УДК 621.311.161.

ТРАНЗИТИВНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ У КРИТЕРІАЛЬНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

© 1999, Лежнюк П.Д., Бевз С.В.
Вінницький державний технічний університет

Пропонується транзитивна система відносних одиниць, яка використовується для аналізу чутливості показника ефективності відносно його базового значення при відхиленні критеріїв подібності від базису, а також визначення впливу кожної складової цільової функції на величину показника ефективності. Дана система відносних одиниць застосовується при ранжуванні критеріїв подібності.

The relative units transitive system is offered which is used for the efficiency parameter sensitivity analysis in relation to it basic value at deviation of similarity criterions from base, and also for influence definition of each component goal function component to the value of a efficiency parameter. The given relative units system is used for ranking of similarity criterions.

При розв'язанні багатьох оптимізаційних задач в електроенергетиці досить ефективно використовується критеріальний метод, в основі якого лежить теорія подібності і моделювання [1, 2]. Останнім часом за допомогою критеріального методу розв'язано низку задач оптимального керування нормальними режимами електроенергетичних систем (ЕЕС) [3, 4]. У процесі розв"язання останніх виникла необхідність вдосконалення і розширення систем відносних одиниць (СВО), оскільки відомі з них [1, 5, 6] не задовольняють вимог і не дозволяють створювати ефективні алгоритми критеріального моделювання (КМ) та формування законів оптимального керування для систем автоматичного керування (САК).

Побудова СВО є основою подальшого ефективного розвитку КМ, оскільки на їх основі створюються критеріальні моделі, які встановлюють аналітичні зв’язки між параметрами процесу і параметрами елементів системи, в якій цей процес проходить, і є загальними для всієї множини подібних явищ. Завдяки використанню СВО в КМ здійснюється перехід від часткових залежностей до узагальнених. Таке перетворення дозволяє зіставляти, синтезувати результати досліджень, поширювати їх на низку подібних.

Особливістю застосування СВО в КМ як методі оптимізації й аналізу оптимальних розв"язків є те, що в ньому у взаємозв"язку розв"язуються пряма і двоїста задачі. Згідно з критеріальним програмуванням (КП) спочатку розв"язується двоїста задача і знаходяться оптимальні значення двоїстих змінних - критеріїв подібності. Для побудови критеріальної моделі та аналізу чутливості оптимального розв"язку у відносних одиницях і прийняття рішення у більшості електроенергетичних задач цього вистачає. Інша справа - задача оптимального керування нормальними режимами ЕЕС за допомогою САК, коли для формування закону оптимального керування та визначення настроювальних параметрів необхідно трансформувати розв"язок двоїстої задачі в розв’язок прямої.

У даній статті розробляється перехідна, або транзитивна СВО, яка призначена для створення перехідної математичної моделі, проміжної між прямою задачею КП і двоїстою.

Розглянемо задачі КП. Зв'язки між параметрами процесу і параметрами елементів системи, в якій цей процес проходить, можна подати у вигляді [2]:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} , \qquad (1)$$

де $y(x)$ — деякий узагальнений техніко-економічний показник; a_i, α_{ji} — сталі коефіцієнти, які визначаються властивостями системи; x_j — змінні параметри системи; m_1 — кількість членів цільової функції моделі; n — кількість змінних.

Пряма задача КП полягає в мінімізації (1) за обмежень:

$$g_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le 1, \ \ k = \overline{1, p}, \ \ x_j > 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \qquad (2)$$

У виразах (1) і (2) прийнята суцільна індексація складових цільової функції та обмежень.

Як відомо [2], розв’язання прямої задачі КП (1)-(2) пов’язане з певними труднощами, які спричиняються складністю математичної моделі через нелінійність цільової функції та обмежень. Для їх подолання здійснюється перехід від простору змінних прямої задачі КП до простору двоїстих змінних. При цьому пряма задача замінюється відповідною їй двоїстою, яка за нелінійної цільової функції має лінійні обмеження [2]:

$$d(\pi) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i}{\pi_i}\right)^{\pi_i} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k{}^{\lambda_k} \Rightarrow \max \ , \qquad (3)$$

за умов ортогональності : $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \pi_i = 0 , \ \ j = \overline{1,n}$, (4)

нормування : $\sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1$, (5)

де $\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{i0}$, $k = \overline{1, p}$ — нормовані множники Лагранжа.

Транзитивна СВО, як уже відзначалося, пов'язує розв'язки двоїстої та прямої задач. З метою встановлення зв’язку між змінними прямої і двоїстої задачі КП скористаємося четвертим твердженням першої теореми двоїстості [7]:

$$a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \pi_i \cdot y_{min}, \quad i = \overline{1, m_1}\ , \tag{6}$$

$$a_r \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jr}} = \frac{\pi_r}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i}, \quad k = \overline{1, p}\ , \quad r = \overline{m_1+1, m_{p+1}}\ , \tag{7}$$

де y_{min} — мінімальне значення показника ефективності.

Аналіз системи (6)-(7) дозволяє побудувати транзитивну СВО.

Прологарифмувавши обидві частини рівнянь (6)-(7), виділивши з низки критеріїв подібності залежні та незалежні критерії та виконавши деякі нескладні перетворення, отримаємо [8]:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot \ln x_j - \ln y_{min} = \ln\left(\frac{\pi_i}{a_i \cdot \lambda_i}\right), \quad i = \overline{1, m-s}\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot \ln x_j - \ln y_{min} - \ln \pi_i = \ln\left(\frac{\pi_i}{a_i \cdot \lambda_i}\right), \quad i = \overline{m-s+1, m}\,;$$

де $\lambda_i = \begin{cases} 1, \ i = \overline{1, m_1}\,; \\ \sum\limits_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_j\,, \ k = \overline{1, p}, \ i = \overline{m_1+1, m}\,; \end{cases}$ — нормовані множники Лагранжа; $s = m - n - 1$ — міра складності задачі.

Або в матричній формі:

$$[\alpha] \times [h] = [\pi],$$

де $[\tilde{\alpha}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m_1} & \alpha_{2m_1} & \dots & \alpha_{nm_1} & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{1,m_1+1} & \alpha_{2,m_1+1} & \dots & \alpha_{n,m_1+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix};$

$$[h]=\begin{bmatrix}\ln x_1\\ \dots\\ \ln x_n\\ \ln y_{min}\\ \ln \pi_{m-s+1}\\ ..\\ \ln \pi_m\end{bmatrix};\quad [\pi]=\begin{bmatrix}\ln\dfrac{\pi_1}{a_1}\\ \dots\\ \ln\dfrac{\pi_{m_1}}{a_{m_1}}\\ \dots\\ \ln\dfrac{\pi_{m-s}}{a_{m-s}\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\pi_i}\\ \dots\\ \ln\dfrac{1}{a_m\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\pi_i}\end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що розмірність матриці $[\alpha]$ $[m\times m]$, а її $(m-s)$-ий стовпець складається з "-1" (за відсутності обмежень у математичній моделі) або з m_1 "-1" та $m-n$ "0" (за наявності обмежень). А стовпчик з вищим порядковим номером, тобто k-тий $(k=\overline{m-s+1, m})$, містить одну "-1". Як було показано вище, у випадку канонічних моделей k-ті стовпці відсутні.

З останньої системи рівнянь отримуємо залежності змінних параметрів системи $x_j,\ j=\overline{1,n}$, незалежних критеріїв подібності $\pi_t,\ t=\overline{m-s+1, m}$ та мінімуму показника ефективності y_{min} від вектора залежних критеріїв подібності $\pi_k,\ k=\overline{1, m-s}$:

$$\begin{cases} x_j=\prod\limits_{i=1}^{m-s}\left(\dfrac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{ji}}\prod\limits_{k=1}^{p}\left(\dfrac{1}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\pi_i}\right)^{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\beta_{ji}}, \quad j=\overline{1,n}; & (8)\\ \left(\dfrac{\pi_t}{a_t}\right)=\prod\limits_{i=1}^{m-s}\left(\dfrac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{ti}}, \quad t=\overline{m-s+1, m}); & (9)\\ y_{min}=\prod\limits_{i=1}^{m-s}\left(\dfrac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{n+1,i}}\prod\limits_{k=1}^{p}\left(\dfrac{1}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\pi_i}\right)^{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\beta_{n+1,i}}, & (10)\end{cases}$$

де β_{ji} — елементи оберненої матриці $[\alpha]$.

В окремих випадках, коли міра складності задачі $s=m-n-1=0$, роглянута система не буде містити рівнянь (9), а залежності (8), (10) будуть повними (охоплюватимуть усі π). Проте на практиці часто доводиться розв'язувати задачі високої міри складності. У цьому разі залежності (8), (10) будуть неповними. Щоб ввести відсутні критерії подібності, вдамося до штучного формування моделі мінімуму критерію ефективності:

$$y_{min} = y_{min} \prod_{j=1}^{s} \left(\left(\frac{\pi_{m-s+j}}{a_{m-s+j}} \right)^{c_j} \left(\frac{\pi_{m-s+j}}{a_{m-s+j}} \right)^{-c_j} \right), \tag{11}$$

де c_j — комплементарні змінні.

Після підстановки (9), (10) в (11) отримаємо

$$y_{min} = \prod_{i=1}^{m-s} \left(\frac{\pi_i}{a_i} \right)^{\beta_{n+1,i} + \sum\limits_{t=m-s+1}^{m} c_{t-(m-s)}\beta_{ti}} \times$$

$$\times \prod_{t=m-s+1}^{m} \left(\frac{\pi_t}{a_t} \right)^{-c_{t-(m-s)}} \times \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{\sum\limits_{f=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_f} \right)^{\sum\limits_{f=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,f}} \tag{12}$$

Виходячи з умови екстремуму функції, оптимальні значення критеріїв подібності визначаються через параметри c_j моделі

$$\begin{cases} \pi_{0i} = -\left(\beta_{n+1,i} + \sum\limits_{t=m-s+1}^{m} c_{t-(m-s)}\beta_{ti} \right), \quad i = \overline{1, m-s}\,; \\ \pi_{0i} = c_{t-(m-s)}, \quad i = \overline{m-s+1, m}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Для знаходження змінних c_j розв'язують систему із s нелінійних рівнянь, що повністю визначаються підстановкою (13) в (9):

$$\left(\frac{c_{t-(m-s)}}{a_t} \right) = \prod_{i=1}^{m-s} \left(\frac{-\left(\beta_{n+1,i} + \sum\limits_{t=m-s+1}^{m} c_{t-(m-s)}\beta_{ti} \right)}{a_i} \right)^{\beta_{ti}}, \quad t = \overline{m-s+1, m};$$

За результатами розв'язання даної системи рівнянь, користуючись (12), отримуємо повну залежність $y_{min} = f(\pi)$, яка визначає домінантну залежність методології [8]:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\pi_i\times\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\pi_j}{a_j}\right)^{-\pi_{0j}}\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\pi_i}\right)^{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\beta_{n+1,i}} \qquad (14)$$

Оптимальні значення параметрів x_{jo} визначимо безпосередньо з (8). У разі потреби будуємо повні залежності $x_j=f(\pi)$ за аналогічною методикою. Спочатку штучно формуємо повну модель з невідомими показниками:

$$x_j(\pi)=x_j(\pi)\prod_{i=1}^{s}\left(\left(\frac{\pi_{m-s+i}}{a_{m-s+i}}\right)^{c_{ij}}\left(\frac{\pi_{m-s+i}}{a_{m-s+i}}\right)^{-c_{ij}}\right),\ j=\overline{1,n}. \qquad (15)$$

Після підстановки (8), (9) в (15), отримаємо:

$$x_j=\prod_{i=1}^{m-s}\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{ji}+\sum\limits_{s=m-t+1}^{m}c_{[(t-(m-s))\cdot j]}\beta_{ti}}\times$$

$$\times\prod_{t=m-s+1}^{m}\left(\frac{\pi_s}{a_s}\right)^{-c_{[(s-(m-s))\cdot j]}}\times\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sum\limits_{f=m_k+1}^{m_{k+1}}\pi_f}\right)^{\sum\limits_{f=m_k+1}^{m_{k+1}}\beta_{jf}}. \qquad (16)$$

Проте для знаходження додаткових змінних c_{ij} в даному разі користуємося підстановкою повної залежності $y=f(\pi)$ (14) та штучно сформованих залежностей $x_j=f(\pi)$ (16) в критеріальну форму прямої задачі КП:

$$y_*=\frac{y(\pi)}{y(\pi_o)}=\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j(\pi)}{x_j(\pi_0)}\right)^{\alpha_{ij}}. \qquad (17)$$

Прирівнюючи показники степеня при π_i, $i=\overline{1,m_1}$, отримуємо значення c_{ij}, які характеризують залежності (16).

Прийнявши оптимальний варіант за базисний, визначимо критеріальну залежність транзитивної СВО:

$$y_*=\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i\prod_{j=1}^{m}\pi_{j*}^{-\pi_{jo}}\prod_{k=1}^{p}\lambda_{k*}^{\lambda_{ko}}. \qquad (18)$$

Слід зауважити, що всі величини побудованої залежності мають зміст критеріїв подібності, що дозволяє виявити узагальнені властивості системи. Оскільки відсутність даних про постійні a_i не порушує інформативності критеріальних залежностей (18), дослідження в транзитивній СВО можуть бути проведені за умов неповноти інформації про модель. Перехід до нових безрозмірних величин π транзитивної СВО докорінно змінює характер дослідження: відмовляючись від початкових змінних x_j, дослідник по-новому інтерпретує конкретне явище, розглядаючи його з позиції генералізації змінних, втрачаючи при цьому можливість фіксувати численні особливості конкретного процесу. На перший погляд, узагальнені величини π являють собою досить прості вирази. Однак ця простота лише зовнішня. Адже в принцип їх побудови вкладено глибоку і важливу ідею, яка полягає в тому, що в угрупуванні величин, які утворюють узагальнені змінні, повинна бути відображена фізична модель процесу.

Для канонічних задач транзитивна система відносних одиниць дозволяє без особливих труднощів побудувати залежності $y_* = f(\pi_*)$, $x_* = f(\pi_*)$, $y = f(\pi)$, $x = f(\pi)$ без переходу від прямої задачі КП (1)-(2) до двоїстої (3)-(5). Причому тут значно збільшується інформативність оберненої матриці показників $[\alpha]^{-1}$ порівняно з ізоморфною оберненою матрицею $[\alpha]^{-1}$, оскільки всі елементи матриці $[\alpha]^{-1}$ використовуються для знаходження залежностей змінних параметрів системи, незалежних критеріїв подібності та мінімуму показника ефективності від вектора залежних критеріїв.

При розв’язанні задач високої міри складності використовується алгоритм, описаний в [2], що полягає в пошуку максимуму двоїстої задачі (3)-(5) методами послідовного пошуку екстремуму в області допустимих розв’язків, визначеній за допомогою симплекс-методу.

ВИСНОВКИ

1. Транзитивною СВО можна послуговуватися при розв’язанні задач будь-якої міри складності. Дана СВО дозволяє сформувати критеріальне рівняння, яке уможливлює проведення аналізу на чутливість в області стаціонарних точок розв"язків прямої задачі КП у функції двоїстих змінних. Це дозволяє інтерпретувати закони оптимального керування САК нормальними режимами ЕЕС у просторі прямих та двоїстих змінних і визначати налагоджувальні параметри САК в тих одиницях, в яких здійснюються телевимірювання в системі.

2. Запропоноване використання нової СВО — транзитивної, яка, опріч іншого, дозволяє визначити вплив окремих складових змінних параметрів системи на величину цільової функції та виявити визначальні критерії подібності.

1. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. — М.: Высшая школа, 1976. — 480 с. 2. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. — К.: УМК ВО, 1989. — 137с. 3. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение теории подобия в задачах управления нормальными режимами электроэнергетических систем// Изв. АН СССР Энергетика и транспорт. — 1990. — № 5. — С. 3-11. 4. Лежнюк П.Д., Абдаллах Джалал, Гайдамака В.М. Автоматизація процесу компенсації впливу неоднорідності електричної системи *на економічність її режимів // Вісник ВПІ. — 1997. — № 1. — С. 63-66. 5. Астахов Ю.Н. Критериальный метод и его применение в энергетике. Дисс. на соискание учен. степ. доктора техн. наук — М.: МЭИ, 1985. — 264 с. 6. Лежнюк П.Д., Бевз С.В. Модифікована евристична система відносних одиниць //Матеріали VII Міжнародної н. конф. ім. ак. М.Кравчука. — К., 1998. - С. 275. 7. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 256 с. 8. Лежнюк П.Д., Бевз С.В., Вишневский С.Я.Інтерпретація закону керування при встановленні зв'язку між керувальними параметрами та матрицею критеріїв подібності// Матеріали четвертої Міжнар. н.-т. конф. "Контроль і управління в технічних системах" (КУТС-97). — Т. 1. — Вінниця: УНІВЕРСУМ, 1997. — С. 181-187.*