УДК 621.311.161

СИСТЕМИ ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ У КРИТЕРІАЛЬНИХ МОДЕЛЯХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Світлана Бевз, Віталій Логвиненко (Україна, м. Вінниця)

Для спрощення розрахунку багатьох оптимізаційних задач досить ефективно використовується критеріальне моделювання, яке передбачає перетворення вихідної моделі до критеріальної форми запису, де всі величини, які беруть участь у процесі, мають зміст критеріїв подібності. На основі критеріальних моделей встановлюються аналітичні зв`язки між параметрами процесу та параметрами елементів системи, в якій цей процес проходить [1].

З метою угрупування критеріальних моделей та визначення сфери застосування було проведено їх систематизацію і узагальнення у системах відносних одиниць (СВО). На рис. 1 подано логічну схему, яка ілюструє основні залежності кожної системи та взаємозв’язки між окремими СВО. На даному рисунку проводиться систематизація розроблених в [2] евристичної, критеріальної, диференціальної СВО та нових — деривативної [3], транзитивної [4] і сигноміальної [5] СВО. Схема репрезентує основні застосування СВО при вирішення задач оптимізації.

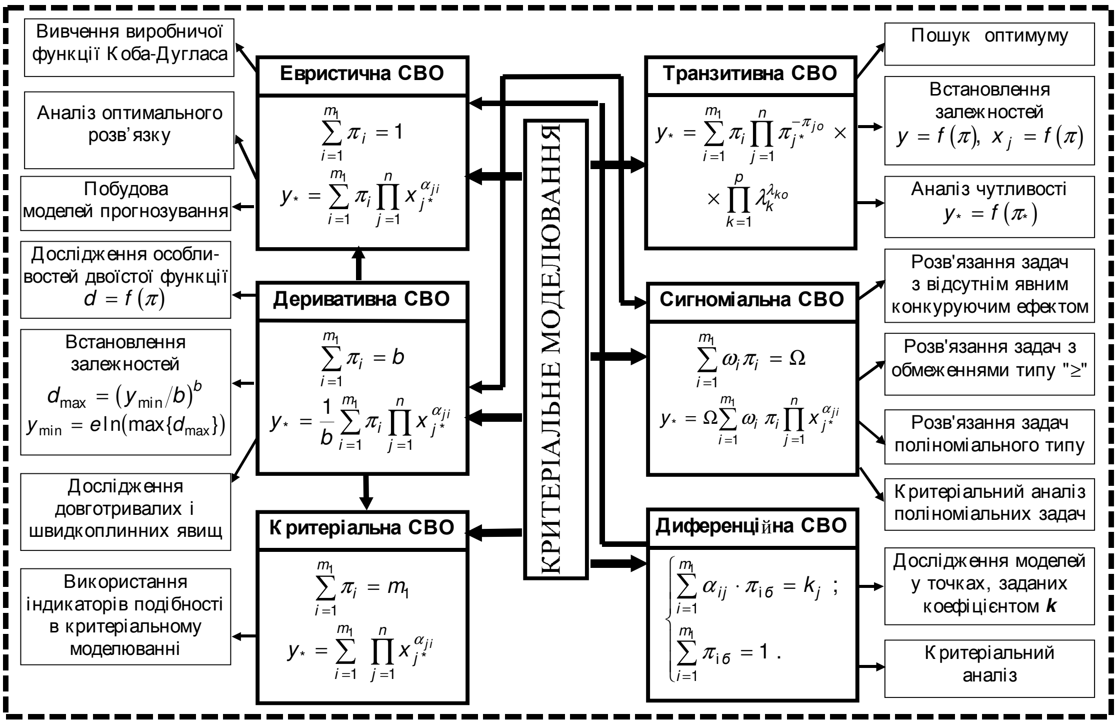

Рис. 1. Системи відносних одиниць

ЕВРИСТИЧНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ.

Математичну модель задачі оптимізації та її обмеження доцільно подавати у вигляді:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \to \min; \qquad (1)$$

$$g_k=\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le 1, k=\overline{1,p}, x_j>0,\ j=\overline{1,n}\ . \qquad (2)$$

де $y(x)$ — деякий узагальнений техніко-економічний показник; a_i, α_{ji} — сталі коефіцієнти, які визначаються властивостями системи; x_j — змінні параметри системи; m_1 — кількість членів цільової функції моделі; n— кількість змінних; m — кількість членів математичної моделі; p —кількість обмежень математичної моделі.

Критерії подібності визначаються:

$$\pi_{iб}=a_i / y_б \cdot \prod_{j=1}^{n} x_{jб}^{\alpha_{ji}}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Критеріальне рівняння, у якому $y_*=y/y_б$, $x_{j*}=x_j/x_{jб}$ — відношення до базисних значень параметрів задачі (1)-(2) (за базис може бути прийнята точка оптимуму чи будь-яка інша), подано на рис. 1. З його допомогою визначається відносна зміна y при відхиленні змінних параметрів x_j від базису. Отже, вирішується пряма задача чутливості.

Система ортонормованих рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \pi_i = 0,\ j=\overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

дозволяє лінеаризувати обмеження прямої задачі критеріального програмування КП (1)-(2) і перейти до розгляду двоїстої задачі [1,2]:

$$d(\pi)=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i}{\pi_i}\right)^{\pi_i} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\lambda_k} \to \max\ , \qquad (4)$$

де $\lambda_k=\sum_{\mu=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_{i0}, k=\overline{1,p}$ — нормовані множники Лагранжа.

Таким чином, евристична СВО дозволяє розв’язувати задачі оптимізації, проводити критеріальний аналіз отриманих розв’язків. Критеріальне рівняння евристичної СВО використовується в методі критеріального прогнозування [6].

КРИТЕРІАЛЬНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ.

За першою теоремою подібності [1], для всіх подібних явищ індикатори подібності рівні одиниці: $\frac{M_i}{M}\prod_{j=1}^{n} M_j^{\alpha_{ij}} = 1,\ i=\overline{1,m_1},$ де масштаби x_j (M_j) і— масштаб $y(M)$ при незалежних масштабах M_i визначаються: $M_j = \prod_{i=1}^{m_1} M_i^{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_б}},\ j=\overline{1,n},\ M = \prod_{j=1}^{m_1} M_i^{\frac{\Delta_{i,n+1}}{\Delta_б}}$, де $\Delta_б$— визначник системи рівнянь; Δ_{ij}, $\Delta_{i,n+1}$— взяті з протилежним знаком алгебраїчні доповнення елементів α_{ij} та елементів, які перебувають на перетині і-тої стрічки з (n+1)-м стовпцем.

Критерії подібності критеріальної СВО визначаються [2]: $\pi_{iб} = a_i\prod_{j=1}^{n} x_{jб}^{\alpha_{ij}} \Big/ \prod_{i=1}^{m_1} a_i^{\frac{\Delta_{i,n+1}}{\Delta_б}}$. Умова нормування та критеріальне рівняння даної СВО проілюстровано на рис. 1.

Застосування критеріальної СВО суттєво зменшує складність математичного апарату дослідження, а також зменшує кількість змінних, у яких розглядається задача.

ДИФЕРЕНЦІЙНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ.

Екстрактивною ознакою диференціальної СВО може слугувати операція диференціювання. Виходячи з цієї засади, в основу диференційної СВО покладено співвідношення [2]: $\frac{\partial y}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{m_1}\alpha_{is}a_i x_{sб}^{\alpha_{is}-1}\prod_{j=1,\ j\neq s}^{n} x_{jб}^{\alpha_{ij}} = k_j^{'}$. Дане рівняння перетворюємо до вигляду умови ортогональності: $\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_{ij}\pi_{iб} = k_j,\ j=\overline{1,n},$ де $k_j = k'_j \cdot x_{jб}/y_б = (\partial y/\partial x)/(y_б/x_{jб})$.

Для подальшого аналізу k_j зручно записати наступним чином: $k_j = \frac{\partial y/y}{\partial x/x_j};\ j=\overline{1,n}$. Така форма репрезентації дозволяє зробити висновок, що коефіцієнт k_j показує вплив відносної похибки параметра y на відносну похибку параметра x_j. Систему ортонормованих рівнянь в диференціальній СВО подано на рис.1.

Дану СВО доцільно використовувати у випадках, коли доводиться досліджувати математичну модель у точках, координати яких відрізняються на відому величину від координат стаціонарної точки.

СИГНОМІАЛЬНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ.

Поліноміальна задача визначається:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m_1}\varpi_i a_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}} \to \min,$$

$$g_k(x)=\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\varpi_i a_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}} \le \Omega_k, k=\overline{1,p},$$

де $\varpi_i=\pm 1$, $\Omega_i=\pm 1$ - сигноми-функції.

Знакові функції сигноміальної СВО ϖ_i, $i=\overline{1,m}$, Ω, Ω_k, $k=\overline{1,p}$ об'єктивно поповнюють сформовані в термінах КП умови нормування (рис. 1) і ортогональності: $\sum_{i=1}^{m}\omega_i\alpha_{ji}\pi_i=0, j=\overline{1,n}$ та двоїсту функцію

$$d(\pi)=\Omega\left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i\lambda_i}{\pi_i}\right)^{\varpi_i\pi_i}\right]^{\Omega},$$

де нормовані множники Лагранжа $\lambda_i=\begin{vmatrix}1, i=\overline{1,m_1}; \\ \Omega_k\sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}}\omega_i\pi_j, k=\overline{1,p}, i=\overline{m_1+1,m}.\end{vmatrix}$

Критерії подібності сигноміальної СВО визначаються:

$$\pi_{io}=\frac{a_i}{\Omega\cdot y_o}\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Критеріальне рівняння сигноміальної СВО, що подано на рис. 1, дозволяє виконати аналіз оптимального розв'язку на чутливість.

При розв'язанні канонічних задач в сигноміальній СВО користуються умовами ортогональності і нормування. які доповнені сигном-функціями ϖ_i, $i=\overline{1, m}$, Ω. Вектор оптимальних критеріїв подібності визначається із системи лінійних рівнянь, складених за цими умовами. Максимальне значення двоїстої функції, яке відповідає мінімуму прямої задачі КП з урахуванням обмежень (1)-(2) визначається з двоїстої функції даної СВО. Для розв'язання задач високої міри складності в даній системі відносних одиниць користуються спеціальним алгоритмом, який полягає у визначенні меж області допустимих рішень симплекс-методом, після формування наступних лінійних програм [5].

Розробка даної СВО дозволила створити метод розв'язання поліноміальних задач великої розмірності та задач, у структурі нормованих множників Лагранжа яких простежується переважання від'ємної частини адитивних конструкцій.

ТРАНЗИТИВНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ.

Визначивши оптимальне значення $y_{min} = d_{max}$ згідно алгоритму, поданого в евристичній СВО, використовуємо четверте твердження першої теореми двоїстості [1] для визначення змінних параметрів прямої задачі, відповідно до якого складається система рівнянь:

$$\begin{cases} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \pi_i \cdot y_{\min}, \ i = \overline{1, m_1}; \\ a_r \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jr}} = \pi_r \Big/ \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i, \ k = \overline{1, p}, \ r = \overline{m_1 + 1, m_{p+1}}, \end{cases}, \qquad (5)$$

Прологарифмувавши обидві частини рівнянь (5), виділивши залежні та незалежні критерії і виконавши деякі перетворення, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot \ln x_j - \ln y_{\min} = \ln\left(\dfrac{\pi_i}{a_i \cdot \lambda_i}\right), i = \overline{1, m-s}; \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot \ln x_j - \ln y_{\min} - \ln \pi_i = \ln\left(\dfrac{\pi_i}{a_i \cdot \lambda_i}\right), i = \overline{m-s+1, m}. \end{cases} \qquad (6)$$

де $\lambda_i = \left| \begin{array}{l} 1, \ i = \overline{1, m_1}; \\ \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_j, \ k = \overline{1, p}, \ i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{array} \right.$

З (6), отримуємо залежності, які пов'язують змінні прямої (1)-(2) та двоїстої (3)-(4) задач КП та незалежні змінні двоїстої задачі із залежними критеріями подібності π_i:

$$x_j = \prod_{i=1}^{m-s} (\pi_i / a_i)^{\beta_{ji}} \prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i \right)^{-\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{ji}}, \ j = \overline{1, n};$$

$$(\pi_t / a_t) = \prod_{i=1}^{m-s} (\pi_i / a_i)^{\beta_{ti}}, \ t = \overline{m-s+1, m};$$

$$y_{\min} = \prod_{i=1}^{m-s} (\pi_i / a_i)^{\beta_{n+1,i}} \prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i \right)^{-\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,i}},$$

де β_{ji} — елементи оберненої матриці α системи (6).

Критеріальне рівняння даної СВО проілюстровано на рис. 1.

На основі транзитивної СВО розроблено новий метод розв’язання задач оптимізації.

ДЕРИВАТИВНА СИСТЕМА ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ.

Введення в умову нормування евристичної СВО, що подана на рис. 1, коефіцієнта нормування b, який детермінує міру впливу на зміщення площини нормування в просторі двоїстих змінних (площин N, N' на рис. 2) і узагальнення евристичної СВО, обумовлює створення деривативної СВО [3]. Критерії подібності даної СВО мають вигляд: $\pi_i = \frac{b \cdot a_i}{y_{\min}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}$.

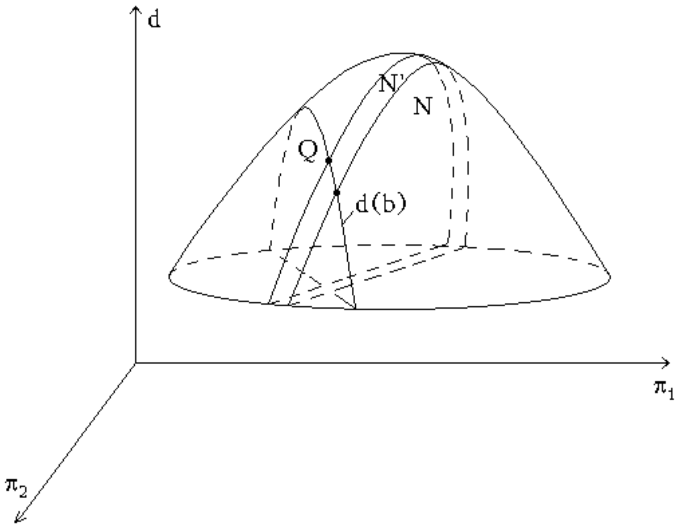

Рис. 2. Двоїста задача при накладанні площин ортогональності та нормування з різними нормуючими коефіцієнтами.

Критеріальне рівняння деривативної СВО проілюстровано на рис. 1.

Провівши деякі трансформації залежності двоїстої функції (4) з урахуванням введення коефіцієнта нормування b, отримаємо залежність: $d_{\max} = (y_{\min}/b)^b$, яка узагальнює рівність $d_{\max} = y_{\min}$. Аналізуючи залежність $d_{\max} = f(b)$, зауважимо, що її максимум $d_{\max}^m$ відповідає значенню коефіцієнта нормування $b^m = y_{\min}/e$, звідки $d_{\max}^m = (y_{\min}/b^m)^{b^m} = e^{y_{\min}/e}$. Прологарифмувавши даний вираз, отримаємо $y_{\min} = e\ln(d_{\max}^m)$. Мінімум прямої задачі критеріального програмування при коефіцієнтові нормування відмінному від одиниці визначається з виразу $y_{\min} = b\sqrt[b]{d_{\max}}$.

Отже, внаслідок побудови деривативної СВО досліджуються особливості двоїстої задачі КП (3)-(4), встановлюється залежність мінімуму прямої задачі КП (1)-(2) від максимуму двоїстої функції при зміні коефіцієнта нормування b. Деривативна СВО дає можливість впливати на темп розвитку змодельованого процесу, відтворюючи, завдяки введенню в неї коефіцієнта нормування, швидкоплинний процес уповільнено, а довгочасний — прискорено.

Як бачимо, на вибір коефіцієнта b не накладається практично ніяких обмежень; для кожного конкретного випадку його значення визначається метою дослідження. Залежно від вибраного значення нормуючого коефіцієнта розглядається та чи інша СВО (див.рис.1). Так, наприклад, коли b=1 користуються евристичною СВО, при $b=m_1$ — критеріальною, а при b=±1 — сигноміальною системою. У деривативній СВО критеріальні залежності подані у найбільш загальній формі.

ВИСНОВОК

Дістало подальший розвиток створення систем відносних одиниць у критеріальному моделюванні. Розглянуто евристичну, критеріальну і диференційну систему відносних одиниць. Встановлено раціональні області їх використання. Розроблено деривативну, транзитивну і сигноміальну системи відносних одиниць. На ґрунті деривативної СВО досліджується поведінка двоїстої функції (4) на необмеженому двоїстому просторі при накладанні ортонормованих умов (3) та без них. Транзитивна система відносних одиниць встановлює зв'язок між параметрами прямої і двоїстої задач критеріального програмування. Сигноміальна система відносних одиниць дозволяє досліджувати задачі поліноміального типу.

ЛІТЕРАТУРА

Веников В.А. Теория подобия и моделирования . — М.: Высшая школа, 1976. — 480 с.

Астахов Ю.Н. Критериальный метод и его применение в энергетике: Дисс. на соискание учен. степ. доктора техн. наук — М.: МЭИ, 1985. — 264 с.

Бевз С.В. Системи відносних одиниць у критеріальному моделюванні// Придніпровський вісник. — 1999. — № 2. — С. 91-102.

Лежнюк П.Д., Бевз С.В. Транзитивна система відносних одиниць у критеріальному моделюванні // Вісник ДУ «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи. - 1999. - № 372. - С. 91-97.

Бевз С.В. Адаптація критеріального методу до розв'язання поліноміальних задач в оптимальному керуванні // Книга за матеріалами V Міжнар. н.-т. конф. "Контроль і управління в технічних системах". — Вінниця. — 1999. — С. 179-185.

Бевз С.В., Бурбело С.М. Критеріальне моделювання в задачах прогнозування// Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". — 1998. — № 3. — С. 39-42.