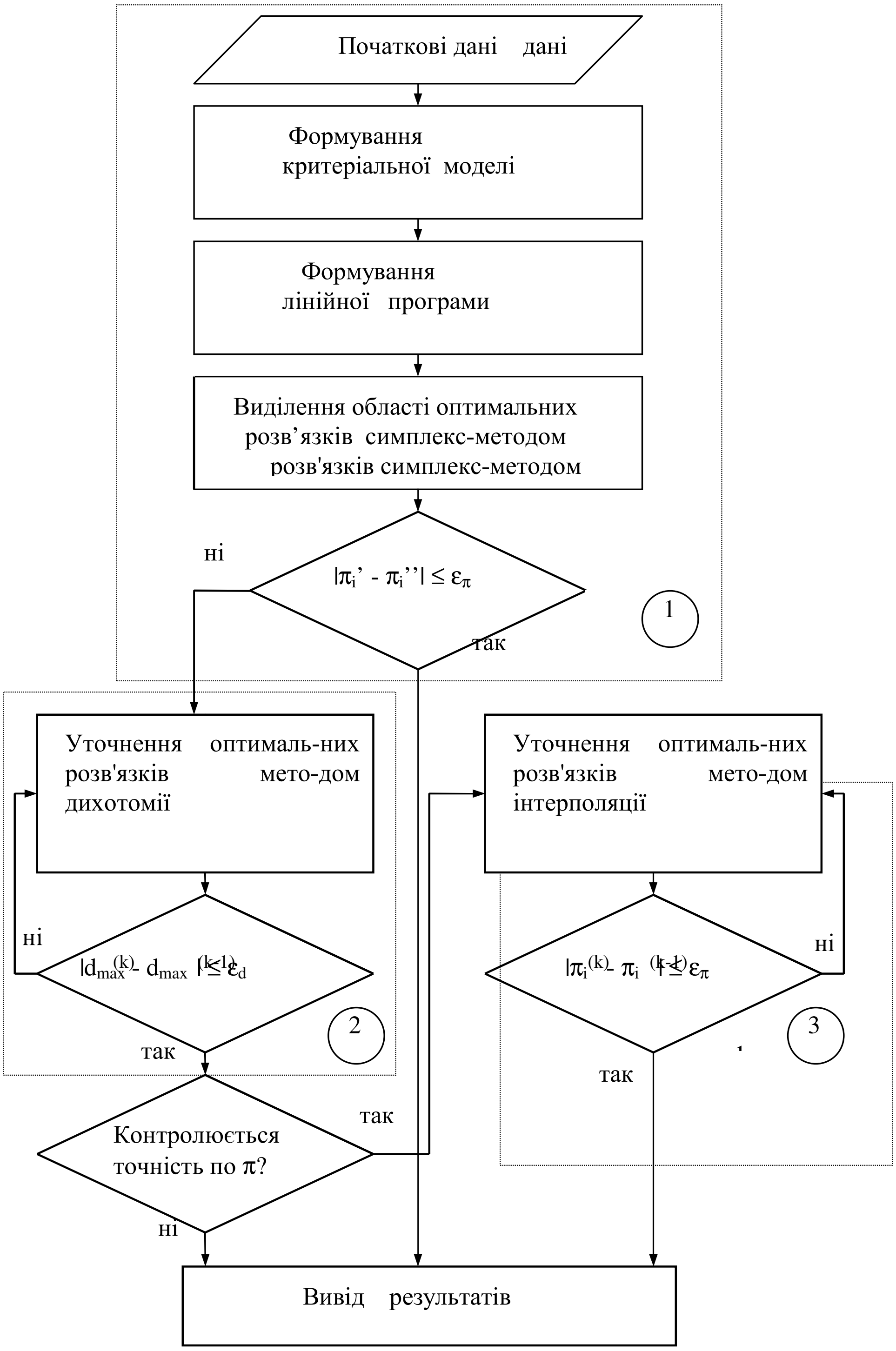

Рис. 1. Алгоритм пошуку оптимального рішення

При нульовій мірі складності в даному випадку використовується умова екстремуму функції $y(\pi)$, при виконанні якої оптимальні значення критеріїв подібності визначаються згідно з виразом:

$$\pi_s = -\beta_{m_1 s} \cdot \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i \ , \qquad s = \overline{1,\ m_1}$$

При вищій мірі складності процес визначення оптимальних критеріїв подібності ускладнюється доповненням залежності $y(\pi)$ незалежними критеріями подібності, при цьому вдаються до штучного формування моделі мінімуму показника ефективності [3].

Отримана залежність $y(\pi)$ акумулює досить широкі можливості щодо практичної реалізації оптимального розв'язку. Це зокрема безпосередній зв'язок між параметрами керування і матрицею зворотного зв'язку закону керування. Крім того, такий підхід розкриває іманентні властивості моделі, що спрощує проведення аналізу чутливості і визначення допустимої області оптимальних розв'язків, що адекватна точності і повноті вихідної інформації.

Підсумовуючи вищесказане, можна сподіватись, що знайдено раціональну форму вираження подібності оптимальних процесів застосування якої при моделюванні технічних об'єктів дозволяє скористатися деякими перевагами: досягається зменшення кількості змінних моделі, оскільки вони групуються у вигляді критеріїв; нові змінні можна використовувати для оцінки явищ, оскільки вони репрезентовані кореляцією початкових змінних — зіставленням двох фізичних ефектів досліджуваного процесу; критеріям π відповідає ціла множина комбінацій початкових змінних, тобто досліджується не один частковий випадок, а проводиться генералізація кількох; сукупність початкових змінних у складі критеріїв забезпечує вплив факторів не окремо, а комплексно, що допомагає відтворити адекватну цілісну картину модельованого процесу; належність процесу до певної номінації подібних явищ значно розширює коло прагматичних застосувань результатів досліджень.

Веников В.А. Теория подобия и моделирования. — М.: Высшая школа, 1976. — 480 с.

Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. - УМК ВО, 1989. - 140 с.

Лежнюк П.Д., Бевз С.В., Вишневський С.Я. Інтерпретація закону керування при встановленні зв'язку між керувальними параметрами та матрицею критеріїв подібності//Матеріали IV міжн. н.-т. конф. "Контроль і управління в технічних системах". — м.Вінниця, 1997. — с. 181-187.