УДК 517.954.536.21

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ

В. І. Риндюк, С. В. Риндюк, Н. І. Старушок

Отримано методику розв'язання одновимірної задачі теплопровідності біпараболічного типу за допогою інтегрального методу прямих. Наближений розв'язок в околі кожного вузла інтервалу рівномірного розбиття подається у вигляді полінома четвертого степеня, що дає змогу отримати систему лінійних диференціальних рівнянь відносно температури у вузлових точках.

Получена методика решения одномерной задачи теплопроводности бипараболического типа с помощью интегрального метода прямых.Приближенное решение в окрестности каждого вузла интервала равномерного разбиения представляется в виде полинома четвертой степени, что дает возможность получить систему линейных диференциальных уравнений относительно температуры в узловых точках.

Received a one-dimensional method of solving the heat conduction problem biparabolic type using the integral method pryamyh. Approximate solution in the neighborhood of each interval vuzla uniform partition is represented as a polynomial of degree four, which makes it possible to obtain a system of linear differential equations with respect to temperature at nodal points.

Вступ

В класичному лінійному рівнянні теплопровідності постульовано такі жорсткі умови та процеси, як нескінченна швидкість розповсюдження збурень та лінійна залежність потоку від градієнта поля і енергії від температури. При порушенні цих умов рівняння Фур'є не досить коректно описує процеси тепломасопереносу і призводить до миттєвої нескінченної швидкості розповсюдження тепла і до нескінченного теплового потоку.

Але заміна класичного рівняння теплопровідності на гіперболічне рівняння, наприклад, в одновимірному випадку

$$\tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} ,$$

де $a = \dfrac{\lambda}{c_v}$ – коефіцієнт температуропровідності;

τ_r – час релаксації, повинна відповідати умовам інваріантності рівняння щодо тієї чи іншої групи перетворень. Множина рівнянь, придатних для математичного моделювання повинна мати симетрійні властивості.

Для класичного рівняння теплопровідності є інваріантним відносно перетворень Галілея, а для гіперболічного повинен виконуватись принцип Пуанкаре-Ейнштейна.

В зв'язку з цим, пропонується деякими авторами [1, 2] узагальнене рівняння (біпараболічне), яке інваріантне відносно групи Галілея:

$$L \equiv (\alpha_1 L_1 + \alpha_1 L_2) T(x.t) = 0, \tag{1}$$

де α_1, α_1 – дійсні параметри, $L_2 \equiv L_1 L_1$, $L_1 \equiv \partial/\partial t - k^2 \Delta$,

Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

k^2 – фізичний параметр, T – шукана функція.

Дослідження даного рівняння в плані погодження з експериментальними результатами та знаходження числово-аналітичного методу розв'язання даного типу рівнянь є нашою основною задачею.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

Розглянемо першу крайову задачу для скінченного проміжку $[0, l]$. В рамках біпараболічної моделі задача розрахунку температурного поля зводиться до розв'язання такої крайової задачі:

$$(\alpha_1 L_1+\alpha_1 L_2)T(x.t)= f(x,t), \tag{2}$$

$$T(0,t)=\mu_1(t),,\ T(l,t)=\mu_2(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 T(0,t)}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 T(l,t)}{\partial x^2}=0, \tag{4}$$

$$T(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \tag{5}$$

де $\mu_1(t),\ \mu_2(t)$ – задані значення температури на кінцях відрізка,

$\varphi(x), \psi(x)$ – задані функції, $f(x,t)$ – функція джерела.

Для числово-аналітичного розв’язання задачі (2-5) по осі x вводиться сітка відповідно з кроком $h=\frac{l}{n+1}$, де n – кількість вузлових точок на інтервалі $[0,l]$.

Задача зводиться до розв’язання такого рівняння, яке характерне для кожного вузла середовища:

$$\tau_г \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2}+\frac{\partial T_k}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T_k+2\tau_r\frac{\partial T_k}{\partial t})+\tau_r a^4\frac{\partial^4 T_k}{\partial x^4}=\mathrm{f}(\mathrm{x}_k,t). \tag{6}$$

Використовуючи методику, яка запропонована в роботах [3, 4], наближений розв’язок задачі (1-6) в околі кожного вузла будемо шукати у вигляді полінома четвертого степеня:

$$P(x,t)=A_0^k(t)+A_1^k(t)(x-x_k)+A_2^k(t)(x-x_k)^2+A_3^k(t)(x-x_k)^3+A_4^k(t)(x-x_k)^4, \tag{7}$$

де x_k – координата k-го вузла інтервалу рівномірного розбиття $[0,l]$.

З врахуванням наближеного розв'язку (7), де α_k – числовий коефіцієнт, який може приймати значення з інтервалу (0;1), проінтегруємо (6) в околі $[x_k-\alpha_k h,\ x_k+\alpha_k h]$ і в результаті отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}&\tau_к\left(\ddot{A}_0^k+\frac{\alpha_k^2h^2}{3}\ddot{A}_2^k+\frac{\alpha_k^4h^4}{5}\ddot{A}_4^k\right)+\dot{A}_0^k+\dot{A}_2^k\left(\frac{\alpha_k^2h^2}{3}-4\tau_r a^2\right)+\dot{A}_4^k\left(\frac{\alpha_k^4h^4}{5}-16\tau_r a^2\alpha_k^2h^2\right)=\\&=2a^2A_2^k+(4a^2\alpha_k^2h^2-21\tau_r a^4)A_4^k+\Phi_k,\end{aligned} \tag{8}$$

де Φ_k – інтеграл від f (x, t) на відповідному інтервалі інтегрування, $k=\overline{1,n}.$

Для визначення коефіцієнтів A_1^k, A_2^k, A_3^k і A_4^k окрім A_0^k, використовуємо умови неперервності температури та теплового потоку на межах інтервалів розбиття і на кінцях відрізка.

В результаті отримали алгебраїчну систему рівнянь розв’язок якої привів до таких рекурентних формул відносно коефіцієнтів $A_i^k,\ i=\overline{1,4};\ k=\overline{1,3}$:

$$A_1^1=\left(-\frac{5}{6}A_0^1+\frac{3}{2}A_0^2-\frac{1}{2}A_0^3-\frac{1}{4}\mu_1+\frac{1}{12}\mu_2\right)h^{-1},\ A_2^1=\left(-\frac{5}{6}A_0^1+\frac{1}{4}A_0^2+\frac{1}{6}A_0^3+\frac{11}{24}\mu_1-\frac{1}{24}\mu_2\right)h^{-2},$$

$$A_3^1=\left(\frac{5}{6}A_0^1-A_0^2+\frac{1}{2}A_0^3-\frac{1}{4}\mu_1-\frac{1}{12}\mu_2\right)h^{-3},\ A_4^1=\left(-\frac{1}{6}A_0^1+\frac{1}{4}A_0^2-\frac{1}{6}A_0^3+\frac{1}{24}\mu_1+\frac{1}{24}\mu_2\right)h^{-4},$$

$$A_1^2=\left(-\frac{1}{2}A_0^1-\frac{17}{6}A_0^2+\frac{2}{3}A_0^3+\frac{1}{12}\mu_1-\frac{1}{12}\mu_2\right)h^{-1},\ A_2^2=\left(\frac{2}{3}A_0^1-\frac{5}{4}A_0^2+\frac{2}{3}A_0^3-\frac{1}{24}\mu_1-\frac{1}{24}\mu_2\right)h^{-2},,$$

$$A_3^2=\left(\frac{1}{6}A_0^1-\frac{1}{6}A_0^3-\frac{1}{12}\mu_1+\frac{1}{12}\mu_2\right)h^{-3},,\ A_4^2=\left(-\frac{1}{6}A_0^1+\frac{1}{4}A_0^2-\frac{1}{6}A_0^3+\frac{1}{24}\mu_1+\frac{1}{24}\mu_2\right)h^{-4},,$$

$$A_1^3=\left(\frac{1}{2}A_0^1-\frac{3}{2}A_0^2+\frac{5}{6}A_0^3-\frac{1}{12}\mu_1+\frac{1}{4}\mu_2\right)h^{-1},\ A_2^3=\left(\frac{1}{6}A_0^1+\frac{1}{4}A_0^2-\frac{5}{6}A_0^3-\frac{1}{24}\mu_1+\frac{11}{24}\mu_2\right)h^{-2},$$

$$A_3^3=\left(-\frac{1}{2}A_0^1+A_0^2-\frac{5}{6}A_0^3+\frac{1}{12}\mu_1+\frac{1}{4}\mu_2\right)h^{-3},\ A_4^3=\left(-\frac{1}{6}A_0^1+\frac{1}{4}A_0^2-\frac{1}{6}A_0^3+\frac{1}{24}\mu_1+\frac{1}{24}\mu_2\right)h^{-4}.$$

Підставивши їх значення в (8) отримуємо систему n диференціальних рівнянь відносно значень температури у вузлових точках і після відповідних математичних перетворень запишемо у такій матричній формі:

$$M_1 \ddot{A}_0 + M_2 \dot{A}_0 = M_3 A_0 + M_4 \ddot{\mu} + M_5 \dot{\mu} + M_6 \mu, \tag{9}$$

де $M_1,...,M_6$ – матриці, які містять елементи коефіцієнтів τ_r, h , α_k^2 і α_k^4,

$$A_0 = \left\{A_0^1, A_0^2, ..., A_0^n\right\}^T; \mu = \left\{\mu_1, ..., \mu_2\right\}^T.$$

Використовуючи заміну $A_0=x_1$, $\dot{A}_0 = x_2$ і $\ddot{A}_0 = \dot{x}_2$, отримуємо систему 2n диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x^2 \\ \dot{x}_2 = -\left(M_2 x_2 + M_3 x_1 + M_4 \ddot{\mu} + M_5 \dot{\mu} + M_6 \mu\right) \cdot M_1^{-1}, \end{cases} \tag{10}$$

де M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 *і* M_6 відповідні матриці з числовими коефіцієнтами при стовпцях $\dot{A}_0$, A_0, Ф і μ.

Для розв’язання (10) використаємо методику запропоновану у [3, 4] та отримуємо розв'язки при різних значеннях меж інтегрування (8) за рахунок числових коефіцієнтів α_k, що дозволяє впевнитись у точності та достовірності розв'язків.

Висновки

– Запропонована методика розв’язання біпараболічного рівняння теплопровідності за допомогою інтегрального методу прямих з використанням наближеного розв’язку, який подається в околі кожного вузла x_k у вигляді полінома четвертого степеня.
– Знайдені рекурентні формули для коефіцієнтів полінома, що позволяє в автоматичному режимі формувати відповідні системи диференціальних рівнянь.
– Алгоритм розв’язання задачі застосовується і для задач з врахуванням граничних умов першого та другого роду в режимі створеної загальної програми розрахунку на електронно-обчислювальних машинах

Використана література

1. Булавацький В. М. Математичне моделювання релаксаційних процесів тепломасопереносу / Автореfер. дис...д-ра техн. наук: 01.05.02 / В. М. Булавацький; НАН України. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова. – К. : 2003. – 30 с.
2. Лыков А. В. Теория тепло- и масопереноса / Лыков А. В., Михайлов Ю. А. // – М. : – Л. : Госенергоиздат, 1963. – 536 с.
3. Рындюк В. И. Применение улучшего интегрального метода прямых к решению краевых задач теплопроводности / В. И. Рындюк // ИФЖ / 1987. – Т. 52. – № 2. – 6 с.
4. Риндюк В. І. Чисельно-аналітичний розв’язок одновимірної релаксаційної математичної моделі теплопровідності / В. І. Риндюк, Т. О. Міщук, С. В. Риндюк // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. – 2007. – № 4. – С. 4-8.

Риндюк Володимир Іванович – к.ф-м.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Риндюк Світлана Володимирівна – аспірантка Вінницького національного технічного університету.

Старушок Назар Іванович – студент Вінницького національного технічного університету.