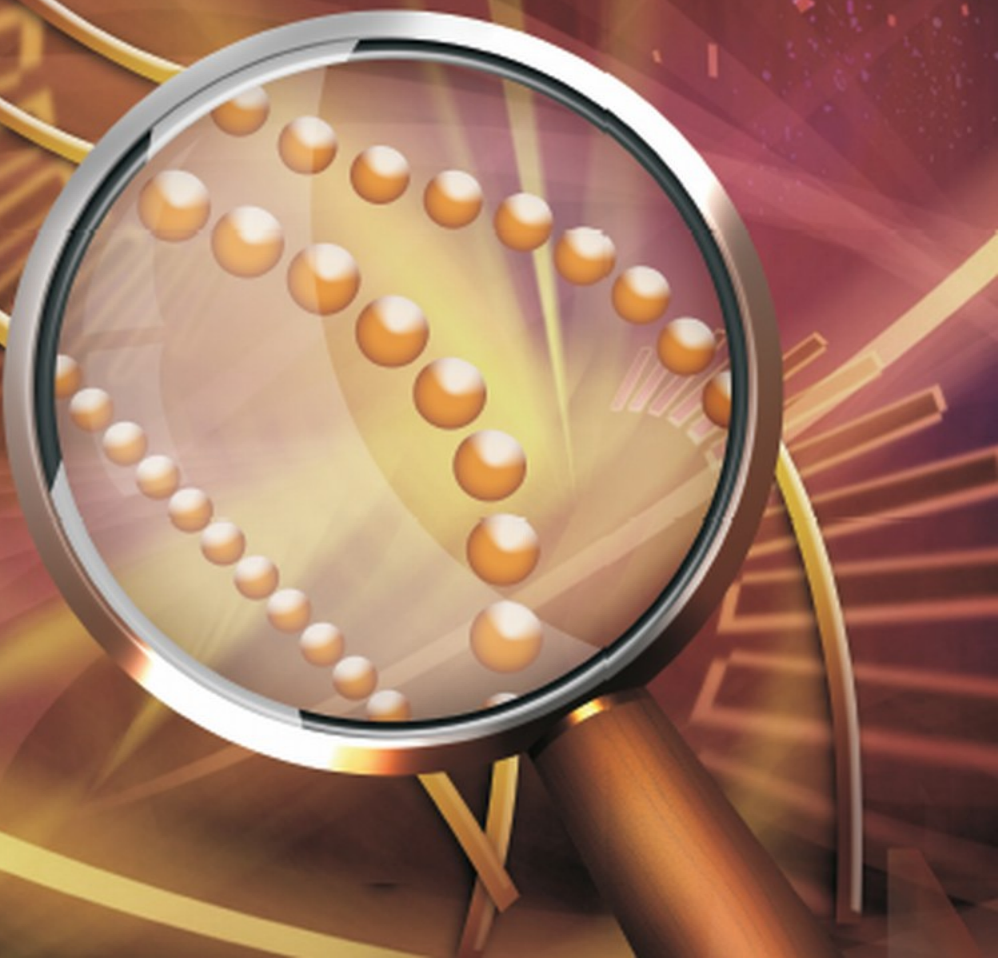
А. М. Пєтух, Д. Т. Обідник, О. Н. Романюк

Нерівномірністні характеристики дискретно-фазових частотно-імпульсних потоків



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. М. Пєтух, Д. Т. Обідник, О. Н. Романюк

НЕРІВНОМІРНІСТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНО-ФАЗОВИХ ЧАСТОТНО-ІМПУЛЬСНИХ ПОТОКІВ

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2009

УДК 681.518.24
П 31

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 28.05.2009 р.)

Рецензенти:

В. П. Кожемяко, доктор технічних наук, професор
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор

Пєтух, А. М.
П 31 Нерівномірністні характеристики дискретно-фазових частотно-імпульсних потоків: монографія / А. М. Пєтух, Д. Т. Обідник, О. Н. Романюк. — Вінниця : ВНТУ, 2009. – 89 с.
ISBN 978-966-641-320-1

У монографії розглянуто оригінальний підхід до опису і формування дискретно-фазових частотно-імпульсних потоків на основі нерівномірністних характеристик.

Розглянуто конкретні співвідношення, структури та алгоритми формування дискретно-фазових частотно-імпульсних потоків, що може бути використано при реалізації інтерполяторів та інших пристроїв з потрібними технічними параметрами.

Монографія розрахована на спеціалістів у галузях комп'ютерної графіки, систем числового програмного керування, робототехнічних систем і студентів, які вивчають відповідні дисципліни.

УДК 681.518.24

ISBN 978-966-641-320-1

З М І С Т

ВСТУП

Використання дискретно-фазових частотно-імпульсних потоків у пристроях перетворення інформації давно привертало увагу розробників у зв'язку з легкістю узгодження таких потоків із цифровими засобами вимірювання і обробки.

Бурхливий розвиток засобів вимірювання і обробки параметрів частотно-імпульсних сигналів почався в період появи цифрових інтегральних мікросхем малого і середнього ступеня інтеграції. Це визначалось розширенням функціональних можливостей цифрової обробки сигналів.

Наступний поштовх у розвитку техніки обробки і застосування частотно-імпульсних сигналів був викликаний активними дослідженнями у сфері числового програмного керування і робототехніки.

Наступною, і найбільш широкофункціональною, є область формування і обробки зображень у дискретному координатному просторі. Особливо актуально питання підвищення швидкодії проявляються у засобах формування і обробки динамічних зображень у реальному масштабі часу.

Для ряду застосувань цифро-частотні потоки мають чітко виражені структурні властивості. В табличних перетворювачах урахування структурних властивостей цифро-частотних потоків дає можливість суттєво зменшити обсяги постійної пам'яті. Особливо актуальні питання структуризації для інтерполюючих пристроїв, оскільки дозволяють здійснити сегментне формування траєкторії.

Цифро-частотні імпульсні потоки мають широкий спектр властивостей, обумовлений великою кількістю логічних функцій із кількістю змінних, що дорівнює кількості тактових моментів часу. Розгляд структурних властивостей таких потоків у монографії обмежується потоками з мінімальною нерівномірністю розстановки імпульсів на тактових місцях, у зв'язку з чим і введений термін "нерівномірністні характеристики" частотно-імпульсних потоків.

Елементи структурних властивостей частотно-імпульсних потоків з рівномірним розподілом імпульсів у циклі послідовності розглянуті в [30, 32]. Частково структурні властивості частотно-імпульсних послідовностей використовуються в кодових інтерполяторах. Вони були помічені також В. П. Данчеєвим [7]. Однак там використовуються лише властивості нижчого рівня ієрархії, а завдання повного дослідження структурних властивостей дискретно-фазових частотно-імпульсних потоків і застосування їх для вирішення задач лінійної інтерполяції у дискретному координатному просторі не ставилося й не вирішувалося.

1. ВЛАСТИВОСТІ НЕРІВНОМІРНІСТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНО-ФАЗОВИХ ЧАСТОТНО-ІМПУЛЬСНИХ ПОТОКІВ

При цифровому перетворенні коду в частоту проходження імпульсів і в процесі цифрової лінійної інтерполяції [19] необхідна найбільш рівномірна розстановка N імпульсів на M тактових місцях.

Задача лінійної інтерполяції в дискретному координатному просторі ілюструється на рис. 1, де координати поточної точки визначаються станами координатних лічильників *Лічильник X* та *Лічильник Y*. Спочатку в координатні лічильники заносяться відповідно координати початкової точки відрізка прямої $x_{поч}$, $y_{поч}$, а в лінійний інтерполятор – прирости координат Δx і Δy. Процес інтерполяції полягає в послідовному покроковому відтворенні відрізка прямої (формуванні координат проміжних точок у напрямі від початкової точки відрізка до кінцевої) у дискретному координатному просторі. При цьому лінійний інтерполятор у кожний тактовий момент часу генерує однодискретні крокові координатні прирости +1x, –1x, +1y, –1y, які, надходячи до координатних лічильників, формують у них координати поточних точок відрізка прямої.

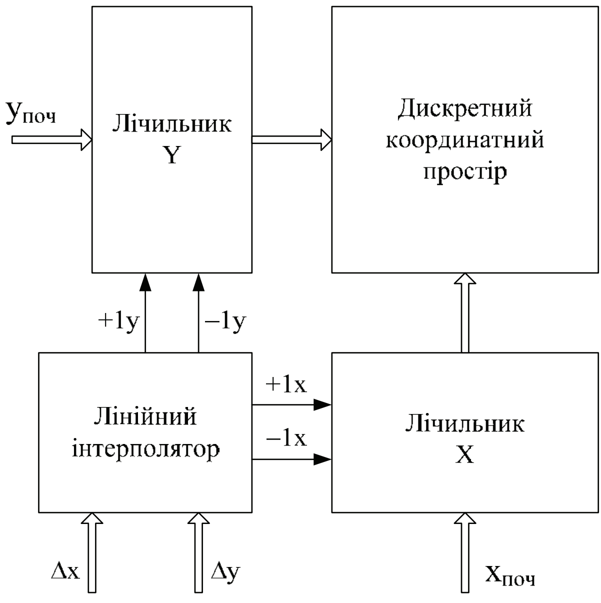


Рис. 1. Ілюстрація задачі лінійної інтерполяції

Розглянемо формування частотно-імпульсного потоку на прикладі лінійної інтерполяції відрізка прямої.

Нехай початкова точка відрізка прямої збігається з початком координат і відрізок заданий приростами координат Δx і Δy (рис. 2). Обмежимось випадком, коли пряма лежить у першому напівквадранті першого квадранта.

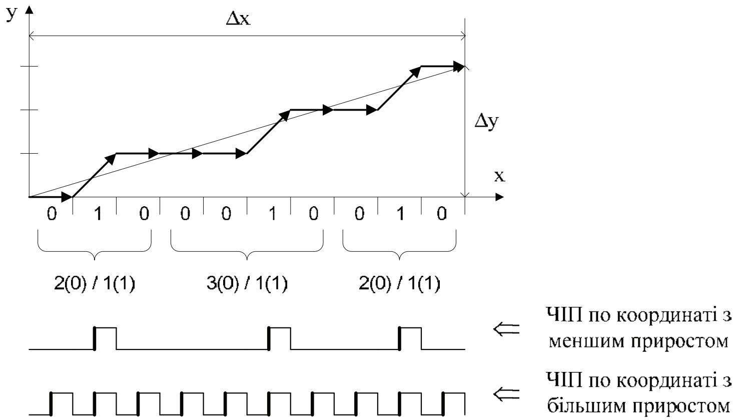


Рис. 2. Приклад інтерполяції відрізка прямої

Для довільної точки першого напівквадранта першого квадранта $\Delta x \geq \Delta y$, тому координату X можна прийняти за базову, формуючи по ній приріст у кожний тактовий момент часу. Тоді послідовність одиничних приростів по координаті Y буде визначати відтворений відрізок.

Нехай $\Delta y = N$ і $\Delta x = M$. Якщо $N = 0$, то прирости по координаті Y не формуються (відпрацьовується пряма, що збігається з віссю X), а якщо $N=M$, то в кожному такті послідовності одиничних приростів по координаті Y формується одиничний приріст (відпрацьовується пряма, кут нахилу якої дорівнює 45°). При $0 < N < M$ одиничні прирости по координаті Y у деякі тактові моменти часу будуть відсутні.

Отже, частотно-імпульсна послідовність (ЧІП) по координаті з більшим приростом містить імпульс у кожному такті, а в ЧІП по координаті з меншим приростом при $0 < N < M$ імпульси у деяких тактах будуть відсутні (див. рис. 2). Кодуючи наявність або відсутність імпульсу на тактовому місці відповідно двійковими символами 1 і 0, можна отримати двійкову послідовність, яка буде відповідати ЧІП. Аналізуючи послідовність, показану на рис. 2, можна зауважити, що вона певним чином структурована.

Визначення нерівномірністних характеристик

Означення 1.1. Одиничним і нульовим елементами першого порядку нерівномірності називаються відповідно наявність і відсутність одиничного приросту на тактовому місці.

Розглянемо випадок, коли $0 < N < M$ [12, 14, 15, 17, 20]. Послідовність, що відповідає відрізку прямої, буде містити M тактових місць і N одиничних елементів першого порядку нерівномірності, тому що координата X є базовою, а по осі Y потрібно відпрацювати N одиничних приростів. Тоді кількість нульових елементів першого порядку нерівномірності в послідовності буде дорівнювати $M - N$. Коли одиничні елементи першого порядку переважають у послідовності, відношення $N / (M - N)$ визначає кількість одиничних елементів, яка приходиться на один нульовий елемент. При цілочисельному значенні відношення послідовність складається із груп, які містять $N / (M - N)$ одиничних і один нульовий елементів першого порядку. Якщо відношення не є цілочисельним, у послідовності будуть зустрічатися групи, які містять як k_1, так і (k_1+1) одиничних елементів першого порядку нерівномірності і один нульовий, де k_1 – ціла частина відношення $N / (M - N)$.

Якщо в послідовності переважають нульові елементи, вона характеризується відношенням $(M - N) / N$, яке визначає кількість нульових елементів першого порядку, що приходиться на один одиничний у відповідних групах.

Означення 1.2. Одиничним і нульовим елементами другого порядку нерівномірності називаються групи, що містять відповідно (k_1+1) і k_1 елементів першого порядку одного типу й один елемент першого порядку іншого типу.

Загальна кількість елементів другого порядку нерівномірності в послідовності дорівнює кількості тих елементів першого порядку, яких менше, тому що кожний з елементів другого порядку містить тільки один такий елемент першого порядку. Кількість одиничних елементів другого порядку нерівномірності дорівнює різниці загальної кількості елементів першого порядку, яких більше, й сумарної кількості цих елементів, які містяться в елементах другого порядку, за умови, якби всі елементи другого порядку були б нульовими. Тоді кількість нульових елементів другого порядку дорівнює різниці загальної кількості елементів другого порядку й кількості одиничних елементів другого порядку.

Означення 1.3. Нерівномірністними характеристиками (НХ) називаються: 1) змінна, яка визначає кількість елементів одного типу, що доводяться на один елемент іншого типу в менших групах;

2) змінна, яка визначає тип елементів у групі, яких більше; 3) змінна, яка визначає порядок нерівномірності.

Оскільки НХ елементів другого порядку аналогічні НХ елементам першого порядку, можна перейти до єдиного алгоритму визначення НХ незалежно від порядку нерівномірності.

Означення 1.4. Одиничним і нульовим елементами i-го порядку нерівномірності називається відповідно група, що містить $(k_{i-1}+1)$ і k_{i-1} елементів $(i - 1)$-го порядку одного типу й один елемент $(i-1)$-го порядку іншого типу.

Граф-схема алгоритму визначення НХ показана на рис. 3. Тут уведені такі позначення:

i – змінна, яка позначає порядок нерівномірності;

$S1$, $S0$ – відповідно кількість одиничних і нульових елементів на кожному порядку нерівномірності;

A, B – відповідно кількість елементів, яких менше, й кількість переважних елементів на кожному порядку нерівномірності;

k_i – кількість елементів i-го порядку, що доводяться на один протилежний елемент у нульовому елементі $(i+1)$-го порядку;

r_i – двійкова змінна, що вказує на тип переважних елементів i-го порядку, причому 1 представляє одиничні елементи, а 0 – нульові;

ЗАЛ – залишок від ділення B на A.

Теорема 1.1. Процес визначення нерівномірностних характеристик має кінець.

Доведення. При фіксованих значеннях M і N цілочисельний знаменник дробу B / A з кожним кроком зменшується, тому що $ЗАЛ<A$ і $(A - ЗАЛ) < A$. Його границя дорівнює 1. Процес визначення НХ може закінчитись і тоді, коли відношення B / A стає цілим числом.

За наведеним алгоритмом кожній парі M і N $(0< N <M)$ можна поставити у відповідність набір k_i, r_i, і i. Це дозволяє розглядати набір нерівномірністних характеристик як подання відношень, а при незмінному M – як подання числа.

Слід зазначити, що той самий набір характеристик k_i, r_i, і i може відповідати різним парам M і N, але лише таким, для яких відношення N / M дорівнює дробу, що не скорочується: N' / M'. Звідси випливає, що за набором НХ можливо однозначне визначення лише N' і M'. Це свідчить про те, що набір НХ визначає структуру лише тієї частини апроксимуючої, яка визначає цикл послідовності.

Подання дробу, що не скорочується, у вигляді набору змінних і ознак не є єдино можливим. У [30] наводиться алгоритм визначення

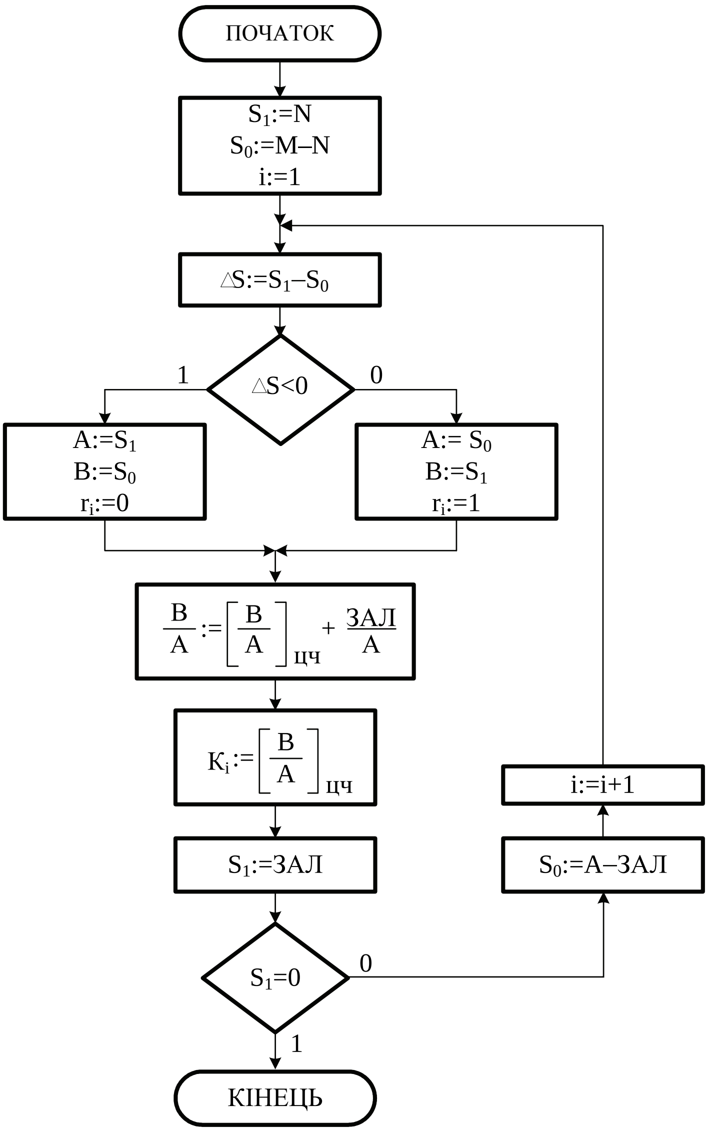


Рис. 3. ГСА визначення нерівномірністних характеристик

змінних і ознак, відмінних від НХ, причому ознаки мають суттєву відмінність від ознак НХ. Зміст цього алгоритму зводиться до визначення набору показників степеня складових виразу

$$\left\{\left[\cdots\left\{\left[\left(Q^{m_0}R\right)^{m_1}\left(Q^{m_0+k_0}R\right)\right]^{m_2}\left[(\ )^{m_1+k_1}(\ )\right]\right\}^{m_3}\{\ \}\cdots\right]^{m_t}\left[\cdots\{\ \}^{m_3+k_3}\{\ \}\cdots\right]\right\}^{b_t}$$

з використанням правил:

$$a_0 = M - N, \quad b_0 = N;$$
$$a_i = m_i b_i + n_i;$$
$$b_i - |n_i| \ge |n_i|;$$
$$a_i = b_{i-1} - |n_{i-1}|;$$
$$b_i = |n_{i-1}|;$$
$$k_i' = 1 \quad при \quad n_i \ge 0;$$
$$k_i' = 0 \quad при \quad n_i < 0.$$

Тут використовуються такі позначення: Q, R – змінні, що відповідають одиничним і нульовим елементам першого порядку нерівномірності; m_i – змінна, яка визначає кількість переважних елементів i-го порядку, що доводяться на один елемент протилежного типу в тих групах, яких більше в послідовності; k_i' – змінна (ознака), яка визначає приріст кількості переважних елементів i-го порядку, що доводяться на один елемент протилежного типу в групах, яких менше в послідовності, відносно груп, яких більше в послідовності.

У зв'язку з тим, що подання початкового відношення N / M у вигляді набору m і k' подібно поданню його у вигляді нерівномірністних характеристик, важливо встановити взаємозв'язок між цими поданнями. Для цього виразимо m_i у термінах нерівно-мірністних характеристик:

$$m_i = k_i \quad при \quad r_{i+1} = 0;$$
$$m_i = k_i + 1 \quad при \quad r_{i+1} = 1. \qquad (1.1)$$

Узагальнюючи (1.1), одержуємо:

$$m_i = k_i + r_{i+1}. \qquad (1.2)$$

З огляду на те, що в послідовності зустрічаються тільки два типи груп елементів i-го порядку, можна записати:

$$m_i + k_i' = k_i + \overline{r_{i+1}}. \qquad (1.3)$$

Вирази (1.2) і (1.3) встановлюють взаємозв'язок між нерівномірністними характеристиками й параметрами, представленими в [30].

Перетворення нерівномірністних характеристик у відношення приростів координат

Визначення N' і M', виходячи з НХ, зводиться до визначення кількості одиничних елементів першого порядку й загальної кількості тактових місць у циклі послідовності, яка представляє апроксимуючу.

Визначимо N'. У випадку, коли послідовність характеризується тільки першим порядком нерівномірності й складається із груп елементів першого порядку одного типу, кількість одиничних елементів першого порядку в циклі дорівнює k_1 при r_1=1 і одиниці при r_1=0. N_1' у цьому випадку можна виразити двома різними співвідношеннями:

$$N_1' = k_1 r_1 + \overline{r_1}. \qquad (1.4)$$

$$N_1' = (k_1)^{r_1}. \qquad (1.5)$$

де $\overline{r_1}$ – змінна, яка приймає значення, інверсне по відношенню до r_1. Відмітимо, що тут в арифметичному виразі присутня логічна змінна r_1. Використовуючи співвідношення (1.4), можна одержати один з варіантів алгоритму визначення N' і M'. Співвідношення (1.5) дає інший варіант такого алгоритму.

Розглянемо спочатку випадок, коли N_1' виражається формулою (1.4). Якщо послідовність характеризується другим порядком нерівномірності, кількості одиничних елементів першого порядку в одиничному й нульовому елементах другого порядку рівні відповідно

$$N_1' = \left(k_1 + 1\right) r_1 + \overline{r_1}.$$
$$N_1'' = k_1 r_1 + \overline{r_1}.$$

При r_2=1 цикл послідовності містить k_2 одиничних елементів другого порядку й один нульовий, а при $r_2=0$ – k_2 нульових елементи другого порядку й один одиничний. У цих випадках вирази для визначення числа одиничних елементів першого порядку в циклі послідовності N_2' мають вигляд:

$$N_2' = k_2\left[\left(k_1 + 1\right) r_1 + \overline{r_1}\right] + k_1 r_1 + \overline{r_1} \quad \text{ïðè} \;\; r_2 = 1;$$

$$N_2' = k_2\left(k_1 r_1 + \overline{r_1}\right) + \left(k_1 + 1\right) r_1 + \overline{r_1} \quad \text{ïðè} \;\; r_2 = 0.$$

Вирази для N_2' зручно надати в обох випадках єдиним чином, використовуючи r_2 і $\overline{r_2}$

$$N_2' = k_2\left[\left(k_1 + r_2\right) r_1 + \overline{r_1}\right] + \left(k_1 + \overline{r_2}\right) r_1 + \overline{r_1}.$$

Проводячи аналогію виразу для N_2' з виразом для N_1', запишемо:

$$N_2' = k_2 Y_2 + \overline{Y_2},$$

де Y_2 і $\overline{Y_2}$ визначаються з виразів

$$Y_2 = \left(k_1 + r_2\right) r_1 + \overline{r_1}, \qquad \overline{Y_2} = \left(k_1 + \overline{r_2}\right) r_1 + \overline{r_1}$$

і становлять відповідно кількість одиничних елементів першого порядку в одному з тих елементів другого порядку, яких більше і яких менше в послідовності. З огляду на це, можна кількість одиничних елементів першого порядку відповідно в одному з тих елементів третього порядку, яких більше (Y_3) і яких менше ($\overline{Y_3}$) у послідовності, зобразити у вигляді

$$Y_3 = \left(k_2 + r_3\right) Y_2 + \overline{Y_2}, \qquad \overline{Y_3} = \left(k_2 + \overline{r_3}\right) Y_2 + \overline{Y_2}.$$

Узагальнюючи, одержуємо відповідні вирази для i-го порядку нерівномірності:

$$N_i = k_i Y_i + \overline{Y_i}; \tag{1.6}$$

$$Y_i = \left(k_{i-1} + r_i\right) Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}, \qquad \overline{Y_i} = \left(k_{i-1} + \overline{r_i}\right) Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}. \tag{1.7}$$

Щоб визначити M_i', досить припустити, що в кожному такті послідовності формується одиничний елемент першого порядку ($r_1 = 1$, $\overline{r_1} = 1$), і при цій умові визначити N_i'. N_i' і M_i', розраховані для максимального порядку нерівномірності i_{max}, будуть визначати N' і M'.

Граф-схема алгоритму визначення N' і M' для першого варіанту наведена на рис. 4. Тут q – ознака закінчення обчислення N'.

Розглянемо другий варіант визначення N' і M' для випадку, коли N_1' знаходиться з виразу (1.5).

Одиничний і нульовий елементи другого порядку містять відповідно N_1'' і N_1' одиничних елементів першого порядку:

$$N_1'' = \left(k_1 + 1\right)^{r_1}, \quad N_1' = \left(k_1\right)^{r_1}. \tag{1.8}$$

При $r_2 = 1$ цикл послідовності містить на другому порядку k_2 одиничних елементи другого порядку й один нульовий:

$$N_2' = k_2 N_1'' + N_1', \tag{1.9}$$

а при $r_2 = 0$ – k_2 нульових елементів і один одиничний:

$$N_2' = N_1'' + k_2 N_1'. \tag{1.10}$$

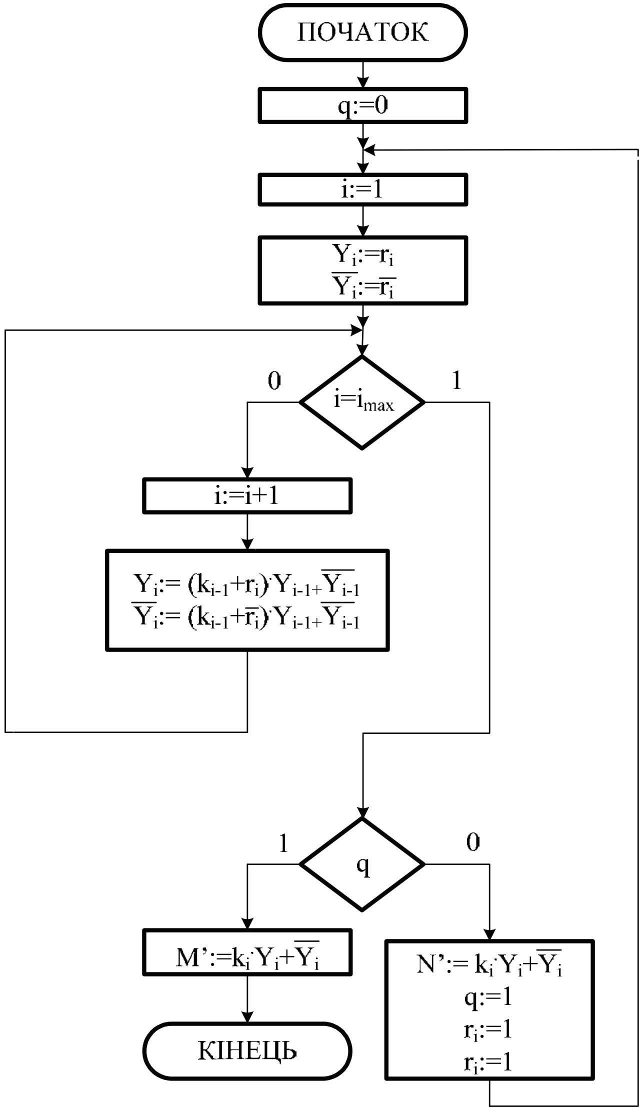


Рис. 4. ГСА перетворення нерівномірністних характеристик у відношення приростів координат (1-й варіант)

Узагальнюючи (1.9) і (1.10), одержуємо

$$N_2' = \left(k_2\right)^{r_2} N_1'' + \left(k_2\right)^{\overline{r_2}} N_1'. \qquad (1.11)$$

На третьому порядку нерівномірності (1.11) визначає кількість одиничних елементів першого порядку в нульовому елементі третього порядку. Для одиничного елемента третього порядку можна записати:

$$N_2'' = \left(k_2 + 1\right)^{r_2} N_1'' + \left(k_2 + 1\right)^{\overline{r_2}} N_1'.$$

На i-му порядку нерівномірності вирази для N_i' і N_i'' мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_i' &= \left(k_i\right)^{r_i} N_{i-1}'' + \left(k_i\right)^{\overline{r_i}} N_{i-1}'; \\ N_i'' &= \left(k_i + 1\right)^{r_i} N_{i-1}'' + \left(k_i + 1\right)^{\overline{r_i}} N_{i-1}'. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Для визначення M' можна використати правила визначення N' і визначити N' при умові, що елементи другого порядку будуть представляти не кількість одиничних елементів першого порядку, а загальну кількість тактових місць:

$$N_1' = k_1 + 1, \quad N_1'' = k_1 + 2. \qquad (1.13)$$

На основі (1.8), (1.12) і (1.13) розроблений алгоритм визначення N' і M' для другого варіанту. Його граф-схему показано на рис. 5.

1.3. Дослідження нерівномірністних характеристик

Математичним апаратом, який досліджує властивості відношень типу дробу, що не скорочується, є алгебра й теорія чисел. Однак оскільки подання дробу, що не скорочується, у вигляді нерівномірністних характеристик пропонується вперше, властивості такого подання не досліджені. Завданнями дослідження НХ стосовно реалізації лінійного інтерполятора, основаного на їхньому використанні,

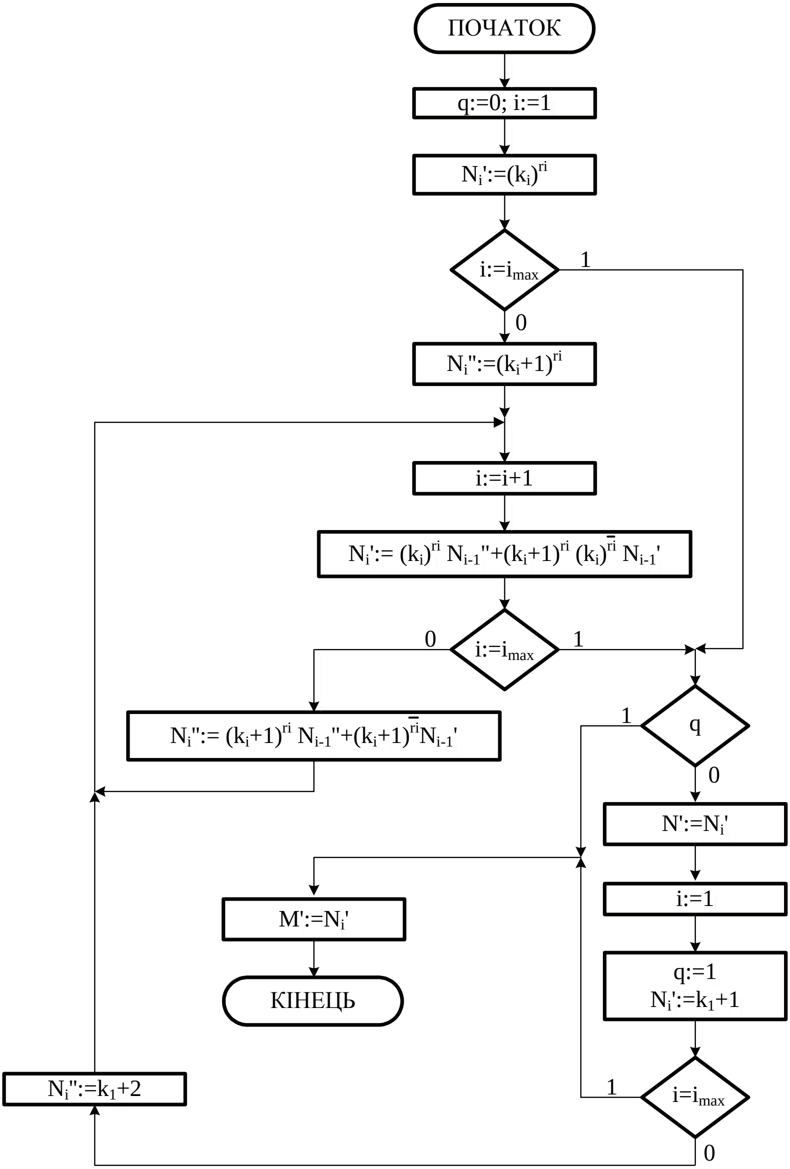


Рис. 5. ГСА перетворення нерівномірністних характеристик у відношення приростів координат (2-й варіант)

насамперед є: визначення пари мінімальних M і N, для яких досягається максимальний порядок НХ на розрядності двійкового подання M и N; визначення залежності максимального порядку НХ від розрядності двійкового подання M і N; визначення залежності відсотку кожного порядку нерівномірності від розрядності кодів, що представляють приріст координат, і залежності кількості відношень приростів, які характеризуються одним порядком нерівномірності, від значення порядку нерівномірності для кожної розрядності подання кодів приростів.

Визначимо пари мінімальних M і N, для яких досягається максимальний порядок нерівномірності. Для цього скористаємося співвідношенням (1.6). Мінімальні значення N_i будуть досягатися при мінімальних значеннях k_i, Y_i і $\overline{Y_i}$, тому що останні додатні.

Використовуючи (1.7), а також те, що $Y_1 = r_1, \overline{Y_1} = \overline{r_1}$, можна зробити висновок, що N_i буде мінімальним при $k_1 = k_2 = \ldots = k_i = 1$. З урахуванням цих умов вирази для Y_i, $\overline{Y_i}$ і N_i мають вигляд:

$$Y_i = Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}, \quad \overline{Y_i} = 2\,Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad r_i = 0. \tag{1.14}$$

$$Y_i = 2Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}, \quad \overline{Y_i} = Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad r_i = 1. \tag{1.15}$$

$$N_i = Y_i + \overline{Y_i}. \tag{1.16}$$

З (1.14), (1.15) і (1.16) випливає, що N_i буде мінімальним у випадку, коли $\overline{Y_i} > Y_i$, що справедливо при $r_i = 0$. При цьому також r_{i-1}, r_{i-2}, ... , r_i повинні дорівнювати нулю.

Теорема 1.2. Відношення мінімальних M_i і N_i, для яких досягається максимальний порядок нерівномірності на розрядності подання M_i і N_i, дорівнює відношенню Y_{i+2} до Y_{i+1} при

$$r_{i+2} = r_{i+1} = r_i = \ldots = r_1 = 0, \quad k_{i+2} = k_{i+1} = k_i = \ldots = k_1 = 1.$$

Доведення. З (1.14) і (1.16) випливає, що $N_i = Y_{i+1}$. Для визначення максимального M_i, що відповідає мінімальному N_i, скористаємося тим, що M_i визначається аналогічно N_i з врахуванням, що $r_1 = 1$ і $\overline{r_1} = 1$. При цій умові $Y_1 = 1$, $\overline{Y_1} = 1$. Оскільки у випадку обчислення

N_1 $Y2=1$, $\overline{Y2}=1$ і подальші обчислення для визначення N_i і M_i однакові (виконуються на основі (1.14)), N_i і M_i рівні відповідно Y_{i+1} і Y_{i+2}
при $r_{i+2}= r_{i+1}= r_i= \ldots = r_1 = 0$, $k_{i+2}= k_{i+1} = k_i = \ldots= k_1 = 1$.

Використовуючи (1.14), відношення M_i / N_i можна зобразити у вигляді:

$$M_i / N_i = Y_{i+2} / Y_{i+1} = \left(Y_{i+1} + \overline{Y_{i+1}}\right) / Y_{i+1} = 1 + \overline{Y_{i+1}} / Y_{i+1}. \qquad (1.17)$$

Теорема 1.3. Границя відношення $\overline{Y_i} / Y_i$ при $r_1= r_2= \ldots = r_i= 0$, $k_1= k_2 = \ldots= k_i = 1$ і $i\to\infty$ дорівнює $\sqrt{2}$.

Доведення. Використовуючи (1.14), складемо відношення

$$\overline{Y_i} / Y_i = \left(2Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}\right) / \left(Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}\right). \qquad (1.18)$$

Проводячи над (1.18) тотожні перетворення, одержуємо:

$$\frac{\overline{Y_i}}{Y_i} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\overline{Y_{i-1}}}{Y_{i-1}}}. \qquad (1.19)$$

Виразивши $\overline{Y_{i-1}}$ і Y_{i-1} з (1.14) через $\overline{Y_{i-2}}$ і Y_{i-2} і застосувавши (1.14) багаторазово з врахуванням того, що на першому порядку тільки один тип груп (розкриваючи до $i=2$), одержуємо ланцюговий дріб

$$\frac{\overline{Y_i}}{Y_i} = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}_{i-2}. \qquad (1.20)$$

При $i\to\infty$ ланцюговий дріб (1.20) стає нескінченним:

$$\frac{\overline{Y_i}}{Y_i}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}. \qquad (1.21)$$

Величина ланцюгового дробу (1.21) дорівнює $\sqrt{2}$ [6].

Наслідок. Границя відношення мінімальних M_i і N_i, для яких досягається максимальний порядок нерівномірності, при $i\to\infty$ дорівнює $1+\sqrt{2}$.

Наслідок випливає безпосередньо з теореми 1.3 і (1.17).

Теорема 1.4. Для послідовності

$$\overline{Y_1}, Y_2, \overline{Y_2}, Y_3, \overline{Y_3}, \cdots, Y_i, \overline{Y_i} \qquad (1.22)$$

при $r_1= r_2= r_3= \ldots = r_i= 0$ і $k_1= k_2 = k_3= \ldots= k_i =1$ парні члени, починаючи із четвертого, визначаються за рекурентними співвідношеннями *2*-чисел Фібоначчі, а непарні, починаючи з п'ятого, – за рекурентними співвідношеннями *1*-чисел Фібоначчі.

Доведення. Доведення випливає безпосередньо з (1.14). Перепишемо (1.14) у вигляді:

$$Y_i = Y_{i-1} + \overline{Y_{i-1}}; \qquad (1.23)$$

$$\overline{Y_i} = Y_i + Y_{i-1}. \qquad (1.24)$$

Згідно з [27] *p*-числами Фібоначчі називаються числа $\varphi_p(l)$, що задаються рекурентним співвідношенням:

$$\varphi_p(l)=\begin{cases}0 \text{ при } l<0;\\ 1 \text{ при } l=0;\\ \varphi_p(l-1)+\varphi_p(l-p-1) \text{ при } l>0.\end{cases} \qquad (1.25)$$

Для парних членів послідовності (1.22) $l=0, 2, 4, \ldots;$ $p=2$ і (1.25) збігається з (1.24) при початкових умовах $Y_1=r_1=0;$ $\overline{Y_1}=\overline{r_1}=1.$

Для непарних членів послідовності (1.22) $l=1,3,5,\dots$; $p=1$ і (1.25) збігається з (1.23) при тих же початкових умовах.

Послідовність (1.22) у числовому вигляді при $Y_1=0, \overline{Y}_1=1$, $r_1=r_2=r_3=\dots=r_i=0$ і $k_1=k_2=k_3=\dots=k_i=1$, зображається рядом: 1, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 12, 17, 29, 41, 70, 99, 169, 239, ... Значення Y_i, $\overline{Y}_i$, N_i, M_i, $\overline{Y}_i/Y_i$, M_i/N_i при $i=1,2,\dots,13$ показані в табл. 1. Тут n – розрядність двійкових кодів N_i і M_i. Взаємозв'язок між n і i наведено у табл. 2.

Таблиця 1

Значення параметрів при визначенні максимального порядку НХ

i	Y_i	$\overline{Y}_i$	N_i	M_i	n	$\overline{Y}_i/Y_i$	M_i/N_i
1	0	1	1	2	2		2
2	1	1	2	5	3	1	2,5
3	2	3	5	12	4	1,50000	2,4
4	5	7	12	29	5	1,40000	2,41667
5	12	17	29	70	7	1,41667	2,41379
6	29	41	70	169	8	1,41379	2,41429
7	70	99	169	408	9	1,41429	2,41420
8	169	239	408	985	10	1,41420	2,41422
9	408	577	985	2378	12	1,41422	2,41421
10	985	1393	2378	5741	13	1,41421	2,41421
11	2378	3363	5741	13860	14	1,41421	2,41421
12	5741	8119	13860	33461	16	1,41421	2,41421
13	13860	19601	33461	80782	17	1,41421	2,41421

Таблиця 2

Залежність максимального порядку нерівномірності від розрядності кодів приростів координат

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	8	9	10	11	11

Теорема 2.5. Послідовність

$$Y_1, \overline{Y_2}, Y_2, \overline{Y_3}, Y_3, \overline{Y_4}, \cdots, \overline{Y}_i, Y_i \tag{1.26}$$

при $r_1=r_2=r_3=\dots=r_i=1$ і $k_1=k_2=k_3=\dots=k_i=1$ являють собою *1*-ряд Фібоначчі.

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-320-1

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-320-1

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page
http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-320-1

Наукове видання

Пєтух Анатолій Михайлович,
Обідник Дем'ян Тихонович,
Романюк Олександр Никифорович

НЕРІВНОМІРНІСТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНО-ФАЗОВИХ ЧАСТОТНО-ІМПУЛЬСНИХ ПОТОКІВ

Монографія

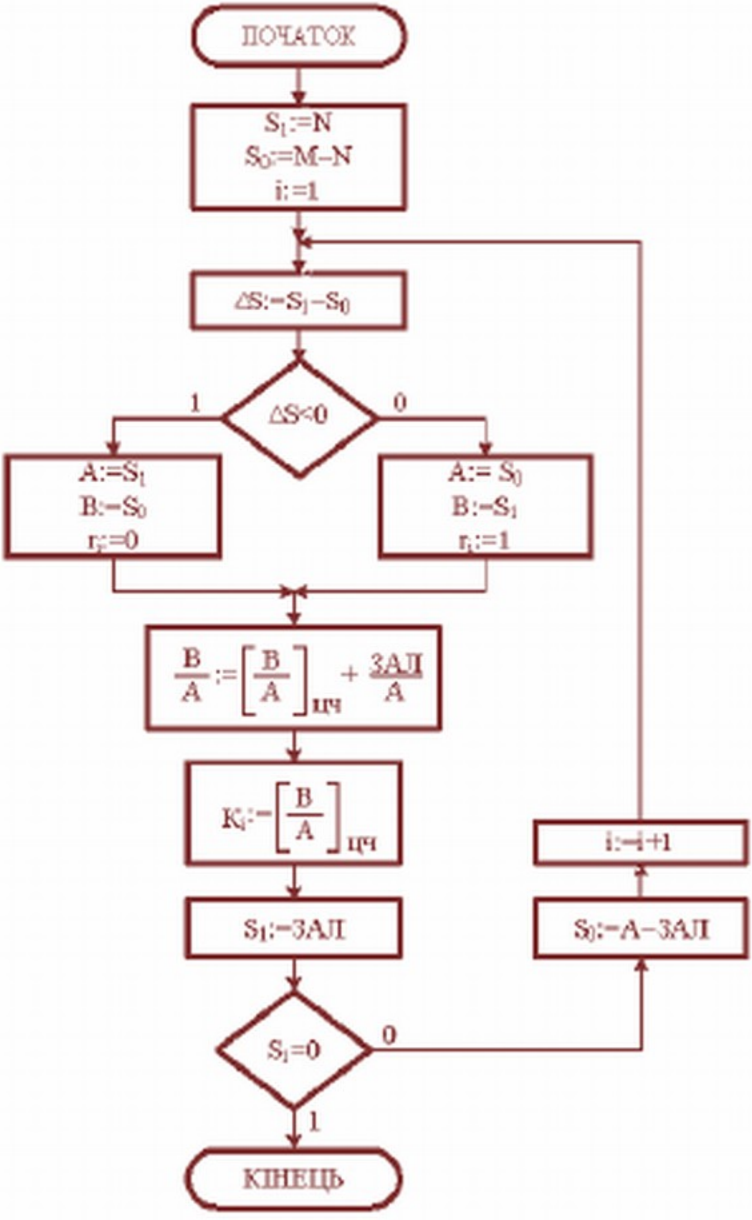
Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено Д. Обідником

Підписано до друку 25.08.2009 р.
Формат 29,7x42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 5,31.
Наклад 100 прим. Зам № 2009-146.

Вінницький національний технічний університет,
комп'ютерний інформаційно-видавничий центр.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-85-32
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел (0432) 59-81-59
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.


ПОЧАТОК
S1:=N
S0:=M–N
i:=1
ΔS:=S1–S0
ΔS<0
1
0
A:=S1
B:=S0
ri:=0
A:= S0
B:=S1
ri:=1
B/A:=[B/A]цч + ЗАЛ/A
Ki:=[B/A]цч
S1:=ЗАЛ
S1=0
0
1
S0:=A–ЗАЛ
i:=i+1
КІНЕЦЬ