УДК 519.87:629.783.052.9

Шпирко О.А.
Коломієць А.А.

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМИ ГЛОБАЛЬНОГО ПОЗИЦІЮВАННЯ GPS

Вінницький технічний національний університет

Анотація: *Робота містить короткий опис роботи системи GPS, пояснення розрахунку основних змінних, які використовуються під час визначення координат, пояснення явища розрізнення, його типи та математична модель виправлення.*

Ключові слова: *GPS, розрізнення, одинична різниця, подвійна різниця.*

Abstract: *The work contains a brief description of the operation of the GPS system, an explanation of the calculation of the main variables used when determining the coordinate, an explanation of the phenomenon of discrimination, its types, and a mathematical model of correction.*

Key words: *GPS, discrimination, single difference, double difference.*

Вступ

Супутникова навігація або Глобальна навігаційна супутникова система – це система супутників, що передає дані про глобальне позиціонування та точний час. Для передачі інформації використовуються радіохвилі певних частот. Отримавши такі дані, приймач обчислює їх і показує координати нашого місця розташування, тобто, довготу, широту та висоту над рівнем моря.

Окрім базових систем (GPS, ГЛОНАСС, BeiDou, Galileo), в космосі існують також допоміжні системи. Це так звані супутникові системи корекції (SBAS), такі як Global Omnistar та StarFire, що використовуються в сільському господарстві [4].

Результати дослідження

На практиці пристрій відстежує своє місцезнаходження і час, передаючи дані на супутники, що знаходяться на орбіті. Координати та час кожного супутника точно розраховані та добре відомі, відповідно у пристрої ці дані записані та співсталяються із даними що надходять від супутника та називається псевдовипадковим кодом або PRN (у англомовній літературі). Для визначення точних координат необхідно передати приймальним пристроям дані від мінімум 4 супутників: 3 надсилають дані про координату, а четвертий проводить синхронізацію за часом та надсилає контрольну суму для перевірки. Чим більше супутників буде зафіксовано приймаючим пристроєм тим точніше вдасться уточнити координату.

Звісно, цей метод не позбавлений недоліків та помилок, які утворюються під час визначення координат. Серед причин відхилень у точності найбільш значущими є ті, що виникають у годиннику приймача, супутникових годинниках, іоносфері, тропосфері, орбіті.

У системі GPS виділено дві вагомих змінних: псевдовідстань (pseudoranges, далі PR) і несуча фаза (carrier phases, далі CP). Вимірювання яких потребує використання сучасних досягнень у електроніці та обробці сигналів.

Змінна PR позначає відстань між супутником та антеною приймача, яка розраховується за допомогою миттєвих випромінювань та прийому кодів PRN. Змінна PR розраховується як кореляція коду, створеного супутником у момент передачі (t), із кодом який створений приймачем у момент прийому, про що йшлось вище. Виразимо PR, використавши позначення даних від супутника «s» та приймача «r», врахувавши можливі помилки:

$$PR_r^s = \rho_r^s + d\rho_r^s + c(dt_r - dt^s) + I_r^s + T_r^s + dm_{PR_r^s} + \varepsilon_{PR_r^s} \quad (1)$$

де ρ_r^s – геометрична відстань між супутником «s» та приймачем «r», вимірюється у метрах, інша назва евклідова відстань, яку можна розрахувати за формулою:

$$\rho_r^s = \|A^s + A_r\| = \sqrt{(X^s + X_r)^2 + (Y^s + Y_r)^2 + (Z^s + Z_r)^2} \quad (2)$$

тут A^S та A_r це координати по X, Y та Z для супутника та приймача відповідно;

$d\rho_r^s$ – похибка геометричної відстані ρ_r^s, що виникає внаслідок руху орбітою (вимірюється у метрах);

c – швидкість світла у вакуумі, м/с;

dt^s та dt_r – похибки годинників супутника та приймача у секундах, що можуть виникнути протягом прийому та передачі відповідно;

I_r^s та T_r^s – відхилення у метрах що вносяться іоносферою та тропосферою;

$dm_{PR_r^s}$ – багатопроменева похибка у метрах для значення PR;

$\varepsilon_{PR_r^s}$ – шум вимірювання та немодульовані похибки, приймає значення від 0,5 до 1 залежно від технології що використовується.

Змінна CP позначає різницю між фазами сигналу, що генерується супутником, та приймачем на номінальній частоті f у момент t. Значення φ^s та φ_r фаза супутника та фаза приймача відповідно. Отримане значення CP можна представити у метрах якщо скористатись формулою $\lambda = c/f$.

Сам параметр можна обрахувати за наступною формулою:

$$\varphi_r^s = PR_r^s + [\varphi^s - \varphi_r] + \lambda N_r^s \quad (3)$$

де N_r^s – ціла неоднозначність. Число генерується за перших вимірювань і залишається постійним протягом усього періоду спостереження, допоки немає втрати сигналу. Протягом цього періоду приймач підсумовує різниці фаз (між фазами, що надходять, і фазами, що генеруються внутрішньо). Таким чином, приймач зберігає накопичену CP видимою, яка відображає зміни відстані до супутника. Шум вимірювання CP становить від 0,3 до 3 міліметрів [2].

Явище *розрізнення* виникає тоді, коли два приймача слідкують за одним і тим самим супутником, проте отримують різне значення фази, що обраховується за формулою (3).

Проблема полягає у тому, що приховуються справжні геометричні діапазони між приймачами та супутниками, наслідком чого є додаткові шуми між базовою лінією та приймачами. Іншими словами, щоб виявити фактичні вектори між двома або більше приймачами, що використовуються для відносного позиціонування, ці помилки повинні бути зменшені до можливого ступеня [3].

Незважаючи на те, що шум збільшується в два рази з кожною операцією розрізнення, він зазвичай використовується в комерційному програмному забезпеченні для обробки даних як для вимірювання псевдомодальності, так і для вимірювання фази несучої. Існує три види різниці: одинарна різниця , подвійна різниця та потрійна різниця .

Одининарна різниця між супутниками передбачає, що один приймач одночасно спостерігає за двома супутниками GPS, а вимірювання коду або фази одного супутника відрізняються, від тих, що отримані з іншого. Дані, отримані з різниці між супутниками, дозволяють усунути помилку годинника приймача.

Відповідно, для запису одинарної різниці позначимо обидва приймачі як r_1 та r_2, а їх фазові зсуви як φ_1 та φ_2 для супутника, після чого маємо формулу:

$$sd_1^{r_1 r_2} = \varphi_1^{r_1} - \varphi_2^{r_2} \quad (4)$$

Поєднання двох одиничних різниць називається подвійною різницею. Подвійну різницю можна назвати єдиною різницею між супутниками або єдиною різницею між приймачами. Покращені позиції на етапі одиничної різниці між приймачами не покращуються додатково завдяки поєднанню з одиничною різницею між супутниками.

Для подвійної різниці формула буде такою:

$$dd_1^{r_1 r_2} = (\varphi_1^{r_1} - \varphi_1^{r_2}) - (\varphi_2^{r_1} - \varphi_2^{r_2}) = sd_1^{r_1 r_2} - sd_2^{r_1 r_2} \quad (5)$$

За допомогою подвійної різниці можна позбутись помилки у вимірюваннях GPS – сигналу. В першу чергу, це стосується помилок годин (часу) супутника та приймача.

Для перетворення подвійної різниці в одиничну, ми запишемо подвійні різниці, dd, як добуток матриці D і вектора одинарних різниць, s:

$$Ds=dd \quad (6)$$

Для окремої базової лінії та *n* одиничних різниць існує лише *n-1* лінійно незалежних подвійних різниць, і D не можна інвертувати. Однак, якщо ми вводимо додаткове незалежне обмеження хоча б на одну з одиничних різниць, як показано у рівнянні 7, тоді D має чітко визначену зворотну величину. Додаткове обмеження виражається у верхній межі як зважена сума одиничних різниць між

матрицями розміру I та J в кожну мить спостереження. Залежно від супутника добуток матриці IJ дорівнює $w_i \cdot \sum w_j s_j$, який можна оцінити, використовуючи параметри моделі з аналізу GPS або використовуючи спрямований радіометр водяної пари (WVR) з барометром або моделлю для загальної оцінки затримки.

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^{IJ} \\ S_2^{IJ} \\ \vdots \\ S_n^{IJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 S_1^{IJ} + \ldots + w_n S_n^{IJ} \\ S_1^{IJ} - S_2^{IJ} \\ \vdots \\ S_1^{IJ} - S_n^{IJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_1 S_1^{IJ} \\ dd_{12}^{IJ} \\ dd_{13}^{IJ} \\ \vdots \\ dd_{1n}^{IJ} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Якщо ми моделюємо всі ефекти спостереження GPS і використовуємо залишки подвійних різниць після спрощень в рівнянні (7), то $\sum w_j s_j$і дорівнює нулю (припущення «нульового середнього») створює зворотне значення, де одиничні різниці зберігають немодельовану частину подвійних різниць. Ці окремі різниці і включають такі ефекти, як багатопроменевість або тропосферні неоднорідності. Обмеження можна покращити шляхом зменшення ваги окремих різниць під малими кутами.

Наприклад, якщо у мережі з 10 вузлами присутня затримка 10 мм, тоді середній залишок матиме похибку l-mm. Це означає, що великі мережі можна використовувати з ретельним моделюванням, щоб мінімізувати зміщення. Координати станції повинні бути прив'язані до відомих довгострокових середніх значень, щоб уникнути кореляції з похилими затримками [1].

Висновки

Результатом досліджень є опис системи GPS, пояснення основних принципів роботи та проблем, що виникають під час визначення координат. Здійснено опис явища розрізнення, одиничної та подвійної різниці. Показано як математично визначають координати та алгоритм перетворення одинарної різниці у подвійну. Наведено формулу для обчислення відстані між супутником та антеною приймача, яка розраховується за допомогою миттєвих випромінювань та прийому кодів PRN. Завдяки подвійній різниці можна позбутись помилок у вимірюваннях GPS – сигналу, зокрема помилок встановлення часу супутника та приймача.

Перелік посилань

1.Alber Chris, Ware Randolph, Rocken Christian, Braun John, "Obtaining single path phase delays from GPS double differences" Geophysical Research Letters Geophys. Res. Lett. 27 17 0094-8276
2. Eniuce Menezes de Souza, João Francisco Galera Monico, Aylton Pagamisse, "GPS Satellite Kinematic Relative Positioning: Analyzing and Improving the Functional Mathematical Model Using Wavelets", Mathematical Problems in Engineering, vol. 2009, Article ID 934524, 18 pages, 2009.
3. Differencing | GEOG 862: GPS and GNSS for Geospatial Professionals URL: http://surl.li/egjju
4. Що таке GPS: Типи систем позиціонування, як працює та яке майбутнє - Root Nation URl: http://surl.li/egjjg

Шпирко Олександр Андрійович – студент групи ПЗТ-22мс, факультет інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця email: shpirkotr@gmail.com

Коломієць Альона Анатоліївна - к. пед.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет. e-mail: alona.kolomiets.vnt@gmail.com

Shpyrko Oleksandr Andriyovych - student of PZT-22ms group, Faculty of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia email: shpirkotr@gmail.com

Kolomiets Alyona Anatloliivna - candidate of pedagogy, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University. e-mail: alona.kolomiets.vnt@gmail.com