

КОМПЛЕКСНА ФОРМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРИПРОВІДНОЇ ДОВГОЇ ЛІНІЇ БЕЗ УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі на підставі символічного методу проведено математичну ідентифікацію гармонічних фізичних процесів, що спостерігаються в трипровідній довгій лінії в усталених режимах роботи, і отримано систему диференціальних рівнянь довгої лінії в комплексній формі.

Результат роботи виявляє себе як математичне підґрунтя для подальшого розв'язування практичних та теоретичних задач аналізу і синтезу направлених трипровідних електричних кіл з розподіленими параметрами. В першу чергу, зазначене стосується ліній електропередачі електричної енергії, а також ліній зв'язку, високо-частотних радіотехнічних, телевізійних, інформаційних систем тощо.

Ключові слова: теоретична електротехніка, електричне коло з розподіленими параметрами, трипровідна довга лінія, електромагнітна хвиля, простір, час, диференціальні рівняння в частинних похідних, телеграфні рівняння, миттєві напруги, струми

Abstract

In the paper, on the basis of the symbolic method, mathematical identification of harmonic physical processes observed in a three-wire long line in stable operating modes was carried out, and a system of differential equations of a long line was obtained in a complex form.

The result of the work reveals itself as a mathematical basis for further solving practical and theoretical problems of analysis and synthesis of directional three-wire electric circuits with distributed parameters. First of all, this applies to electric energy transmission lines, as well as communication lines, high-frequency radio engineering, television, information systems, etc.

Keywords: theoretical electrical engineering, electric circuit with distributed parameters, three-wire long line, electromagnetic wave, space, time, differential equations in partial derivatives, telegraph equations, instantaneous voltages, currents

Вступ

1. В сучасній теорії електричних кіл з розподіленими параметрами найбільш відомою є система телеграфних рівнянь двопровідної довгої лінії [1-6] – диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

які математично описують динаміку фізичних явищ електромагнітної природи, що спостерігаються в зазначеного класу одновимірних направлених електротехнічних системах електроенергетичного призначення.

У разі усталених синусоїдних режимів роботи таких електричних кіл за основу аналізу обирають символічний метод їх розрахунку (або метод комплексних амплітуд), біективно співвідносячи миттєвим напругам $u(x,t)$ та струмам $i(x,t)$ їх комплекси діючих значень [1-6].

Такий підхід дозволяє сформулювати систему звичайних диференціальних рівнянь двопровідної довгої лінії в комплексній формі

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)I; \\ -\frac{dI}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)U. \end{cases} \quad (2)$$

Як наслідок, за синусоїдних реалізацій система (2) перебуватиме у взаємно-однозначній відповідності з системою телеграфних рівнянь (1), а відтак дозволить знаходити інтеграли останньої, досліджуючи лише власні розв'язки – як функції тільки однієї змінної x .

Така перевага дозволяє у досить простий спосіб отримувати рішення практичних задач для різних синусоїдних режимів роботи довгої лінії та за різних її навантажень.

2. Схожа проблематика виявляє себе і у разі *узагальнення* розглянутого класу електричних кіл – під час побудови теоретичного базису *n-провідної довгої лінії*, і зокрема – *трипровідної*.

Переважаючою більшістю літературних джерел такі узагальнені базиси направлених одновимірних електричних систем з розподіленими параметрами не представлені – ні своїми диференціальними формами, ні комплексними чи операторними зображеннями, ні їх математичними розв'язками.

Водночас потреба в них існує і має нагальний характер як в силовій електротехніці – електроенергетиці, електроніці, електромеханіці, так і в інформаційній.

3. Відтак *метою роботи* є побудова системи диференціальних рівнянь трипровідної довгої лінії в *комплексній формі*, що має стати математичною основою для подальшого розв'язування задач аналізу та синтезу трипровідних електричних кіл з розподіленими параметрами в *усталених* режимах роботи.

Рівняння трипровідної довгої лінії в комплексній формі

Розглянемо *трипровідну довгу лінію*, розташовану в заданій системі координат (рис. 1).

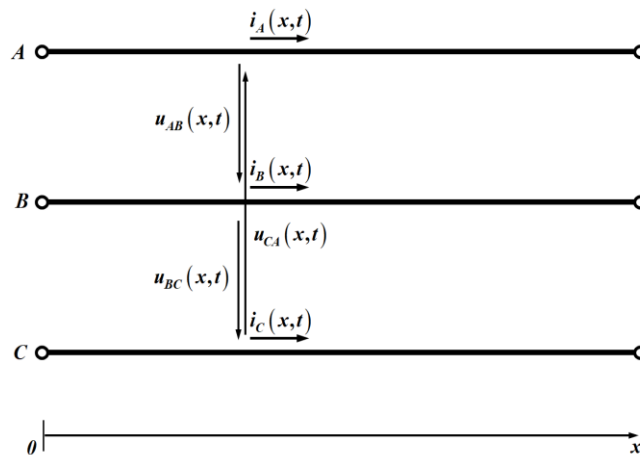


Рис. 1. Схема трипровідної довгої лінії (без урахування впливу поверхні землі)

В такій системі координат миттєві струми (i_A, i_B, i_C) в проводах та напруги (u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}) поміж ними виявляють себе як функції двох незалежних змінних, однією з яких є просторова координата x , а іншою – час t , і описуються системою диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial u_{AB}}{\partial x} = R_0^{(A)} \cdot i_A + (L_0^{(A)} - M_0^{(AB)}) \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t} - R_0^{(B)} \cdot i_B - (L_0^{(B)} - M_0^{(AB)}) \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t} - (M_0^{(BC)} - M_0^{(CA)}) \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t}; \\ -\frac{\partial u_{BC}}{\partial x} = R_0^{(B)} \cdot i_B + (L_0^{(B)} - M_0^{(BC)}) \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t} - R_0^{(C)} \cdot i_C - (L_0^{(C)} - M_0^{(BC)}) \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t} - (M_0^{(CA)} - M_0^{(AB)}) \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t}; \\ -\frac{\partial u_{CA}}{\partial x} = R_0^{(C)} \cdot i_C + (L_0^{(C)} - M_0^{(CA)}) \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t} - R_0^{(A)} \cdot i_A - (L_0^{(A)} + M_0^{(CA)}) \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t} - (M_0^{(AB)} - M_0^{(BC)}) \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i_A}{\partial x} = G_0^{(AB)} \cdot u_{AB} + C_0^{(AB)} \cdot \frac{\partial u_{AB}}{\partial t} - G_0^{(CA)} \cdot u_{CA} - C_0^{(CA)} \cdot \frac{\partial u_{CA}}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i_B}{\partial x} = G_0^{(BC)} \cdot u_{BC} + C_0^{(BC)} \cdot \frac{\partial u_{BC}}{\partial t} - G_0^{(AB)} \cdot u_{AB} - C_0^{(AB)} \cdot \frac{\partial u_{AB}}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i_C}{\partial x} = G_0^{(CA)} \cdot u_{CA} + C_0^{(CA)} \cdot \frac{\partial u_{CA}}{\partial t} - G_0^{(BC)} \cdot u_{BC} - C_0^{(BC)} \cdot \frac{\partial u_{BC}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (3)$$

За усталених *синусоїдних* режимів роботи розв'язками системи (3) є функції

$$\begin{aligned} i_A(x,t) &= I_{m_A}(x) \sin[\omega t + \psi_{i_A}(x)], \\ i_B(x,t) &= I_{m_B}(x) \sin[\omega t + \psi_{i_B}(x)], \\ i_C(x,t) &= I_{m_C}(x) \sin[\omega t + \psi_{i_C}(x)], \\ u_{AB}(x,t) &= U_{m_{AB}}(x) \sin[\omega t + \psi_{u_{AB}}(x)], \\ u_{BC}(x,t) &= U_{m_{BC}}(x) \sin[\omega t + \psi_{u_{BC}}(x)], \\ u_{CA}(x,t) &= U_{m_{CA}}(x) \sin[\omega t + \psi_{u_{CA}}(x)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Як і у випадку двопровідної довгої лінії, скористаємося *символічним* методом, увівши комплексні зображення функцій (4) – *комплекси їх діючих значень*.

Біктивне відображення здійснимо за законом

$$\begin{aligned} i(x,t) = I_m(x) \sin[\omega t + \psi_i(x)] &\Leftrightarrow \underline{I}(x) = \frac{I_m(x)}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i(x)} = I(x) e^{j\psi_i(x)}, \\ u(x,t) = U_m(x) \sin[\omega t + \psi_u(x)] &\Leftrightarrow \underline{U}(x) = \frac{U_m(x)}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u(x)} = U(x) e^{j\psi_u(x)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді у разі синусоїдних розв'язків (4) з телеграфних рівнянь (1) з урахуванням закону відображення (5), а також співмножника $e^{j\omega t}$, який опинившись водночас і в лівій, і правій частинах кожного із рівнянь, скорочується, *отримуємо систему диференціальних рівнянь трипровідної довгої лінії в комплексній формі*

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}_{AB}}{dx} &= [R_0^{(A)} + j\omega(L_0^{(A)} - M_0^{(AB)})] \cdot \underline{I}_A - [R_0^{(B)} + j\omega(L_0^{(B)} - M_0^{(AB)})] \cdot \underline{I}_B - j\omega(M_0^{(BC)} - M_0^{(CA)}) \cdot \underline{I}_C; \\ -\frac{d\underline{U}_{BC}}{dx} &= [R_0^{(B)} + j\omega(L_0^{(B)} - M_0^{(BC)})] \cdot \underline{I}_B - [R_0^{(C)} + j\omega(L_0^{(C)} - M_0^{(BC)})] \cdot \underline{I}_C - j\omega(M_0^{(CA)} - M_0^{(AB)}) \cdot \underline{I}_A; \\ -\frac{d\underline{U}_{CA}}{dx} &= [R_0^{(C)} + j\omega(L_0^{(C)} - M_0^{(CA)})] \cdot \underline{I}_C - [R_0^{(A)} + j\omega(L_0^{(A)} - M_0^{(CA)})] \cdot \underline{I}_A - j\omega(M_0^{(AB)} - M_0^{(BC)}) \cdot \underline{I}_B; \\ -\frac{d\underline{I}_A}{dx} &= (G_0^{(AB)} + j\omega C_0^{(AB)}) \cdot \underline{U}_{AB} - (G_0^{(CA)} + j\omega C_0^{(CA)}) \cdot \underline{U}_{CA}; \\ -\frac{d\underline{I}_B}{dx} &= (G_0^{(BC)} + j\omega C_0^{(BC)}) \cdot \underline{U}_{BC} - (G_0^{(AB)} + j\omega C_0^{(AB)}) \cdot \underline{U}_{AB}; \\ -\frac{d\underline{I}_C}{dx} &= (G_0^{(CA)} + j\omega C_0^{(CA)}) \cdot \underline{U}_{CA} - (G_0^{(BC)} + j\omega C_0^{(BC)}) \cdot \underline{U}_{BC}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Висновки

В роботі на підставі символічного методу проведено математичну ідентифікацію гармонічних фізичних процесів, що спостерігаються в трипровідній довгій лінії в усталених режимах роботи. Отримано систему диференціальних рівнянь такої лінії в комплексній формі.

Результат роботи (6) виявляє себе як математичне підґрунтя для подальшого розв'язування практичних та теоретичних задач аналізу і синтезу направлених трипровідних електричних кіл з розподіленими параметрами. В першу чергу, зазначене стосується ліній електропередачі електричної енергії, а також ліній зв'язку, високочастотних радіотехнічних, телевізійних, інформаційних систем тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: Підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник /. Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.

3. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

4. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацев, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

5. ТОЕ. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навч. посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.

6. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yury Hryhorovych Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, FPEEM, VNTU, Vinnytsia, wjg@ukr.net