

П. Д. Черняк

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ СМУГ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У статті наведено алгоритм розрахунку плоскої задачі теорії пружності за методом скінченних смуг, показано його особливості та переваги. Виконано аналіз результатів у порівнянні з результатами, отриманими за методом скінченних елементів.

Ключові слова: скінченна смуга, метод скінченних смуг, метод скінченних елементів, плоский напружений стан.

Актуальність задачі дослідження

Для розв'язку деяких задач теорії пружності, об'єктом дослідження яких є конструкції з постійними фізико-геометричними характеристиками та простими граничними умовами, найефективнішим є метод скінченних смуг (МСС). Особливо ефективний він у задачах, де один розмір є набагато більший за другий. У таких задачах можна ввести деякі спрощення, використовуючи загальні апроксимувальні функції. Використання апроксимувальних функцій є спільним як для методу скінченних елементів (МСЕ), так і для МСС, з тією відмінністю, що за МСС у поздовжньому напрямку розв'язують континуальну задачу з використанням лише тригонометричних функцій, без дискретизації на простіші функції. У поперечному напрямку розв'язують дискретну задачу, яка утворюється шляхом розбиття на скінченні смуги розділені вузловими лініями, робота яких описується лінійними функціями форми за аналогією до МСЕ (рис. 1а).

Широкий бібліографічний огляд розвитку МСС виконано у статті [3]. МСС достатньо детально описано в монографіях [1, 2].

Метою статті є дослідження збіжності результатів плоскої задачі теорії пружності на прикладі розрахунку консольної пластинки методом скінченних смуг.

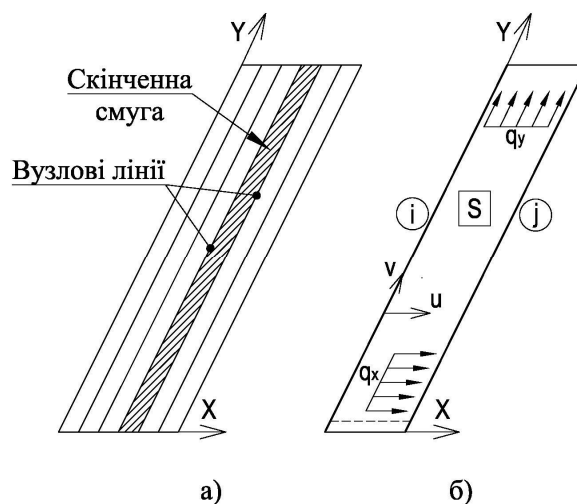


Рис. 1. Метод скінченних смуг: а) скінченно-елементна модель; б) скінченна смуга

Викладення основного матеріалу

Розглядають ізотропну, тонку, з постійною товщиною пластину, на один із кінців якої накладені в'язі, що забороняють будь-які переміщення в площині x та y , інший кінець переміщується вільно. Навантаження прийняте у вигляді рівномірно-розподіленого на одиницю об'єму матеріалу, яке діє в напрямку відповідному до напрямку вектору переміщень

– ОУ. Напружено-деформований стан пластини описують плоскою задачею теорії пружності та знаходять за допомогою МСС у переміщеннях, тобто використовують еквівалентний принцип мінімуму потенціальної енергії, який виражається через поле можливих переміщень заданої форми.

Розглянемо скінченну смугу S , поведінку якої описують переміщенням вузлових ліній i та j (рис. 16).

У межах скінченної смуги S компоненти переміщень u, v апроксимуємо функціями у вигляді $u(x, y)$ та $v(x, y)$ [1]:

$$\begin{aligned} u &= \left[\left(1 - \frac{x}{b} \right) \quad \left(\frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y_m(y) \\ v &= \left[\left(1 - \frac{x}{b} \right) \quad \left(\frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y'_m(y) \frac{L}{\mu_m} \end{aligned} \quad (1)$$

де r – кількість доданків членів ряду; L – довжина скінченної смуги, b – ширина скінченної смуги, i, j – відповідно індекси вузлових ліній $\mu_m = m\pi$.

$$Y_m(y) = \sum_{m=1}^r \left[1 - \cos\left(\frac{(m-0.5)\pi y}{L}\right) \right] \quad (2)$$

Слід зазначити, що за рахунок вибору функцій форми забезпечують умови закріплення на кінцях та умови неперервності на границях скінченної смуги.

Функції (1) подаємо у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\}, \quad (3)$$

де $[N]$ – матриця функцій форм; $\{d\}$ – вектор переміщень.

У випадку плоского напруженого стану вектор деформацій можна записати через вектор переміщень у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = [B]\{d\}, \quad (4)$$

де $[B]$ – матриця похідних від функцій форм.

Фізичні характеристики пластинки враховують за допомогою матриці пружності $[D]$ розміром 3×3 та виражають через модуль Юнга – E та коефіцієнт Пуассона – ν :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{де } D_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad D_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad D_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad D_1 = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}.$$

Тоді вектор напружень має такий вигляд:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{d\}. \quad (6)$$

Матриця жорсткості для одного скінченного елемента $[k]^e$ має вигляд:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для ізотропної пластини постійної товщини на основі варіаційного принципу, урахувавши співвідношення $[B_i]$ та $[B_j]$, матриця $[k]$ має такий вигляд [5]:

$$k_{ij} = t \int_A [B_i]^T [D] [B_j] dA, \quad (8)$$

де i, j – індекси компонент переміщень у напрямку x та y відповідно.

Виконавши перетворення (1) – (5), можна записати матрицю жорсткості в явному вигляді:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & -\frac{D_1 I_3 + D_{xy} I_4}{2} & -\frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & -\frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} & \frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 6D_{xy} I_8}{6b} \\ \frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} & \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ -\frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 - 6D_{xy} I_8}{6b} & \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $I_1 = t \int_0^l Y_{mu} Y_{nu} dy$; $I_2 = t \int_0^l Y'_{mu} Y'_{nu} dy$; $I_3 = t \int_0^l Y_{mu} Y'_{nv} dy$; $I_4 = t \int_0^l Y'_{mu} Y_{nv} dy$; $I_5 = t \int_0^l Y'_{mv} Y_{nu} dy$;
 $I_6 = t \int_0^l Y_{mv} Y'_{nu} dy$; $I_7 = t \int_0^l Y'_{mv} Y'_{nv} dy$; $I_8 = t \int_0^l Y_{mv} Y_{nv} dy$.

Урахувавши властивості ортогональності, для випадку шарнірно закріпленої смуги на кінцях для $m \neq n$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^l Y_m Y_n dy &= 0 \\ \int_0^l Y''_m Y''_n dy &= 0 \end{aligned}. \quad (10)$$

Вектор еквівалентних сил зосереджених у вузлах скінченної смуги $\{F\}^e$, має такий вигляд [5]:

$$\{f\}^e = [N]^T \{q\}, \quad (11)$$

де $\{q\}$ – вектор об'ємних сил.

Для плоского напруженого стану, урахувавши лінійний розподіл переміщення в поперечному напрямку, вектор еквівалентних сил у випадку дії рівномірно розподіленого навантаження має такий вигляд:

$$\{f_q\}^e = \frac{b}{2} \left\{ \begin{array}{c} l \\ q_x \int_0^l Y_m dy \\ 0 \\ q_y \frac{l}{\mu_m} \int_0^l Y'_m dy \\ l \\ q_x \int_0^l Y_m dy \\ 0 \\ q_y \frac{l}{\mu_m} \int_0^l Y'_m dy \end{array} \right\}, \quad (12)$$

де q_x та q_y – компоненти вектора навантаження відповідно в напрямку x та y .

На підставі варіаційного принципу можливих переміщень Лагранжа за аналогією до методу скінченних елементів [5] основне рівняння має такий вигляд:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad [K] = \sum_e [k]^e \quad \{F\} = \sum_e \{f\}^e, \quad (13)$$

де $[K], \{F\}$ – матриця жорсткості та вектор еквівалентних навантажень, отримані в результаті ансамблювання.

Приклад розрахунку плоскої задачі теорії пружності методом скінченних смуг

Об'єктом дослідження є тонка пластинка розмірами $t=1$ мм, $b=10$ мм та $L=200$ мм. Навантаження рівномірно розподілене по площі пластини $q=0.01$ Н/мм². Пластинка ізотропна, модуль Юнга $E=206000$ Н/мм² та коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$.

Розв'язуючи задачу методом скінченних елементів, використовують двовимірні чотирьохвузлові елементи – CPLSTN4 бібліотеки програмного комплексу Femap with NX Nastran [4]. За еталонну модель прийнята пластинка, розбита на 40 елементів уздовж поперечного напрямку та на 800 уздовж поздовжнього напрямку.

У табл. 1 наведені максимальні переміщення консольної пластини довжиною $L=200$ мм за її розбиття на 1, 3, 6 та 10 скінченних смуг відповідно, за різної кількості накладених доданків (півхвиль).

Розподіл переміщень по довжині пластини на відстані $L=50, 100, 150$ та 200 мм відображено на рис. 2.

Таблиця 1

Максимальні переміщення вільного кінця прямокутної пластини ($L=200$ мм) f_{\max}

Кількість доданків членів ряду, r	МСС				МСЕ	
	f_{\max}^1	f_{\max}^3	f_{\max}^6	f_{\max}^{10}	1 елем.	40x800 ел.
1	1.014	1.028	1.029	1.029	1.0627	1.061
3	1.060	1.076	1.078	1.078		
6	1.062	1.078	1.080	1.103		
10	1.063	1.078	1.080	1.107		

У таблиці 2 виконане порівняння розподілу максимальних напружень σ_y по довжині пластини з координатами $L=50, 100, 150$ та 200 мм та $b=0$. Напруження отримані в результаті розрахунку за МСЕ еталонної моделі (40x800) та за МСС (кількість доданків членів ряду

відповідно 1, 3, 6 та 10). Показана відносна похибка розрахунку 1-ї смуги за МСС у порівнянні з еталонною моделлю.

Таблиця 2

Розподіл напруження σ_y (в МПа)

		$L=50$	$L=100$	$L=150$	$L=200$
MCE	σ_y	114.3	62.3	27.7	6.9
MCC ($r=1$)	σ_y	70.7	65.3	50.0	27.1
	%	38	5	81	293
MCC ($r=3$)	σ_y	103.7	72.7	26.7	9.1
	%	9	17	4	32
MCC ($r=6$)	σ_y	111.9	66.0	30.1	8.2
	%	2	6	9	19
MCC ($r=10$)	σ_y	114.2	67.3	29.4	6.9
	%	0	8	6	0

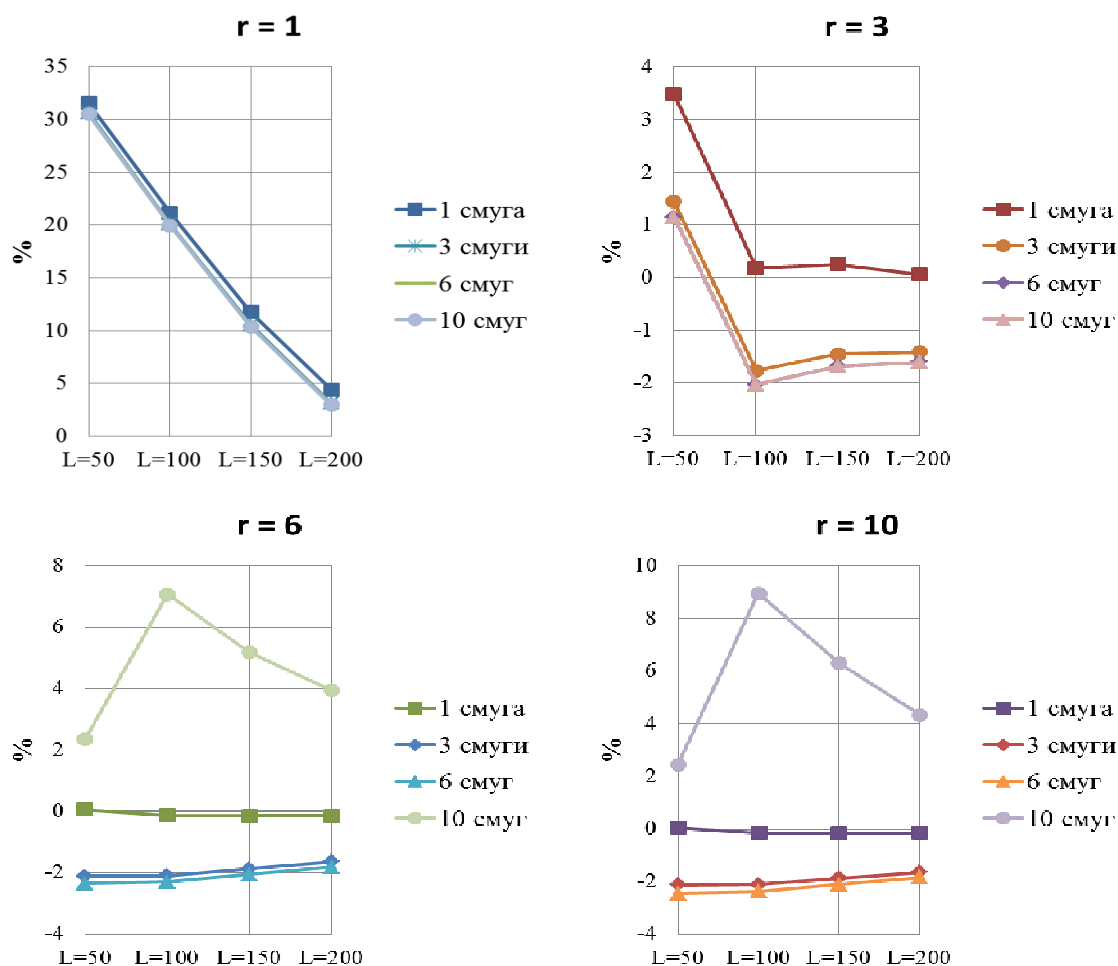


Рис. 2. Відносна похибка розподілу переміщень по довжині пластини за МСС у порівнянні з МСЕ

Висновки

Виконавши аналіз числових даних, отриманих у результаті розрахунку за методом скінченних смуг консольної пластинки з простими граничними умовами, можна зробити висновок, що цей метод дозволяє отримати наближені розв'язки в межах допустимих похибок, при цьому за заданих простих граничних умов скінченна смуга з достатньою точністю описує роботу модельованої пластинки.

Так, аналізуючи максимальні переміщення вільного кінця пластини (табл. 1), можна отримати допустимий результат $f^1 = 1.062$ у порівнянні з МСЕ $f = 1.061$, моделюючи пластинку однією смугою та просумувавши лише 6 доданків членів ряду (рис. 2). Розподіл напруження по довжині пластинки з максимальною відносною похибкою 8 % у порівнянні з МСЕ отримано при кількості членів ряду $r=10$.

Варто зазначити, що МСС найефективніший для розрахунку окремих конструкцій, які мають постійні фізико-геометричні характеристики та прості граничні умови у відповідних напрямках перерізу. За цих умов з'являється можливість спрощення розрахункової системи рівнянь на набір підсистем меншого порядку, кожна з яких відповідає своїй компоненті ряду Фур'є в поздовжньому напрямку. Виконавши дискретизацію задачі лише в одному напрямку, інші описують нерозривною тригонометричною функцією, що дозволяє значно оптимізувати процес розв'язку поставленої задачі. Вказане спрощення скорочує розмірність задачі на одиницю та веде до суттєвих спрощень під час побудови розрахункових алгоритмів. Відповідно і на порядок зменшується кількість невідомих, скорочується розмір та ширина ряду матриці коефіцієнтів розрахункової системи лінійних алгебраїчних рівнянь, зменшується кількість вихідних даних. Зазначена особливість МСС є його основною перевагою.

До недоліків МСС можна віднести його специфіку використання, оскільки найбільш результативно цей метод може бути застосований до задач, об'єкти дослідження яких мають постійні геометричні та фізичні характеристики вздовж однієї із координат конструкції, зокрема під час розрахунку мостових, тунельних та інших конструкцій з пластин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Cheung Y. K. Finite Strip Method in Structural Analysis / Cheung Y. K. – Oxford. : Pergamon Press, 1976. – 233 p.
2. Cheung Y. K. The Finite Strip Method / Y. K. Cheung, L. G. Tham. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
3. Friedrich R. Finite strip method: 30 years A bibliography (1968-1998) / R. Friedrich // Int. J. for Computer-Aided Engineering. – 2000. – № 17. 1. – P. 92 – 111.
4. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / Рудаков К. Н. – К. : НТУУ "КПИ", 2011. – 317 с.
5. Зинкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

Черняк Павло Дмитрович – аспірант кафедри мостів та будівельної механіки.

Національний університет «Львівська політехніка».