

Валериан МУФТЕЕВ¹

Александр РОМАНЮК²

¹Башкирский государственный аграрный университет, Россия

450001, г.Уфа, ул. 50-лет Октября, 34

muftejev@yandex.ru

²Винницкий национальный технический университет, Украина

21021, г.Винница, Хмельницкое шоссе, 95

ran@svitonline.com

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В-СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Резюме. В статье приводятся результаты исследования проблемы геометрически устойчивого моделирования в-сплайновой кривой произвольной степени с помощью геометрического определителя вида фрейма (s-полигона) в-сплайновой кривой. Определены геометрически наглядные ограничения на форму фрейма в-сплайновой кривой и поверхности, соблюдение которых обеспечивает изогометричность формы фрейма, в-сплайновой кривой и изопараметрических линий на плоскости проекций при параллельном проецировании. Даны рекомендации по исправлению формы фрейма поверхности при появлении нежелательной осцилляции изопараметрических линий.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, в-сплайновые кривые и поверхности, изогометрическая аппроксимация, кривые и поверхности высокого качества.

1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрические параметры криволинейных поверхностей часто являются определяющими для проектных характеристик объекта. К таким объектам относятся изделия с динамическими обводами в авиастроении, автомобилестроении, судостроении, энергетическом и химическом машиностроении. Актуальной проблемой в настоящее время является разработка методов моделирования кривых и поверхностей высокого качества. Формализованные требования к методам моделирования кривых линий и поверхностей высокого качества были приведены в работе [1] и уточнены в работах [2,3]. Основными критериями качества являются высокий порядок гладкости и плавность кривой.

В настоящее время в практике конструирования кривых линий и поверхностей получили широкое распространение сплайны на основе базовых параметрических полиномов - кривые Безье, в-сплайновые кривые, NURBS [4,5,7].

В качестве геометрических определителей используются управляющие полигоны или фреймы (b-полигоны и s-полигоны [8]), которые оказались

чрезвычайно конструктивными. В-полигоны и s-полигоны изогеометрично представляют аппроксимирующие параметрические полиномы в широком диапазоне конфигураций, обеспечивают локальное редактирование кривой.

Свойство изогеометричности форм фрейма (b-полигона) и кубической кривой Безье было впервые исследовано в работе [9], в которой были даны рекомендации по выбору длин звеньев фрейма. В работе [10] было найдено уравнение определения точек перегиба по конфигурации фрейма (s-полигона) кубической b-сплайновой кривой и на основе анализа уравнения выделены зоны допустимых конфигураций фрейма для изогеометрического моделирования формы кривой. Эти результаты были обобщены для кубической кривой Безье [11]. На основе свойства изогеометричности форм фрейма и кубической b-сплайновой кривой был разработан алгоритм изогеометрического восстановления кубической b-сплайновой кривой на точечном каркасе [12].

Недостатком сплайнов низких степеней на основе параметрических полиномов является трудность обеспечения плавности кривой. Сплайны склонны к осцилляции кривизны [5,13,14, 15]. При конструировании обводов кузова автомобиля это свойство приводит к эффекту "кривых зеркал" [5]. При эксплуатации объектов с динамическими обводами это приводит к энергетическим потерям из-за пульсации потока среды, обтекающей динамические обводы [16]. Кроме этого при моделировании пространственных кривых невозможно обеспечить непрерывность кручения.

Поэтому применение параметрических полиномиальных сплайнов низких степеней для прямого моделирования динамических обводов неприемлемо. Параметрические сплайны высоких степеней, представленные геометрическими определителями вида управляющих полигонов, могут обеспечить высокое качество кривых (высокий порядок гладкости и плавность).

В работе [17] были исследованы свойства изогеометричности форм фрейма и b-сплайновой кривой высокой степени и предложен алгоритм изогеометрической аппроксимации точечного каркаса. Эти результаты исследований и алгоритм были уточнены и развиты для изогеометрической аппроксимации v-кривых и поверхностей, сконструированных на основе метода v-кривых, с обеспечением требований на плавность и эстетичность форм [18]. Приемлемое качество аппроксимации обеспечивается, начиная с 6 степени сплайновых кривых.

В статье приводятся результаты исследования изогеометричности формы фрейма и b-сплайновой поверхности произвольных степеней.

Так как эти результаты непосредственно обобщают результаты исследования изогеометричности формы фрейма и b-сплайновой кривой произвольной степени, то для логической стройности и полноты изложения в статье приведены также результаты исследования изогеометричности формы фрейма и b-сплайновой кривой произвольной степени, опубликованные ранее [17,18].

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВОЙ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИВОЙ

Формальная модель кривой линии в прикладной геометрии называется её определителем. Определитель задается парой $\{G; f\}$, где G - геометрическая часть определителя (или геометрический определитель), f - процедура отображения отрезка $[0,1]$ в евклидово пространство, сконструированная на системе элементов геометрического определителя. В этом случае определитель задает способ параметризации кривой

$$r(t) = f\{G; t\}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Обобщим постановку задачи изогеометрической аппроксимации функции $f(x)$ [19] на задачу изогеометрического моделирования кривой линии.

Определение 1. Пусть кривая линия задана векторной функцией

$$r(u) = [x(u), y(u)], \quad (2)$$

где функции $x(u)$, $y(u)$ геометрически определимые порядка K [19]. Определим параметрическую сетку $\{u_i\}$, такую, что точечные базисы $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ изогеометрически порядка K представляют параметризации $x(u)$, $y(u)$. В этом случае будем говорить, что точечный каркас $\{x(u_i), y_j(u)\}$ изогеометрически порядка K по параметризациям $x(u)$ и $y(u)$ представляют кривую линию $r(u)$.

Определение 2. Примем точечный каркас $\{x(u_i), y(u_i)\}$ за геометрический определитель конструируемой кривой $G = \{x(u_i), y(u_i)\}$. Подберем аппроксимирующую кривую

$$r(u) = [S_x(\{x_i\}, u), S_y(\{y_i\}, u)], \quad (3)$$

где параметризации $S_x(\{x_i\}, u), S_y(\{y_i\}, u)$ имеют r непрерывных производных $S_x(\{x_i\}, u) \in C^r, S_y(\{y_i\}, u) \in C^r$ и изогеометричны порядка K точечным базисам $\{x_i, u_i\}$ и $\{y_i, u_i\}$. В этом случае будем говорить, что кривая $S(u)$ r -гладко изогеометрически порядка K по параметризациям $x(u), y(u)$ приближает фиксированную кривую $r(u)$ на точечном каркасе $\{x(u_i), y(u_i)\}$.

Геометрическая структура регулярной дважды дифференцируемой кривой в заданной точке $r(u_0)$ характеризуется касательной, соприкасающейся плоскостью, кривизной; на отрезке характеризуется количеством точек перегиба или количеством участков знакопостоянства кривизны, количеством участков монотонности кривизны [20, 21].

При этом геометрическая структура кривой $r(u)$ сложным образом связана с геометрическими свойствами параметризаций $x(u), y(u)$. Задачу изогеометрического приближения кривой нельзя свести к изогеометрическому приближению её параметризаций $x(u), y(u)$ на конечной сетке $\{u_i\}$, так как

может нарушиться условие регулярности кривой: $x'(u)^2 + y'(u)^2 > 0$.

Рассмотрим связь конфигурации каркаса точек $\{x(u_i), y(u_i)\}$ с геометрической структурой регулярной кривой линии $r(u) \in C^2$.

Значения первых $x'(u_i), y'(u_i)$, и вторых $x''(u_i), y''(u_i)$ производных $r(u) \in C^2$ можно аппроксимировать значениями центральных разделенных разностей первого $\delta_i^1 x, \delta_i^1 y$ и второго $\delta_i^2 x, \delta_i^2 y$

порядков на точечных базисах $\{x(u_i)\} \{y(u_i)\}$. В этом случае на точечном каркасе $\{x_i, y_i\}$ можно определить дискретные аппроксимации

а) касательной

$$y(u_i, t) = x(u_i) + t \cdot \frac{\delta_i^1 y}{\delta_i^1 x} \quad (4)$$

б) кривизны

$$k(u_i) = \frac{\delta_i^2 x \delta_i^1 y - \delta_i^1 x \delta_i^2 y}{\left| (\delta_i^1 x)^2 + (\delta_i^1 y)^2 \right|^{3/2}} \quad (5)$$

Определим характеристики конфигураций точечного каркаса $\{T_i\}$, $T_i = [x_i, y_i]$ на равномерной сетке $\{u_i\}$, $u_{i+1} - u_i = 1$.

На равномерной сетке $\{u_i\}$ векторы первых и вторых центральных разделенных разностей определяются по формулам [22, 23]

$$\delta_i^1 T = (T_{i+1} - T_{i-1})/2, \quad \delta_i^2 T = (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1})/2 \quad (6)$$

Дискретная аппроксимация касательной определится выражением

$$\overline{P}(u_i, t) = T_i + t \cdot \delta_i^1 T. \quad (7)$$

Знак и значение дискретной аппроксимации кривизны плоской кривой выразятся формулой

$$\bar{k}(u_i) = \frac{(\delta^1 T_i, \delta^2 T_i, e)}{|\delta^1 T_i|^3}, \quad (8)$$

где e - единичный вектор ортогональности.

Введем следующие определения, характеризующие конфигурацию плоского каркаса $\{T_i\}$, который представим в виде многозвенника $\{v_i\}$, $v_i = T_i T_{i+1}$. Тогда знак кривизны (8) определит знак ориентации двух смежных звеньев v_{i-1}, v_i

$$\text{sign}(v_{i-1}, v_i) = \text{sign}(\bar{k}(u_i)) = \text{sign}(\delta^1 T_i, \delta^2 T_i, e) \quad (9)$$

Определение 3. Формой или ориентацией каркаса (ломаной) $\{T_i\}$ назовем закон изменения знака дискретной аппроксимации кривизны (8) или ориентаций смежных звеньев (9).

Определение 4. Каркас (ломаная) $\{T_i\}$ будет локально выпуклым, если знаки дискретной аппроксимации кривизны (8) или ориентаций смежных звеньев (9) одинаковы во всех точках T_i .

Определение 5. Строго выпуклым назовем каркас (ломаную) $\{T_i\}$, замыкание которого определит выпуклый многоугольник.

Определение 6. Регулярным порядка m каркасом (ломаной) $\{T_i\}$ назовем каркас произвольной формы со следующим ограничением: любой локально выпуклый участок должен иметь не менее чем m звеньев и любой локально выпуклый m -звенник $\{T_i T_{i+1} T_{i+2} \dots T_{i+m}\}$ должен быть строго выпуклым.

На рис. 1. приведены иллюстрации к определениям.

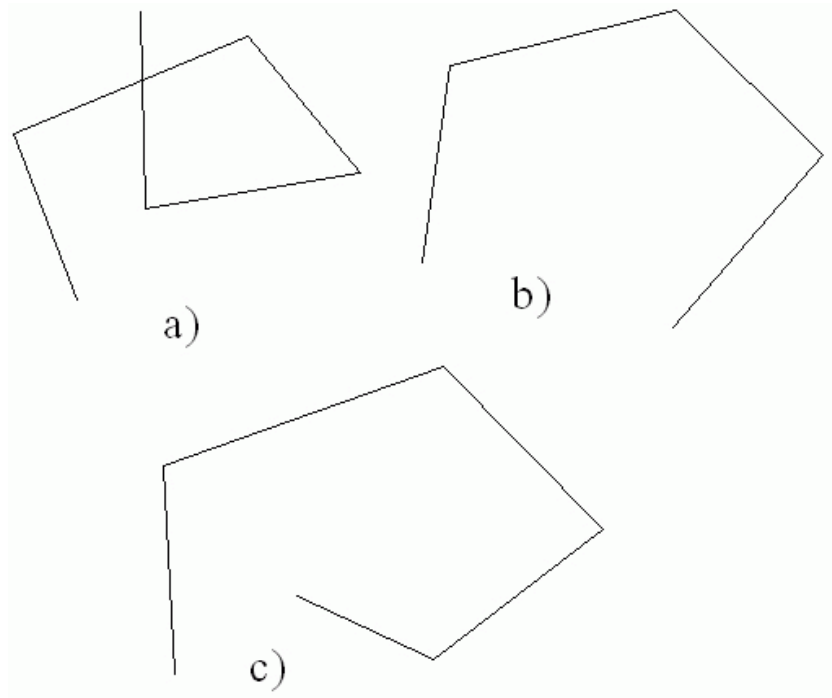


Рис. 1. а) локально выпуклый каркас; б) строго выпуклый каркас;
с) каркас регулярной порядка 3 формы

Теперь можно дать определения изогеометрической аппроксимации кривой линией $r(u)$ геометрического определителя.

Определение 7. Порядок геометрической определимости регулярной кривой (K раз дифференцируемой) будет равен K .

Пусть кривая $r(u)$ геометрически определима порядка K . Тогда будем говорить, что точечный каркас $\{T_i\}$, $T_i = [x_i, y_i]$ изогеометрически порядка K представляет кривую $r(u)$, если

- 1) $K = 0$. $T_i \in r(u_i)$, $...u_{i-1} < u_i < u_{i+1}....$
- 2) $K = 1$. $T_i \neq T_{i+1}$ и на интервале $[u_i, u_{i+1}]$ не существуют такие u_1 и u_2 , что $r(u_1) = r(u_2)$.

3) $K = 2$. Знак кривизны $k(u_i)$, совпадает со знаком дискретной аппроксимации кривизны $\bar{k}(u_i)$. Точки перегиба попадают в интервалы изменения знака дискретной аппроксимации кривизны. При нулевой кривизне $\bar{k}(u_i)$ дискретная аппроксимация кривизны $\bar{k}(u_i)$ тоже нулевая.

Точечный каркас $\{T_i\}$ изогеометрически порядка K представляющий кривую $r(u)$, назовем характеристическим порядка K точечным каркасом кривой $r(u)$. Если при этом справедливы условия изогеометричности всех порядков меньших K , то такой каркас $\{T_i\}$ назовем абсолютно характеристическим порядка K .

На рис. 2 приведены иллюстрации к приведенным определениям.

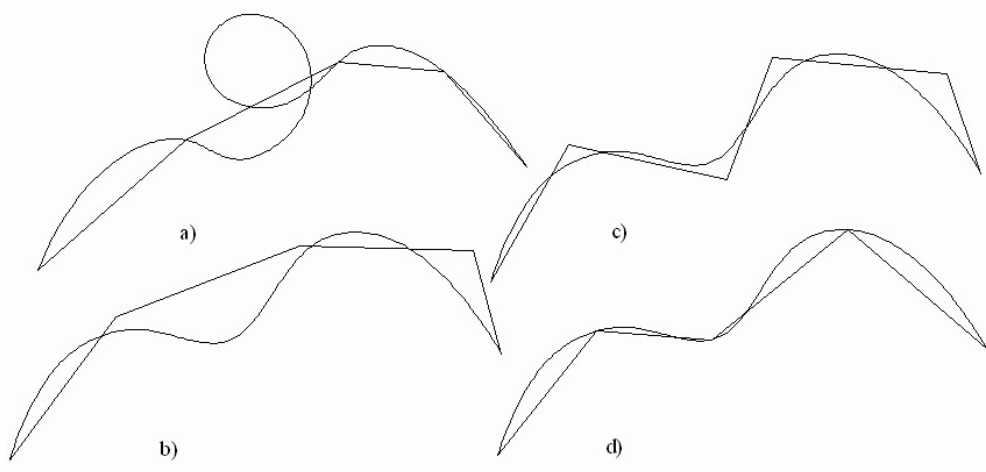


Рис.2 а) характеристический порядка $K = 0$ каркас, б) характеристический порядка $K = 1$ каркас, в) характеристический порядка $K = 2$ каркас, г) абсолютно характеристический порядка $K = 2$ каркас

2.3. В-СПЛАЙНОВЫЕ КРИВЫЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В-СПЛАЙНОВОЙ КРИВОЙ S –ПОЛИГОНОМ

Определителем b -сплайновой кривой степени m является векторная функция [14, 15]

$$r(u) = \sum_{i=-k1}^{n+k2} B_i^m(u) V_i, \quad (10)$$

где $B_i^m(u)$ - b -сплайны (базисные сплайны) степени m , определенные на расширенной равномерной сетке

$$\Delta u = \{u_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, u_{i-1} < u_i < u_{i+1},$$

$V_i = [V_i^x, V_i^y, V_i^z]$ - вершины сплайнового полигона (s -полигона) или фрейма $\{V_i\}_{i=-k1}^{n+k2}$ - геометрического определителя b -сплайновой кривой $r(u)$,

n – определяет число узловых точек сплайна $r(u_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $k1, k2$ - определяют количество вершин s -полигона. Для сплайна четной степени $k1 = \frac{m}{2}$, $k2 = \frac{m}{2} - 1$. Для сплайна нечетной степени $k1 = k2 = \frac{m-1}{2}$.

Благодаря инвариантности формулы (10) относительно аффинных преобразований, форму b -сплайновой кривой можно исследовать по ее плоским проекциям. Важнейшим свойством b -сплайновых кривых произвольной степени m является свойство изогеометричности формы геометрического определителя (s -полигона) форме b -сплайновой кривой при соблюдении слабых, геометрически наглядных ограничений на конфигурацию s -полигона.

Теорема 1. S -полигон $\{V_i\}$ регулярной формы порядка m является характеристической ломаной (изогеометрически до знака кривизны определяет форму) b -сплайновой кривой степени m (10). При этом количество изменений знаков ориентаций звеньев s -полигона точно совпадает с количеством изменения знака кривизны b -сплайновой кривой.

Доказательство теоремы строится на анализе SB- и BZ-алгоритмов [8]. SB-алгоритм переводит геометрический определитель b-сплайновой кривой вида s-полигона в геометрический определитель сплайновой кривой Безье вида обобщенного b-полигона. BZ-алгоритм на обобщенном b-полигоне определяет точки на сплайновой кривой и векторы производных. SB- и BZ-алгоритмы построены на последовательности операций уплотнения спецификации геометрического определителя (“subdivision technique”).

Конечная последовательность операций уплотнения приводит к некоторой результирующей ломаной, у которой последние сгенерированные звенья и точки на звеньях определяют точки кривой, векторы первых и вторых производных кривой [8].

Эти операции можно свести к обобщенной операции “отсечения вершины”.

Напомним общее свойство выпуклых полигонов (замкнутых ломаных): любой отрезок, соединяющий граничные точки полигона, делит полигон на два выпуклых полигона.

Лемма 1. Пусть задан 2-звенник $(V_i V_{i+1} V_{i+2})$. Производный 3-звенник $(V_{i,i+1} V_{i+1,i+2} V_{i+2})$ после операции “отсечения вершины”,

где
$$V_{i,i+1} = (1-t) \cdot V_i + t \cdot V_{i+1}, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{i+1,i+2} = (1-s) \cdot V_{i+1} + s \cdot V_{i+2}, 0 \leq s \leq 1,$$

будет строго выпуклой ломаной. Знак ориентации любого 2-звенника, составленного из смежных звеньев, будет совпадать со знаком исходного 2-звенника.

Лемма 2. Пусть задан строго выпуклый 3-звенник $(V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3})$. Производный 4-звенник $(V_{i,i+1} V_{i+1,i+2} V_{i+2} V_{i+3})$ после операции “отсечения вершины”,

где
$$V_{i,i+1} = (1-t) \cdot V_i + t \cdot V_{i+1}, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{i+1,i+2} = (1-s) \cdot V_{i+1} + s \cdot V_{i+2}, 0 \leq s \leq 1,$$

будет строго выпуклой ломаной. Знак ориентации любого 2-звенника, составленного из смежных звеньев, будет совпадать со знаком ориентации исходного 2-звенника.

Лемма 3. Пусть задан s -образный 3-звенник $(V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3})$ с разными знаками ориентации 2-звенников $(V_i V_{i+1} V_{i+2})$ и $(V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3})$. Производный 4-звенник $(V_i V_{i,i+1} V_{i+1,i+2} V_{i+2} V_{i+3})$ после операции “отсечения вершины”, где

$$V_{i,i+1} = (1-t) \cdot V_i + t \cdot V_{i+1}, 0 \leq t \leq 1, V_{i+1,i+2} = (1-s) \cdot V_{i+1} + s \cdot V_{i+2}, 0 \leq s \leq 1$$

не будет иметь больше изменений знаков ориентации смежных 2-звенников чем исходный, но может стать строго выпуклым (в этом суть эффекта сглаживания).

Так как согласно общему свойству выпуклых полигонов и леммам 1,2,3 операции уплотнения строго выпуклого m -звенника приводят к строго выпуклому многозвеннику, то строго выпуклый m -звенник определит выпуклую дугу сплайновой кривой степени m .

Так как согласно леммам 1,2,3 операции уплотнения s -образного 3-звенника не увеличивают количество изменений знака ориентаций смежных 2-звенников, то любая конечная последовательность этих операций в SB- и BZ-алгоритмах на s -полигоне не увеличит количество знаков изменения ориентации и будет приводить к сглаженным ломаным.

Условие регулярности порядка m исходного s -полигона обеспечивает однозначное подобие формы s -полигона форме b -сплайновой кривой.

На рис. 3 показаны s -полигоны b -сплайновых кривых регулярной и нерегулярной формы а) показана b -сплайновая кривая степени 4 с s -полигоном регулярной порядка 4 формы, б) показана b -сплайновая кривая степени 6 с нарушениями условия регулярности формы s -полигона.

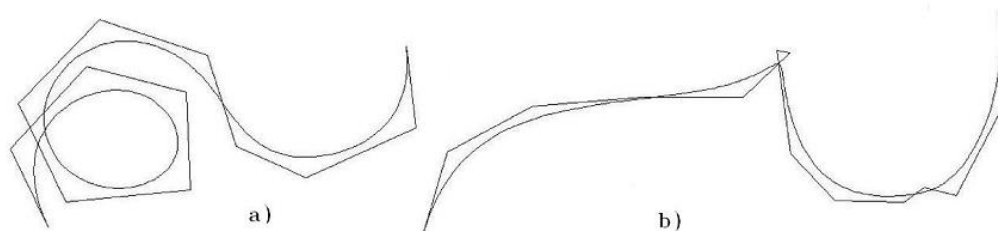


Рис. 3. а) b -сплайновая кривая степени 4 с s -полигоном регулярной порядка 4 формы, б) b -сплайновая кривая степени 6 с нарушениями условия регулярности формы s -полигона.

Данная теорема обобщает результат, полученный для b -сплайновых кривых 3-ей степени [10].

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Пространственная структура геометрического определителя поверхности вида двумерного точечного каркаса $\{T_{i,j}\}$ и поверхности $r(u,v)$ может быть оценена по параллельным проекциям на экранную плоскость точечного каркаса $\{T_{i,j}\}$ и семейства изопараметрических линий поверхности. Рассматривая объекты из различных точек пространства, можно достаточно определенно судить о пространственной форме каркаса $\{T_{i,j}\}$ и поверхности $r(u,v)$.

Такой подход позволяет обобщить определения изогеометричности плоской кривой и её геометрического определителя в виде одномерного точечного каркаса. В дальнейшем полагаем, что все определения относятся к проекциям точечного каркаса $\{T_{i,j}\}$ и поверхности $r(u,v)$ на плоскость.

При оценке конфигурации геометрического объекта по его проекции важное значение имеет взаимное расположение линий дискретного линейного каркаса поверхности и их геометрических определителей.

Пусть заданы плоские каркасы точек (ломанные) $\{T_{i,1}\}_{i=0}^n$ и $\{T_{i,2}\}_{i=0}^n$, которые представим в виде многозвенников $\{w_{i,1}\}_{i=1}^n$, $w_{i,1} = \overline{T_{i-1,1}T_{i,1}}$; $\{w_{i,2}\}_{i=1}^n$, $w_{i,2} = \overline{T_{i-1,2}T_{i,2}}$.

Введем определения, характеризующее взаимное расположение многозвенников.

Определение 8. Два одинаково ориентированные 2-звенники $(w_{i,1}, w_{i+1,1})$ и $(w_{i,2}, w_{i+1,2})$ подобны, если также ориентированы производные от них 2-звенники $(w_{i,1}, w_{i+1,2})$ и $(w_{i,2}, w_{i+1,1})$ (рис. 4 а).

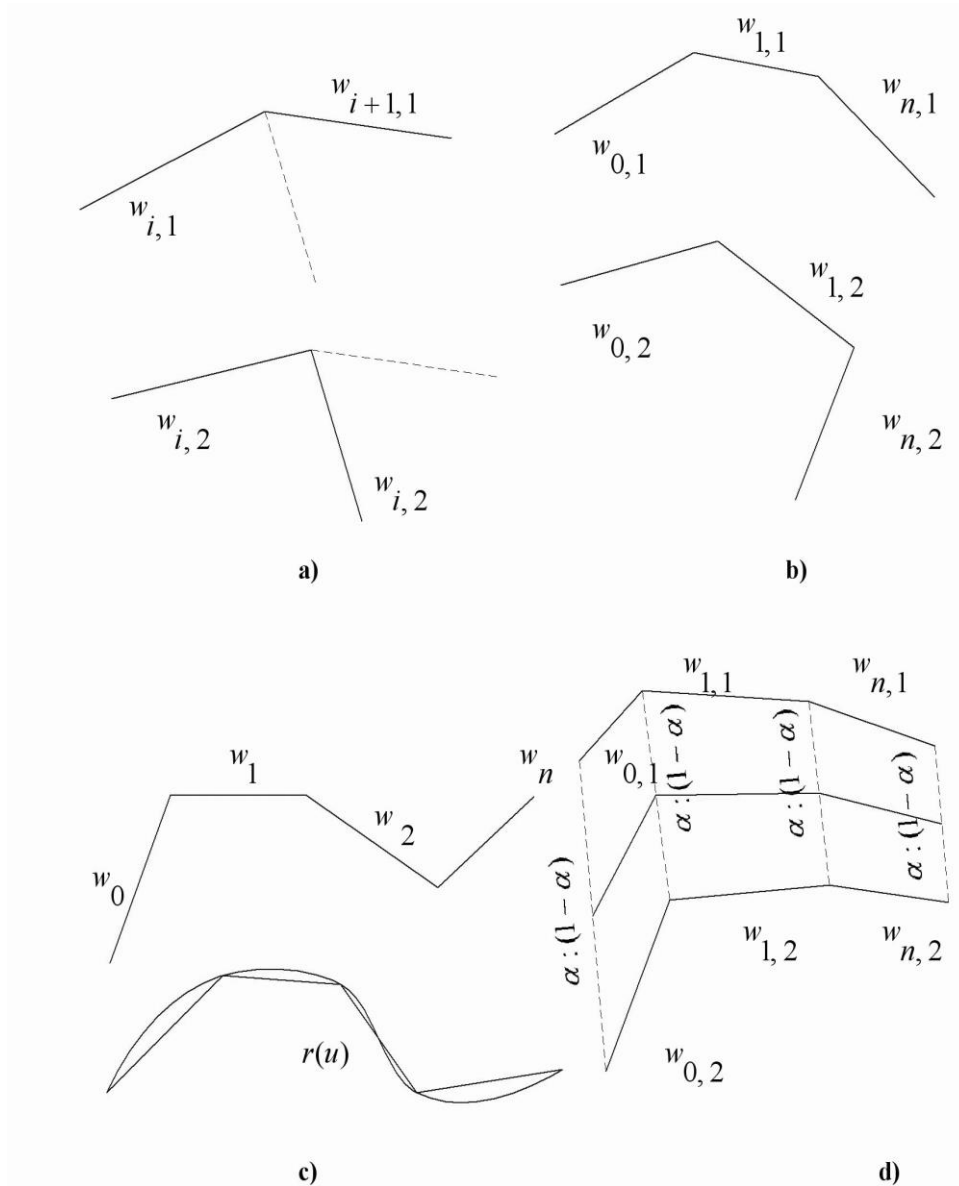


Рис. 4. а) подобные 2-звенники, б) подобные многозвенники, с) подобные кривая и многозвенник, d) нормализованная линейная комбинация двух 4-звенников.

Определение 9. Два n -звенника $\{w_{i,1}\}_{i=1}^n$ и $\{w_{i,2}\}_{i=1}^n$ подобны, если попарно подобны 2-звенники $(w_{i,1}, w_{i+1,1})$ и

$(w_{i,2}, w_{i+1,2}), i = 0, \dots, n-1$ (на рис. 4 б показаны два подобных 3-звенника).

Определение 10. Плоская кривая $r(u)$ и n-звенник $\{w_i\}_{i=0}^n$ будут подобны, если на кривой $r(u)$ можно подобрать характеристический n-звенник, подобный заданному n-звеннику (см. рис. 4 с).

Определение 11. Линейной комбинацией

$$\{w_i\}_{i=0}^n = \sum_{j=0}^m \alpha_j \cdot \{w_{i,j}\}_{i=1}^n \text{ m n-звенников } \{w_{i,j}\}_{i=1}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

назовем n-звенник $\{w_i\}_{i=0}^n$, каждое звено $w_i = \overline{T_{i-1} T_i}$ которого определяется по формуле

$$T_i = \sum_{j=0}^m \alpha_j \cdot T_{i,j}. \quad (11)$$

Определение 12. Линейную комбинацию назовем нормализованной, если коэффициенты линейной комбинации (11) положительны и их сумма равна единице

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0. \quad (12)$$

На рис. 4 d показана нормализованная линейная комбинация двух 4-звенников.

Для нормализованной комбинации n-звенников справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Нормализованная линейная комбинация двух подобных 2-звенников $(w_{1,1}, w_{2,1})$ и $(w_{1,2}, w_{2,2})$ определит 2-звенник $(w_{1,2}, w_{2,3})$ подобный исходным.

Доказательство. По условию подобия

$$\begin{aligned} \text{sign}(w_{1,1}, w_{2,1}) &= \text{sign}(w_{1,2}, w_{2,2}) = \text{sign}(w_{1,1}, w_{2,2}) \\ &= \text{sign}(w_{1,2}, w_{2,1}) \end{aligned} \quad (13)$$

По определению

$$\begin{aligned} w_{1,3} &= \alpha_1 \cdot w_{1,1} + \alpha_2 \cdot w_{1,2}, & w_{2,3} &= \alpha_1 \cdot w_{1,2} + \alpha_2 \cdot w_{2,2}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Определим

$$\begin{aligned} (w_{1,3}, w_{2,3}, e) &= (\alpha_1 \cdot w_{1,1} + \alpha_2 \cdot w_{1,2}, \alpha_1 \cdot w_{2,1} + \alpha_2 \cdot w_{2,2}, e) = \\ \alpha_1^2 (w_{1,1}, w_{2,1}, e) &= \alpha_2^2 (w_{1,2}, w_{2,2}, e) + \alpha_1 \alpha_2 (w_{1,1}, w_{2,2}, e) \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 (w_{1,2}, w_{2,1}, e). \end{aligned} \quad (15)$$

При условии (14) знак выражения (15) совпадает со знаком выражений (13). Определим

$$\begin{aligned} (w_{1,3}, w_{2,1}, e) &= (\alpha_1 \cdot w_{1,1} + \alpha_2 \cdot w_{1,2}, w_{2,1}, e) = \alpha_1 (w_{1,1}, w_{2,1}, e) = \\ &\alpha_2^2 (w_{1,2}, w_{2,1}, e) + \alpha_2 (w_{1,2}, w_{2,1}, e) \end{aligned} \quad (16)$$

Выражение (16) также совпадает со знаком выражений (13). Проверка остальных условий подобия аналогична.

Следствие. Нормализованная линейная комбинация двух подобных п-звенников определит п-звенник, подобный исходным.

Пусть задан двумерный точечный каркас $\{T_{i,j}\}$. Введем двумерную равномерную параметрическую сетку

$$\{u_i, v_j\}, u_{i+1} - u_i = 1, v_{j+1} - v_j = 1.$$

Определение 13. Будем говорить, что двумерный точечный каркас $\{T_{i,j}\}$ изогеометрически представляет фиксированную (или моделируемую) поверхность $r(u, v)$, если

1) Ломаная $\{P_i(v_j + t_0)\}$ изогеометрически представляет изопараметрическую кривую линию $r(u, v_j + t_0)$, где

$$P_i(v_j + t_0) = t_0 \cdot T_{i,j} + (1 - t_0) \cdot T_{i,j+1}, 0 \leq t_0 \leq 1.$$

2) Ломаная $\{P_j(u_i + s_0)\}$ изогеометрически представляет изопараметрическую кривую линию $r(u_i + s_0, t)$, где $P_j(u_i + s_0) = s_0 \cdot T_{i,j} + (1-s_0) \cdot T_{i,j+1}, 0 \leq s_0 \leq 1$.

Пусть задан точечный каркас $\{T_{i,j}\}$ и смежные ломаные каркаса отвечают условиям подобия: ломаная $\{T_{i,j}\}, j = \text{const}$ подобна ломаной $\{T_{i,j+1}\}$; ломаная $\{T_{i,j}\}, i = \text{const}$ подобна ломаной $\{T_{i+1,j}\}$. Тогда условие изогеометрического представления поверхности $r(u, v)$ можно сформулировать проще.

Определение 14. В этом случае будем говорить, что двумерный точечный каркас $\{T_{i,j}\}$ изогеометрически представляет фиксированную (или моделируемую) поверхность $r(u, v)$ если

- 1) Изопараметрическая линия $r(u, v_j + t_0), 0 \leq t_0 \leq 1$ подобна ломаным $\{T_{i,j}\}, \{T_{i,j+1}\}, j = \text{const}$.
- 2) Изопараметрическая линия $r(u_i + s_0, t), 0 \leq s_0 \leq 1$ подобна ломаным $\{T_{i,j}\}, \{T_{i+1,j}\}, i = \text{const}$.

Определение 15. Если на двумерном точечном каркасе $\{T_{i,j}\}$ построить аппроксимирующую поверхность $\varphi(u, v)$ по отношению к которой $\{T_{i,j}\}$ будет изогеометричен, то будем говорить, что $\varphi(u, v)$ изогеометрически аппроксимирует фиксированную (или моделируемую) поверхность $r(u, v)$.

3.2. В-СПЛАЙНОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Двумерные параметрические b-сплайновые поверхности являются непосредственным обобщением параметрических b-сплайновых кривых. Поэтому многие свойства b-сплайновых кривых обобщается на b-сплайновые поверхности.

Введем фиксированную равномерную нормализованную двумерную сетку

$$\{u_i, v_j\}, \quad u_{i+1} - u_i = 1, \quad v_{j+1} - v_j = 1. \quad (17)$$

Определим на сетке (17) б-сплайны $B_i^m(s), B_j^n(t)$ степеней m, n [14,15]. Каноническим представлением В-сплайновой поверхности будет параметрический сплайн, выраженный через б-сплайны $B_i^m(s), B_j^n(t)$ степеней m, n на равномерной сетке (17)

$$r(u, v) = S(u, v) = \sum_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) W_{i,j}. \quad (18)$$

Геометрический определитель G поверхности (18) задается двумерным массивом управляющих точек (фреймом, характеристическим многогранником [5], характеристической сеткой [4], s-многогранником [8]) $\{W_{i,j}\}$. Формулу поверхности (18) можно записать как определитель поверхности

$$\{G; r(u, v)\} = r(\{W_{i,j}\}; u, v). \quad (19)$$

S-многогранник $\{W_{i,j}\}$ на фиксированной сетке (17) однозначно определяет регулярную поверхность $m-1, n-1$ порядка гладкости. Форма s-многогранника изогеометрична форме б-сплайновой поверхности в широких пределах возможной конфигурации s-многогранника. Перемещение управляющей точки локально влияет на форму поверхности, не изменяя порядка непрерывности поверхности.

Рассмотрим задачу определения геометрически наглядных ограничений на конфигурацию s-многогранника, в пределах которых s-многогранник изогеометрично определяет отсек б-сплайновой поверхности.

3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В-СПЛАЙНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ S-МНОГОГРАННИКОМ

Важным свойством определителя б-сплайновой поверхности (19) является его инвариантность относительно аффинных преобразований s-многогранника

$$A \cdot r(\{W_{i,j}\}; u, v) = r(A \cdot \{W_{i,j}\}; u, v).$$

Благодаря этому свойству, аффинная проекция s-многогранника на произвольную плоскость однозначно определяет проекции изопараметрических линий поверхности и позволяет контролировать форму поверхности $r(u, v)$ на проекции (рис. 5). Пусть формула (18) представляет проекцию b-сплайновой поверхности на некоторую фиксированную плоскость. На равномерной нормализованной сетке (17) аналитический отсек В-сплайновой поверхности (18) на участке

$$u_i \leq u \leq u_{i+1}, \quad v_j \leq v \leq v_{j+1}. \quad (20)$$

определится локальным s-многогранником $\{W_{i+k, j+l}\}_{k,l=0}^{m,n}$

$$r_{i,j}(s, t) = \sum_{k,l=0}^{m,n} B_i^m(u) B_j^n(v) W_{i,j}, \quad (21)$$

$$0 \leq s, t \leq 1.$$

где $B_k^m(s), B_l^n(t)$ - В-сплайны степеней m, n .

Построение отсека поверхности (21) s-многогранником $\{W_{i,j}\}$ можно интерпретировать в свете каркасно-кинематического способа. Сгруппируем члены суммы (21) по индексам

$$r(s, t) = \sum_{i=0}^n B_i(s) \sum_{j=0}^m B_j(t) W_{i,j}. \quad (22)$$

Дуги сплайновых кривых в (22)

$$V_i(v) = \sum_{j=0}^m B_j^n(t) W_{i,j}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (23)$$

определяемые семейством s -полигонов $\{W_{i,j}\}_{j=0}^m, i=0,...,n$ примем за направляющие линии поверхности (21). Тогда при фиксированном t_0 s -полигон $\{V_i(v_0)\}_{i=0}^n$ определит в (21) образующую сплайновую кривую (см. рис. 5)

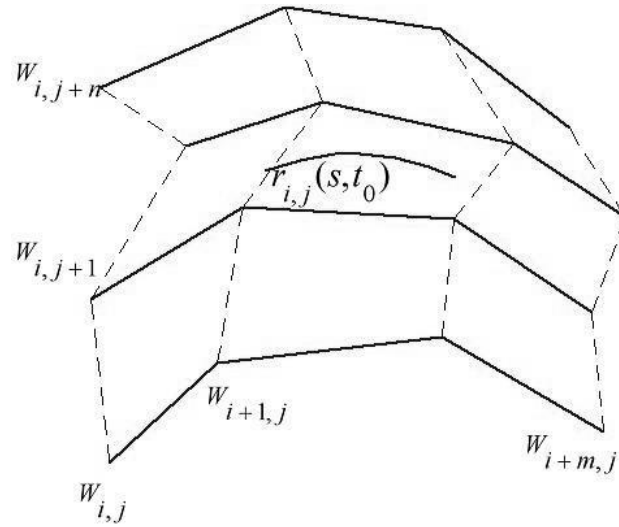


Рис. 5. Подобные по форме строки s -многогранника определяют подобную им по форме изопараметрическую кривую поверхности.

$$r(s, t_0) = \sum_{i=-1}^{n+1} B_i^m(s) V_i(t_0). \quad (24)$$

Направляющие линии (23) отсека (22) определяются s -полигонами

$$\{W_{i+k,j+l}\}_{l=0}^n, \quad k=0,...,m;$$

$$V_{i+k,j} = \sum_{l=0}^n B_l^n(t) W_{i+k,j+l}, \quad k=0,...,m.$$

Образующие линии отсека при фиксированном t_0 задаются переменным s-полигоном $\{V_{i+k,j+l}(t_0)\}_{k=0}^m$

$$r_{i,j}(s, t_0) = \sum_{k=0}^m B_k^m(s) V_{i+k,j}(t_0) \quad (25)$$

Теорема 2. Пусть формула (22) определяет аффинную проекцию отсека поверхности на произвольную плоскость и проекции ломаных локального s-многогранника

$$\{W_{i,j+l} W_{i+1,j+l} W_{i+2,j+l} \dots W_{i+m,j+l}\}, \quad l = 0, \dots, n. \quad (26)$$

является попарно подобными регулярными порядка m ломаными (см. рис. 5).

Тогда справедливо следующее свойство: дуга изопараметрической кривой $r_{i,j}(s, t_0)$, $0 \leq s \leq 1$ при любом фиксированном t_0 будет подобна ломаным (26).

Доказательство: При фиксированном t_0 выражение (25) определит промежуточный s-полигон

$$V_{i+k,j+l}(t_0) = \sum_{l=0}^n B_l^n(t_0) W_{i+k,j+l}, \quad k=0, \dots, m. \quad (27)$$

Введем векторы

$$\begin{aligned} w_{i+k,j}(t_0) &= \overline{V_{i+k-1}(t_0) V_{i+k,j}(t_0)}, \quad k=1, 2, \dots, m; \\ w_{i+k,j+l} &= \overline{W_{i+k-1,j+l} W_{i+k,j+l}}, \\ k &= 1, 2, \dots, m; \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда из формулы (27) получим

$$V_{i+k,j}(t_0) = \sum_{l=0}^n B_l^n(t_0) w_{i+k,j+l}. \quad (29)$$

м-звенник $\{w_{i+k,j}(t_0)\}_{k=1}^m$ получается как линейная нормализованная комбинация м-звенников $\{w_{i+k,j+l}\}_{k=1}^m$, $l = 0, \dots, n$, так как

$$\sum_{l=0}^n B_l(t) = 1 \quad (30)$$

по определению b-сплайнов [14]. Применяя следствие леммы 4 к выражению (29) получим, что м-звенник $\{V_{i+k,j}(t_0)\}_{k=0}^m$ будет подобен подобным м-звенникам $\{w_{i+k,j+l}\}_{k=1}^m$, $l = 0, \dots, n$. Так как кривая (27) будет изогеометрически до знака кривизны определяться своим s-полигоном $\{V_{i+k,j}(t_0)\}_{k=0}^m$, то кривая (27) будет подобна n ломаным локального s-многогранника (29).

Следствие. N подобных ломаных

$$\{W_{i-1,j+l} W_{i,j+l} W_{i+1,j+l} W_{i+2,j+l}\}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

определит подобную граничную линию $r_{i,j}(s,0)$ отсека поверхности (22).

Действительно, при $t_0 = 0$ в формуле (25) определения границы

$r_{i,j}(s,0)$ участвуют только $n-1$ ломаных (26).

Исходя из теоремы 2 и его следствия, нежелательная осцилляция изопараметрической линии сплайновой поверхности может возникнуть при нарушении условия подобия формы строк (столбцов) фрейма и при переходе от одной формы строк (столбцов) фрейма к другой.

Поэтому при моделировании поверхности фреймом необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1) Любой набор из m смежных строк / столбцов (m - степень сплайна в направлении столбцов / строк) фрейма сплайновой поверхности должен состоять из ломаных подобной формы.

2) Для перехода от одной формы участка поверхности к другой (например, от выпуклой к вогнутой) без осцилляции изопараметрических линий необходимо разделить эти различные формы разделительным набором из m строк / столбцов прямолинейной формы или симметричной конфигурации.

При соблюдении этих ограничений гарантированно обеспечивается изогометричность (подобие) форм строк / столбцов фрейма сплайновой поверхности изопараметрическим линиям поверхности.

На рис.6 приведен пример неправильной конфигурации фрейма сплайновой поверхности степени 3×3 . Изопараметрическая линия $r(u, v_0)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, $v_0 = 0.5$ имеет выраженную осцилляцию формы.

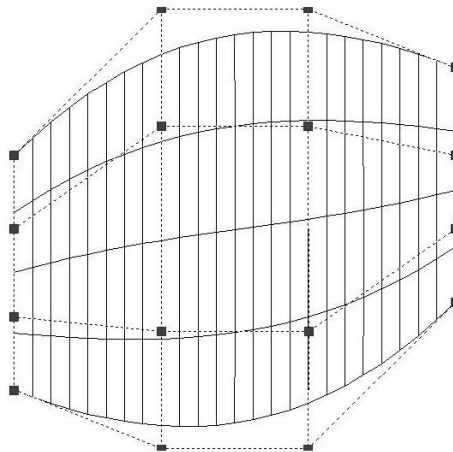


Рис. 6. Участок сплайновой поверхности степени 3×3

На рис.7 приведен пример с исправленной конфигурацией фрейма. В s-многогранник введена строка прямолинейной формы и разделительный набор из 3-х строк представляет симметричную конфигурацию. Осцилляция изопараметрических линий отсутствует.

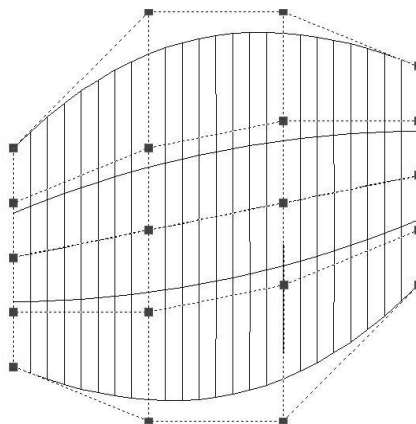


Рис. 7. Участок сплайновой поверхности степени 3х3 с исправленной конфигурацией фрейма

4. ВЫВОДЫ

Полученные в работе результаты могут быть использованы в системах высокореалистической компьютерной графики для формирования кривых и поверхностей высокого качества.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Муфтеев В.Г. Конструирование криволинейных поверхностей на основе метода огибающей и параметрических b-сплайнов. Диссертация на соиск. ученой степени канд. техн. наук.-Киев, 1986.
- [2]. V.A. Osipov, V.G. Muftajev / Modelling Curvilinear Lines and Surfaces via Modified B-Splines. Computers and Industry 13 (1989) 61-67.
- [3]. Муфтеев В.Г., Марданов А.Р. Геометрическое моделирование кривых линий высокого качества // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн. / Моск. авиационный ин-т (гос.техн.университет) "МАИ". - Электрон. журн. - Москва : МАИ, 2006. - №18; вып.8. -стр. 37-66.
- [4]. Безье П. (Bezier P.). Математика и САПР. Книга 2.Пер. с франц. –М.: Мир, 1980. -260 с.
- [5]. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / Пер.с англ. –М.: Мир, 1982. -304 с.
- [6]. Farin G. NURB Curves and Surfaces from Projective Geometry to Practical Use. (A. K. Peters,1995).
- [7]. Piegl L.A. and W. Tiller. The NURBS Book. Springer, New York, 1995.
- [8]. Subloniere P. Spline and Bezier polygons associated with a polynomial spline curve // Computer aided design. -1978. –v.10. –N4. –p.257-261.

Муфтеев В., Романюк А. Геометрически устойчивое моделирование b-сплайновых кривых и поверхностей произвольной степени

-
- [9]. Forrest A.R. Curves and Surfaces for Computer-Aided Design, Ph. D. Thesis, University of Cambridge, 1968.
- [10]. Лукманов Ф.Ф., Муфтеев В.Г. Математическое моделирование сложных поверхностей посредством параметрических кривых и b-сплайнов. Прикладная геометрия и машинная графика в авиастроении. -М.: МАИ, 1981 г. С.30-33.
- [11]. Муфтеев В.Г., Лукманов Ф.Ф., Спиридонова Е.Б., Сыртланов Р.В. Конструирование плоских обводов кривыми Безье-Бернштейна // Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1983, №2, с.106-108.
- [12]. Муфтеев В.Г. Кубический сплайн регламентированной формы // Республ. межотр. конф. Применение ЭВМ, математических моделей в автоматизации проектирования и автоматизации управления организационными и техническими системами: Тез. докл.-Уфа: Баш ОС НТО, 1981, ч.2. -С.125-128.
- [13]. Альберг Дж. и др. Теория сплайнов и приложения / Дж.Альберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш. -М.: 1972. -316 с.
- [14]. Бор де К. (De Boor C). Практическое руководство по сплайнам / Пер. с англ., под ред. В.И.Скурихина. -М.: Радио и связь, 1985.- 304 с.
- [15]. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. -248 с.
- [16]. Аронов Б.М. Автоматизация конструирования лопаток авиационных турбомашин. -М.: Машиностроение, 1978. -168 с.
- [17]. Муфтеев В.Г. Конструирование динамических обводов b-сплайновыми кривыми высоких степеней // Интегрированные системы автоматизированного проектирования. Тезисы докл. Всесоюзной научно-техн. Конференции. – М.: 1989. –с. 142-145.
- [18]. Муфтеев В.Г., Марданов А.Р., Геометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн. / Моск. авиационный ин-т (гос.техн.университет) "МАИ". - Электрон. журн. - Москва : МАИ, 2006. - №18; вып.8 - стр. 67-89.
- [19]. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. –М.: Изд-во Москов.ун-та,1983.-208 с.
- [20]. Погорелов А.В. Геометрия. –М.: Наука, 1983, -288 с.
- [21]. Фролов С.А. Начертательная геометрия. –М.: Машиностроение, 1978. -239 с.
- [22]. Бахвалов Н.С. Численные методы: Т.1. –М.: Наука, 1973. 632 с.
- [23]. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Пер. с англ., под ред. И.Г.Арамановича. –М.: Наука, 1974. -632 с.