УДК 514.123

І. Абрамчук
Р. Стадник
Д. Волошина

ПАРАМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ КОЛА В ПРОСТОРІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Розглянуто способи параметризації рівняння кола в просторі на основі представлення кола як перетину сфери та площини; з використанням лінійних перетворень, що забезпечують повороти системи координат і обертання навколо осі а також векторне рівняння записане за допомогою базисних векторів у площині кола. Наведено приклади застосування отриманих рівнянь.
Ключові слова: параметричне рівняння кола у просторі, матриця повороту, матриця обертання вектора на заданий кут навколо осі, рівняння кола, що проходить через три задані точки простору.

Abstract
Methods for parameterizing the equation of a circle in space based on the representation of a circle as the intersection of a sphere and a plane and using linear transformations that provide rotations of the coordinate system and rotation around the axis, as well as a vector equation written using basis vectors in the plane of the circle, are considered. Examples of application of the received equations are given.
Keywords: parametric equation of a circle in space, rotation matrix, matrix of rotation of a vector at a given angle around the axis, equation of a circle passing through three given points on the space.

Вступ

Параметричні рівняння кривих у просторі, можуть буть доволі нетривіальними [1, 2, 3]. Коло задач, що потребують для свого вирішення застосування таких рівнянь, доволі широке: від комп’ютерної графіки до задач моделювання складних процесів [1, 2].

Метою роботи є огляд відомих і запропонованих способів побудови параметричних рівнянь кола у просторі і наведення практичних прикладів застосування таких рівнянь.

Результати дослідження

Наведемо одну з можливих еквівалентних постановок задачі.

Постановка задачі. Скласти параметричне рівняння кола $\boldsymbol{c}$ в просторі $\mathbb{R}^3$, з центром в точці $P(x_0, y_0, z_0)$, нормаллю $\boldsymbol{n}(a, b, c), |\boldsymbol{n}| = 1$ і радіусом r.

1. Коло можна визначити як діаметральний перетин сфери радіуса r з центром $P(x_0, y_0, z_0)$ площиною, якій належить коло:
$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2,\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.\end{cases}$$
Останню систему можна параметризувати при $a^2+c^2\neq 0$, наприклад так [3]:
$$\begin{cases}x = x_0 + \frac{r}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(c\cos t - \frac{ab\sin t}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),\\ y = y_0 + \frac{r\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin t, \qquad t\in[0,2\pi].\\ z = z_0 - \frac{r}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(a\cos t + \frac{bc\sin t}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),\end{cases} \tag{1}$$

2. Наступна ідея полягає в тому, щоб використовувати комбінацію лінійних перетворень поворотів відносно координатних осей і паралельного перенесення.
2.1. Будуємо коло з віссю симетрії, наприклад, $Oz \parallel \boldsymbol{k}(0,0,1)$, з центром в $Q(0,0,1)$.
$$\boldsymbol{c}_z = \begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{cases}x = r\cos t,\\ y = r\sin t,\\ z = 1,\end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

2.2. Знаходимо кут $\varphi = \angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$ і здійснюємо поворот на цей кут в два етапи, наприклад: спочатку поворот на кут $\theta_1 = \angle(\text{пр}_{xOz}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$ навколо осі Oy, потім на кут $\theta_2 = \angle(\text{пр}_{xOz}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$, навколо осі Ox, де $\text{пр}_{xOz}\boldsymbol{n}$ –проекція вектора $\boldsymbol{n}$ на площину xOz, а матриці поворотів на кут θ відносно осей Ox, Oy мають, відповідно, вид [4]

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

В результаті цього кроку отримаємо коло з віссю симетрії, OP_1, з центром P_1, $\overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{n}$.

2.3. Виконаємо зміщення на вектор $-\boldsymbol{n} + P$, отримаємо коло з віссю симетрії, що паралельна $\boldsymbol{n}$ і центром P, що і т. о.

Сумарне перетворення можна подати так

$$\boldsymbol{c} = R_x(\theta_2)\big(R_y(\theta_1)\boldsymbol{c}_z\big) + (-\boldsymbol{n} + P) \tag{2}$$

3. Рівняння кола можна також отримати, обертаючи вибрану точку кола навколо заданої осі, що проходить через початок координат $O(0,0,0)$ і паралельна $\boldsymbol{n}$ з наступним зміщенням центра кола в точку P.

3.1. Вибираємо довільний вектор $\boldsymbol{p_0} \perp \boldsymbol{n}, |\boldsymbol{p_0}| = 1$. Обираємо точку (радіус-вектор точки) $T_0 = r \cdot \boldsymbol{p_0}$.

3.2. Обертаємо точку T_0 навколо вектора $\boldsymbol{n}$ на довільний кут $t \in [0, 2\pi]$, за допомогою матриці повороту $R_{\boldsymbol{n}}(t)$ [4], отримаємо коло $\boldsymbol{c_0} = R_{\boldsymbol{n}}(t)T_0$ з центром O, радіуса r і нормаллю $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{c}_0 = R_{\boldsymbol{n}}(t)T_0 = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot T_0) + \cos t \cdot (\boldsymbol{n} \times T_0) \times \boldsymbol{n} + \sin t \cdot (\boldsymbol{n} \times T_0).$$

3.3. Виконаємо паралельне перенесення на вектор $P(x_0, y_0, z_0)$, остаточно отримаємо рівняння кола

$$\boldsymbol{c} = R_{\boldsymbol{n}}(t)T_0 + P = \big(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot T_0) + \cos t \cdot (\boldsymbol{n} \times T_0) \times \boldsymbol{n} + \sin t \cdot (\boldsymbol{n} \times T_0)\big) + P. \tag{3}$$

4. Виразимо радіус-вектор точки кола через базисні ортонормовані вектори в площині кола. Нехай, спочатку необхідно побудувати параметричне рівняння кола $\boldsymbol{c}_0$ з центром O, радіуса r і нормаллю $\boldsymbol{n}$

4.1. Знайдемо довільний ортонормований базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ в площині кола $\boldsymbol{c}_0$, наприклад у випадку $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{i}, \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{j}$, так: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{j}$, ортогоналізуємо $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v} + \alpha \cdot \boldsymbol{u}$, де α знайдемо з умови $(\boldsymbol{v} + \alpha \cdot \boldsymbol{u}) \perp \boldsymbol{u}$, $\alpha = -\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$, нормалізуємо $\boldsymbol{v} := \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} := \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u}$ і отримаємо ортонормований базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

4.2. Будуємо параметричне рівняння кола $\boldsymbol{c_0}$ з центром O, радіуса r і нормаллю $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{c_0} = r\cos t \cdot \boldsymbol{u} + r\sin t \cdot \boldsymbol{v}.$$

4.3. Зміщуємо центр кола у точку P і остаточно отримуємо

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_0 + P = r\cos t \cdot \boldsymbol{u} + r\sin t \cdot \boldsymbol{v} + P. \tag{4}$$

Задача 1. Скласти параметричне рівняння кола з центром в $P(1,2,3)$, радіуса r=2 і нормаллю $\boldsymbol{n}$=(1,1,2).

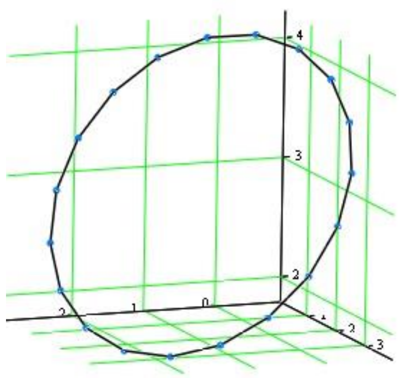

Рис. 1.

Розв'язання. Застосуємо метод п.4. Знайдемо базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$: $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)$, $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-5,2)$. За формулою (4) отримаємо:

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\sqrt{30}}{15}\sin t - \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\cos t\,, \\ y = 2 - \dfrac{\sqrt{30}}{3}\sin t\,, \\ z = 3 + \dfrac{2\sqrt{30}}{15}\sin t + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos t\,, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Результат відображено на рис.1.

Зауважимо, що методику, що розглянуту в п.2 можна застосувати для побудови довільної плоскої кривої в просторі; п. 3 – для побудови поверхонь обертання; а п. 4 легко узагальнити для побудови, наприклад, еліпса з півосями a, b, за формулою

$$a \cos t \cdot \boldsymbol{u} + b \sin t \cdot \boldsymbol{v} + P, \tag{5}$$

тут вже орти $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ мають бути напрямлені строго уздовж осей еліпса.

Застосуємо розглянуті побудови до розв'язання прикладної задачі, що може виникати, наприклад, у комп'ютерній графіці.

Задача2. Знайти рівняння кола, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3, що не лежать на одній прямій.

Розв'язання. Через три точки, що не лежать на одній прямій, завжди можна провести коло, до того ж лише одне.

1. Знайдемо координати нормалі
$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}, \;\; \boldsymbol{n} \coloneqq \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n}.$$
2. Знайдемо координати точки P -- центра кола, як перетин серединних перпендикулярів до відрізків M_1M_2, M_1M_3.
3. Отримаємо стандартну постановку задачі на побудову рівняння кола, яку розв'яжемо, наприклад, за методом (4).

Висновки

В роботі розглянуто деякі варіанти побудови параметричного рівняння кола в тривимірному просторі. Намічені шляхи узагальнення розглянутих алгоритмів на криві і поверхні деяких інших типів, а також продемонстровано ефективність цих алгоритмів для розв'язання практичних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Graphics Gems V, *Alan Paeth (editor)*, Academic Press, 1995, ISBN: 0125434553 (Mac: 012543457X)
2. Vittal P.R. Analitical Geometry 2D and 3D, Copyright © 2013 Dorling Kindersley (India) Pvt. Ltd, ePub ISBN 9789332517646, 808p.
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Окружность.
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix.

Стадник Ростислав — студент групи КІТС-20б, факультет менеджменту та інформаційної безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: totalwarplayer632003@gmail.com.

Волошина Дана — студентка групи КІТС-20б, факультет менеджменту та інформаційної безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: voloshynadana11@gmail.com.

Абрамчук Ігор Васильович — ст. викладач кафедри математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: abramchuk@vntu.edu.ua

Науковий керівник: ***Абрамчук Ігор Васильович*** — ст. викладач кафедри математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Stadnik Rostislav — student, Department of Management and Information Security, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: totalwarplayer632003@gmail.com

Voloshina Dana — student, Department of Management and Information Security, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: voloshynadana11@gmail.com

Abramchuk Igor V. — lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: abramchuk@vntu.edu.ua

Supervisor: ***Abramchuk Igor V.*** — lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia