УДК 512.64(045)

Б. В. Гончар
О. І. Тютюнник

КВАДРАТИЧНА ВЛАСТИВІСТЬ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ВИЗНАЧНИКА МАТРИЦІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У роботі запропоновано метод обрахунків визначників другого порядку зі спільним множником на основі найбільшого спільного дільника (НСД), що спрощує чимало випадків обрахунку визначників матриць другого та вище порядків.
Ключові слова: матриця, визначник, порядок, степінь, метод.

Abstract
The paper proposes a method for calculating second order determinants with a common factor based on the greatest common divisor (GCD), which simplifies many cases of calculating the determinants of matrices of the second and higher orders.
Keywords: matrix, determinant, order, exponent, method.

Вступ

Матриця (A) – довільна множина чисел, яку подано у вигляді прямокутної таблиці $m\ x\ n$ (де m – кількість рядків, n – кількість стовпчиків) та розмірність якої – $m\ x\ n$ [1, с. 5], [2, с. 14], [3, с. 95]. Матриці використовують для обрахунку систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в економіці, інженерії, медицині для вирішення професійних задач.

Визначник матриці $\Delta(A)$ – вираз, який складено за певним законом на основі елементів квадратної матриці та який ставиться їй у відповідність [1, с. 13], [3, с. 104]. Обрахунок визначника матриці розмірністю 2x2, який зветься визначником другого порядку, здійснюється за законом:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

Мінор M_{ij} – визначник другого порядку, який відповідає певному елементу a_{ij} та який одержується шляхом викреслення певного рядка (i) та стовпчика (j) з матриці A [1, с. 13].

Алгебраїчне доповнення A_{ij} – мінор, який відповідає елементу a_{ij} та виражається формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Визначник третього порядку дорівнює сумі добутків елементів вибраного рядка чи стовпчика, кожну складову якого помножено на її алгебраїчне доповнення:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot A_{11}) + (a_{12} \cdot A_{12}) + (a_{13} \cdot A_{13})$$

Усі визначники, порядок яких є більшим за три, в основному вираховують шляхом розкладання елемента певного рядка чи стовпчика за допомогою алгебраїчного доповнення.

Метою роботи є визначення спрощеного способу обрахунку визначників матриць другого порядку, які мають спільний множник, з використанням найбільшого спільного дільника.

Результати дослідження

Розглянемо визначник другого порядку, особливістю якого є наявність спільного множника для усіх його елементів:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Звичним чином цей визначник обраховувався б за формулою для визначника другого порядку:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - (12 \cdot 8) = 8 - 96 = -88$$

Як відомо, спільний елемент для певного рядка чи стовпчика визначника можна винести за знак визначника [1, с. 14]. Спробуємо знайти цей спільний елемент для прикладу, який розглядався вище, шляхом знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) для усіх елементів визначника:

$$\text{НСД}\ (2)\ = \mathbf{2} \cdot 1$$

$$\text{НСД}\ (12)\ = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{НСД}\ (8)\ = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{НСД}\ (4)\ = \mathbf{2} \cdot 2$$

Отже, найбільший спільний дільник для усіх елементів визначника – 2. Наша гіпотеза полягає у тому, що у визначнику, НСД елементів якого більший за 1, квадрат спільного множника можна виносити за його знак або ж винести його за дужки під час обрахунків:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot [(1 \cdot 2) - (6 \cdot 4)] = 2^2 \cdot (2 - 24) = 4 \cdot (-22) = -88;$$

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - (12 \cdot 8) = 2(1 \cdot 2) - 2(6 \cdot 4) = 2^2 \cdot [(1 \cdot 2) - (6 \cdot 4)] = 4 \cdot (-22) = -88.$$

Переконуємося, що наша гіпотеза підтверджується. Квадратична властивість спільного елемента визначників матриць другого порядку скорочує час, необхідний для ручного чи технічного обрахунку визначника з великими числами, хоча й потребує додаткової дії – знаходження НСД елементів визначника, чим у загальних випадках можна знехтувати, зважаючи на очевидність величини НСД.

Для додаткового підтвердження нашої гіпотези та задля наочності, використаємо цей метод для обрахунку визначника другого порядку з НСД = 1 та з НСД = 3.

Для НСД = 1, маємо:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{НСД}\ (3)\ = 3 \cdot \mathbf{1}$$

$$\text{НСД}\ (5)\ = 5 \cdot \mathbf{1}$$

$$\text{НСД}\ (7)\ = 7 \cdot \mathbf{1}$$

$$\text{НСД}\ (1)\ = \mathbf{1}$$

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1^2 \cdot [(3 \cdot 7) - (5 \cdot 1)] = 1^2 \cdot (21 - 5) = 1 \cdot 16 = 16.$$

Переконуємося, що у випадку, коли НСД елементів визначника рівний 1, досліджуваний метод втрачає свою ключову характеристику – оптимізацію обрахунків.

Розглянемо випадок із НСД = 3. Тоді:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 99 & 12 & 27 \\ 9 & 72 & 3 \\ 21 & 18 & 54 \end{vmatrix} = (99 \cdot A_{11}) + (12 \cdot A_{12}) + (27 \cdot A_{13})$$

1) Знаходимо A_{11}:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 72 & 3 \\ 18 & 54 \end{vmatrix}$$

$$\text{НСД}\ (72) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{НСД}\ (3) = \mathbf{3}$$

$$\text{НСД }(18) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 2$$
$$\text{НСД }(54) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$$
$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 3^2 \cdot [(24 \cdot 18) - (1 \cdot 6)] = 9 \cdot (432 - 6) = 9 \cdot 426 = 3834$$

2) Знаходимо A_{12}:

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 21 & 54 \end{vmatrix}$$
$$\text{НСД }(9) = \mathbf{3} \cdot 3$$
$$\text{НСД }(3) = \mathbf{3}$$
$$\text{НСД }(18) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 2$$
$$\text{НСД }(54) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$$
$$A_{12} = (-1)^3 \cdot 3^2 \cdot [(3 \cdot 18) - (1 \cdot 7)] = (-9) \cdot (54 - 7) = (-9) \cdot 47 = -423$$

3) Знаходимо A_{13}:

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 72 \\ 21 & 18 \end{vmatrix}$$
$$\text{НСД }(9) = \mathbf{3} \cdot 3$$
$$\text{НСД }(72) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$\text{НСД }(21) = \cdot\, \mathbf{3} \cdot 7$$
$$\text{НСД }(18) = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 2$$
$$A_{13} = (-1)^4 \cdot 3^2 \cdot [(3 \cdot 6) - (24 \cdot 7)] = 9 \cdot (18 - 168) = 9 \cdot (-150) = -1350$$

4) Повернемося до вихідного рівняння з уже відомими алгебраїчними доповненнями:

$$\Delta(A) = (99 \cdot 3834) + [12 \cdot (-423)] + [27 \cdot (-1350)] = 379266 - 5076 - 36450 = 337740.$$

Обрахувавши визначник без використання запропонованого методу за поданими у вступі формулами, дійдемо того ж результату, що є одним із доказів істинності гіпотези та практично підтверджує мету нашого дослідження – оптимізацію обрахунків.

Висновок

Отже, у роботі було виявлено та досліджено квадратичну властивість спільного множника, яка базується на тому, що визначник другого порядку можна знаходити з використанням НСД задля зменшення необхідного для обрахунків часу та стверджує те, що квадрат спільного множника визначника другого порядку можна виносити за його знак або ж виносити за дужки під час обрахунків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Найко Д. А., Краєвський В. О., Коломієць А. А. Вища математика: Лінійна алгебра. : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2019. 111 с.
2. Goldie S., Jewell R. Further Mathematics: Further Pure Mathematics 1. Cambridge International AS & A Level. Cambridge University Press. 2018. 208 p.
3. Attwood G., Barraclough J., Bettison I., Cope L., Cox C.G. Further Mathematics. Core Pure Mathematics Book 1/AS. Edexcel AS and A level. Pearson Education. 2017. 256 p.

Гончар Богдан Віталійович – студент групи БМІ-22б, факультет інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, e-mail: bogdgonchar@gmail.com

Оксана Іванівна Тютюнник – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: tutunnik.oksana@gmail.com

Bogdan Honchar – student of Faculty of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: bogdgonchar@gmail.com

Oksana Tiutiunnyk – Candidate of Pedagogical Sciences (Eng.), Docent of the Chair for Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: tutunnik.oksana@gmail.com