УДК 621.3

**Ю. Г. Ведміцький**

# ЗАЛЕЖНІСТЬ ЛОКАЦІЙ ПАРАМЕТРИЧНИХ ОБЛАСТЕЙ ВИЗНАЧЕННЯ ЧОТИРИВИМІРНИХ 2π-ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВАНИХ НА СИНУСОЇДІ, ВІД ЗНАЧЕНЬ ЇХ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛУ У ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЯХ (ДОПОВІДЬ №3)

Вінницький національний технічний університет

***Анотація***

*В роботі на основі отриманої функціональної залежності розв'язана задача локації в чотиривимірному просторі параметричної області впорядкованих четвірок з області визначення чотиривимірних 2π-періодичних функцій, які відповідають заданим у відносних одиницях значенням середньоквадратичного функціонала, за умови рівності нулю на періоді інтегралів зазначених функцій, що є необхідною декомпозицією під час розв'язування задач оптимізації режимів роботи окремих важливих систем в електротехніці та силовій електроніці за критеріями, які є математичними функціоналами або безпосередньо від заявлених чотиривимірних 2π-періодичних функцій, або складних функцій, що від них залежать.*

**Ключові слова:** електротехніка, електроніка, одновимірні та багатовимірні 2π-періодичні функції, чотиривимірний лінійний простір, структура простору, багатовимірна область визначення функції, впорядковані четвірки, координатний базис, функціональний простір, коефіцієнти та ряди Фур'є, регулятор змінного струму

***Abstract***

*In the paper, based on the obtained functional dependence, the problem of location in the four-dimensional space of the parametric domain of ordered fours from the domain of definition of four-dimensional 2π-periodic functions is solved. The functions must correspond to the predetermined values of the relative rms functional, but on the condition that they are equal to zero on the period of their integrals. This is a necessary decomposition when solving problems of optimizing the operating modes of certain important systems in electrical engineering and power electronics according to criteria that are mathematical functionals either directly from the declared four-dimensional 2π-periodic functions or complex functions that depend on them.*

**Keywords:** electrical engineering, electronics, one-dimensional and multi-dimensional 2π-periodic functions, four-dimensional linear space, space structure, parametric domain of a function, ordered quads, coordinate basis, functional space, Fourier coefficients, Fourier series, AC regulator

## Вступ

Сереньоквадратичне значення на періоді *одновимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha;\theta)$, що визначені над полями значень тригонометричних синуса або косинуса (рис. 1), являє собою функцію, залежну лише від однієї змінної $\alpha$ – кута вмикання за технічної інтерпретації [1-15]:

$$U(\alpha)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^2(\alpha;\theta)d\theta}=\frac{U_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\pi-\alpha+sin\alpha\, cos\alpha}. \tag{1}$$

Перепишемо вираз (1) у відношенні до середньоквадратичного значення функції синус

$$U_0=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_m^2\, sin^2\theta\, d\theta}=\frac{U_m}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

і подамо це співвідношення як функціонал $J_0(\alpha)$, визначений на класі *одновимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha;\theta)$

$$J_0(\alpha)=\frac{U(\alpha)}{U_0}\cdot 100\%=\sqrt{1-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{\pi}sin\alpha\, cos\alpha}\cdot 100\%. \tag{3}$$

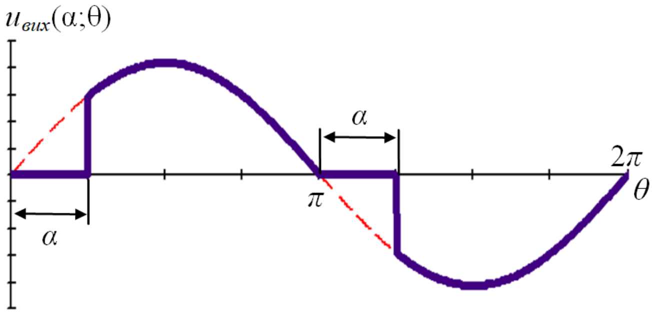



Рис. 1. Одновимірна 2π-періодична функція $u(\alpha;\theta)$

Відтак функція (3) встановлює безпосередній математичний зв'язок між значеннями функціоналу $J_0(\alpha)$, який задано у відносних одиницях, та значеннями параметра $\alpha$ з одновимірного простору параметричної області визначення *одновимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha;\theta)$ (рис. 2).

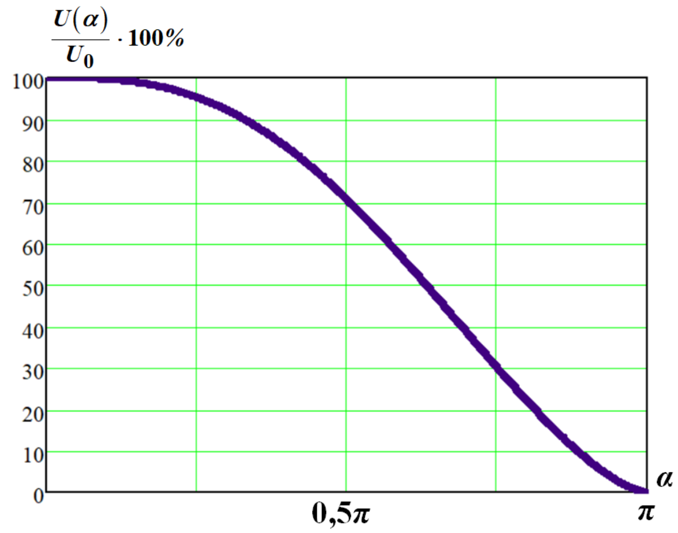



Рис. 2. Графік функції $J_d = \frac{U(\alpha)}{U_0}\cdot 100\%$

Відповідно до (3) цей зв'язок в закритому нерівністю $0 \le \alpha \le \pi$ просторі є бієктивним (взаємнооднозначним), який дозволяє у випадку *одновимірних* 2π-періодичних функцій розв'язувати *зворотну задачу – задачу локації* в одновимірному просторі їх параметричної області визначення значення параметра $\alpha$ за заданого значення функціоналу $J_0(\alpha)$.

Для *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, які побудовано над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, за умови, що *їх середні значення на періоді* дорівнюють нулю, така задача, попри її природню актуальність, допоки не розв'язана.

Тому мета цієї роботи і полягає в пошуку таких розв'язків.

## Математична ідентифікація задачі локації параметричної області визначення чотиривимірних 2π-періодичних функцій

*Чотиривимірні* 2π-періодичні функції $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, які визначено над полями значень тригонометричних функцій синуса або косинуса (рис. 3), ідентифікуються функцією п'яти змінних

$$u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)=\left\{\mathbf{1}(\theta-\alpha_1)-\mathbf{1}\left[\theta-(\alpha_1+\beta_1)\right]+\mathbf{1}\left[\theta-(\pi+\alpha_2)\right]-\mathbf{1}\left[\theta-(\pi+\alpha_2+\beta_2)\right]\right\}U_m\sin\theta, \quad (4)$$

де $\mathbf{1}(\theta)$ – одинична функція Хевісайда; $U_m$ – амплітудне значення синусоїдної функції та її аргумент $\theta=\omega t=\frac{2\pi}{T}t$; $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ – впорядковані четвірки, які є елементами лінійного *чотиривимірного* параметричного простору.

Параметричну область з області визначення таких функцій називатимемо *параметричною* областю їх визначення. Вона структурована і відтак виявляє себе як чотиривимірний закритий системою нерівностей

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \le \pi; \\ \alpha_2 + \beta_2 \le \pi; \\ \alpha_1 \ge 0; \;\; \beta_1 \ge 0; \\ \alpha_2 \ge 0; \;\; \beta_2 \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

простір, елементами якого є упорядковані четвірки $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$.

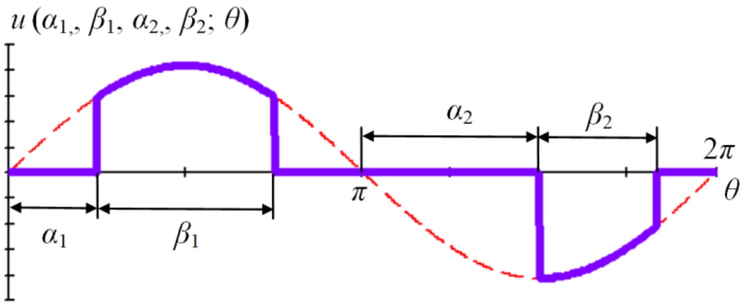



Рис. 3. Чотиривимірна 2π-періодична функція $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$

Додатково накладена умова рівності нулю *середніх* на періоді значень таких функцій, а відтак і їх інтегралів

$$J_d(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)\, d\theta = 0, \tag{6}$$

обмежує цю область розв’язками тригонометричного рівняння

$$\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 + \cos(\alpha_2 + \beta_2) - \cos(\alpha_1 + \beta_1) = 0, \tag{7}$$

підпорядкованих системі нерівностей (5).

В графічному відображенні проекція області визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, побудованих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, за умови рівності нулю на періоді їх інтегралів в тривимірний простір $(\beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ показана на рис. 4.

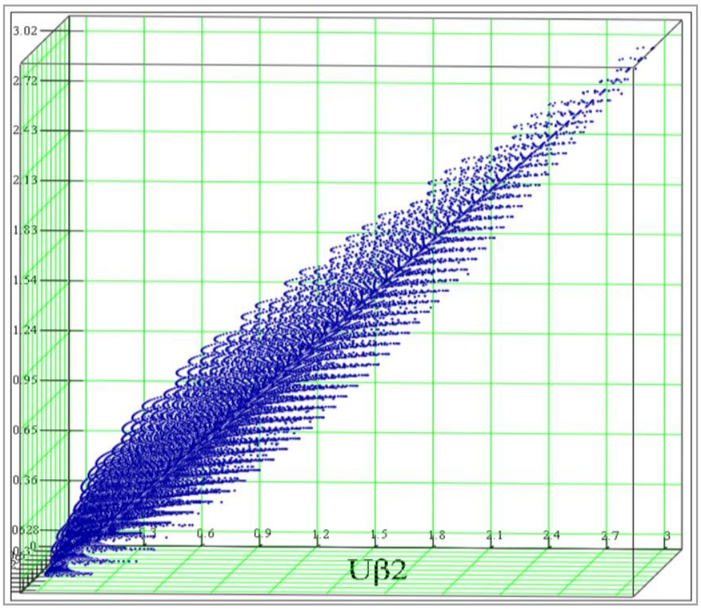



Рис. 4. Графічне відображення проекції в тривимірний простір параметричної області визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій за умови рівності нулю на періоді їх інтегралів

Зазначена в чотиривимірному просторі параметрична область визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$ наразі є вихідною в розв'язуваній задачі.

Розв'язки ж задачі будемо шукати саме в цій області.

Отже, сереньоквадратичне значення на періоді *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, що визначені над полями значень тригонометричних синуса або косинуса (рис. 3), являє собою функцію, залежну від чотирьох змінних $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$:

$$U(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u^2(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)d\theta}. \tag{8}$$

Врахувавши співвідношення (4), в результаті інтегрування отримуємо функціональну залежність в термінах елементарних тригонометричних функцій

$$U(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)=\frac{U_m}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\beta_1+\beta_2-cos(2\alpha_1+\beta_1)\,sin\beta_1-cos(2\alpha_2+\beta_2)\,sin\beta_2}. \tag{9}$$

Принагідно зазначу, що відносно отриманого співвідношення (9) залежність (1) для *одновимірних* 2π-періодичних функцій, поступившись логічною силою, буде лише окремим випадком.

Перепишемо вираз (9) у відношенні до середньоквадратичного значення тригонометричної функції синус з урахуванням (2), представивши результат як функціонал $J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, визначений на класі *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$

$$\begin{gathered}J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)=\frac{U(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}{U_0}\cdot 100\%=\\=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\beta_1+\beta_2-cos(2\alpha_1+\beta_1)\,sin\beta_1-cos(2\alpha_2+\beta_2)\,sin\beta_2}\cdot 100\%.\end{gathered} \tag{10}$$

Отже, отримане співвідношення (10) встановлює математичний зв'язок між середньоквадратичними значеннями (на періоді) *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, що визначені над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, з одного боку, а з іншого – локацією в чотиривимірному просторі впорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, які належать параметричній області визначення зазначених функцій, додатково підпорядкованих умові (6).

Як і у випадку з *одновимірними* функціями для *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій наразі закладено математичне підґрунтя для розв'язування *зворотної задачі – задачі локації* в чотиривимірному просторі параметричної області впорядкованих четвірок з області визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій, які відповідають заданим у відносних одиницях значенням середньоквадратичного функціонала $J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, за умови рівності нулю на періоді інтегралів цих функцій.

Проведемо таке дослідження для всіх (!) з дискретної множини (потужністю $\aleph$) значень впорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, скориставшись системою комп'ютерної математики Mathcad.

**Параметрична область визначення чотиривимірних 2π-періодичних функцій за умови рівності нулю їх середньоарифметичного значення та заданих у відносних одиницях середньоквадратичних значень**

На рис. 5 наведено лістинг фрагменту програм в середовищі системи комп'ютерної математики Mathcad, за допомогою яких були покоординатно сформовані:

- *масив всіх дискретних значень впорядкованих четвірок* $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ з чотиривимірного простору параметричної області визначення досліджуваних *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій, які задовольняють систему нерівностей (5) і є розв'язками рівняння (7),
- *масив значень середньоквадратичного функціонала* $J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, який побудовано за співвідношенням (10) над полями значень зазначених впорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$.

В свою чергу, перший з масивів – масив впорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ фрагментарно показаний на рис. 6. На цьому ж рисунку фрагментарно наведені значення масиву середньоквадратичного функціонала $J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, які цим четвіркам відповідають.

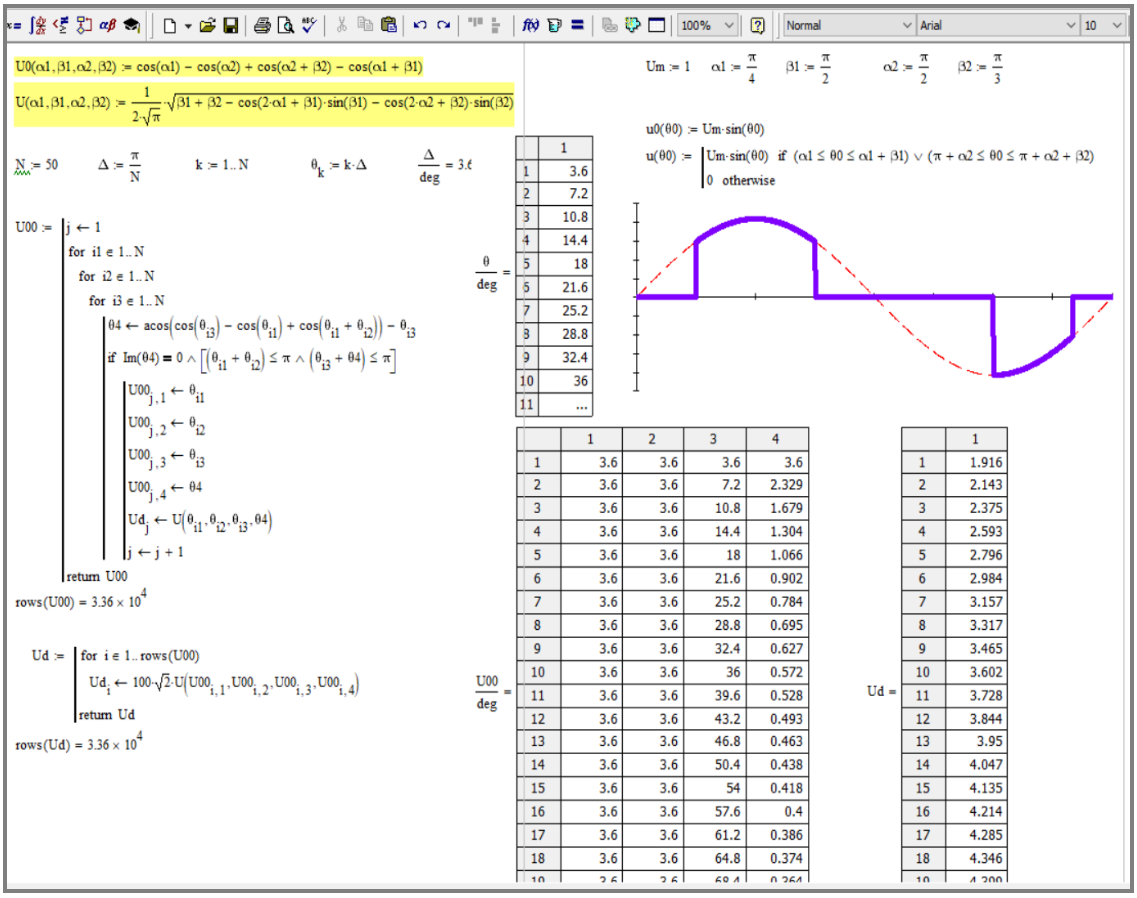



Рис. 5. Лістинг  фрагменту програм в математичному середовищі Mathcad

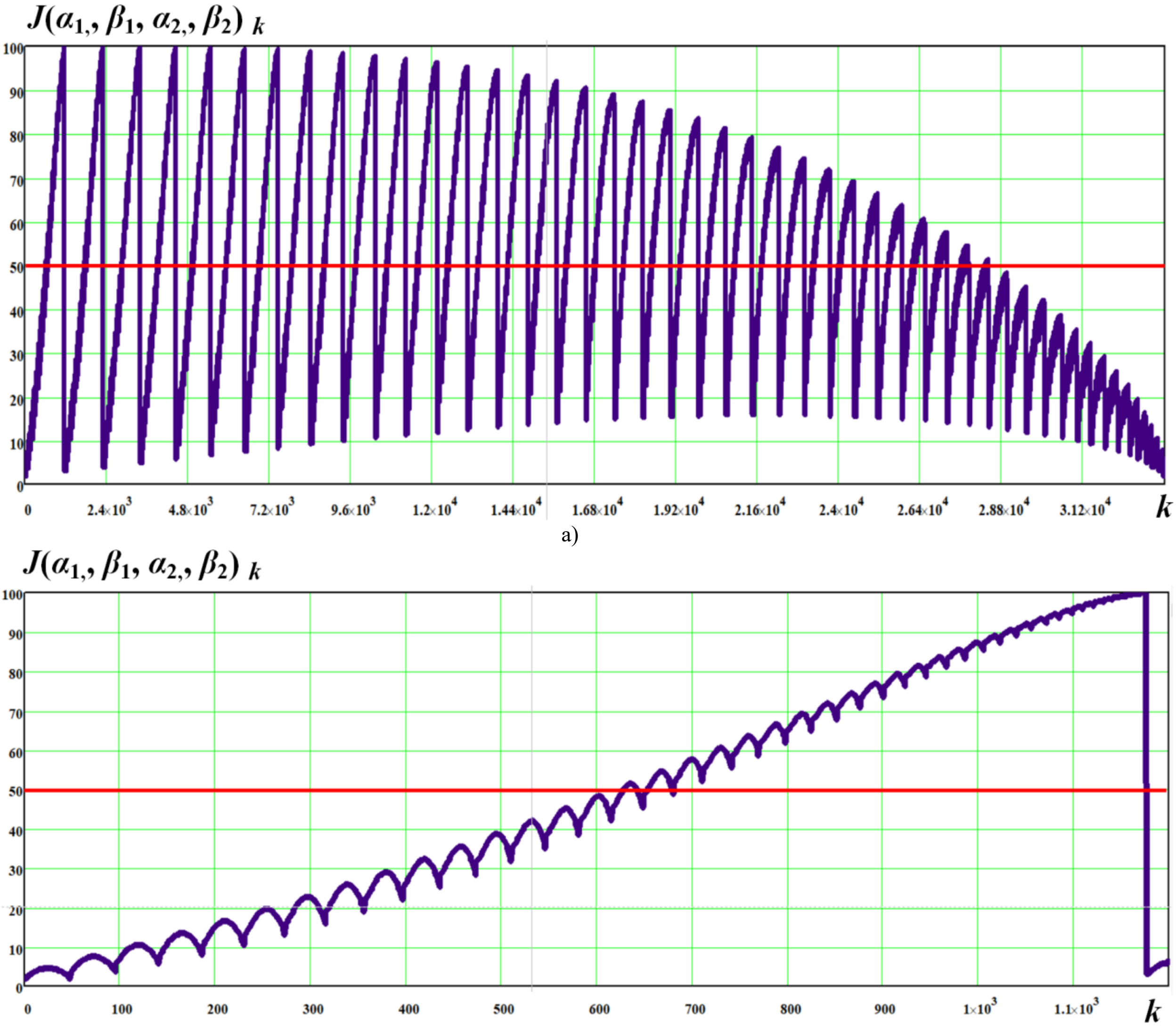
| $k$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 3.6 | 3.6 | 3.6 | 3.6 |
| 2 | 3.6 | 3.6 | 7.2 | 2.329 |
| 3 | 3.6 | 3.6 | 10.8 | 1.679 |
| 4 | 3.6 | 3.6 | 14.4 | 1.304 |
| 5 | 3.6 | 3.6 | 18 | 1.066 |
| 6 | 3.6 | 3.6 | 21.6 | 0.902 |
| 7 | 3.6 | 3.6 | 25.2 | 0.784 |
| 33597 | 172.8 | 3.6 | 151.2 | 0.711 |
| 33598 | 172.8 | 3.6 | 154.8 | 0.808 |
| 33599 | 172.8 | 3.6 | 158.4 | 0.94 |
| 33600 | 172.8 | 3.6 | 162 | 1.131 |
| 33601 | 172.8 | 3.6 | 165.6 | 1.432 |
| 33602 | 172.8 | 3.6 | 169.2 | 1.989 |
| 33603 | 172.8 | 3.6 | 172.8 | ... |

| $k$ | $J$ |
|---|---|
| | 1 |
| 1 | 1.916 |
| 2 | 2.143 |
| 3 | 2.375 |
| 4 | 2.593 |
| 5 | 2.796 |
| 6 | 2.984 |
| 7 | 3.157 |
| 33597 | 3.286 |
| 33598 | 3.119 |
| 33599 | 2.936 |
| 33600 | 2.734 |
| 33601 | 2.508 |
| 33602 | 2.248 |
| 33603 | ... |

Рис. 6. Масив  впорядкованих четвірок $\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)$ та масив значень середньоквадратичного функціонала $J\left(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)$, що їм відповідає

На рис. 7, а на дискретній множині числових значень кутів з показана залежність середньоквадратичного функціонала $J(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, який побудовано за співвідношенням (10), над полями значень зазначених впорядкованих четвірок $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, що охоплює *всю* (!) параметричну область визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій, де виконуються умови (5) і (7).

Зазначену залежність лише на частині цієї області визначення, а саме лише на одному дискретному кроці параметра $\alpha_1$, показано на рис. 7, б.




б)

Рис. 7. Залежність середньоквадратичного функціонала $J(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ над полями значень впорядкованих четвірок $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ і графічна локація параметричної області визначення чотиривимірної 2π-періодичної функції, яка співвіднесена з заданим значенням середньоквадратичного функціоналу

Також на обох рисунках на прикладі одного із значень середньоквадратичного функціонала $J(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, а саме значення $J = 50\%$, наявністю багатьох точок перетину наочно доведена *альтернативна сутність* параметричної області визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, побудованих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, відповідно до якої заданому значенню середньоквадратичного функціоналу відповідає не одна впорядкована четвірка, як це спостерігається в параметричній області значень *одновимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha;\theta)$, а їх множина!

Водночас заданий рівень значення середньоквадратичного функціоналу $J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ у *графічний* спосіб виявляє в чотиривимірному просторі (!) локацію впорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, які є розв'язком поставленої задачі.

Фрагмент проекції області визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, побудованих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, за умов $\int_0^{2\pi} u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)d\theta = 0$ та $50\% \le J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \le 75\%$, в тривимірний простір $(\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ показано на рис. 8.

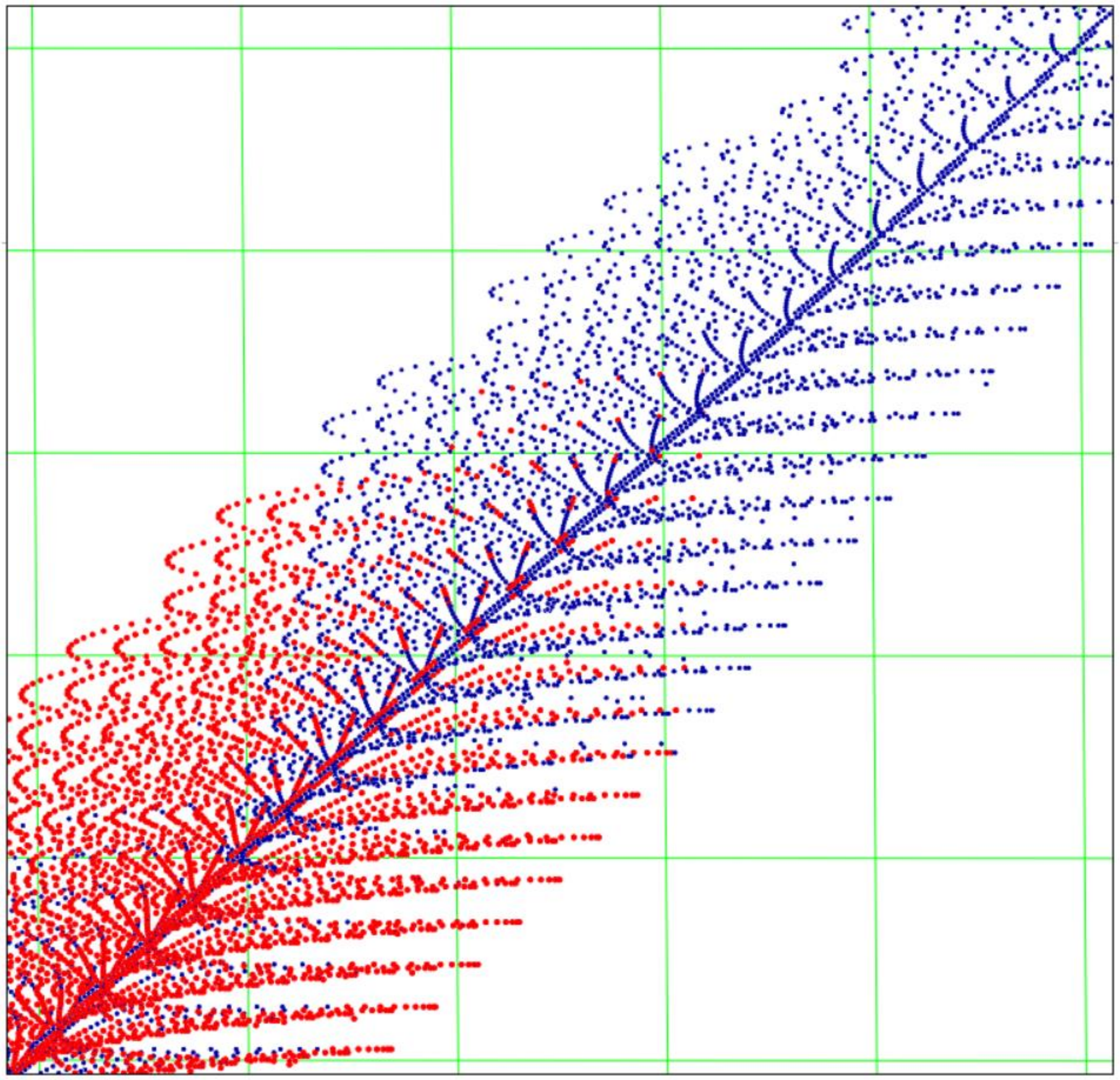


Рис. 9. Фрагмент проекції області визначення чотиривимірних 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, для упорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ яких виконуються умови $\int_0^{2\pi} u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)d\theta = 0$ та $50\% \le J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \le 75\%$, в тривимірний простір $(\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$

Повне відображення зазначеної проекції демонструє рис. 10.

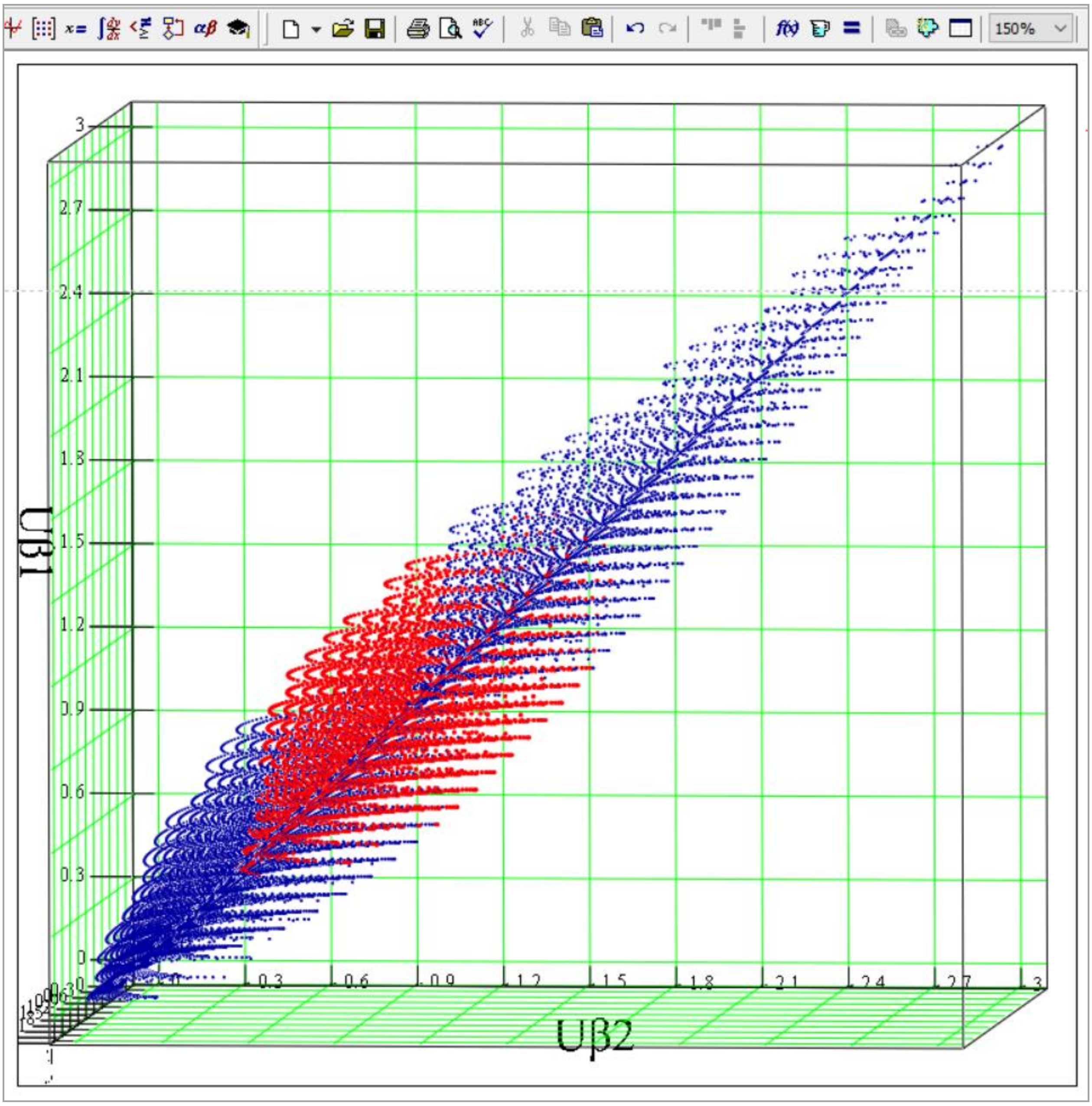



Рис. 10. Проекції області визначення чотиривимірних 2π-періодичних функцій $u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)$, для упорядкованих четвірок $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ яких виконуються умови $\int_0^{2\pi} u(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2;\theta)d\theta = 0$ та $50\% \le J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \le 75\%$, в тривимірний простір $(\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$

**Висновки**

В роботі розв'язана *задача локації* в чотиривимірному просторі параметричної області впорядкованих четвірок з області визначення *чотиривимірних* 2π-періодичних функцій, які відповідають заданим у відносних одиницях значенням середньоквадратичного функціонала $J(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$, за умови рівності нулю на періоді інтегралів зазначених функцій, що є необхідною декомпозицією під час розв'язування задач оптимізації режимів роботи окремих важливих систем в електротехніці та силовій електроніці за критеріями, які є математичними функціоналами або безпосередньо від заявлених чотиривимірних 2π-періодичних функцій, або складних функцій, що від них залежать.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 1 / В. І. Сенько, М. В. Панасенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2012 р. – 640 с.

2. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 2 / В. І. Сенько, М. В. Панасенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2013 р. – 316 с.

3. Robert W. Erickson, Dragan Maksimovic. Fundamentals of Power Electronics. – 2020.

4. Rashid M. Power electronics. Handbook. – 2017.

5. Sudipta Chakraborty, Marcelo G. Simões, William E. Kramer. Power Electronics for Renewable and Distributed Energy Systems. A Sourcebook of Topologies, Control and Integration. – 2020.

6. Промислова електроніка / В. С. Руденко, В. Я. Ромашко, В. В. Трифонюк. – Київ: Либідь, 1993 р. – 432 с.

7. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

8. ТОЕ. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навч. посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.

9. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довільного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Випуск 2. — С. 63-69.

10. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11. – Режим доступу: https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/547/532.

11. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2016. — Випуск 4. — С. 207-213.

12. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло з урахуванням фізичного явища гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький. — №2(58). — 2017. — С. 29-36.

13. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : монографія / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 196 с.

14. Ведміцький Ю. Г. Вимірювальне перетворення і контроль моменту інерції механічних та електромеханічних систем в процесі їх експлуатації. Теорія і практика / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Хмельницького національного університету. — 2008. — №4(113). — С. 47-55.

15. Ведміцький Ю. Г. Елементи теорії електродинамічного моделювання вимірювального перетворення і контролю моменту інерції. Проблематика, динамічні аналогії та принцип дуальності / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2008. — №5 (80). — С. 25-30.



***Юрій Григорович Ведміцький*** — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп’ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

***Yurii G. Vedmitskyi*** — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net