УДК 621.3

Ю. Г. Ведміцький

КЛАС БАГАТОВИМІРНИХ 2π-ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ, СФОРМОВАНИХ НАД ПОЛЯМИ ЗНАЧЕНЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СИНУСА АБО КОСИНУСА, ТА ОСОБЛИВОСТІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОБЛАСТІ ЇХ ВИЗНАЧЕННЯ (ДОПОВІДЬ №1)

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі на прикладі дослідження алгоритму функціонування окремих силових електротехнічних систем виявлено і описано проблему одновимірності 2π-періодичних функцій, заданих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, які такими системами узяті за основу. З метою вирішення проблеми узагальнено функціональний простір зазначених функцій, у зв'язку з чим аналітично визначено клас багатовимірних (чотиривимірних) 2π-періодичних функцій, окреслено параметричну область їх визначення, зазначені окремі властивості, запропоновані основні напрямки їх практичного застосування. З урахуванням високого ступеня узагальненості отриманих функцій, заданих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, додатково висунуто гіпотезу щодо можливості формування на основі класу заявлених функцій в лінійному (векторному) функціональному просторі ортонормованого координатного базису та побудованого на ньому узагальненого ряду Фур'є.

Ключові слова: електротехніка, електроніка, одновимірні та багатовимірні 2π-періодичні функції, чотиривимірний лінійний простір, структура простору, параметрична область визначення функції, впорядковані четвірки, координатний базис, функціональний простір, коефіцієнти та ряди Фур'є, регулятор змінного струму, регулювальна характеристика

Abstract

In the paper, the problem of one-dimensionality of 2π-periodic functions, set over the fields of trigonometric sine or cosine values, is identified and described using the example of the study of the algorithm of the operation of electrical engineering systems. To solve this problem, a generalization of the functional space of the specified functions was carried out, in connection with which a class of multidimensional (four-dimensional) 2π-periodic functions was defined. Taking into account the high degree of generalization of the obtained functions, given over the fields of trigonometric sine or cosine values, a hypothesis was formulated regarding the possibility of formation based on the class of declared functions in the linear (vector) functional space of the orthonormal coordinate basis and the generalized Fourier series built on it.

Keywords: electrical engineering, electronics, one-dimensional and multi-dimensional 2π-periodic functions, four-dimensional linear space, space structure, parametric domain of a function, ordered quads, coordinate basis, functional space, Fourier coefficients, Fourier series, AC regulator, adjustment characteristic

Вступ

Клас 2π-періодичних функцій, які сформовано над полями значень тригонометричних функцій синуса або косинуса, має винятково важливе значення як у вихідному базисі теоретичної електротехніки, так і в його додатках – електроенергетиці, електромеханіці, інформаційній та силовій електроніках [1-15].

Причин цьому декілька. З-поміж основних – унікальна здатність 2π-періодичних функцій математично точно описувати інформаційні та енергетичні процеси, що спостерігаються як у природному довкіллі, так і в технічному сегменті ноосфери людини.

Водночас наразі не можна не помітити, що увесь ресурс потенціальних можливостей 2π-періодичних функцій на сьогодні достатньо не розкритий – здебільшого як в теорії, так і на практиці експлуатують переважно найпростіші та найпримітивніші реалізації таких функцій.

Прикладом може слугувати *одновимірна* 2π-періодична функція вихідної напруги $u_{вих}(\alpha,\theta)$, яку формує силовий перетворювач класу АС-АС – *регулятор змінного струму* (рис. 1).

Відповідно до алгоритму його роботи середньоквадратичний функціонал 2π-періодичної функції вихідної напруги, а в технічних термінах – її діюче (ефективне) значення, поставлено в пряму залежність від параметра α – *кута вмикання* (рис. 2), сформованого системою імпульсно-фазового керування (СІФК) [1-6]:

$$U_{вих}(\alpha)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{вих}^2(\alpha;\theta)d\theta}=\frac{U_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\pi-\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}, \quad (1)$$

що, як наслідок, створює принципову можливість безпосереднього зовнішнього впливу з боку СІФК на характер реалізації силового процесу під час транспортування енергетичного потоку або виконання ним *корисної роботи*.

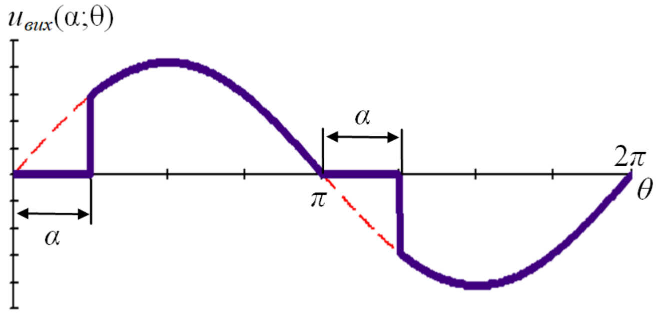

Рис. 1. Одновимірна 2π-періодична функція $u(\alpha;\theta)$

Проте *одновимірність* математичного простору, в якому сформовано 2π-періодичну функцію вихідної напруги, суттєво обмежує здатність СІФК водночас впливати на інші показники, найгірше, – саме на ті з них, які характеризують якість такої реалізації. І в багатьох випадках не тільки обмежує, але навіть і унеможливлює цей вплив взагалі.

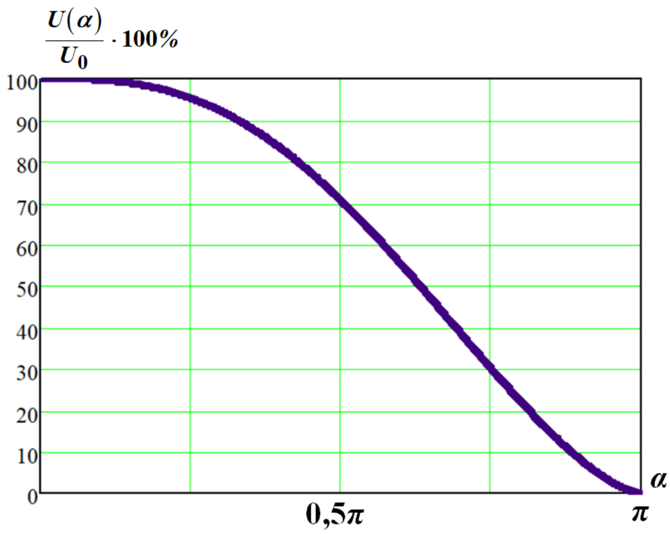

Рис. 2. Регулювальна характеристика $\frac{U(\alpha)}{U_0}\cdot 100\%$

Показовим прикладом відсутності такої можливості у разі використання одновимірних 2π-періодичних функцій є актуальна на сьогодні система параметрів [1-7], яка оцінює якість перетворення *амплітудно-частотними* та *фазово-частотними характеристиками спектру* силового процесу. У випадку з регулятором змінного струму, задаючи значення *єдиної* координати α для формування певного рівня діючого значення напруги $U_{вих}(\alpha)$, система керування вже не має іншого ресурсу, тобто додаткових вимірів в координатному просторі, для можливості корегування інших параметрів, зокрема – спектральних характеристик, оскільки вони також залежать тільки від цієї єдиної параметричної змінної α. Відтак її зміна з метою формування одного параметра водночас призводить до зазвичай небажаної зміни іншого параметра, який визначає якість.

Розв'язати цю проблему в межах *одновимірного* простору теоретично неможливо!

Тому для вирішення виявленої проблеми автором пропонується здійснити *узагальнення* зазначених 2π-періодичних функцій і сформувати на цій основі більш загальний клас – клас *багатовимірних* функцій, що задані над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, з наступним дослідженням їх якостей, властивостей та характеристик стосовно можливості та доцільності подальшого практичного застосування як на теоретично-абстрагованому рівні, так і в конкретному випадку вже розглянутого нами регулятора змінного струму.

Чотиривимірні 2π-періодичні функції

Чотиривимірною 2π-періодичною функцією $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, заданою над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, називатимемо узагальнену функцію від п'яти незалежних змінних – *чотирьох параметричних* $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ і однієї процесуальної $\theta=\omega t$, визначену аналітичним співвідношенням:

$$u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)=\left\{\mathbf{1}(\theta-\alpha_1)-\mathbf{1}\left[\theta-(\alpha_1+\beta_1)\right]+\mathbf{1}\left[\theta-(\pi+\alpha_2)\right]-\mathbf{1}\left[\theta-(\pi+\alpha_2+\beta_2)\right]\right\}U_m\sin\theta, \quad (2)$$

де $\mathbf{1}(\theta)$ – одинична функція Хевісайда;

U_m – амплітудне значення синусоїдної функції та її аргумент $\theta=\omega t=2\pi f\, t=\dfrac{2\pi}{T}t$;

$(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ – впорядковані четвірки (рис. 3), які є елементами лінійного (векторного) *чотиривимірного* простору з заданою в ньому *структурою*: множиною підмножин аксіоматично підпорядкованих бінарних математичних відношень поміж зазначеними упорядкованими четвірками – передусім визначеними в просторі операціями додавання та множення на скаляр.

Відтак кожну з упорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ в зазначеному чотиривимірному просторі бієктивно (взаємно-однозначно) співвіднесено з одною і лише одною, окремо узятою, 2π-періодичною функцією, яка в такому разі залежатиме тільки від *однієї* змінної – кута *θ* (або часу *t*).

Це означає, що у разі інтегрування за змінною *θ* (або за часом *t*) чотиривимірної 2π-періодичної функції $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$ або деякої *складної* підінтегральної функції $\psi\left[u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)\right]$, залежної від чотиривимірної 2π-періодичної функції, наприклад, під час визначення *функціоналу* J, інтеграл, в свою чергу, виявлятиме себе як функція від значень впорядкованої четвірки $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$

$$J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)=\int\psi\left[u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)\right]\mathrm{d}\theta, \quad (3)$$

де за область визначення такого функціоналу слугуватиме побудований нами чотиривимірний простір з структурованими у ньому елементами зазначених четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ (рис. 2)

$$\vec{\gamma}(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)=\alpha_1\vec{\boldsymbol{i}}+\beta_1\vec{\boldsymbol{j}}+\alpha_2\vec{\boldsymbol{k}}+\beta_2\vec{\boldsymbol{l}}. \quad (4)$$

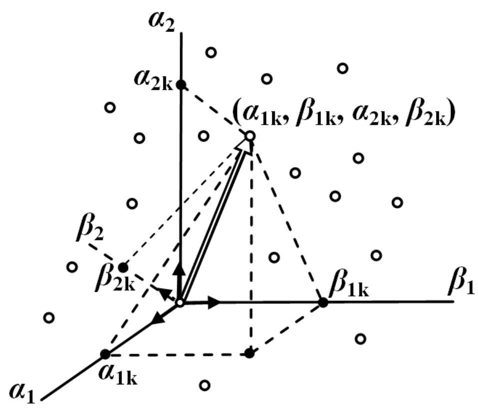

Рис. 3. Параметрична область визначення чотиривимірної 2π-періодичної функції $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, побудованої на упорядкованих четвірках

Відтак чотиривимірна розмірність простору параметричної області визначення створює принципову можливість вирішувати *оптимізаційні задачі*, тобто знаходити такі значення впорядкованих четворок і, відповідно, такі 2π-періодичні функції, де один з функціоналів залишатиметься заданим, а інші функціонали – *екстремальними*.

В контексті зазначеного варто зауважити, що і середнє значення 2π-періодичної функції на періоді

$$U_d\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta\right)d\theta, \tag{5}$$

і її середньоквадратичне значення

$$U\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^2\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta\right)d\theta}, \tag{6}$$

і коефіцієнти Фур'є з однойменного ряду

$$A^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta\right)cos\left(n\theta\right)d\theta, \tag{7}$$

$$B^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta\right)sin\left(n\theta\right)d\theta, \tag{8}$$

і амплітудно-частотний

$$U_m^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\sqrt{\left[A^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)\right]^2+\left[B^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)\right]^2} \tag{9}$$

та фазово-частотний спектри силового процесу

$$\psi_u^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\begin{cases} arctg\dfrac{A^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)}{B^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)},\ B^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)\geq 0; \\ \pm\pi+arctg\dfrac{A^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)}{B^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)},\ B^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)<0, \end{cases} \tag{10}$$

і численні параметри, які на цих спектрах побудовані і їх оцінюють,наприклад, коефіцієнт нелінійних спотворень (total harmonic distortion)

$$THD\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)=\frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}\left[U^{(n)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)\right]^2}}{U^{(1)}\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)} \tag{11}$$

тощо *власне і є тими функціоналами, про які автор наразі веде мову*!

Наведемо графік визначеної вище аналітично формулою (2) чотиривимірної 2π-періодичної функції $u\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta\right)$ із заданою впорядкованою четвіркою її координат $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ (рис. 4).

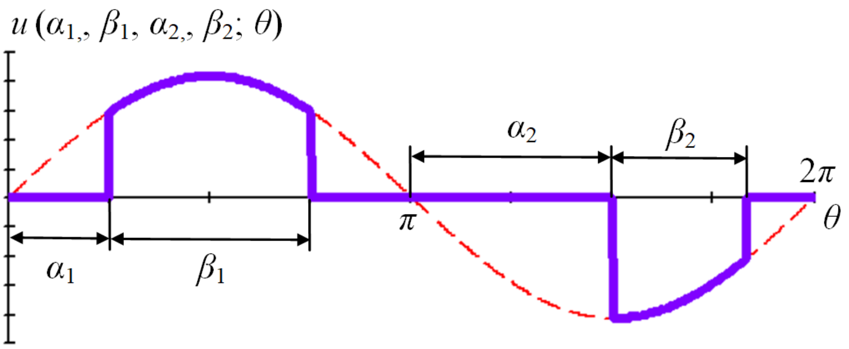

Рис. 4. Чотиривимірна 2π-періодична функція $u\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta\right)$

З рисунка видно, що простір упорядкованих четвірок, в якому визначено чотиривимірну 2π-періодичну функцію, не є відкритим, позаяк всі чотири координати його координатного базису $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ підпорядковані системі умов, заданих нерівностями:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \le \pi; \\ \alpha_2 + \beta_2 \le \pi; \\ \alpha_1 \ge 0; \ \ \beta_1 \ge 0; \\ \alpha_2 \ge 0; \ \ \beta_2 \ge 0. \end{cases} \tag{12}$$

Водночас попри дію цієї системи всі чотири координати упорядкованих четвірок $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ є незалежними, тобто жодну з них не можна визначити через інші, оскільки їх лінійні комбінації

$$C_{\alpha_1}\alpha_1 + C_{\beta_1}\beta_1 + C_{\alpha_2}\alpha_2 + C_{\beta_2}\beta_2 = 0, \tag{13}$$

окрім тривіального випадку, дорівнюють нулю лише у разі, якщо нулю дорівнюють всі коефіцієнти співвідношення (13).

Наприкінці автор зазначає, що чотиривимірним 2π-періодичним функціям $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ притаманний досить високий *рівень узагальненості* (логічної сили), оскільки відносно них навіть тригонометричні функції синуса, а у разі введення в співвідношення (2) початкової фази – і косинуса, виявляють себе в площині $(\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = \pi,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_2 = \pi)$ чотиривимірного простору області визначення лише як їх окремі випадки.

Зазначене наштовхує на думку, зміст якої автор наразі подає як гіпотезу, що потребує додаткової перевірки, – клас описаних чотиривимірних 2π-періодичних функцій, побудованих над полями значень функцій синуса або косинуса, в нескінченновимірному лінійному (векторному) функціональному просторі наділений якістю ортогонального, а можливо – і ортонормованого, координатного базису, відносно якого всі інші 2π-періодичні функції кута (або часу), як елементи такого простору, будуть представлені як лінійні комбінації узагальненим рядом Фур'є.

Висновки

В роботі на прикладі дослідження алгоритму функціонування системи силової електроніки класу АС-АС – регулятора змінного струму виявлена і описана проблема *одновимірності* 2π-періодичних функцій, які слугують за математичну модель для вихідної напруги, яку як вихідний параметр в робочому режимі формує система імпульсно-фазового керування такого пристрою.

Для вирішення цієї проблеми проведено узагальнення функціонального простору зазначених функцій, у зв'язку з чим визначено клас *багатовимірних* (наразі – *чотиривимірних*) 2π-періодичних функцій, заданих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, а також побудовано в аналітичній формі їх математичну модель, досліджено структуру простору параметричної області визначення, розкрито зміст та сутність окремих основних властивостей та якостей, зазначено можливі напрямки подальшого застосування як на теоретично-абстрагованому рівні у вихідному базисі теоретичної електротехніки, так і в її додатках – електроенергетиці, електромеханіці, інформаційній та силовій електроніках.

З урахуванням високого ступеня узагальненості чотиривимірних 2π-періодичних функцій, заданих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, сформульовано гіпотезу щодо можливості формування на основі класу заявлених функцій в лінійному (векторному) функціональному просторі ортонормованого координатного базису та узагальненого ряду Фур'є, побудованого на ньому.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 1 / В. І. Сенько, М. В. Панасенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2012 р. – 640 с.

2. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 2 / В. І. Сенько, М. В. Панасенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2013 р. – 316 с.

3. Robert W. Erickson, Dragan Maksimovic. Fundamentals of Power Electronics. – 2020.

4. Rashid M. Power electronics. Handbook. – 2017.

5. Sudipta Chakraborty, Marcelo G. Simões, William E. Kramer. Power Electronics for Renewable and Distributed Energy Systems. A Sourcebook of Topologies, Control and Integration. – 2020.

6. Промислова електроніка / В. С. Руденко, В. Я. Ромашко, В. В. Трифонюк. – Київ: Либідь, 1993 р. – 432 с.

7. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

8. ТОЕ. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навч. посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.

9. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довільного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Випуск 2. — С. 63-69.

10. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11. – Режим доступу: https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/547/532.

11. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2016. — Випуск 4. — С. 207-213.

12. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло з урахуванням фізичного явища гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький. — №2(58). — 2017. — С. 29-36.

13. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : монографія / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 196 с.

14. Ведміцький Ю. Г. Вимірювальне перетворення і контроль моменту інерції механічних та електромеханічних систем в процесі їх експлуатації. Теорія і практика / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Хмельницького національного університету. — 2008. — №4(113). — С. 47-55.

15. Ведміцький Ю. Г. Елементи теорії електродинамічного моделювання вимірювального перетворення і контролю моменту інерції. Проблематика, динамічні аналогії та принцип дуальності / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2008. — №5 (80). — С. 25-30.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп’ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg4224@gmail.com