УДК 691.31.536.21

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ВІКОННОЇ РАМИ З УТЕПЛЕННЯМ

В. І. Риндюк, А. М. Власенко, С. В.Риндюк

Створено математичну модель для чисельно-аналітичного розрахунку теплопровідності віконного пройому, яка дозволяє раціоналізувати матеріальні і трудові витрати при утепленні віконних рам.

Создана математическая модель для численно-аналитического расчета теплопроводности оконного проема, которая позволяет рационализировать материальные и трудовые затраты при утепленные оконных рам.

A mathematical model for numerical and analytical calculation of thermal conductivity proyoumi window, which allows to rationalize the material and labor costs when heated window frames.

Вступ

Відомо, що за рахунок невеликої товщини віконної рами відбувається різкий перепад температури в області контакту стіни і рами, тобто відбувається різке відведення тепла з приміщення на зовні (рис. 1).

З метою зменшення інтенсивності відведення тепла пропонується ззовні рами по її периметру утеплювати в районі контакту зі стіною спеціальним теплоізоляційним матеріалом відповідної товщини (рис. 2).

Підбір матеріалу та його розмірів з метою зменшення економічних витрат та забезпечення тепла в приміщеннях є актуальною задачею.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

Зважаючи на те, що досліджуваний об'єкт є однорідним тривимірним середовищем, розглянемо розповсюдження температури в його поперечному перерізі (рис. 3).

Для простоти роздумів, контакт рами зі стіною і теплоізоляційним матеріалом та контакт теплоізоляційного матеріалу зі стіною будемо вважати ідеальним. Отже, розглядається двовимірна початково-крайова задача неоднорідного середовища, яка визначається так:

Нехай в області $Q = \Omega \times (\mathrm{O}, \mathrm{T})$ $(\Omega = \Omega_A \bigcup \Omega_B \bigcup \Omega_C, \Omega_A = (\mathrm{O}, \ell_1 d)$ – стіна,

$\Omega_B = (\ell_{1,} \ell_{2,} d_2)$ – теплоізоляційний матеріал, $\Omega_C = (\ell_1, \ell_2, d_3)$ – рама без скла, яку замінимо крайовою умовою μ_3) визначені двовимірні рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 U_K}{\partial t} = a_K \left(\frac{\partial^2 U_K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_K}{\partial y^2} \right), \ k = \overline{1,3}. \tag{1}$$

$k = 1$: $0 \le x < l_1$, $0 < y < d_1$ – область A;

$k = 2$: $l_1 \le x < l_2$, $d_1 - d_2 \le y < d_1$ – область C;

$k = 3$: $l_1 \le x < l_2$, $d_1 - (d_2 + d_3) \le y \le d_1$ – область B.

Початкові умови:

$$U_K(x, y, 0) = \varphi_K(x, y), \ k = \overline{1,3}. \tag{2}$$

Граничні умови:

$$U_1(0,y,t)=\mu_1(t),\ \ 0\le y\le d_1;\quad U_1(x,0,t)=\mu_1(t),\ \ 0\le x\le l_1;$$
$$U_1(x,d_1,t)=\mu_2(t),\ \ 0\le x\le l_1;\quad U_2(x,d_1,t)=\mu_2(t),\ \ l_1\le x\le l_2;$$
$$U_2(l_1+l_2,y,t)=\mu_2,\ \ d_1-d_2\le y\le d_2;$$

$$U_3(l_1+l_2,y,t)=\mu_3,\ d_1-d_2-d_3\le y\le d_3;$$
$$U_3(x,d_1,t)=\mu_4,\ \ l_1\le x\le l_2. \tag{3}$$

Умови спряження:

$$U_1(l_1,y,t)=U_3(l_1,y,t),\ d_1-(d_2+d_3)\le y\le d_1-d_2;$$
$$U_1(l_1,y),t=U_2(l_1,y,t),\ d_1-d_2\le y\le d_1; \tag{4}$$
$$U_2(x,d_1-d_2,t)=U_3(x,d_1-d_2,t),\ l_1\le x\le l_2$$

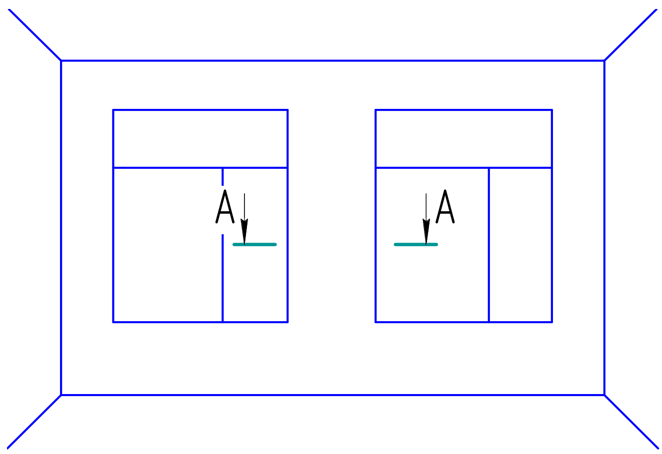

Рис. 1. Схема зовнішньої стіни приміщення

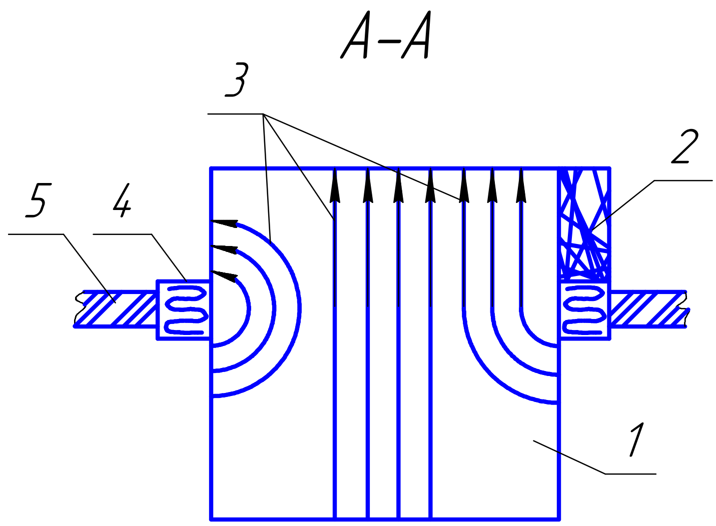

Рис. 2. Поперечний переріз простінка: 1 – простінок, 2 – утеплювач, 3 – «містки холоду», 4 – віконна рама, 5 – скло

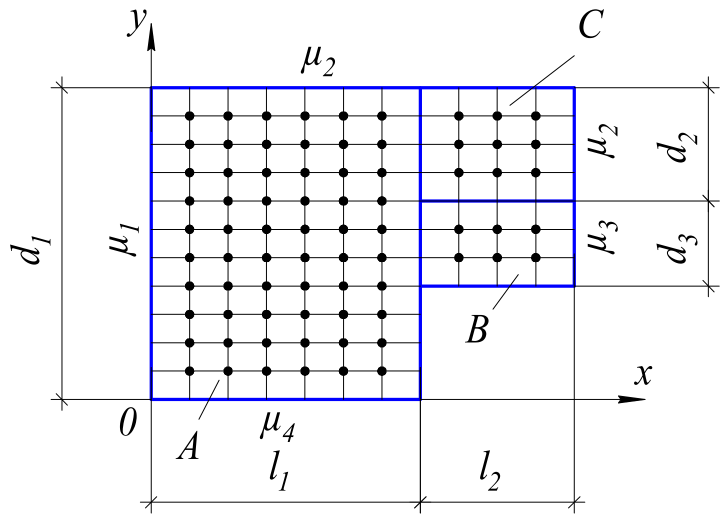

Рис. 3. Розрахункова схема теплопровідності

Методика розв'язання задачі

Для простоти розсудів будемо вважати, що товщина рами $d_3 = r \cdot h_{Ay}$, $r = \overline{1.R}$, а товщина утеплювального матеріалу $d_2 = p \cdot h_{Ay}$, $p = \overline{1,P}$; $R \le P$,

де $h_{Ay} = \dfrac{d}{k+1}$ – крок розбиття області Ω_A по осі ОУ (рис. 1),

k – кількість вузлових точок .

По осі OX виберемо сітку так, щоб крок розбиття областей Ω_B і Ω_C був рівномірним, тобто $h_{Ax} = h_{Cx} = \dfrac{l_2}{n+1}$, а для області Ω_A $h_{Ax} = \dfrac{l_1}{m+1}$, де n, m – кількість вузлових точок відповідно в областях Ω_B, Ω_C і Ω_A.

Розв'язок задачі в околі кожного вузла областей будемо шукати у вигляді квадратичного полінома:

$$P_A(x, x_m, y, y_k, t) = \sum_{ij} A_{ij}^{mk}(t)(x - x_m)^i (y - y_k)^j,$$

$$P_B(x, x_n, y, y_r, t) = \sum_{ij=0}^{2} B_{ij}^{nr}(t)(x - x_n)^i (y - y_r)^j, \qquad (5)$$

$$P_C(x, x_n, y, y_p, t) = \sum_{ij=0}^{2} C_{ij}^{mp}(t)(x - x_n)^i (y - y_p)^j .$$

Використовуючи інтегральний метод прямих для двовимірного середовища [2] проінтегруємо (1) на інтервалах областей

$$\left[x_{mk} - \alpha_{mk} h_{Ax}, x_{mk} + \alpha_{mk} h_{Ax}\right], \left[y_{mk} - \alpha_{mk} h_{Ay}, y_{mk} + \alpha_{mk} h_{Ay}\right];$$

$$\left[x_{nr} - \alpha_{nr} h_{Bx}, x_{nr} + \alpha_{nr} h_{Bx}\right], \left[y_{nr} - \alpha_{nr} h_{ny}, y_{nr} + \alpha_{nr} h_{Ay}\right];$$

$$\left[x_{np} - \alpha_{np} h_{Cx}, x_{np} + \alpha_{np} h_{Cx}\right], \quad \left[y_{np} - \alpha_{np} h_{Ay}, y_{np} + \alpha_{np} h_{Ay}\right].$$

З врахуванням наближеного розв'язку (5), де α_{mk}, α_{nr}, α_{np} – числові коефіцієнти, які можуть приймати значення з інтервалу (0;1), отримаємо таку систему $M \times K + N \times R + N \times P$ звичайних диференціальних рівнянь відносно A_{00}^{mk}, B_{00}^{nr} і C_{00}^{np}:

$$\begin{aligned}
&\dot{A}_{00}^{mk} + \frac{\alpha_{mk}^2 h_{Ax}^2}{3}\dot{A}_{20}^{mk} + \frac{\alpha_{mk}^2 h_{Ay}^2}{3}\dot{A}_{02}^{mk} = 2a_1 A_{20}^{mk} + 2a_1 A_{02}^{mk};\\
&\dot{B}_{00}^{nr} + \frac{\alpha_{nr}^2 h_{Bx}^2}{3}\dot{B}_{20}^{nr} + \frac{\alpha_{nr}^2 h_{Ay}^2}{3}\dot{B}_{02}^{nr} = 2a_3 B_{20}^{nr} + 2a_3 B_{02}^{nr};\\
&\dot{C}_{00}^{np} + \frac{\alpha_{np}^2 h_{Cx}^2}{3}\dot{C}_{20}^{np} + \frac{\alpha_{np}^2 h_{Cy}^2}{3}\dot{C}_{02}^{np} = 2a_2 C_{20}^{np} + 2a_3 C_{02}^{np}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для визначення коефіцієнтів $A_{ij}^{mk}, B_{ij}^{nr}, C_{ij}^{mp}$ крім $A_{00}^{mk}, B_{00}^{nr}, C_{00}^{mp}$ використовуємо умови спряження та умови неперервності температури на межах інтервалів розбиття і на границях областей по горизонталі і по вертикалі.

Підставивши (5) в (4) маємо:

$$\begin{aligned}
&A_{00}^{mk} + A_{10}^{mk} h_{Ax} + A_{20}^{mk} h_{Ax}^2 = B_{00}^{1r} - B_{10}^{1r} h_{Bx} + B_{20}^{1r} h_{Bx}^2,\ l \le k \le l + R - 1, l \le 1, r = \overline{1, R-1}\\
&A_{00}^{Mk} + A_{10}^{Mk} h_{Ax} + A_{20}^{Mk} h_{Ax}^2 = C_{00}^{1p} - C_{10}^{1p} h_{Cx} + B_{20}^{1p} h_{Cx}^2,\ l + R \le h \le k, p = \overline{1, P-1}\\
&B_{00}^{n,R-1} + B_{01}^{n,R-1} h_{Ay} + B_{02}^{n,R-1} h_{Ay}^2 = C_{00}^{n1} - C_{01}^{n1} h_{Ay} + C_{02}^{n1} h_{Ay}^2,\ n = \overline{1, P-1}.
\end{aligned}$$

Запишемо умови неперервності температури на границях областей і межах інтервалів:

$$\begin{aligned}
&A_{00}^{1k} - A_{10}^{1k} h_{Ax} + A_{20}^{1k} = \mu_1; \qquad A_{00}^{m1} - A_{01}^{m1} h_{Ay} + A_{02}^{m1} h_{Ay}^2 = \mu_4;\\
&A_{00}^{Km} + A_{01}^{Km} h_{Ay} + A_{02}^{Km} h_{Ay}^2 = \mu_2; \quad C_{00}^{nP} + C_{01}^{nP} h_{Ay} + C_{02}^{nP} h_{Ay}^2 = \mu_2;\\
&C_{00}^{Np} + C_{10}^{Np} hh_{Cx} + C_{20}^{Np} h_{Cx}^2 = \mu_2; \quad B_{00}^{Nr} + B_{10}^{Nr} h_{Bx} + B_{20}^{Nr} h_{Bx}^2 = \mu_3;
\end{aligned}$$

$$B_{00}^{nr} - B_{01}^{nr} h_{Ay} + B_{02}^{nr} h_{Ay}^2 = \mu_4,\ n = \overline{1, N};\ r = \overline{1, R}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&A_{00}^{mk} + A_{01}^{mk} h_{Ax} + A_{20}^{mk} h_{Ax}^2 = A_{00}^{m+1,k} - A_{01}^{m+1,k} h_{Ax} + A_{20}^{m+1,k} h_{Ax}^2,\ m = \overline{1, M-1}; k = \overline{1, K}\\
&A_{00}^{mk} + A_{01}^{mk} h_{Ay} + A_{02}^{mk} h_{Ay}^2 = A_{00}^{m,k+1} - A_{01}^{m,k+1} h_{Ay} + A_{02}^{m,k+1} h_{Ay}^2,\ m = \overline{1, M}; k = \overline{1, K-1}\\
&B_{00}^{nr} + B_{10}^{nr} h_{Bx} + B_{20}^{nr} h_{Bx}^2 = B_{00}^{n+1,r} - B_{10}^{n+1,r} - h_{Bx} + B_{02}^{n+1,r} h_{Bx}^2,\ n = \overline{1, N-1}; r = \overline{1, R}\\
&C_{00}^{np} + C_{10}^{np} hCx + C_{20}^{np} h_{Cx}^2 = C_{00}^{n+1,p} - C_{10}^{n+1,p} h_{Cx}^2 C_{20}^{n+1,p} h_{Cx}^2,\ n = \overline{1, N-1}; p = \overline{1, P}\\
&B_{00}^{nr} + B_{01}^{nr} h_{Ay} + B_{02}^{nr} h_{Ay}^2 = B_{00}^{n,r+1} + B_{01}^{n,r+1} h_{Ay} + B_{02}^{n,+1} h_{Ay}^2,\ n = \overline{1, N}; r = \overline{1, R-1}\\
&C_{00}^{np} + C_{01}^{np} h_{Ay} + C_{02}^{np} h_{Ay}^2 = C_{00}^{n,p+1} - C_{01}^{n,p+1} h_{Ay} + C_{02}^{n,p+1} h_{Ay}^2\ n = \overline{1, N}; p = \overline{1, P-1}
\end{aligned}$$

В результаті отримали алгебраїчну систему рівняннь відносно невідомих коефіцієнтів $A_{ij}^{mk}, B_{ij}^{nr}, C_{ij}^{mp}$.

Виразивши з (7) коефіцієнти $A_{10}, A_{20}, B_{10}, B_{20}, C_{10}, C_{20}, A_{01}, A_{02}, B_{01}, B_{02}, C_{01}, C_{02}$ через коефіцієнти A_{00}, B_{00}, C_{00} для кожного вузла та підставивши їх значення в (6) отримуємо систему диференціальних рівнянь відносно значень температури у вузлових точках і після відповідних математичних перетворень запишемо у такій матричній формі:

$$\dot{R}_{00} = \alpha R_{00} + \beta\psi, \tag{8}$$

де $\dot{R}_{00} = \{\ \dot{A}_{00}, \dot{B}_{00}, \dot{C}_{00}\ \}^T$, $R_{00} = \{\ A_{00,}\ B_{00}, C_{00}\ \}^T$,

α, β – відповідні матриці з числовими коефіцієнтами при стовпцях R_{00} і ψ.

Для розв’язання (8) використаємо методику запропоновану у [2] та отримуємо розв'язки при різних значеннях меж інтегрування (8) за рахунок числових коефіцієнтів α, оj дозволяє впевнитись у точності та достовірності розв'язків. Замінюючи значення коефіцієнтів теплопровідності досліджуваних середовищ та крайові умови задачі, можна за допомогою єдиного програмного модуля розрахунку отримати розв'язки з метою оптимального вибору утеплюючих матеріалів та конструкції віконних рамних прогонів.

Висновки

- Створена математична модель для розрахунку теплопровідності утеплення віконного пройому.
- Запропонована методика чисельно-аналітичного розрахунку теплопровідності дозволяє вибрати конструктивні параметри утеплення і спростити технологію утеплення та зменшити трудові і матеріальні витрати.

Використана література

1. Ликов А. В. Теория тепло- и масопереноса / А. В. Ликов, Ю. А. Михайлов. – М.: – Л.: Госенергоиздат, 1963. – 536 с.
2. Риндюк В. І. Методика теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища / В. І. Риндюк, Т. В. Прилипко // Вісник ВПІ. – 2003. – №3. – С. 35-38.
3. Риндюк В. І. Моделювання теплопровідності двомірних неоднорідних багатошарових середовищ / В. І. Риндюк, Т. О. Міщук, С. В. Риндюк // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. – 2006. – №3. – С. 105-111.
4. Рындюк В. И. Применение улучшенного интегрального метода прямых к решению задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом / В. И. Рындюк // Ред. Инженерно-физический журнал. – Минск, 1989. – 9 с. деп. в ВИНИТИ 30.02.89, №2069-В.

Риндюк Володимир Іванович – к.ф-м.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Власенко Анатолій Миколайович – к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Риндюк Світлана Володимирівна – магістрантка Вінницького національного технічного університету.