

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ БАЛКИ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Й. Й. Лучко, І. М. Добрянський, Є. Г. Іваник

Запропоновано аналітичний метод визначення напружень згинної балки на базі рівнянь теорії пружності. Виконано зіставлення числових результатів поведінки нормальних і дотичних напружень з відповідними значеннями, підрахованими за формулами опору матеріалів.

Предложен аналитический метод определения напряжений изгибной балки на базе уравнений теории упругости. Выполнено сопоставление численных результатов поведения нормальных и касательных напряжений с соответствующими значениями, подсчитанными по формулам сопротивления материалов.

An analytical method for determining the beam bending stresses on the basis of elasticity equations. Done numerical results comparing the behavior of normal and tangential stresses with the corresponding values calculated by the formulas of resistance.

Постановка проблеми. Залізобетон на сьогодні є основним складником конструктивних елементів будівельної індустрії. Враховуючи нестримний ріст масштабів будівництва зрозумілою є актуальність проблеми раціонального проектування залізобетонних конструкцій з використанням сучасних модифікованих методик, бо навіть незначна економія матеріалу на виробках масового виробництва дає значну економію відповідних матеріальних ресурсів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Раціональність та економічність проектованої конструкції є залежними від багатьох чинників, важливим серед яких це методика розрахунку. Хоча на даний час методи розрахунку будівельних конструкцій надзвичайно розвинуті, але їх удосконалення триває постійно [1-5].

До числа факторів, які утруднюють створення стрункої прийнятної методики розрахунку напруженого стану згинних балок, є наявність тріщин в розтягнутих зонах залізобетону, які виникають навіть для відносно малих рівнів зовнішнього навантаження, внаслідок низького опору бетону розтягу. Виникаючи в околі опор, точніше в безпосередній близькості від опор, де мають місце значні перерізувальні сили, тим самим значно ускладнюючи методику розрахунку бетонних елементів конструкцій в умовах складного напруженого стану. Слід також особливу увагу звернути на те, що при проектуванні будівлі для її надійності має велике значення те, який варіант розрахунку при знаходженні силових факторів в околі опорних ділянок бере в основу проєктант тому, що вони можуть суттєво відрізнятись [6, 7].

Постановка завдання. Поставимо завдання побудувати схему уточненого розрахунку балки при згині на основі методів теорії пружності. Зрозуміло, що похилі тріщини утворюються безпосередньо в околі опор, де, як впливає з принципу Сен-Венана, розв'язок опору матеріалів неприйнятний. При цьому враховуватимемо наявність ділянок скінченої довжини в околі торців балки, які сприймають тимчасове навантаження. В такій постановці граничні умови на кінцях балки можна задовольнити точно без притягнення принципу Сен-Венана. Розрахункову схему приймемо у вигляді балки прямокутного поперечного перерізу одиничної ширини, висотою H і довжиною $2L$, на двох шарнірних опорах, яка перебуває в умовах дії розподіленого навантаження $p(x)$. Вважаємо, що балка є ізотропним лінійно-пружним матеріальним континуумом. Нижня і верхня кромки балки вільні від дотичних зусиль, на торцях напруження відсутні (рис. 1, а).

В літературі [8, 9] відомі ефективні методи розв'язування задачі про згин балки при сталому зовнішньому навантаженні. Однак у вказаних роботах задача про згин балки замінена задачею про рівновагу полоси, до бокових граней якої прикладено дотичні зусилля $\tau_{xy}(L, y)$ (рис. 1, б), які зрівноважують зовнішнє навантаження p , тобто

$$\int_0^H \tau_{xy}(L, y) dy = pL. \tag{1}$$

Враховуючи принцип Сен-Венана наявні в літературі розв'язки є досить адекватними при описі згину балок. Але подальший аналіз задачі про визначення напружено-деформованого стану залізобетонної балки з тріщиною потребує більш точнішого підходу, особливо в околі точок $x = \pm L$, тобто на торцях балки, де можливе зародження і розповсюдження похилих тріщин.

В даній роботі поставимо задачу про отримання розрахункових формул для компонент тензора напружень у балці в довільному перерізі, в тому числі і там, де можливе зародження тріщини.

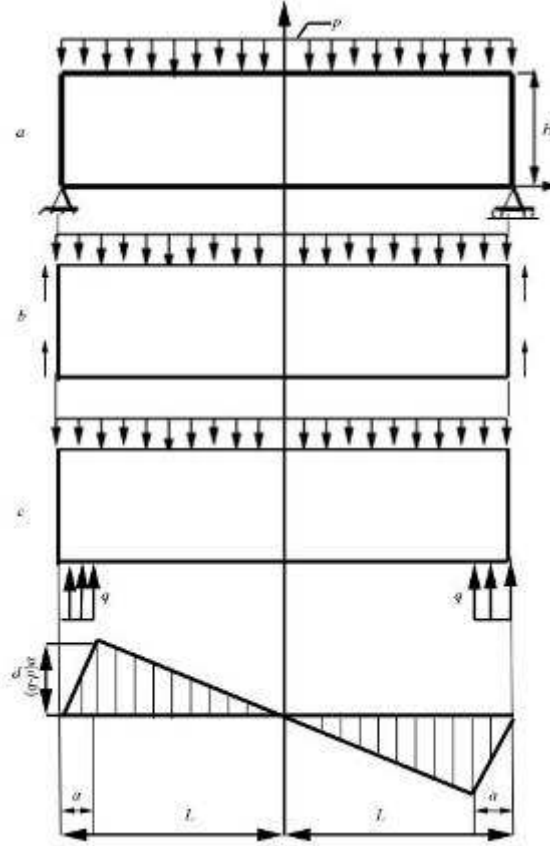


Рис. 1. Статично-визначена балка:

a – балка на двох опорах; *b* – рівновага полоси з дотичними зусиллями на гранях;
c – рівномірне розподілення опорних реакцій; *d* – епюра перерізувальних сил

Викладення основного матеріалу. Запишемо граничні умови задачі:

$$\begin{aligned} \sigma_y = -p(x) \text{ при } y = H, \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, y = H, \\ \sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0 \text{ при } x = \pm L. \end{aligned} \quad (2)$$

Опорні реакції замінимо розподіленням навантаженням, яке діє на деякій скінченній ділянці по ширині опори.

Для найпростішого випадку сталого навантаження в околі опор (рис. 1, *c*). доповнимо граничні умови (2) вважаючи, що при $y = 0$ має місце додаткова умова

$$\sigma_y = -q(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq |x| \leq L - a, \\ q, L - a < |x| \leq L, \end{cases} \quad (3)$$

причому в умові (3) a – ширина опори.

В результаті маємо задачу теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану в розглядуваній системі, за граничних умов (2), (3).

Розкладемо зовнішнє навантаження $p(x)$ в ряд Фур'є за косинусами з вимогою про

відсутність вільного члена шляхом продовження функції $p(x)$ на інтервал довжиною $4L$ ($-2L \leq x \leq 2L$) таким чином: $p(2L-x) = -p(x)$, $0 \leq x \leq L$, $p(-x) = p(x)$, $-2L \leq x \leq 2L$ (рис. 2, а).

В результаті отримаємо:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos \alpha_k x, \quad p_{2k} = 0, \quad p_k = \frac{4p}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1}, \quad k = 2n-1. \quad (4)$$

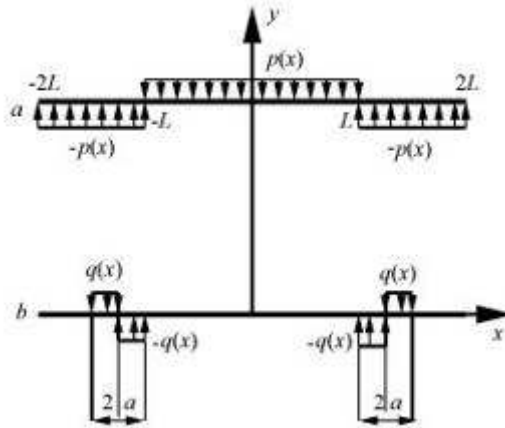


Рис. 2. Графік функцій $p(x)$ (а) і $q(x)$ (б) на розширеному інтервалі ($-2L \leq x \leq 2L$)

Поступаючи аналогічним чином стосовно функції $q(x)$ (рис. 2, б) у граничній умові (3) матимемо

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos \alpha_k x, \quad q_k = \frac{4q(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi a}{2L^2} \right]. \quad (5)$$

Розглянемо випадок розподілу навантаження в околі опор за лінійним законом (рис. 3, а). Доповнимо граничні умови (2) вважаючи, що при $y = 0$ має місце додаткова умова

$$\sigma_y = -q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| \leq L-a, \\ q \frac{L}{a} \left(1 - \frac{x}{L} \right), & L-a < |x| \leq L, \end{cases} \quad (6)$$

причому в умові (6), a – ширина опори. З умови рівноваги балки впливає умова $qa = 2pL$.

Розкладемо діючі зовнішні навантаження, які описуються функціями $p(x)$ та $q(x)$ в ряд Фур'є, розширивши інтервал зміни їх аргумента x від $-L \leq x \leq L$ до $-2L \leq x \leq 2L$. Тоді для навантаження $p(x)$ на інтервал довжиною $4L$ ($-2L \leq x \leq 2L$), причому $p(2L-x) = -p(x)$, $0 \leq x \leq L$, $p(-x) = p(x)$, $-2L \leq x \leq 2L$, дістанемо залежності згідно з (4).

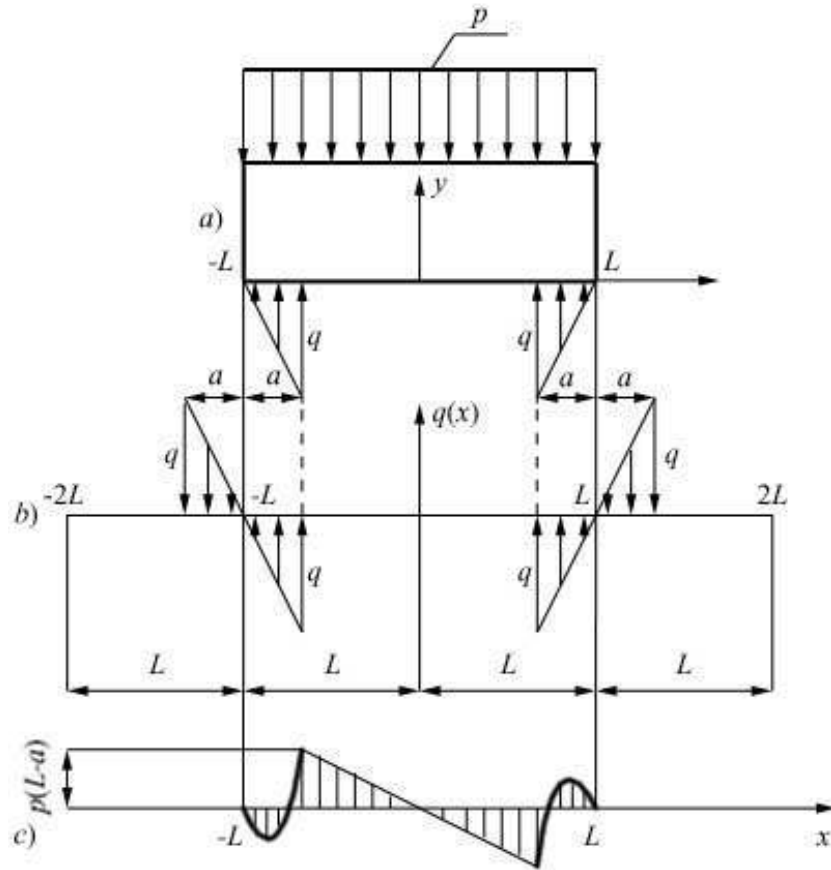


Рис. 3. Розподілене навантаження на балку $p(x)$ (a); графік функції $q(x)$ (b) на розширеному інтервалі $(-2L \leq x \leq 2L)$; епюра перерізувальної сили (c)

Функція $q(x)$ на розширеному інтервалі зміни (рис. 3, b) буде

$$q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| \leq L - a, \\ q \frac{L}{a} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right), & L - a < |x| \leq L + a, \\ 0, & L + a < |x| \leq 2L. \end{cases}$$

Тоді для розкладу $q(x)$ матимемо:

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos \alpha_k x, \quad q_k = \frac{q}{a} \int_{L-a}^{L+a} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos \frac{k\pi x}{2L} dx,$$

$$q_k = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{4q(-1)^k}{k\pi} \left[\frac{2L}{k\pi a} \sin \frac{k\pi a}{2L} - \cos \frac{k\pi a}{2L} \right], & k = 2n - 1. \end{cases} \quad (7)$$

Шукані компоненти тензора напружень виразимо через бігармонічну функцію Ері U [10]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Оскільки функція Ері парна за змінною x , то її можна подати у вигляді

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k ch \alpha_k y + B'_k y ch \alpha_k y + B_k sh \alpha_k y + C_k y sh \alpha_k y) \cos \alpha_k x,$$

на основі чого маємо таке уявлення для компонент тензора напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k \alpha_k + 2C_k) \alpha_k ch \alpha_k y + (2B'_k + B_k \alpha_k) \alpha_k sh \alpha_k y + \\ &\quad + y \alpha_k^2 (B'_k ch \alpha_k y + C_k sh \alpha_k y)] \cos \alpha_k x, \\ \sigma_y &= -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (A_k ch \alpha_k y + B'_k y ch \alpha_k y + B_k sh \alpha_k y + C_k y sh \alpha_k y) \cos \alpha_k x, \\ \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [(A_k \alpha_k + C_k) sh \alpha_k y + (B'_k + B_k \alpha_k) ch \alpha_k y + \\ &\quad + y \alpha_k (B'_k sh \alpha_k y + C_k ch \alpha_k y)] \sin \alpha_k x. \end{aligned} \quad (8)$$

На основі залежностей (8) з граничної умови $\sigma_x = 0$ при $x = \pm L$ маємо $\alpha_k = \frac{\pi k}{2L}$ ($k = 2n - 1$). Далі з умови (3) та задовольнивши граничну умову $\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$, дістаємо

$$A_k = \frac{q_k}{\alpha_k^2}, \quad B'_k = -\alpha_k B_k. \quad (9)$$

В результаті, беручи до уваги залежності (5), (7), (9), співвідношення (8) можна переписати таким чином

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{k=1}^{\infty} [(q_k + 2C_k \alpha_k) \alpha_k ch \alpha_k y - B_k \alpha_k^2 sh \alpha_k y + \\ &\quad + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k ch \alpha_k y + C_k sh \alpha_k y)] \cos \alpha_k x, \\ \sigma_y &= -\sum_{k=1}^{\infty} [q_k ch \alpha_k y + \alpha_k^2 B_k sh \alpha_k y + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k ch \alpha_k y + C_k sh \alpha_k y)] \cos \alpha_k x, \\ \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} [(q_k + C_k \alpha_k) sh \alpha_k y + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k sh \alpha_k y + C_k ch \alpha_k y)] \sin \alpha_k x. \end{aligned} \quad (10)$$

В отриманих залежностях (10) невідомими залишаються коефіцієнти B_k , C_k ; для їх визначення використаємо дві з умов (2), а саме: $\tau_{xy} = 0$ і $\sigma_y = -p(x)$ при $y = H$. В результаті приходимо до системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} q_k sh \alpha_k H + C_k \alpha_k sh \alpha_k H + H \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k sh \alpha_k H + C_k \alpha_k sh \alpha_k H) &= 0, \\ q_k ch \alpha_k H + B_k \alpha_k^2 sh \alpha_k H + H \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k ch \alpha_k H + C_k sh \alpha_k H) &= p_k, \end{aligned}$$

розв'язком якої є

$$B_k = \frac{\alpha_k H c h \alpha_k H + s h \alpha_k H}{\alpha_k^2 s h^2 \alpha_k H - \alpha_k^2 H^2} p_k - \frac{s h \alpha_k H \alpha_k H + \alpha_k H}{\alpha_k^2 s h^2 \alpha_k H - \alpha_k^2 H^2} q_k,$$

$$C_k = \frac{s h \alpha_k H (p_k \alpha_k H - q_k s h \alpha_k H)}{\alpha_k (s h^2 \alpha_k H - \alpha_k^2 H^2)}.$$

Формули (10) і залежності для визначення коефіцієнтів C_k, B_k дають розв’язок розглядуваної задачі про згин балки, за винятком умови відсутності дотичних напружень на торцях балки. Для рівнодійної R напружень τ_{xy} маємо формулу

$$R = \int_0^y \tau_{xy} dy \text{ при } x = \pm L,$$

підставляючи в яку вираз для τ_{xy} з (10), отримуємо

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k - q_k}{\alpha_k} \sin \alpha_k L. \quad (11)$$

Зауважимо, що права частина виразу (11) є рівнодійною зовнішнього силового навантаження $p(x)$ та опорної реакції $q(x)$. Використавши співвідношення (4), (5) дістаємо вираз для рівнодійної

$$R = p \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - q \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi a}{2L} \right]. \quad (12)$$

Запишемо відомі [11] залежності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\xi}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \xi \right),$$

підставляючи які у співвідношення (12), поклавши при цьому $\xi = \frac{\pi a}{2L}$, приходимо до рівності

$R = pL - qa$. Однак з умови рівноваги балки випливає $pL = qa$, звідки остаточно маємо $R = 0$, тобто побудований розв’язок про згин балки на основі рівнянь і залежностей теорії пружності задовольняє всі граничні умови (2) за винятком відсутності дотичних зусиль на торцях балки, де маємо $R = 0$ при $x = \pm L$.

Будь-який метод розв’язування математично сформульованої задачі науково-технічного спрямування має забезпечити отримання результату, який кількісно і якісно відображав би найсуттєвіші особливості досліджуваної проблеми.

Основна мета розгляду задач механіки полягає в тому, щоб отримані аналітичні залежності набули значної завершеності; цієї мети можна досягнути, якщо отримані загальні формули допускають проведення обчислень з фізично виправданою точністю.

Залежності (10) мають дещо незручну форму, пов’язану з наявністю безмежних рядів, в яких до того ж фігурують гіперболічні синуси і косинуси. Тому для побудови розрахункових алгоритмів на основі отриманих залежностей необхідно здійснити перетворення виразів (10) у форму, зручну для програмування, з метою недопущення переповнення при виконанні програми.

Загальний аналіз збіжності рядів для напружень з використанням асимптотичних наближень виявив дуже повільну їх збіжність на границі тіла і в точках, достатньо близьких до границі. Тому виконаємо процедуру покращення збіжності на основі виділення і подання в

замкнутому вигляді їх повільно збіжних частин [12].

Оскільки $\alpha_k y \gg 1$, то $sh^2 \alpha_k H \gg \alpha_k^2 H^2$, $sh \alpha_k y \approx ch \alpha_k y$. З урахуванням вказаних асимптот формули для сталих B_k , C_k можна подати у такому вигляді

$$B_k = \frac{(\alpha_k H + 1)}{\alpha_k^2 sh^2 \alpha_k H} p_k - \frac{1}{\alpha_k^2} q_k, \quad C_k = \frac{1}{sh \alpha_k H} p_k - \frac{1}{\alpha_k} q_k.$$

В результаті отримуємо такі формули для визначення напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{k=1}^{k_x-1} [(q_k + 2C_k \alpha_k) \alpha_k ch \alpha_k y - B_k \alpha_k^2 sh \alpha_k y + \\ &+ y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k ch \alpha_k y + C_k sh \alpha_k y)] \cos \alpha_k x + \sum_{k=k_x}^{\infty} (\alpha_k H - \alpha_k y - 1) p_k e^{-\alpha_k (H-y)} \cos \alpha_k, \\ \sigma_y &= -\sum_{k=1}^{k_y-1} [q_k ch \alpha_k y + \alpha_k^2 B_k sh \alpha_k y + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k ch \alpha_k y + C_k sh \alpha_k y)] \cos \alpha_k x + \\ &+ \sum_{k=k_y}^{\infty} (\alpha_k y - \alpha_k H - 1) p_k e^{-\alpha_k (H-y)} \cos \alpha_k, \\ \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{k_{xy}-1} [(q_k + C_k \alpha_k) sh \alpha_k y + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k sh \alpha_k y + C_k ch \alpha_k y)] \sin \alpha_k x + \\ &+ \sum_{k=k_y}^{\infty} (\alpha_k y - \alpha_k H) p_k e^{-\alpha_k (H-y)} \sin \alpha_k. \end{aligned} \quad (13)$$

У формулах (13) номери k_x, k_y, k_{xy} – найменші значення індекса підсумовування, за яких прямий розрахунок за формулами (10) дає переповнення порядку відповідно для напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} .

Формули (13) визначають розв’язок розглядуваної задачі з точністю до принципу Сен-Венана. При цьому в граничній умові (2) замість $\tau_{xy} = 0$ при $x = \pm L$ виконується лише співвідношення (1), тобто $R = 0$. Отже, необхідно зняти дотичне напруження при $x = \pm L$. З цією метою розглянемо допоміжну задачу для необмеженої полоси (рис. 4): грані $y = \pm H/2$ вільні від напружень, на торці $x = 0$ відсутні нормальні напруження σ_x , але прикладено дотичні напруження τ_{xy} , протилежні за знаком відповідному напруженню τ_{xy}^0 згідно з умовою (7).

В граничних умовах напруження τ_{xy}^0 визначається виразом

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \{ (q_{2k-1} + C_{2k-1} \alpha_{2k-1}) sh \alpha_{2k-1} (y + H/2) + \\ &+ (y + H/2) \alpha_{2k-1}^2 [-\alpha_{2k-1} B_{2k-1} sh \alpha_{2k-1} (y + H/2) + C_{2k-1} ch \alpha_{2k-1} (y + H/2)] \}. \end{aligned}$$

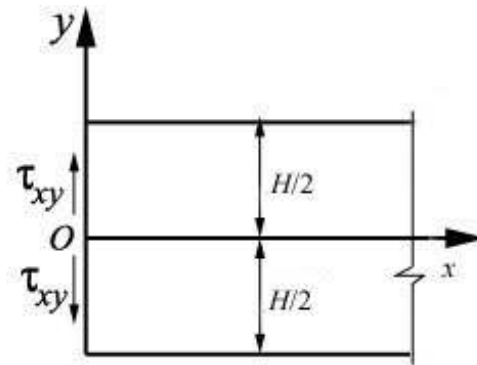


Рис. 4. Необмежена полоса, до торця якої прикладені дотичні напруження

Подамо вираз для τ_{xy}^0 у вигляді ряду Фур'є

$$\tau_{xy}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau'_k \sin \beta_k y + \tau''_k \cos \beta_k y)$$

в якому коефіцієнти розкладу визначаються формулами

$$\tau'_k = \frac{2}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy}^0 \sin \beta_k y dy, \quad \tau''_k = \frac{2}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy}^0 \cos \beta_k y dy, \quad \beta_k = \frac{2k\pi}{H}.$$

Обчислюючи відповідні інтеграли дістаємо

$$\begin{aligned} \tau'_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \left\{ - (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\ &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} \right] + \\ &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\}, \quad (14) \\ \tau''_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \left\{ (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\ &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] + \\ &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

В отриманих залежностях при великих значеннях індекса підсумовування n гіперболічні функції $\operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H$ та $\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H$ прямують до безмежності, тому можна покласти $\operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H \cong \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H$. Тому перетворюючи вирази (14), беручи до уваги також співвідношення для коефіцієнтів B_{2n-1} , C_{2n-1} , дістанемо

$$\begin{aligned}
 \tau'_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{n_1^*} (-1)^{n+k} \left\{ - (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\
 &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k (c h \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} \right] + \\
 &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H c h \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\} - \\
 &- \frac{4}{H} \sum_{n=n_1^*+1}^{\infty} (-1)^{n+k} (p_{2n-1} + q_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1}^2 \beta_k}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2}, \\
 \tau''_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{n_2^*} (-1)^{n+k} \left\{ (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (c h \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\
 &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H c h \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] + \\
 &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) (c h \alpha_{2n-1} H - 1)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\} \\
 &+ \frac{2}{H} \sum_{n=n_2^*+1}^{\infty} (-1)^{n+k} (q_{2n-1} - p_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

У формулах (15) величини n_1^* і n_2^* – мінімальні з можливих значень індекса підсумовування, за яких прямий розрахунок за формулами (13) дає переповнення порядку.

При $x = 0$ з співвідношень (13) отримуємо

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (A_k'' \sin \beta_k y - B_k'' \cos \beta_k y). \tag{16}$$

Зіставлення формул для дотичних напружень (15) і співвідношення (16) приводить до рівностей

$$A_k'' = \frac{\tau'_k}{\beta_k}, \quad B_k'' = - \frac{\tau''_k}{\beta_k}.$$

Розв'язок вихідної задачі з граничними умовами (2) отримується суперпозицією напружених станів, які відповідають сталому розподіленню навантаження в околі опор ($\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1}$) і напруженому стані в необмеженій полосі, до торця якої прикладено дотичні зусилля, який з врахуванням залежностей (14)-(16) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 e^{-\beta_k x} (A_k'' \cos \beta_k y + B_k'' \sin \beta_k y), \\
 \sigma_{y_2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (\beta_k x - 2) (A_k'' \cos \beta_k y + B_k'' \sin \beta_k y), \\
 \tau_{xy_2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (1 - \beta_k x) (A_k'' \sin \beta_k y - B_k'' \cos \beta_k y),
 \end{aligned} \tag{17}$$

тобто

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_1} - \sigma_{y_2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_1} - \tau_{xy_2}. \quad (18)$$

Розв’язування допоміжної задачі теорії пружності показує, що на верхній і нижній основах балки ($y = 0, y = H$) виникають дотичні τ_{xy} і нормальні σ_y напруження, але відповідний чисельний аналіз свідчить, що їх величина досить низька; їх порядок не перевищує $p/10$. Вказані значення напружень наведено в табл. 1 і табл. 2. Верхня частина кожної таблиці відповідає сталому розподілу навантаження в околі опор, нижня – випадку змінної опорної реакції.

Таблиця 1

Розрахункові значення нормальних напружень σ_y на нижній і верхній основі балки

x/L	y/H	σ_y / p
-1,0	0,0	4,6570413
-0,8	0,0	-0,39953663
-0,6	0,0	-0,14639635
-0,4	0,0	-0,10096459
-0,2	0,0	-0,084929583
0,0	0,0	-0,080559795
-1,0	0,3	4,6570413
-0,95	0,3	-0,37442341
-0,90	0,3	-1,0121970
-0,85	0,3	-1,0739440
-0,80	0,3	-1,0458622
-0,60	0,3	-0,99521735
-0,40	0,3	-0,99442287
-0,20	0,3	-0,99506529
0,0	0,3	-0,99528950

Таблиця 2

Розрахункові значення дотичних напружень τ_{xy} на нижній і верхній основі балки

x/L	y/H	τ_{xy} / p
-1,0	0,0	-0,002782614
-0,8	0,0	0,033547817
-0,6	0,0	0,00051608080
-0,4	0,0	-0,0004152510
-0,2	0,0	-0,00017618619
0,0	0,0	-0,00000001168211
-1,0	0,3	-0,026841641
-0,80	0,3	-0,034471121
-0,60	0,3	-0,00002912822
-0,40	0,3	-0,00000060236574
-0,20	0,3	0,000000011568211

Чисельний аналіз за розрахунковими формулами (13) і (18) проведено при таких параметрах: $H/L = 0,3$; $a/l = 0,1$. Результати досліджень безрозмірних величин напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} показано у вигляді графіків на рис. 5-8 (на рисунках літерою a відзначено випадок апроксимації реакцій зусиль в околі опор за сталим законом, а, b – за лінійним).

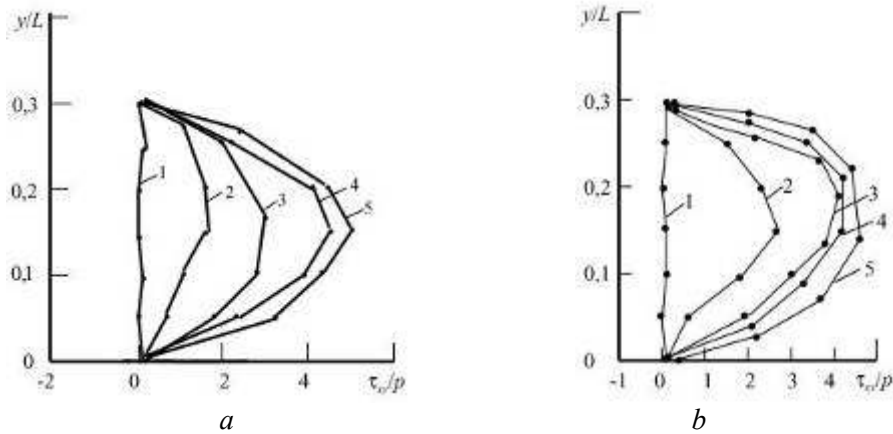


Рис. 5. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/ρ напруження залежно від висоти:
крива 1 – $x/L = -1$; 2 – $x/L = -0,95$; 3 – $x/L = -0,9$; 4 – $x/L = -0,85$; 5 – $x/L = -0,8$

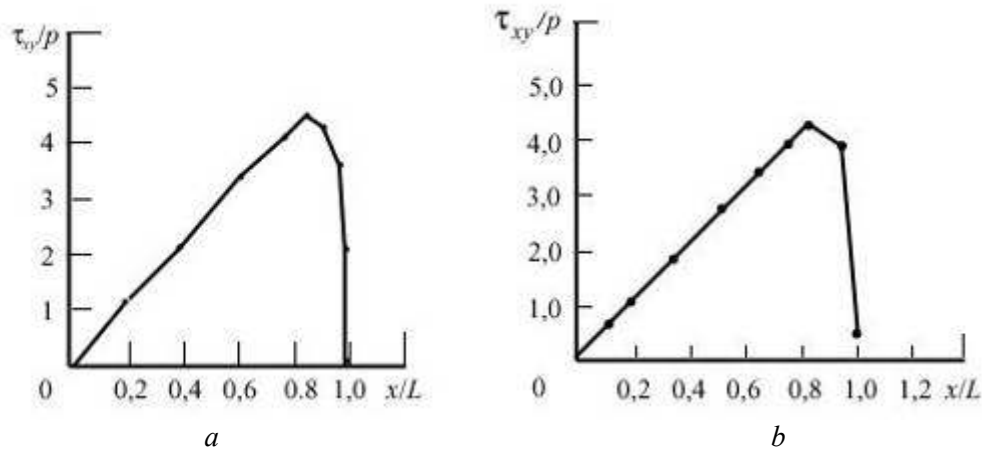


Рис. 6. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/ρ напруження вздовж довжини балки при
 $y = 0,5H = 0,15$ м

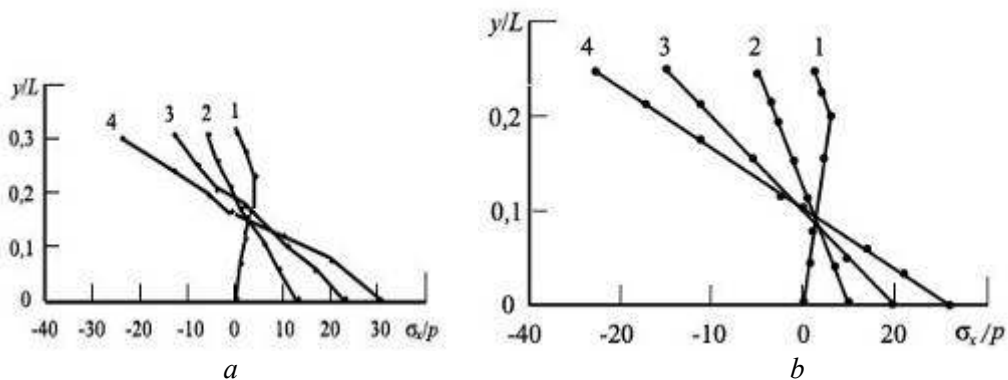


Рис. 7. Зміна безрозмірного нормального σ_x/ρ напруження залежно від висоти:
крива 1 – $x/L = -1$; 2 – $x/L = -0,75$; 3 – $x/L = -0,5$; 4 – $x/L = 0$

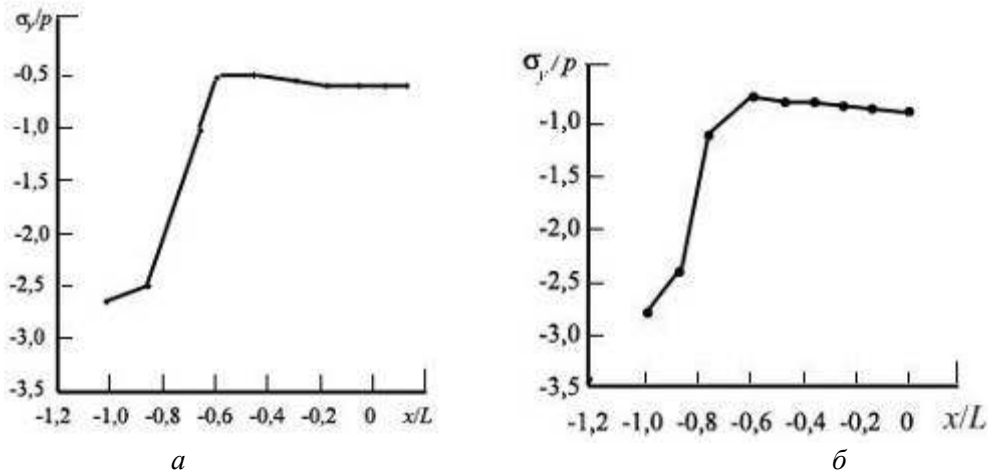


Рис. 8. Зміна безрозмірного σ_y / p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

Зіставимо результати розрахунку компонент σ_x і τ_{xy} , обчислених згідно з формулою (18), з відповідними значеннями, розрахованими за відомими формулами опору матеріалів [13]

$$\sigma_x = \frac{M(x)\left(\frac{H}{2} - y\right)}{I_x}, \tau_{xy} = \frac{Q(x)S(y)}{I_x b}. \quad (19)$$

У формулах (19) позначено: $M(x)$ – згинальний момент; $Q(x)$ – перерізувальна сила, епора якої подана на рис. 1, d ; $I_x = \frac{bH^3}{12}$ – момент інерції поперечного перерізу відносно головної центральної осі; $S(y) = \frac{y(H-y)b}{2}$ – статичний момент частини поперечного перерізу відносно головної центральної осі.

При підрахунку згідно з залежністю (19) згинальний момент обчислювався за формулами

$$M(x) = (q - p) \frac{(L + x)^2}{2};$$

– між опорами $(-L + a < x < L - a)$

$$M(x) = qa \left(L + x - \frac{a}{2} \right) - p \frac{(L + x)^2}{2}.$$

Результати відповідних числових розрахунків дотичних і нормальних напружень показано на рис. 9 і рис. 10.

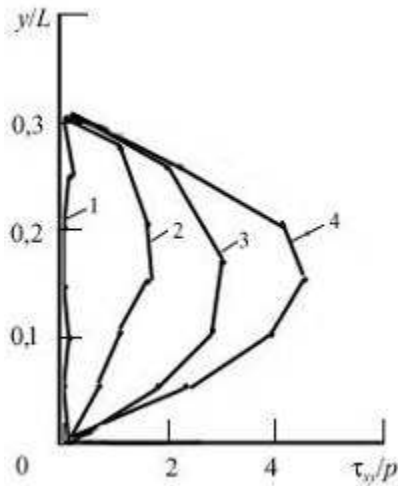


Рис. 9. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

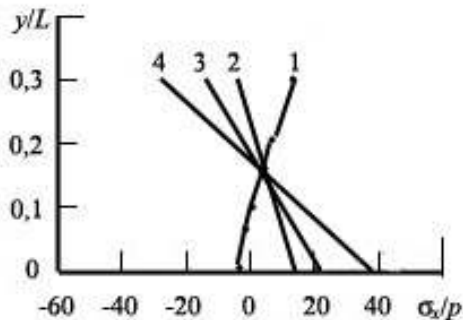


Рис. 10. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

Висновки

- Запропоновано аналітичний метод визначення напружень згинальної балки на базі рівнянь теорії пружності. На відміну від методів опору матеріалів розв’язок будується без застосування принципу Сен-Венана; це досягається шляхом заміни опорних реакцій дією сталого розподіленого навантаження на деякій скінченній ділянці в околі опор. Нескінчені ряди у виразах для напружень є збіжними і обраховувались методом подвійного розрахунку; кількість доданків в них збільшувалась доти, поки результат обчислень практично не змінювався.
- Побудований розв’язок граничної задачі теорії пружності повністю задовольняє всі поставлені граничні умови; при побудові розрахункової схеми враховується скінченність довжини опор, реакція в околі яких приймається сталою або змінною за лінійним законом вздовж цієї ділянки.
- Виконано зіставлення числових результатів поведінки нормальних і дотичних напружень з відповідними значеннями, підрахованими за формулами опору матеріалів. Встановлено, що вони збігаються на ділянці 0,8 довжини прогону балки. В безпосередній близькості до опор різниця між відповідними значеннями напружень складає біля 10 %; в опорних ділянках формули опору матеріалів неприйнятні, оскільки тут відбуваються процеси, розглядання яких має базуватись на врахуванні закономірностей утворення і розвитку тріщин.

Список літератури

1. Гвоздев А. А. К вопросу о теории железобетонных конструкций / А. А. Гвоздев // Бетон и железобетон. – 1980. – № 4. – С.29–31.
2. Зайцев Ю. В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения / Ю. В. Зайцев. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.

3. Лучко Й. Й. Механика разрушения бетона (обзор) / Й. Й. Лучко // Физ.-хим. механика материалов. – 1991. – № 3. – С.3–13.
4. Холмянский, М. М. К использованию расширенной информации при расчете железобетонных элементов на чистый изгиб / М. М. Холмянский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 2. – С.38–42.
5. Панасюк В. В. О важнейших исследованиях по физико-химической механике материалов / В. В. Панасюк // Физ.-хим. механика материалов. – 1974. – № 4. – С. 3–13.
6. Лучко Й. Й. Уточнений розрахунок і дослідження напружено-деформованого стану балок при згині / Й. Й. Лучко, І. М. Добрянський // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2010. – № 33. – С.82–92.
7. Лучко Й. Й. Уточнений розрахунок і дослідження напружено-деформованого стану балок при згині / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Зб. наук. праць «Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. – 2010. – Вип. 11. – С. 109–115.
8. Тимошенко С. П. Статический и динамические проблемы теории упругости / С. П. Тимошенко. – К.: Наук. думка, 1975. – 506 с.
9. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высш. школа, 1961. – 583 с.
10. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
11. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. - М.: Наука, 1986. - 1108 с.
12. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
13. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; Отв. ред. Писаренко Г. С. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.

Лучко Й. Й. – д.т.н., професор кафедри рухомого складу і колії Львівської філії Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна.

Добрянський І. М. – к.т.н., Львівський національний аграрний університет.

Іваник Є. Г. – к.ф.-м.н., Львівський національний аграрний університет.