Сивак Р. І.
д.т.н., доцент

Залізняк Р.О.
аспірант

Вінницький національний аграрний університет

Sivak R.
Dr. Sc. of Eng., Associate Professor

Zalizniak R.
Postgraduate Student

Vinnytsia National Agrarian University

УДК 621.73.011.001.5
DOI: 10.37128/2306-8744-2021-4-8

ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИКИ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ МЕТАЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗМІННИХ ЕЙЛЕРА І ЛАГРАНЖА

В механіці суцільних середовищ знайшли застосування дві еквівалентній одна одній точки зору на течію металу в процесі деформування – Ейлера та Лагранжа. Коли увагу концентрують на даній точці простору, в яку приходять різні частки суцільного середовища в процесі деформування – це сутність точки зору Ейлера на досліджуваний рух суцільного середовища. З погляду Лагранжа, рух вважається відомим, якщо швидкість, прискорення, температура та інші величини задані як функції координат точки простору та часу. Сутність погляду Лагранжа на вивчений рух полягає в тому, що увагу концентрують на конкретній частці суцільного середовища та досліджують історією її деформування та руху. Координати, що індивідуалізують точки суцільного середовища та час називаються змінними Лагранжа. Погляд Лагранжа на вивчення руху суцільного середовища лежить в основі фізичних законів, оскільки пов'язаний з рухом окремих часток. У початковий момент координати певної точки по Ейлеру та Лагранжу збігаються.

В статті розглядається можливість застосування змішаних координат Ейлера та Лагранжа для визначення компонент тензора швидкостей деформацій в процесах пластичного деформування. Доцільність підходу Лагранжа та Ейлера з'ясовується в конкретних задачах. При цьому слід враховувати, що в координатах Ейлера рівняння рівноваги мають більш простий вигляд (вони лінійні), а граничні умови – складніший внаслідок того, що неможливо, не розв'язуючи задачі, визначити компоненти переміщення, які зазвичай входять до граничних умов. У координатах Лагранжа крайові умови, як правило, записуються простіше, а рівняння рівноваги – складніше.

При обробці металів тиском метал зазнає значні деформації. Однак кожен процес зручно розглядати у кожний фіксований момент його протікання, тому необхідне знання основних положень та залежностей, що відносяться до малих деформацій.

Ключові слова: *змінні Лагранжа та Ейлера, деформації, тензор швидкостей деформацій, пластична течія, деформований стан, декартова система координат, частинна похідна.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ефективність застосування сучасних програмних систем для інженерного аналізу у машинобудуванні загальновизнана. Одним із напрямків розвитку таких систем є вдосконалення моделей, що використовуються для опису пластичної течії металів.

Технологія холодного об'ємного штампування деталей є найбільш ефективною у сучасному машинобудуванні [1]. Пластичне формоутворення деталей складної геометричної форми здійснюється за кілька технологічних переходів в умовах складного навантаження та немонотонної пластичної деформації [2]. Холодна деформація металів призводить до виникнення деформаційної анізотропії механічних властивостей [3]. Перелічені особливості пластичної деформації при об'ємному холодному штампуванні обумовлюють складність її математичного моделювання. Класичні моделі пластичності, що використовуються у розрахункових ядрах існуючих на даний час програмних продуктів не описують зазначену деформацію, тому технологічні процеси обробки металів тиском розробляються на основі виробничого досвіду, що пов'язано із значними витратами. В останніх дослідженнях для достовірної оцінки впливу немонотонності пластичної деформації запропоновано різні підходи при створенні моделей пластичності [2-4]. Для розвитку технологій холодного об'ємного штампування металів необхідний апарат для адекватного математичного моделювання процесів деформування, ключовим компонентом якого є моделі (визначальні співвідношення) для опису кінематики пластичної течії металу [5-7].

Спосіб кінематичного описання визначається механічними властивостями середовища. Опис руху по Лагранжу з точки зору геометрії і механіки більш природній і послідовний. Такий підхід в розрахунках полегшує опис еволюції матеріальних тіл, фізичні властивості яких можуть змінюватися в залежності від їх механічного стану. Тобто підхід Лагранжа добре працює при описанні кінематики деформацій в механіці деформівного твердого тіла. Таким чином, використання підходу Лагранжа при моделюванні пластичної течії металу обумовлено фізичною (механічною) природою модельованого середовища деформівного твердого тіла. При цьому повне Лагранжеве формулювання рівнянь механіки суцільного середовища (відносно початкових координат) практично не використовується в дослідженнях особливостей кінематики деформування, а чисельний розв'язок рівнянь механіки деформівного твердого тіла при великих пластичних деформаціях заснований на спрощеній реалізації геометричних прийомів. Підхід Ейлера створює більш точну числову систему при розв'язку рівнянь механіки суцільного середовища.

Спосіб описання руху Ейлера або Лагранжа грає в моделюванні руху суцільного середовища визначальну роль. Тому існує необхідність у створенні методу із спільним використанням підходів Лагранжа і Ейлера для достовірного описання кінематики пластичної течії в тому числі і при немонотонній пластичній деформації.

Формулювання мети досліджень. Метою досліджень є створення методу визначення компонент тензора швидкостей деформацій з використанням підходів Ейлера і Лагранжа описання руху суцільного середовища при пластичному деформуванні металу.

Викладення основного матеріалу дослідження. Векторне поле переміщень $\vec{u}$ в кожній точці простору відображає перетворення початкової (недеформованої) конфігурації в поточну і тому визначає конфігурацію деформованого тіла в просторі у певній системі відліку. Деформований стан тіла визначається зміною довжин елементарних елементів між двома сусідніми матеріальними точками $P_0(x_0,y_0,z_0)$ і $Q_0(x_0+dx_0,y_0+dy_0,z_0+dz_0)$ в початковому стані де $(dl_0)^2=(dx_0)^2+(dy_0)^2+(dz_0)^2$ і $P(x,y,z)$ і $Q(x+dx,y+dy,z+dz)$ в поточній конфігурації в момент часу t, де $(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$. Припущення, що точки P і Q залишаються при деформації нескінченно близько одна до одної приймається у всьому подальшому викладенні, це обмеження повинно виконуватись зокрема при можливих структурних деформаціях твердих тіл. Процес деформування розглядається в єдиній декартовій системі координат XYZ. Якщо розглянути вектори переміщень $\vec{u}_1(x_0, y_0, z_0, t)$ в точці P і $\vec{u}_1(x_0+dx_0, y_0+dy_0, z_0+dz_0, t)$ в точці Q, то компоненти малої різниці векторів будуть мати вид:

$du=dx-dx_0$, $dv=dy-dy_0$, $dw=dz-dz_0$.

Зміна конфігурацій після деформації визначається квадратом довжини матеріального елементу. Зміна цієї довжини має вид

$$\frac{\left((dl)^2-(dl_0)^2\right)}{2} = dudx_0 + dvdy_0 + dwdz_0 + \frac{1}{2}\left((du)^2+(dv)^2+(dw)^2\right) =$$
$$= \varepsilon_{xx}(dx_0)^2 + \varepsilon_{yy}(dy_0)^2 + \varepsilon_{zz}(dz_0)^2 + 2\left(\varepsilon_{xy}dx_0dy_0 + \varepsilon_{yz}dy_0dz_0 + \varepsilon_{zx}dz_0dx_0\right)$$

Шість безрозмірних коефіцієнтів $\varepsilon_{ij}(i,j=x,y,z)$ є деформаціями в точці P. Підставляючи диференціали u, v, w отримаємо

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial u_i}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial u_i}{\partial z_0}dz_0 \qquad (1)$$

де $du_x=dx$, $du_y=dy$, $du_z=dz$.

В будь-який поточний момент часу, якщо поле зміщень безперервне, то справедливі рівняння

$$
\begin{aligned}
x &= x\left(x_0, y_0, z_0\right)\\
y &= y\left(x_0, y_0, z_0\right)\\
z &= z\left(x_0, y_0, z_0\right)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Отже, якщо рух точок описувати за допомогою змінних Лагранжа, то з врахуванням (1) [4, 5]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dx} &= \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}_0}\mathrm{dx}_0 + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}_0}\mathrm{dy}_0 + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}_0}\mathrm{dz}_0,\\
\mathrm{dy} &= \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_0}\mathrm{dx}_0 + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}_0}\mathrm{dy}_0 + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{z}_0}\mathrm{dz}_0,\\
\mathrm{dz} &= \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}_0}\mathrm{dx}_0 + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}_0}\mathrm{dy}_0 + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{z}_0}\mathrm{dz}_0.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Розв’язок цієї системи рівнянь можна отримати у вигляді

$$
dx_0 = \frac{\Delta_{01}}{D_0},\; dy_0 = \frac{\Delta_{02}}{D_0},\; dz_0 = \frac{\Delta_{03}}{D_0}, \qquad (4)
$$

де

$$
D_0 = \begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\
\frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\
\frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}
\end{vmatrix} \qquad (5)
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{01} &= dx\begin{vmatrix}
\frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\
\frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}
\end{vmatrix}
+ dy\begin{vmatrix}
\frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\\
\frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}
\end{vmatrix}
+ dz\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\
\frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}
\end{vmatrix},\\
\Delta_{02} &= dx\begin{vmatrix}
\frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0}\\
\frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0}
\end{vmatrix}
+ dy\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\
\frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}
\end{vmatrix}
+ dz\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial x_0}\\
\frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0}
\end{vmatrix},\\
\Delta_{03} &= dx\begin{vmatrix}
\frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0}\\
\frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0}
\end{vmatrix}
+ dy\begin{vmatrix}
\frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0}\\
\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0}
\end{vmatrix}
+ dz\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0}\\
\frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Якщо для опису руху використовувати змінні Ейлера, то

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}_0 &= \mathrm{x}_0\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right),\\
\mathrm{y}_0 &= \mathrm{y}_0\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right),\\
\mathrm{z}_0 &= \mathrm{z}_0\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right).
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Аналогічно (3) отримаємо систему рівнянь

$$\mathrm{dx}_0=\frac{\partial \mathrm{x}_0}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx}+\frac{\partial \mathrm{x}_0}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy}+\frac{\partial \mathrm{x}_0}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz},$$

$$\mathrm{dy}_0=\frac{\partial \mathrm{y}_0}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx}+\frac{\partial \mathrm{y}_0}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy}+\frac{\partial \mathrm{y}_0}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}, \quad (8)$$

$$\mathrm{dz}_0=\frac{\partial \mathrm{z}_0}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx}+\frac{\partial \mathrm{z}_0}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy}+\frac{\partial \mathrm{z}_0}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}.$$

Порівнюючи залежності (4) і (8) з урахуванням залежностей (5), (6) знаходимо, що

$$\frac{\partial x_0}{\partial x}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right),$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial y}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}-\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right),$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial z}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}-\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right),$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial x}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}-\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right),$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial y}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right),$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial z}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}-\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right),$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial x}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}-\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right),\quad (9)$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial y}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}-\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right),$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial z}=\frac{1}{D_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right).$$

Швидкості зміщення будь-якої точки суцільного тіла, що деформується, в процесі його деформації можуть бути представлені як функції їх початкових (лагранжевих) координат x_0, y_0, z_0 і часу *t*. Таким чином, в будь-який момент часу t складовими швидкості матеріальної точки, положення якої визначається поточними (ейлеровими) координатами *x, y, z,* будуть

$$\upsilon_x=\frac{du_x}{dt}=\frac{dx}{dt}=\upsilon_x(x_0,y_0,z_0,t),$$

$$\upsilon_y=\frac{du_y}{dt}=\frac{dy}{dt}=\upsilon_y(x_0,y_0,z_0,t), \quad (10)$$

$$\upsilon_z=\frac{du_z}{dt}=\frac{dz}{dt}=\upsilon_z(x_0,y_0,z_0,t).$$

На протязі нескінченно малого проміжку часу *dt* середовище зазнає нескінченно малу деформацію, що визначається переміщеннями $\upsilon_x dt$, $\upsilon_y dt$, $\upsilon_z dt$. Якщо компоненти цієї деформації

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial u_y}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\gamma_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x},\gamma_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y},\gamma_{zxy}=\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (11)$$

розділити на *dt* отримаємо компоненти симетричного тензора швидкостей деформацій

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{d\varepsilon_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_x}{\partial t}\right)=\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}$$

аналогічно отримуємо решту компонент

$$\dot{\varepsilon}_y=\frac{d\upsilon_y}{dy},\ \dot{\varepsilon}_z=\frac{d\upsilon_z}{dz},\ \dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon_y}{dx}+\frac{d\upsilon_x}{dy}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon_z}{dy} + \frac{d\upsilon_y}{dz}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon_x}{dz} + \frac{d\upsilon_z}{dx}\right). \quad (12)$$

Для визначення частинних похідних складових швидкості $\upsilon(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ по поточним координатам скористаємося правилом диференціювання складної функції. Тоді, частинні похідні складової v_x по поточним (ейлеровим) координатам будуть дорівнювати

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x}$$
$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial y}, \quad (13)$$
$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial z} + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial z} + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z}.$$

Виразимо частинні похідні початкових (лагранжевих) координат по поточним (эйлеровим) координатам через частинні похідні поточних координат по початковим, використовуючи при цьому залежності (9)

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right) + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)\right],$$

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\right], \quad (14)$$

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z} = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right) + \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)\right]$$

.

Аналогічно можуть бути знайдені і відповідні значення похідних складових швидкостей υ_y і υ_z. Для цього необхідно замінити в залежностях (14) значення υ_x на значення υ_y і υ_z.

Значення частинних похідних складових швидкості по координатам початкового стану можна, враховуючи (10), представити у вигляді

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right), \frac{\partial\upsilon_x}{\partial y_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right), \frac{\partial\upsilon_x}{\partial z_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right),$$
$$\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right), \frac{\partial\upsilon_y}{\partial y_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right), \frac{\partial\upsilon_y}{\partial z_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right), \quad (15)$$
$$\frac{\partial\upsilon_z}{\partial x_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right), \frac{\partial\upsilon_z}{\partial y_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right), \frac{\partial\upsilon_z}{\partial z_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right).$$

Компоненти тензора швидкостей деформацій з врахуванням залежностей (12), (13) і (14) будуть дорівнювати

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\right], \qquad (16)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\right],$$

$$2\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\gamma}_{xy},\ 2\dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\gamma}_{yz},\ 2\dot{\varepsilon}_{zx} = \dot{\gamma}_{zx}$$

Якщо виконується умова нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0, \qquad (17)$$

то в залежностях (16) $D_0=1$.

В окремому випадку плоскої деформації

$$\frac{\partial z}{\partial z_0} = 1,\ \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} = 0$$

залежності (16) суттєво спрощуються

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) - \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)\right],$$
$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{D_0}\left[-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\right], \qquad (18)$$
$$2\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right) - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) - \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\right].$$

В процесах обробки тиском, для яких характерно наявність жорстких областей перед входом і на виході з пластичної зони, всі точки жорстких областей рухаються з однаковою і, в загальному випадку, непостійною швидкістю. Якщо складові швидкості υ_0 руху жорсткої області на вхідній границі з пластичною областю дорівнювати

$$\upsilon_{0x} = \frac{dx_0}{dt}, \quad \upsilon_{0y} = \frac{dy_0}{dt}, \quad \upsilon_{0z} = \frac{dx_0}{dt}, \qquad (19)$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dx_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{dy_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{dz_0}{dt}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 x}{\partial {x_0}^2}\upsilon_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0}\upsilon_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial z_0}\upsilon_{0z},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy_0}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\,\partial y_0}\upsilon_{0x}+\frac{\partial^2 x}{\partial {y_0}^2}\upsilon_{0y}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_0\partial z_0}\upsilon_{0z}\,, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dz_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_{0x}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_0\partial z_0}\upsilon_{0y}+\frac{\partial^2 x}{\partial {z_0}^2}\upsilon_{0z}\,.$$

Аналогічно можна отримати залежності для решти похідних по часу, що входять в співвідношення (16). Залежності (20) суттєво спрощуються, якщо осі координат *x₀, y₀, z₀* вибрати так, щоб напрямок швидкості υ_0 співпадав с напрямком однієї з них. Наприклад, якщо $\upsilon_{0x}=\upsilon_0, \upsilon_{0y}=\upsilon_0, \upsilon_{0z}=\upsilon_0$, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial {x_0}^2}\upsilon_0\,,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\partial y_0}\upsilon_0\,,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)==\frac{\partial^2 y}{\partial {x_0}^2}\upsilon_0\,,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)==\frac{\partial^2 y}{\partial x_0\partial y_0}\upsilon_0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)==\frac{\partial^2 y}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_0\,, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)==\frac{\partial^2 z}{\partial {x_0}^2}\upsilon_0\,,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)==\frac{\partial^2 z}{\partial x_0\partial y_0}\upsilon_0\,,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)==\frac{\partial^2 z}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_0\,.$$

Отже, компоненти тензора швидкостей деформації для випадку плоскої деформації нестискаємого матеріалу (D_0 = 1), при умові, що $\upsilon_{0x}=\upsilon_0$ будуть дорівнювати

$$\dot{\varepsilon}_x=\upsilon_0\left[\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}-\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\partial y_0}\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_y=\upsilon_0\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x_0\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2}\right], \tag{22}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{xy}=\dot{\gamma}_{xy}=\upsilon_0\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x_0\partial y_0}+\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}-\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\partial y_0}\right].$$

По аналогії з інтенсивністю деформацій інтенсивність швидкостей деформацій визначається формулою

$$\dot{\varepsilon}_u=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_x-\dot{\varepsilon}_y\right)^2+\left(\dot{\varepsilon}_y-\dot{\varepsilon}_z\right)^2+\left(\dot{\varepsilon}_z-\dot{\varepsilon}_x\right)^2+\frac{3}{2}\left(\dot{\gamma}_{xy}^2+\dot{\gamma}_{yz}^2+\dot{\gamma}_{zx}^2\right)}\,. \tag{23}$$

У випадку осесиметричної деформації

$$\dot{\varepsilon}_u=\sqrt{\frac{4}{3}\left(\dot{\varepsilon}_r^2+\dot{\varepsilon}_z^2+\dot{\varepsilon}_r^2\dot{\varepsilon}_z^2\right)+\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{rz}^2} \tag{24}$$

В якості характеристики накопиченої пластичної деформації приймемо параметр Одквіста

$$e_u=\int_0^t\dot{\varepsilon}_u d\tau\,. \tag{25}$$

Інтеграл (25) береться по шляху деформування і визначає довжину траєкторії в просторі деформацій.

В більшості випадків функції ейлерових координат від лагранжевих або функції (2), що входять в приведені вище співвідношення для розрахунку компонент тензора швидкостей деформацій, отримані шляхом апроксимації експериментальних даних. Після апроксимації експериментальної інформації тим чи іншим способом отримані функції використовуються в співвідношеннях (16), (18) або (22) для розрахунку компонент тензора швидкостей деформацій.

Висновки. Розроблено метод, використання якого дає можливість отримати основні рівняння компонент тензора швидкостей деформацій при пластичній течії металу в процесах обробки тиском. Запропонований метод дозволяє підвищити достовірність визначення напружено-деформованого стану в процесах пластичного формозмінення, в тому числі процесах обробки тиском, що характеризуються немонотонною пластичною деформацією.

Список використаних джерел

1. Алієва Л. І., Алієв І. С., Грудкіна Н. С., Малій Х. В. Моделювання процесу комбінованого радіально-зворотного видавлювання деталей з фланцем. *Обработка материалов давлением*. Краматорськ. 2019. № 1 (48). С. 23-34.

2. Матвійчук В. А., Бубновська І. А. Оцінка деформованості матеріалу криволінійних заготовок при холодному вальцюванні. *Техніка, енергетика, транспорт АПК.* Вінниця. 2017. Випуск 4. С. 92-97.

3. Михалевич В. М., Добранюк Ю. В., Краєвський В. О. Порівняльне дослідження моделей граничних пластичних деформацій. *Вісник машинобудування та транспорту*. Вінниця. 2018. № 2. С. 56-64.

4. Грушко О. В., Огородніков В. А., Слободянюк Ю. О. Деформовність маловуглецевого дроту в процесі його багатоступінчастого холодного волочіння. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. Вінниця. 2019. №3. С. 103-110.

5. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

6. Рекечинський В. І. Застосування методу функцій току в стаціонарних процесах пластичного деформування. *Вібрації в техніці і технологіях.* Вінниця. 2020. №2 (97). С. 157-163.

7. Сивак Р. І., Гунько І. В., Залізняк Р. О. Застосування ліній току при визначенні кінематичних характеристик в стаціонарних процесах пластичної течії металу. *Вібрації в техніці і технологіях.* Вінниця. 2021. №2 (97). С. 157-163.

Список джерел у транслітерації

1. Alieva L. I., Aliev I. S., Grudkina N. S., Maliy H. V. Modeliuvannia protsesu kombinovanogo radialno-zvorotnogo vydavliuvannia detaley z flantsem. *Obrabotka materialov davleniem*. Kramatorsk. 2019. № 1 (48). S. 23-34.

2. Matviychuk V. A., Bubnovska I. A. Otsinka deformovanosti materialu kryvoliniynyh zagotovok pry holodnomu valtsuvanni. *Tehnika, energetyka, transport APK.* Vinnytsia. 2017. Vypusk 4. S. 92-97.

3. Myhalevych V. M., Dobraniuk Iu. V., Kraevskyi V. O. Porivnialne doslidzhennia modeley granychnyh plastychnyh deformatsiy. *Visnyk mashynobuduvannia ta transportu*. Vinnytsia. 2018. № 2. S. 56-64.

4. Grushko O. V., Ogorodnikov V. A., Slobodianiuk Iu. O. Deformovnist malovugletsevogo drotu v protsesi yogo bagatostupinchastogo holodnogo volochinnia. *Visnyk Vinnytskogo politehnichnogo instytutu*. Vinnytsia. 2019. №3. S. 103-110.

5. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

6. Rekechynskyi V. I. Zastosuvannia metody funktsiy toku v statsionarnyh protsessah plastychnogo deformuvannia. *Vibratsii v tehnitsi i tehnologiah.* Vinnytsia. 2020. №2 (97). S. 157-163.

7. Syvak R. I., Gunko I. V., Zalizniak R. O. Zastosuvannia liniy toku pry vyznachenni kinematychnyh harakterystyk v statsionarnyh protsesah plastychnoy techiy metalu. *Vibratsii v tehnitsi i tehnologiah.* Vinnytsia. 2021. №2 (97). S. 157-163.

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

В механике сплошных сред нашли применение две эквивалентные друг другу точки зрения на течение металла в процессе деформирования – Эйлера и Лагранжа. Когда внимание концентрируют на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды в процессе деформирования – это сущность точки зрения Эйлера на исследуемое движение сплошной среды. С точки зрения Лагранжа движение считается известным, если скорость, ускорение, температура и другие величины заданы как функции координат точки пространства и времени. Сущность взгляда Лагранжа на изученное движение заключается в том, что концентрируют внимание на конкретной частице сплошной среды и исследуют историю ее деформирования и движения. Координаты, которые индивидуализируют точки сплошной среды и называются переменными Лагранжа. Взгляд Лагранжа на исследование движения сплошной среды лежит в основе физических законов, так как связан с движением отдельных частиц. В начальный момент координаты определенной точки по Эйлеру и Лагранжу совпадают.

В статье рассматривается возможность применения смешанных координат

Эйлера и Лагранжа для определения компонента тензора скоростей деформаций в процессах пластического деформирования. Целесообразность подхода Лагранжа и Эйлера выясняется в конкретных задачах. При этом следует учитывать, что в координатах Эйлера уравнения равновесия имеют более простой вид (они линейные), а граничные условия – более сложный вследствие того, что невозможно, не решая задачи, определить компоненты перемещения, обычно входящие в граничные условия. В координатах Лагранжа краевые условия, как правило, записываются проще, а уравнение равновесия – сложнее.

При обработке металлов давлением металл испытывает значительные деформации. Однако каждый процесс удобно рассматривать в каждый фиксированный момент его протекания, поэтому необходимо знание основных положений и зависимостей, относящихся к малым деформациям.

Ключевые слова: *переменные Лагранжа и Эйлера, деформации, тензор скоростей деформаций, пластическое течение, деформированное состояние, декартовая система координат, частная производная.*

STUDY OF THE KINEMATICS OF PLASTIC FLOW OF A METAL USING THE EULER AND LAGRANGE VARIABLES

In continuum mechanics, two equivalent points of view on the flow of a metal in the process of deformation - Euler and Lagrange - have found application. When attention is focused on a given point in space, where different particles of a continuous medium come in the process of deformation, this is the essence of Euler's point of view on the studied motion of a continuous medium. From the point of view of Lagrange, the motion is considered known if the speed, acceleration, temperature and other quantities are given as functions of the coordinates of a point in space and time. The essence of Lagrange's view of the studied motion lies in the fact that they focus on a specific particle of a continuous medium and investigate the history of its deformation and motion. The coordinates that individualize the points of the continuous medium are called Lagrange variables. Lagrange's view on the study of the motion of a continuous medium underlies physical laws, since it is associated with the motion of individual particles. At the initial moment, the coordinates of a certain point according to Euler and Lagrange coincide.

The article discusses the possibility of using mixed Euler and Lagrange coordinates to determine the component of the strain rate tensor in plastic deformation processes. The expediency of the approach of Lagrange and Euler is clarified in specific problems. It should be borne in mind that in the Euler coordinates, the equilibrium equations have a simpler form (they are linear), and the boundary conditions are more complex due to the fact that it is impossible, without solving the problem, to determine the displacement components that are usually included in the boundary conditions. In Lagrange coordinates, the boundary conditions, as a rule, are written easier, and the equilibrium equation is more complicated.

When processing metals by pressure, the metal undergoes significant deformation. However, it is convenient to consider each process at each fixed moment of its course, therefore, it is necessary to know the basic provisions and dependencies related to small deformations.

Key words: *Lagrange and Euler variables, deformations, strain rate tensor, plastic flow, deformed state, Cartesian coordinate system, partial derivative.*

Відомості про авторів

Сивак Роман Іванович – доктор технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)
Залізняк Роман Олександрович – аспірант (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Сивак Роман Иванович – доктор технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)
Зализняк Роман Александрович – аспирант (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Sivak Roman – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines of Vinnytsia national agrarian university (st. Soniachna, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)
Zalizniak Roman – graduate student (st. Soniachna, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)