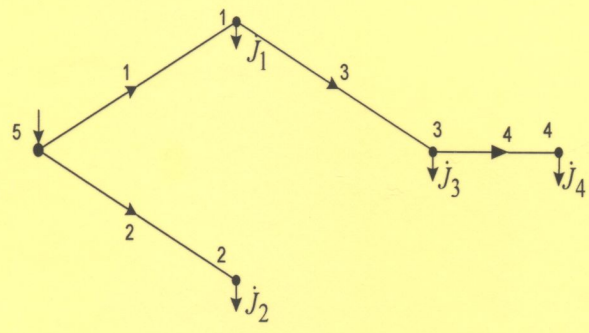


М. Й. Бурбело, С. В. Бевз, О. М. Кравець

# МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**М. Й. Бурбело, С. В. Бевз, О. М. Кравець**

# **МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ**

**Практикум**

Вінниця  
ВНТУ  
2021

УДК 621.311(075)

Б91

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки (протокол № 15 від 31.05.2021 р.)

Рецензенти:

*С. М. Балюта*, доктор технічних наук, професор

*В. О. Комар*, доктор технічних наук, професор

*В. М. Кутін*, доктор технічних наук, професор

**Бурбело, М. Й.**

Б91 Математичні задачі електроенергетики : практикум / Бурбело М. Й., Бевз С. В., Кравець О. М. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 126 с.

ISBN 978-966-641-857-2

В практикумі висвітлено методи розрахунку ustalених режимів електричних мереж, застосування теорії ймовірностей та математичної статистики для аналізу надійності та електричних навантажень, чисельні методи розрахунку перехідних режимів та методи аналізу стійкості систем. Практикум призначений для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

УДК 621.311(075)

ISBN 978-966-641-857-2

©ВНТУ, 2021

## ЗМІСТ

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ.....	4
ВСТУП.....	5
1 МЕТОДИ АНАЛІЗУ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ.....	6
1.1 Розрахункова та заступна схеми.....	6
1.2 Основні топологічні поняття.....	9
1.3 Закони електричних кіл в матричній формі.....	13
1.4 Узагальнене рівняння стану в матричній формі.....	16
1.5 Вузлове рівняння стану в матричній формі.....	17
1.6 Контурне рівняння стану в матричній формі.....	21
1.7 Розрахунок електричних мереж в режимі заданої потужності.....	24
1.8 Розрахунок втрат потужності.....	29
1.9 Прямі методи розв'язування рівнянь стану електричних мереж.....	36
1.10 Ітераційні методи розв'язування рівнянь стану електричних мереж.....	38
2 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ.....	50
2.1 Основні поняття теорії ймовірностей.....	50
2.2 Ймовірнісні моделі надійності електричних мереж.....	52
2.3 Методи мінімальних шляхів та перерізів.....	55
2.4 Моделі розподілу часу безвідмовної роботи.....	61
2.5 Аналіз надійності електричних мереж напругою 10-35 кВ.....	64
2.6 Ймовірнісні моделі електричних навантажень.....	66
2.7 Статистичний аналіз електричних навантажень.....	72
2.8 Лінійні регресійні моделі.....	79
3 МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ.....	87
3.1 Математичні моделі перехідних режимів.....	87
3.2 Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь.....	92
3.3 Приклади моделювання перехідних режимів.....	101
3.4 Застосування операторного методу.....	106
3.5 Моделювання систем автоматичного керування.....	109
3.6 Аналіз статичної стійкості систем.....	113
ЛІТЕРАТУРА.....	124

## СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

- АД – асинхронний двигун
- ВП – виконавчий пристрій
- ЕП – електроприймач
- ЕПС – електропостачальна система (система електропостачання)
- ЕРС – електрорушійна сила
- КЗ – коротке замикання
- КРП – компенсація реактивної потужності
- Л – лінія електропередачі (на схемі)
- ЛЕП – лінія електропередачі
- МНК – метод найменших квадратів
- ОК – об'єкт керування
- ПС – підстанція
- П – пропорційний (регулятор)
- ПІ – пропорційно-інтегрувальний (регулятор)
- ПІД – пропорційно-інтегрувально-диференційний (регулятор)
- Р – регулятор (на схемі)
- САК – система автоматичного керування
- СД – синхронний двигун
- Т – трансформатор (силовий)
- УКЕ – установка контактного електрозварювання

## ВСТУП

Практикум розроблено згідно з програмою дисципліни «Математичні задачі електроенергетики» для спеціальності «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Перший розділ присвячено методам аналізу усталених симетричних режимів електричних мереж. Коротко розглянуто питання подання електричної мережі заступними схемами та у вигляді графа. Сформовано матричні рівняння стану для аналізу усталених режимів методами рівнянь Кірхгофа, вузлових напруг та контурних струмів. Розглянуто особливості розрахунку електричних мереж з використанням вузлових рівнянь у формі балансу струмів та балансу потужностей. Наведено методи та алгоритми прямих та ітераційних розрахунків усталених режимів електричних мереж.

В другому розділі розглянуто застосування теорії ймовірностей для побудови моделей аналізу надійності. Подано основи теорії ймовірностей, на основі яких сформовано правила аналізу надійності для послідовного та паралельного з'єднання елементів. Значну увагу приділено розрахунку надійності замкнених мереж методами мінімальних шляхів та перерізів, а також методом базисних перерізів. Розглянуто експоненціальну модель розподілу часу безвідмовної роботи, а також модель Вейбулла–Гнеденко. Наведено приклад розрахунку часу безвідмовної роботи та недовідпущення електроенергії розподільних мереж напругою 10–35 кВ. Розглянуто принципи формування електричних навантажень з використанням біноміального закону розподілу та закону Пуассона. Значну увагу приділено методам статистичної обробки експериментальних даних, зокрема, оціненню математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення, перевірці гіпотез щодо законів розподілу електричних навантажень. Розглянуто питання побудови регресійних моделей електроспоживання.

Третій розділ присвячено методам аналізу перехідних режимів. Проаналізовано чисельні явні та неявні одно- та багатокрокові методи розв'язування диференціальних рівнянь. Виконано розрахунки перехідних процесів лінійних та нелінійних електричних кіл. Виконано розрахунки перехідного процесу пуску асинхронного двигуна. Розглянуто моделі систем автоматичного керування. Проведено розрахунки статичної стійкості систем автоматичного керування з використанням алгебраїчних та частотних критеріїв. Розглянуто застосування логарифмічних частотних характеристик для аналізу стійкості систем. Проаналізовано стійкість нелінійної системи другим прямим методом Ляпунова.

# 1 МЕТОДИ АНАЛІЗУ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ

## 1.1 Розрахункова та заступна схеми електричних мереж

Основною вихідною інформацією для розрахунку режиму електричної мережі є розрахункова схема. На рис. 1.1 наведено розрахункову схему електричної мережі, що живиться від енергосистеми (ЕС) і містить три понижувальні підстанції ПС-1, ПС-2, ПС-3 та чотири ЛЕП (Л-1...Л-4). Навантаження споживачів, що живляться від шин низької напруги кожної з підстанцій, умовно позначено стрілками. Розрахункова схема має також містити необхідну інформацію про параметри елементів мережі, джерел живлення та навантажень. На ній обов'язково наводяться параметри ЛЕП, трансформаторів тощо.

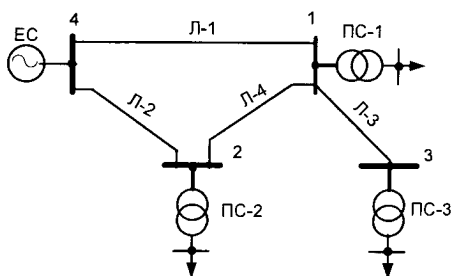


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема (спрощено) електричної мережі

Для виконання розрахунків реальній мережі ставиться у відповідність заступна схема (схема заміщення). Під час складання заступної схеми вводять такі спрощення [1–4]:

- вважається, що трифазні мережі – симетричні, тобто параметри пасивних елементів (опори, провідності) в усіх трьох фазах однакові, а активні величини (напруги, ЕРС, струми) – однакові за модулем і зміщені за фазою на  $120$  електричних градусів;

- вважається, що параметри пасивних елементів електричних мереж є сталими і не залежать від параметрів режиму (напруг, струмів), що дає можливість використовувати лінійні рівняння, а нелінійність рівнянь, які відображають стан електричних мереж, можлива тільки у зв'язку зі зміною параметрів навантажень та джерел живлення;

- вважається, що в електричних мережах криві струмів і напруг є чисто синусоїдними з частотою  $f = 50$  Гц, тобто вищі гармоніки в цих величинах відсутні.

За таких умов трифазні мережі можуть розглядатися на підставі однофазних заступних схем, що значно спрощує математичний опис процесів та скорочує розмірність розв'язуваних задач.

Заступна схема електричної мережі є сукупністю ідеалізованих елементів (джерел напруги, джерел струму, резистивних, індуктивних та ємнісних елементів), які відображають параметри електротехнічних установок. Ідеалізовані елементи з'єднані між собою в тій самій послідовності, що й елементи на розрахунковій схемі.

Джерело електричної енергії на заступній схемі є джерелом напруги (ЕРС) з електрорушійною силою  $\dot{E}$  та внутрішнім опором  $\underline{Z}$  чи без нього (рис. 1.2, а) або джерелом струму  $\dot{J}$  (рис. 1.2 б, в). Для проведення розрахунків найбільш потужне джерело електричної енергії є джерелом ЕРС, а менш потужні – джерелами струму.

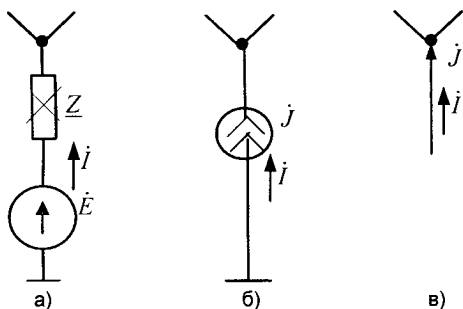


Рисунок 1.2 – Варіанти позначення джерел живлення

Електричні навантаження споживачів електроенергії можуть бути подані комплексним опором  $\underline{Z}$ , або джерелом струму  $\dot{J}$  (рис. 1.3). Відмінність зображення джерела і навантаження в останньому випадку полягає в знаку задавального струму  $\dot{J}$ : для навантаження цей струм дорівнює струму навантаження  $\dot{I}$  з від'ємним знаком.

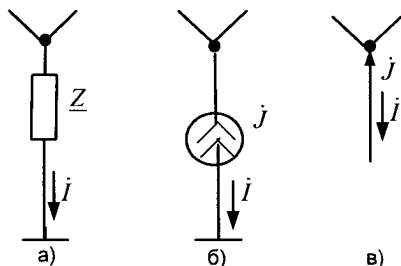


Рисунок 1.3 – Варіанти позначення навантажень споживачів електроенергії

ЛЕП на заступній схемі подають комплексним опором  $\underline{Z}_{Л}$ , а трансформатори – комплексним опором  $\underline{Z}_{Т}$  та ідеальним



трансформатором з коефіцієнтом трансформації  $k_T$ , який визначається відношенням номінальних напруг обмоток трансформатора (рис. 1.4). Для усунення трансформаторних зв'язків здійснюють приведення заступних схем до однієї напруги. Ця процедура виконується шляхом перерахунку струмів з використанням відношення номінальних напруг ( $k_T$ ), а опорів – з використанням квадрата відношення номінальних напруг ( $k_T^2$ ).

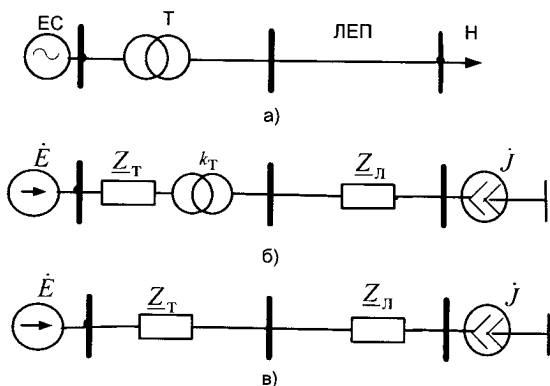


Рисунок 1.4 – Заступна схема трансформатора та ЛЕП

На рис. 1.5 зображено заступну схему мережі (див. рис. 1.1). На цій схемі джерело живлення подано джерелом ЕРС, а навантаження – джерелами струму. Під час проведення розрахунків вважається, що напруга у вузлі, де знаходиться найбільш потужне джерело живлення, залишається сталою за будь-яких змін електричних навантажень. Такий вузол називають балансувальним.

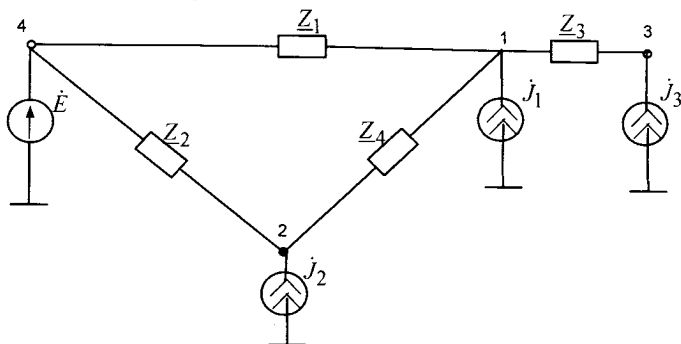


Рисунок 1.5 – Заступна схема електричної мережі

## 1.2 Основні топологічні поняття

Графічне зображення електричного кола (електричної мережі) у вигляді сукупності вершин, що відповідають вузлам, і дуг, що відповідають віткам, називають топологічним графом (рис. 1.6). Віткам надається напрямок, що відповідає вибраному умовно позитивному напрямку струму. Це пояснюється тим, що струми та напруги мають певний напрямок. Надання умовно позитивного напрямку кожній вітці є обов'язковим, тому що без цього не може бути розрахований режим цієї мережі. Граф з дугами, напрямки яких визначено, називається спрямованим або орієнтованим.

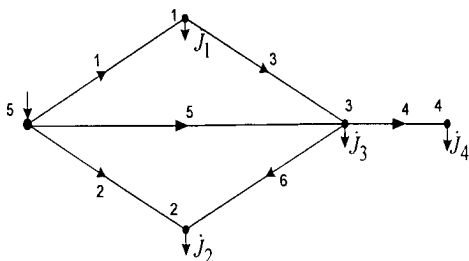


Рисунок 1.6 – Граф замкнутої електричної мережі

**Дерево графа.** Частина графа, який містить всі вершини, але не має жодного контуру, називають деревом графа (рис. 1.7). Дуги, які доповнюють дерево до повного графа, називають дугами зв'язку (хордами).

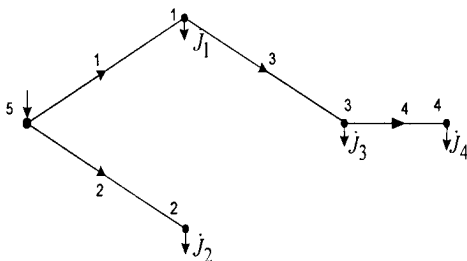


Рисунок 1.7 – Дерево графа електричної мережі

Вузли нумерують довільно за винятком того, що останній номер надається балансувальному вузлу. Вітки нумерують, почавши з віток дерева і закінчивши хордами. Кожній вітці бажано надати номер її кінцевого вузла.

**Перша матриця з'єднань (інциденцій).** Для опису структури графа використовують матрицю з'єднань віток з незалежними вузлами  $\mathbf{M}$  – першу матрицю з'єднань (інциденцій). Матриця з'єднань віток з незалежними вузлами  $\mathbf{M}$  складається з елементів  $M_{ij}$ , які набувають значень: 1, -1, 0 і характеризують зв'язок віток графа з його вершинами. Якщо  $j$ -вітка виходить з  $i$ -вершини, то  $M_{ij}=1$ , якщо входить, то  $M_{ij}=-1$ , а якщо вітка не з'єднана з цією вершиною, то  $M_{ij}=0$ . Матрицю  $\mathbf{M}$  іноді називають скороченою.

У деяких випадках використовують розширену (повну) першу матрицю з'єднань  $\mathbf{M}_\Sigma$ , яка відрізняється наявністю ще одного рядка для балансувального вузла. Складання матриці  $\mathbf{M}_\Sigma$  для схеми будь-якої складності є простою процедурою. В кожному стовпці потрібно записати «+1» та «-1» для тих рядків, які відповідають з'єднанням цієї віткою вузлам. Для решти елементів цього стовпця записуються нульові значення. Тобто, в кожному стовпці матриці  $\mathbf{M}_\Sigma$  мають бути дві одиниці: одна з мінусом, а інша с плюсом, а всі інші елементи мають дорівнювати нулю.

Якщо викреслити з отриманої матриці  $\mathbf{M}_\Sigma$  рядок, який відповідає вузлу балансу, от отримаємо матрицю  $\mathbf{M}$ . За допомогою матриці  $\mathbf{M}$  можна однозначно відновити конфігурацію відповідної схеми. Матриця  $\mathbf{M}$  містить в собі вичерпну інформацію про конфігурацію схеми.

Оскільки граф (див. рис. 1.6) має 4 незалежних вузли (без балансувального вузла) і 6 віток, то матриця  $\mathbf{M}$  матиме розмірність  $4 \times 6$ :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Першу матрицю з'єднань можна записати в вигляді двох підматриць, що характеризують дерево і хорди:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_\alpha \quad \mathbf{M}_\beta] = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

де  $\mathbf{M}_\alpha$  – квадратна підматриця з'єднань віток дерева з незалежними вузлами;

$\mathbf{M}_\beta$  – прямокутна підматриця з'єднань віток зв'язку (хорд) з незалежними вузлами.

Повна матриця інциденцій містить додатковий рядок, що відповідає балансувальному вузлу:

$$\mathbf{M}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{m}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

де  $\mathbf{m}_6$  – рядок, що відповідає балансувальному вузлу.

У кожному стовпці матриці  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  може бути тільки одна додатна одиниця та одна від'ємна. Інші елементи мають нульове значення. Отже, суми елементів стовпців цієї матриці мають дорівнювати нулю.

**Друга матриця з'єднань (інциденцій)** Для опису структури замкнутого електричного кола використовують матрицю з'єднань віток в незалежні контури – другу матрицю інциденцій.

Друга матриця інциденцій  $\mathbf{N}$  складається з елементів  $N_{ij}$ , які набувають значень: 1, -1, 0 і характеризують належність віток графа до цього контуру. Якщо  $j$ -вітка входить в  $i$ -контур і їх напрямки збігаються, то  $N_{ij}=1$ , якщо входить, але напрямки протилежні, то  $N_{ij}=-1$ , а якщо вітка не належить цьому контуру, то  $N_{ij}=0$ .

Незалежний контур – це такий контур, для якого рівняння другого закону Кірхгофа не може бути отримано у вигляді лінійної комбінації з рівнянь інших контурів. Контур, в який входить лише одна хорда, є незалежним. Напрямок обходу контуру вибирають за напрямком хорди.

Оскільки мережа (див. рис. 1.6) має два незалежних контури і шість віток, то матриця  $\mathbf{N}$  матиме розмірність  $2 \times 6$ :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другу матрицю з'єднань можна записати в вигляді двох підматриць, що характеризують дерево і хорди:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_{\alpha} \quad \mathbf{N}_{\beta}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де  $\mathbf{N}_{\alpha}$  – підматриця з'єднань віток дерева в незалежні контури;

$\mathbf{N}_{\beta}$  – одинична діагональна підматриця з'єднань віток зв'язку (хорд) в незалежні контури.

Матриця  $\mathbf{N}$  у загальному випадку не містить в собі повної інформації про структуру електричної мережі. Це пов'язано з тим, що розімкнуті частини схеми в матриці  $\mathbf{N}$  не відображаються. Наприклад, вітці «4» на рис. 1.6 відповідають нульові елементи.

**Визначення другої матриці інциденцій на основі узагальненої топологічної властивості графа.** Формування матриці  $\mathbf{M}$  для схеми будь-якої конфігурації є простою процедурою. Скласти матрицю  $\mathbf{N}$  для складних електричних мереж, на відміну від матриці  $\mathbf{M}$ , складно, оскільки потрібно виділити незалежні контури, кількість яких може бути дуже великою. Щоб не складати матрицю  $\mathbf{N}$  безпосередньо за схемою електричних мереж, застосовують процес формалізації її побудови. На основі узагальненої топологічної властивості графа можна записати

$$\mathbf{NM}^T = \mathbf{0} \text{ або } \mathbf{MN}^T = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Практичне використання умов (1.1) пов'язане з визначенням матриці  $\mathbf{N}$  аналітичним способом. Безпосередньо обрахувати матрицю  $\mathbf{N}$  з рівнянь (1.1) неможливо, оскільки матриця  $\mathbf{M}$  є прямокутною і тому не має оберненої матриці. Застосування поділу матриць  $\mathbf{M}$  і  $\mathbf{N}$  на підматриці, які відповідають дереву та хордам схеми, дозволяє отримати необхідні аналітичні співвідношення для визначення матриці  $\mathbf{N}$ .

Першу та другу матриці з'єднань можна записати в вигляді складених з двох блоків підматриць, що характеризують дерево і хорди:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_\alpha \quad \mathbf{M}_\beta]; \quad \mathbf{N} = [\mathbf{N}_\alpha \quad \mathbf{N}_\beta].$$

Під час формування матричних рівнянь на ЕОМ звичайно задають підматриці  $\mathbf{M}_\alpha$  та  $\mathbf{M}_\beta$ , а підматрицю  $\mathbf{N}_\alpha^T$  визначають з рівняння

$$\mathbf{MN}^T = \mathbf{0} \Rightarrow [\mathbf{M}_\alpha \quad \mathbf{M}_\beta] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\alpha^T \\ \mathbf{N}_\beta^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}_\alpha \mathbf{N}_\alpha^T + \mathbf{M}_\beta \mathbf{N}_\beta^T = \mathbf{0}.$$

Оскільки  $\mathbf{N}_\beta^T = \mathbf{1}$ , то

$$\mathbf{N}_\alpha^T = -\mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{M}_\beta = -\mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}_\beta. \quad (1.2)$$

Матриця  $\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1}$  характеризує розподілення струмів вузлів по вітках дерева графа. Коефіцієнти  $C_{\alpha ji}$  матриці  $\mathbf{C}_\alpha$  набувають значень: 1, -1, 0:  $C_{\alpha ji}=1$  у разі якщо по  $j$ -ій вітці дерева проходить струм  $i$ -го вузла і їх напрямки збігаються,  $C_{\alpha ji}=-1$  у разі якщо по  $j$ -ій вітці дерева проходить струм  $i$ -го вузла, але напрямки протилежні,  $C_{\alpha ji}=0$  у разі якщо струм  $i$ -го вузла не проходить по  $j$ -ій вітці дерева.

Матрицю  $\mathbf{C}_\alpha$  можна скласти за деревом графа або визначити шляхом обертання матриці  $\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1}$ .

**Приклад 1.1.** Для графа (див. рис. 1.6) визначити аналітичним шляхом на основі топологічної властивості графа матрицю  $\mathbf{N}$ .

**Розв'язування.**

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_\alpha^T = -\mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{M}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.3 Закони електричних кіл в матричній формі

#### Матрична форма запису параметрів режиму і системи

Режим мережі визначається низкою показників, які називаються «параметри режиму». До параметрів режиму відносять: активні, реактивні, повні потужності, струми навантажень та елементів мережі, напруги в різних точках мережі, кути зсуву фаз між векторами напруг і струмів  $\phi$ , кути розбіжності векторів напруг  $\delta$  та інші.

Основними розрахунковими величинами є комплексні струми у вітках, напруги на вітках, напруги вузлів і напруги вузлів відносно вузла балансу:

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dots \\ \dot{I}_m \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{U}}_B = \begin{bmatrix} \dot{U}_{B1} \\ \dots \\ \dot{U}_{Bm} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{U}}_\Delta = \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta 1} \\ \dots \\ \dot{U}_{\Delta n} \end{bmatrix},$$

де  $\dot{\mathbf{I}}$  – вектор струмів у вітках схеми,

$\dot{\mathbf{U}}_B$  – вектор напруг на вітках;

$\dot{\mathbf{U}}$  – вектор напруг у вузлах;

$\dot{\mathbf{U}}_\Delta$  – вектор напруг вузлів відносно балансувального вузла.

Основними вихідними величинами є вектори задавальних струмів вузлів (джерел і навантажень)  $\dot{\mathbf{J}}$  та електрорушійних сил у вітках  $\dot{\mathbf{E}}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \dots \\ J_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\dot{E}} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dots \\ \dot{E}_m \end{bmatrix}.$$

Параметри режиму пов'язані між собою певними співвідношеннями, що залежать від структури мережі, параметрів її елементів. Останні отримали назву «параметри системи». До параметрів системи відносять: активні  $R$ , реактивні  $X$ , повні  $Z$  опори, активні  $g$ , реактивні  $b$ , повні  $y$  провідності, сталі часу та інші.

Параметри системи задають матрицею комплексних опорів віток  $\mathbf{Z}_B$ . За відсутності взаємних опорів між вітками матриця буде діагональною

$$\mathbf{Z}_B = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{B1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{Bm} \end{bmatrix}.$$

У загальному випадку між  $i$  та  $j$  вітками заступної схеми можуть існувати взаємні опори  $\underline{Z}_{Bij}$ , що зумовлені, наприклад, взаємною індуктивністю. Якщо схема має властивість взаємності, то взаємний опір не залежить від послідовності запису індексів, тобто  $\underline{Z}_{Bij} = \underline{Z}_{Bji}$ .

**Закон Ома** в матричній формі запису

$$\mathbf{Z}_B \mathbf{I} = \mathbf{U}_B + \mathbf{\dot{E}} \quad (1.3)$$

записують на основі другого закону Кірхгофа для узагальненої вітки (рис. 1.8)  $\underline{Z}_{Bi} \dot{I}_i - \dot{E}_i = \dot{U}_{Bi}$ .

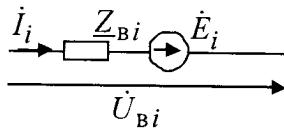


Рисунок 1.8 – Узагальнена вітка

За відсутності взаємних опорів між вітками матриця опорів віток буде діагональною і тоді для кола, що містить чотири вітки, матимемо

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{B1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{B2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{B3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{B4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{B1} \\ \dot{U}_{B2} \\ \dot{U}_{B3} \\ \dot{U}_{B4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \end{bmatrix}.$$

**Перший закон Кірхгофа** визначає баланс струмів у кожному вузлі електричного кола: алгебраїчна сума комплексних струмів, що витікають з вузла, дорівнює нулю. Перший закон Кірхгофа в матричній формі записують за допомогою першої матриці з'єднань  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{J}}, \quad (1.4)$$

де  $\dot{\mathbf{I}}$  – вектор комплексних струмів у вітках;

$\dot{\mathbf{J}}$  – вектор комплексних визначальних струмів вузлів (навантажень або джерел), для яких умовно-позитивний напрямок вибрано «до вузла».

У розгорнутому вигляді останній вираз для мережі (див. рис. 1.6) має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \\ \dot{J}_4 \end{bmatrix}.$$

Запишемо рівняння першого закону Кірхгофа для 1–4 вузлів:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_3 &= \dot{J}_1; \\ -\dot{I}_2 - \dot{I}_6 &= \dot{J}_2; \\ -\dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= \dot{J}_3; \\ -\dot{I}_4 &= \dot{J}_4. \end{aligned}$$

Для електричної мережі, що має  $n$  незалежних вузлів, можна скласти  $n$  незалежних рівнянь. Балансувальний вузол потрібно усунути з розгляду.

**Другий закон Кірхгофа** визначає баланс напруг в контурах електричного кола та формулюється таким чином: алгебраїчна сума комплексних напруг на вітках контуру дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа в матричній формі записують за допомогою другої матриці з'єднань  $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}_{\text{в}} = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

де  $\dot{\mathbf{U}}_{\text{в}}$  – вектор комплексних напруг на вітках.

У розгорнутому вигляді вираз (1.5) для мережі, зображеної на рис. 1.6:



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

З метою введення в рівняння струмів віток використаємо закон Ома  $Z_B \dot{I} = \dot{U}_B + \dot{E}$ . Тоді другий закон Кірхгофа в матричній формі

$$NZ_B \dot{I} = N\dot{E}. \quad (1.6)$$

#### 1.4 Узагальнене рівняння стану в матричній формі

З системи рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа (1.4),

$$M\dot{I} = \dot{J}$$

визначити струми у вітках замкнених мереж неможливо – невідомих  $m$ , а рівнянь  $n$  ( $n < m$ ). Потрібні ще  $m-n$  рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа (1.6)

$$NZ_B \dot{I} = N\dot{E}.$$

Формули першого і другого законів Кірхгофа утворюють узагальнене рівняння стану електричного кола

$$A\dot{I} = \dot{F}, \quad (1.7)$$

в якому матриця  $A$  складена з матриць  $M$  та  $NZ_B$ , а вектор  $\dot{F}$  – із векторів  $\dot{J}$  та  $N\dot{E}$ :

$$A = \begin{bmatrix} M \\ NZ_B \end{bmatrix}; \quad \dot{F} = \begin{bmatrix} \dot{J} \\ N\dot{E} \end{bmatrix}.$$

Розв'язок узагальненого рівняння стану

$$\dot{I} = A^{-1}\dot{F}.$$

**Приклад 1.2.** Визначити параметри режиму для мережі напругою 110 кВ, розрахункова схема якої зображена на рис. 1.9, за такими даними:

$$Z_B = \text{diag} \begin{bmatrix} 10 + j40 \\ 5 + j20 \\ 5 + j20 \end{bmatrix} \text{ Ом}; \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ В}; \quad \dot{J} = - \begin{bmatrix} 40 - j20 \\ 40 - j20 \end{bmatrix} \text{ А}.$$

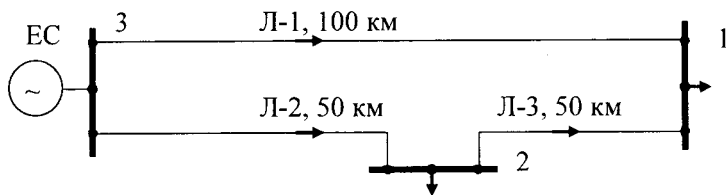


Рисунок 1.9 – Розрахункова схема кільцевої мережі

**Розв’язування.** Складемо узагальнене рівняння стану електричної мережі

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -(10 + j40) & 5 + j20 & 5 + j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(40 - j20) \\ -(40 - j20) \\ 0 \end{bmatrix},$$

в якому перших два рядки матриці  $\mathbf{A}$  утворені з відповідних рядків матриці  $\mathbf{M}$ , а третій є добутком матриць  $\mathbf{NZ}_B$ . Стовець  $\mathbf{\dot{F}}$  утворений з елементів вектора  $\mathbf{\dot{J}}$  та  $\mathbf{N\dot{E}}$ , а оскільки ЕРС в контурі відсутні, то останній елемент вектора дорівнює нулю.

Розв’язавши систему лінійних рівнянь, отримаємо:

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 30 - j15 \\ 50 - j25 \\ 10 - j5 \end{bmatrix} \text{ A.}$$

Напруги на вітках і у вузлах відносно базисного вузла будуть:

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{Z}_B \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 900 + j1050 \\ 750 + j875 \\ 150 - j175 \end{bmatrix} \text{ В; } \mathbf{U}_\Delta = \mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{U}_{B\alpha} = - \begin{bmatrix} 900 + j1050 \\ 750 + j875 \end{bmatrix} \text{ В.}$$

### 1.5 Вузлове рівняння стану в матричній формі

Вузлове рівняння можна вивести з першого закону Кірхгофа

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{J}.$$

Підставивши вектор струмів віток з формули закону Ома

$$\mathbf{Z}_B \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{E}}$$

в формулу першого закону Кірхгофа, дістанемо

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}_B(\dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{J},$$

де  $\mathbf{Y}_B$  — матриця провідностей віток:  $\mathbf{Y}_B = \mathbf{Z}_B^{-1}$ .

Перенісши відомі величини в праву сторону рівняння

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}}$$

та підставивши в останній вираз  $\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{M}^T\dot{\mathbf{U}}_\Delta$ , отримуємо вузлове рівняння стану

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}_B\mathbf{M}^T\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}}.$$

Позначивши  $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\mathbf{M}^T$ , система вузлових рівнянь остаточно набуде такого вигляду:

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}}, \quad (1.8)$$

де  $\mathbf{Y}$  – матриця вузлових провідностей:  $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\mathbf{M}^T$ .

Права частина рівняння (1.8) є вектором визначальних струмів, що зумовлені як вузовими джерелами струмів, так і ЕРС віток. Розв'язавши вузлове рівняння стану, дістанемо

$$\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \mathbf{Y}^{-1}(\mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{Z}(\mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}}),$$

де  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$  – матриця вузлових опорів.

В подальшому знаходять спади напруг на вітках

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{M}^T\dot{\mathbf{U}}_\Delta,$$

а з виразу закону Ома – струми в вітках:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_B(\dot{\mathbf{U}}_B + \dot{\mathbf{E}}).$$

**Приклад 1.3.** Визначити параметри режиму для мережі напругою 110 кВ, розрахункова схема якої зображена на рис. 1.9, за такими даними:

$$\mathbf{Z}_B = \text{diag} \begin{bmatrix} 10 + j40 \\ 5 + j20 \\ 5 + j20 \end{bmatrix} \text{ Ом}; \quad \mathbf{J} = - \begin{bmatrix} 40 - j20 \\ 40 - j20 \end{bmatrix} \text{ А}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Розв'язування.** Матриця вузлових провідностей

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{B1} + \underline{Y}_{B3} & -\underline{Y}_{B3} \\ -\underline{Y}_{B3} & \underline{Y}_{B2} + \underline{Y}_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,018 - j0,071 & -0,012 + j0,047 \\ -0,012 + j0,047 & 0,024 - j0,094 \end{bmatrix}.$$

Визначають вектор напруг відносно балансувального вузла за формулою  $\dot{\mathbf{U}}_\Delta = \mathbf{Y}^{-1}(\mathbf{J} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}})$ . Проміжним є результат обернення матриці вузлових провідностей

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 + j20 & 2,5 + j10 \\ 2,5 + j10 & 3,75 + j15 \end{bmatrix} \text{ Ом}.$$

Оскільки ЕРС в вітках відсутні, то можна використати формулу

$$\dot{U}_{\Delta} = \mathbf{Y}^{-1} \dot{\mathbf{J}}, \text{ звідки}$$

$$\mathbf{U}_{\Delta} = \begin{bmatrix} -900 - j1050 \\ -750 - j875 \end{bmatrix} \text{В.}$$

Розраховують вектори напруг вузлів  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{\Delta}$ , напруг на вітках

$$\dot{U}_{\text{В}} = \mathbf{M}^T \dot{U}_{\Delta}, \text{ струмів віток } \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_{\text{В}} \dot{U}_{\text{В}}.$$

**Приклад 1.4.** Визначити параметри режиму для кільцевої мережі, що зображена у вигляді графа на рис. 1.10, за такими даними:

$$\mathbf{Z}_{\text{В}} = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 + j2 \\ 1,5 + j3 \\ 2 + j4 \\ 2 + j4 \\ 3 + j6 \end{pmatrix} \text{ Ом}; \quad \dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -100 + j50 \\ -100 + j50 \\ -100 + j50 \\ -100 + j50 \end{bmatrix} \text{ А;}$$

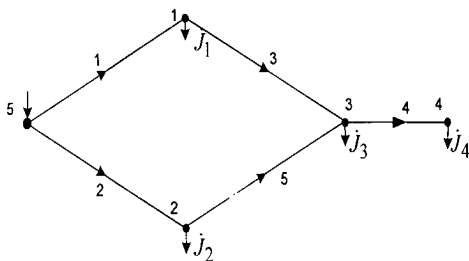


Рисунок 1.10 – Граф електричної мережі з одним контуром

**Розв'язування.** Матрицю вузлових провідностей розраховують за формулою  $\mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{Y}_{\text{В}} \mathbf{M}^T$ :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,3 - j0,6 & 0 & -0,1 + j0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 - j0,4 & -0,067 + j0,133 & 0 \\ -0,1 + j0,2 & -0,067 + j0,133 & 0,267 - j0,533 & -0,1 + j0,2 \\ 0 & 0 & -0,1 + j0,2 & 0,1 - j0,2 \end{bmatrix} \text{ См.}$$

Матриця вузлових опорів:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,867 + j1,733 & 0,2 + j0,4 & 0,6 + j1,2 & 0,6 + j1,2 \\ 0,2 + j0,4 & 1,2 + j2,4 & 0,6 + j1,2 & 0,6 + j1,2 \\ 0,6 + j1,2 & 0,6 + j1,2 & 1,8 + j3,6 & 1,8 + j3,6 \\ 0,6 + j1,2 & 0,6 + j1,2 & 1,8 + j3,6 & 3,8 + j7,6 \end{bmatrix} \text{ Ом.}$$

Визначають вектор напруг відносно балансувального вузла за формулою  $\dot{U}_\Delta = \mathbf{Z}(\dot{\mathbf{j}} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}})$ . Оскільки ЕРС в вітках відсутні, то можна використати формулу  $\dot{U}_\Delta = \mathbf{Y}^{-1}\dot{\mathbf{j}}$ , звідки

$$\dot{U}_\Delta = \begin{bmatrix} -0,45 - j0,34 \\ -0,52 - j0,39 \\ -0,96 - j0,72 \\ -1,36 - j1,02 \end{bmatrix} \text{кВ.}$$

Розраховують вектор напруг на вітках  $\dot{U}_B = \mathbf{M}^T\dot{U}_\Delta$  і вектор струмів віток  $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_B\dot{U}_B$ :

$$\dot{U}_B = \begin{bmatrix} 0,45 + j0,34 \\ 0,52 + j0,39 \\ 0,51 + j0,38 \\ 0,40 + j0,30 \\ 0,44 + j0,33 \end{bmatrix} \text{кВ;} \quad \dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 226,7 - j113,3 \\ 173,3 - j86,7 \\ 126,7 - j63,3 \\ 100 - j50 \\ 73,3 - j36,7 \end{bmatrix} \text{А.}$$

**Матриці коефіцієнтів струморозподілу та взаємних провідностей віток (перша форма запису)**

Підставивши в формулу закону Ома  $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_B(\dot{U}_B + \dot{\mathbf{E}})$  вирази для векторів напруг  $\dot{U}_B = \mathbf{M}^T\dot{U}_\Delta$  та  $\dot{U}_\Delta = \mathbf{Y}^{-1}(\dot{\mathbf{j}} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}})$ , дістанемо

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_B\mathbf{M}^T\mathbf{Y}^{-1}\dot{\mathbf{j}} + \mathbf{Y}_B(\mathbf{1} - \mathbf{M}^T\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Y}_B)\dot{\mathbf{E}}.$$

Вектор струмів віток можна подати через матриці коефіцієнтів струморозподілу та взаємних провідностей віток

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{j}} + \mathbf{Y}_{BB}\dot{\mathbf{E}},$$

де  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Y}_{BB}$  – матриці коефіцієнтів струморозподілу та взаємних провідностей віток замкнутого кола.

Тоді матрицю коефіцієнтів струморозподілу і матрицю взаємних провідностей віток замкнутого кола можна визначити з таких виразів:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}_B\mathbf{M}^T\mathbf{Y}^{-1}, \quad \mathbf{Y}_{BB} = \mathbf{Y}_B(\mathbf{1} - \mathbf{M}^T\mathbf{C}^T). \quad (1.9)$$

Транспонована матриця коефіцієнтів струморозподілу  $\mathbf{C}^T = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Y}_B$  характеризує розподіл ЕРС віток між вузловими напругами:

$$\dot{U}_\Delta = \mathbf{Y}^{-1}(\dot{\mathbf{j}} - \mathbf{M}\mathbf{Y}_B\dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{Y}^{-1}\dot{\mathbf{j}} - \mathbf{C}^T\dot{\mathbf{E}}.$$

Матриця коефіцієнтів струморозподілу кільцевої мережі, що зображена у вигляді графа на рис. 1.10, за даними прикладу 1.4 має дійсний характер

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}_B \mathbf{M}^T \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -0,867 & -0,2 & -0,6 & -0,6 \\ -0,133 & -0,8 & -0,4 & -0,4 \\ 0,133 & -0,2 & -0,6 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -0,133 & 0,2 & -0,4 & -0,4 \end{bmatrix},$$

що характерно для однорідних мереж. Відзначимо, що однорідною називають мережу з однаковим відношенням реактивних опорів до активних опорів віток.

## 1.6 Контурне рівняння стану в матричній формі

Під час складання контурних рівнянь однією з найбільш складних задач є врахування визначальних струмів джерел. Визначальні струми можна подати як відомі контурні струми, що проходять від джерел струму, якими є навантаження, через вітки дерева до джерела ЕРС. Таке подання полягає у введенні джерел ЕРС у вітки дерева, значення яких пропорційні добутку визначального струму на опір відповідних віток дерева.

Контурне рівняння можна вивести з другого закону Кірхгофа

$$\mathbf{N} \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{E}}.$$

Використавши перший закон Кірхгофа та подавши матриці  $\mathbf{M}$  та  $\dot{\mathbf{I}}$  у вигляді двох блоків, запишемо:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha & \mathbf{M}_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_\alpha \\ \dot{\mathbf{I}}_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{M}_\alpha \dot{\mathbf{I}}_\alpha + \mathbf{M}_\beta \dot{\mathbf{I}}_\beta = \mathbf{J}.$$

Виразимо вектор струмів віток дерева мережі через вектори визначальних струмів вузлів і струмів хорд:

$$\dot{\mathbf{I}}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{J} - \mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{M}_\beta \dot{\mathbf{I}}_\beta,$$

а оскільки  $\mathbf{N}_\alpha^T = -\mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{M}_\beta$ , то вектор струмів віток дерева

$$\dot{\mathbf{I}}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{N}_\alpha^T \dot{\mathbf{I}}_\beta.$$

Отже, вектор струмів усіх віток

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{J} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\alpha^T \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_\beta. \quad (1.10)$$

Оскільки  $\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\alpha^T \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ , то вектор струмів віток

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{I}}_\beta. \quad (1.11)$$

Підставши отриманий вираз для вектора струму в формулу другого закону Кірхгофа

$$\mathbf{N} \mathbf{Z}_B \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{E}},$$

отримують рівняння контурних струмів

$$\mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{I}}_\beta = \mathbf{N} \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{J}}.$$

Після заміни  $\mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{N}^T = \mathbf{Z}_K$ ,  $\dot{\mathbf{I}}_\beta = \dot{\mathbf{I}}_K$  рівняння контурних струмів остаточно набуває такого вигляду:

$$\mathbf{Z}_K \dot{\mathbf{I}}_K = \mathbf{N} \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{J}}, \quad (1.12)$$

де  $\mathbf{Z}_K$  – матриця контурних опорів:  $\mathbf{Z}_K = \mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{N}^T$ .

Таким чином, права частина рівняння (1.11) є вектором, що зумовлений як ЕРС у вітках, так і визначальними струмами вузлів.

Розраховують вектор струмів віток за формулою  $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{I}}_K$ , вектор напруг на вітках дерева  $\mathbf{U}_{B\alpha} = \mathbf{Z}_{B\alpha} \mathbf{I}_\alpha$ , вектор напруг відносно базисного вузла  $\mathbf{U}_\Delta = \mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{U}_{B\alpha}$ , де  $\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1}$ , і вектор напруг вузлів  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_\Delta$ .

**Приклад 1.5.** Визначити параметри режиму для кільцевої мережі, що зображена у вигляді графа на рис. 1.10.

**Розв'язування.** За методом контурних струмів  $\mathbf{N} = [-1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1]$ . Матрицю контурних опорів розраховують за формулою  $\mathbf{Z}_K = \mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{N}^T$ , звідки отримують матрицю розмірністю  $1 \times 1$ :  $\mathbf{Z}_K = 7,5 + j15 \text{ Ом}$ .

Знаходять обернену матрицю з'єднань дерева графа і доповнюємо її одним нульовим рядком (один контур):

$$\mathbf{M}_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ЕРС у вітках відсутні, то (1.11) набуває вигляду  $\mathbf{I}_K = -\mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{N} \mathbf{Z}_B \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{J}}$ , звідки

$$\dot{\mathbf{I}}_K = [73,3 - j36,7] \text{ А}.$$

Розраховують вектор струмів віток, вектор напруг на вітках дерева  $\mathbf{U}_{B\alpha} = \mathbf{Z}_{B\alpha} \mathbf{I}_\alpha$ , вектор напруг відносно базисного вузла  $\mathbf{U}_\Delta = \mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{U}_{B\alpha}$ , де

$C_\alpha = M_\alpha^{-1}$ , і вектор напруг вузлів  $U = U_0 + U_\Delta$ . Результат збігається з отриманим раніше в прикладі 1.4.

**Приклад 1.6.** Записати контурне рівняння стану замкнутої мережі з двома контурами, що зображена у вигляді графа на рис. 1.11.

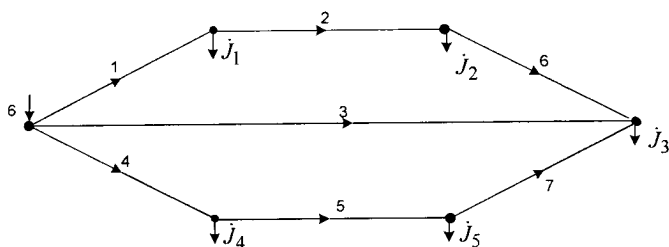


Рисунок 1.11 – Граф замкнутої мережі з двома контурами

**Розв'язування.** Матрицю контурних опорів визначають за формулою  $Z_K = NZ_B N^T$ , звідки

$$Z_K = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_6 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_7 \end{bmatrix} \text{ Ом.}$$

Матрицю контурних ЕРС визначають за формулою

$$E_K = NE - NZ_B C_p J,$$

звідки

$$E_K = \begin{bmatrix} Z_1 j_1 + (Z_1 + Z_2) j_2 - Z_3 j_3 \\ Z_4 j_4 + (Z_4 + Z_5) j_5 - Z_3 j_3 \end{bmatrix}.$$

Контурне рівняння стану має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_6 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{K1} \\ i_{K2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 j_1 + (Z_1 + Z_2) j_2 - Z_3 j_3 \\ Z_4 j_4 + (Z_4 + Z_5) j_5 - Z_3 j_3 \end{bmatrix}.$$

**Матриці коефіцієнтів струморозподілу та взаємних провідностей віток (друга форма запису)**

Підставивши в формулу  $\dot{I} = C_p J + N^T I_K$  вираз для вектора контурних струмів  $\dot{I}_K = Z_K^{-1} (NE - NZ_B C_p J)$ , дістанемо

$$\dot{I} = N^T Z_K^{-1} NE + (I - N^T Z_K^{-1} NZ_B) C_p J.$$

Отже, матриця взаємних провідностей віток та матриця коефіцієнтів струморозподілу замкнутого кола в другій формі запису будуть такими:

$$Y_{BB} = N^T Z_K^{-1} N, \quad C = (I - Y_{BB} Z_B) C_p.$$



## 1.7 Розрахунок електричних мереж в режимі заданої потужності

Для розрахунку електричних мереж переважно використовують метод вузлових напруг. Базовим є рівняння вузлових напруг у формі балансу струмів, записане для напруг відносно базисного вузла (1.8):

$$\underline{Y}\dot{U}_{\Delta} = \underline{J} - \underline{M}\underline{Y}_{\underline{B}}\dot{E}.$$

У цьому рівнянні передбачається використання фазних значень напруг, ЕРС і струмів (фази  $A$ ).

Оскільки під час розрахунку електричних мереж прийнято використовувати значення лінійних напруг і фазних струмів, то останнє рівняння необхідно записати у такому вигляді:

$$\underline{Y}\dot{U}_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot (\underline{j} - \underline{M}\underline{Y}_{\underline{B}}\dot{E}).$$

За такого запису розглядають комплексні значення  $\dot{U}_{\Delta i}$ , модулі яких дорівнюють модулям лінійних напруг, а початкові фази – початковим фазам напруг фази  $A$ . Струми у вітках – комплекси діючих значень струмів  $\dot{I}_j$  у фазі  $A$  ліній електропередачі.

У розгорнутому вигляді останнє рівняння має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2n} \\ & & \dots & \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta 1} \\ \dot{U}_{\Delta 2} \\ \dots \\ \dot{U}_{\Delta n} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{J}_n \end{bmatrix} + \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m_1} (\pm \underline{Y}_{j(1)} \dot{E}_j) \\ \sum_{j=1}^{m_2} (\pm \underline{Y}_{j(2)} \dot{E}_j) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{m_n} (\pm \underline{Y}_{j(n)} \dot{E}_j) \end{bmatrix},$$

де  $\underline{Y}_{ii}$  – власна провідність  $i$ -го вузла, яка дорівнює сумі провідностей віток, приєднаних до цього вузла;

$\underline{Y}_{ij}$  – взаємна провідність  $i$ -го та  $j$ -го вузлів, яка дорівнює провідності вітки (зі знаком мінус), що безпосередньо з'єднує ці вузли;

$\dot{U}_{\Delta i}$  – напруга  $i$ -го вузла відносно вузла балансу;

$\dot{E}_j, \underline{Y}_{j(i)}$  – поздовжня фазна ЕРС і провідність  $j$ -ої вітки, що приєднана до  $i$ -го вузла; знак «плюс» вибирається якщо ЕРС  $j$ -ої вітки направлена до  $i$ -го вузла;

$m_i$  – кількість віток з ЕРС, що приєднані до  $i$ -го вузла.

За відсутності ЕРС у вітках рівняння вузлових напруг набуде вигляду

$$\underline{Y}\dot{U}_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot \underline{j}.$$

У розгорнутому вигляді останнє рівняння має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2n} \\ & & \dots & \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta 1} \\ \dot{U}_{\Delta 2} \\ \dots \\ \dot{U}_{\Delta n} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dots \\ \dot{J}_n \end{bmatrix}.$$

### Рівняння, записане відносно напруг вузлів

У разі застосування напруг вузлів рівняння набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2n} \\ & & \dots & \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Y}_{1\delta} \\ \underline{Y}_{2\delta} \\ \dots \\ \underline{Y}_{n\delta} \end{bmatrix} \dot{U}_\delta = \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dots \\ \dot{J}_n \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

де  $\underline{Y}_{i,\delta}$  – взаємна провідність  $i$ -го та базисного вузлів;

$\dot{U}_\delta$  – напруга базисного вузла.

В матричній формі останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\underline{Y}_\Sigma \dot{U}_\Sigma = \sqrt{3} \dot{J}, \quad (1.14)$$

де  $\underline{Y}_\Sigma$  – розширена матриця вузлових провідностей, яка додатково містить стовпець від'ємних значень провідностей віток зв'язку вузлів з базисним вузлом;

$\underline{U}_\Sigma$  – розширений вектор напруг вузлів, що додатково містить напругу базисного вузла.

### Рівняння вузлових напруг у формі балансу потужностей

У багатьох випадках розрахунок електричних мереж виконується в режимі заданої потужності  $P = \text{const}$ ,  $Q = \text{const}$ . Оскільки комплексна потужність  $\underline{S} = P + jQ = \sqrt{3} \dot{U} I^*$ , то задавальний струм  $i$ -го вузла можна записати у вигляді  $\dot{J}_i = S_i^* / (\sqrt{3} U_i^*)$ , де  $S_i^*$ ,  $U_i^*$  – спряжені комплекси потужності та напруги  $i$ -го вузла.

Підставивши задавальний струм  $i$ -го вузла у вигляді  $\dot{J}_i = S_i^* / (\sqrt{3} U_i^*)$  в рівняння вузлових напруг (1.13), дістанемо:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2n} \\ & & \dots & \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Y}_{1\delta} \\ \underline{Y}_{2\delta} \\ \dots \\ \underline{Y}_{n\delta} \end{bmatrix} \dot{U}_\delta = \begin{bmatrix} \underline{S}_1^* / U_1^* \\ \underline{S}_2^* / U_2^* \\ \dots \\ \underline{S}_n^* / U_n^* \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

В матричній формі (1.15) можна записати таким чином:

$$\underline{Y}_\Sigma \dot{U}_\Sigma = (\text{diag } \hat{U})^{-1} \hat{\underline{S}}, \quad (1.16)$$

Рівняння вузлових напруг в формі балансу потужностей отримують домноженням рівнянь типу (1.15) на спряжений комплекс напруги  $i$ -го вузла  $U_i^*$ :

$$U_i^* \underline{Y}_{ii} \dot{U}_i - U_i^* \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underline{Y}_{ij} \dot{U}_j - \underline{Y}_{i,0} U_i^* \dot{U}_0 = \underline{S}_i^*, \quad i=1, \dots, n. \quad (1.17)$$

В матричній формі (1.17) можна записати таким чином:

$$(\text{diag } \hat{U}) \underline{Y}_\Sigma \dot{U}_\Sigma = \hat{S}. \quad (1.18)$$

Оскільки рівняння (1.16), (1.18) є нелінійними, то їх розрахунок можна виконати лише з використанням ітераційних наближень.

### Урахування статичних характеристик вузлів навантажень

Відомо, що за незмінного складу навантаження споживані активна та реактивна потужності є функціями напруги на шинах живлення  $P = f_P(U)$ ,  $Q = f_Q(U)$ . Водночас напруга у вузлі електричної мережі залежить від навантаження. Для врахування взаємовпливу напруги і статичних характеристик навантаження останні подають степеневими залежностями потужностей фаз від напруги на шинах [5]:

$$\underline{S} = P_H (U/U_H)^p + j Q_H (U/U_H)^q, \quad (1.19)$$

де  $P_H, Q_H$  – відповідно активна та реактивна номінальні потужності навантаження за номінальної напруги;

$U, U_H$  – фактичне та номінальне значення напруги у вузлі навантаження;

$p, q$  – характеристичні коефіцієнти, що визначають залежності потужностей навантаження від напруги з діапазоном їх зміни в таких межах:  $p=0 \dots 2, q=2 \dots 4$ .

Якщо розрахунок виконується в режимі заданої потужності  $P=\text{const}, Q=\text{const}$ , то це еквівалентно тому, що статичні характеристики вузлів навантаження мають нульові характеристичні коефіцієнти. Якщо розрахунок виконується в режимі заданого струму  $J=\text{const}$ , то статичні характеристики навантаження мають характеристичні коефіцієнти, що дорівнюють одиниці. Якщо навантаження задають опорами або провідностями, то це еквівалентно квадратичним статичним характеристикам навантаження.

**Приклад 1.7.** Виконати розрахунок замкнутої мережі (рис. 1.12) в режимі заданого струму та заданої потужності [3]. Напруга базисного вузла  $U_4 = 115$  кВ. Потужності навантажень  $\underline{S}_1 = 25 + j12$  МВ·А,  $\underline{S}_2 = 17 + j9$  МВ·А,  $\underline{S}_3 = 27 + j14$  МВ·А. Опори ЛЕП:  $\underline{Z}_1 = 3,24 + j10,83$  Ом,

$$\underline{Z}_2 = 11,4 + j38,1 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = 4,44 + j14,84 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = 5,4 + j18,05 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = 8,52 + j28,47 \text{ Ом}.$$

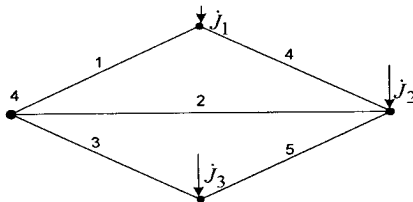


Рисунок 1.12 – Граф замкнутої електричної мережі з двома контурами

**Розв'язування.** Розв'язування виконують в такій послідовності: вводять матрицю опорів віток, першу матрицю з'єднань та вектори початкових напруг вузлів і комплексних потужностей навантажень, визначають матрицю вузлових провідностей, за початкових значень напруг вузлів розраховують вектори визначальних струмів, вузлових напруг та напруг на вітках, струмів у вітках та нових значень вузлових напруг.

Програма розрахунку з використанням вузлового рівняння у формі балансу струмів має такий вигляд:

ORIGIN := 1

$$Z := \begin{pmatrix} 3.24 + 10.83i \\ 11.4 + 38.1i \\ 4.44 + 14.84i \\ 5.4 + 18.05i \\ 8.52 + 28.47i \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{diag}(Z)$$

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U := \begin{pmatrix} 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

$$U0 := 115 \cdot 10^3$$

$$S_{\text{ж}} := 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 25 + 12i \\ 17 + 9i \\ 27 + 14i \end{pmatrix}$$

$$Y := M \cdot Z^{-1} \cdot M^T$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.041 - 0.136i & -0.015 + 0.051i & 0 \\ -0.015 + 0.051i & 0.032 - 0.107i & -9.647 \times 10^{-3} + 0.032i \\ 0 & -9.647 \times 10^{-3} + 0.032i & 0.028 - 0.094i \end{pmatrix}$$

1 цикл

$$J_w := \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot (\text{diag}(U)^{-1}) \cdot \bar{S}$$

$$U_{\Delta} := \sqrt{3} \cdot Y^{-1} \cdot J$$

$$U_b := M^T \cdot U_{\Delta}$$

$$U := U0 + U_{\Delta}$$

$$I := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z^{-1} \cdot U_b$$

$$S1 := -\sqrt{3} \cdot \text{diag}(U) \cdot \bar{J}$$

Результати розрахунку для ітерацій в режимі заданої потужності:

$$U = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^5 - 2.542i \times 10^3 \\ 1.119 \times 10^5 - 3.265i \times 10^3 \\ 1.12 \times 10^5 - 3.142i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 159.125 - 78.971i \\ 58.454 - 30.019i \\ 144.578 - 74.712i \\ 27.909 - 15.988i \\ 2.864 - 1.231i \end{pmatrix} \quad S1 = \begin{pmatrix} 2.587 \times 10^7 + 1.171i \times 10^7 \\ 1.756 \times 10^7 + 8.648i \times 10^6 \\ 2.788 \times 10^7 + 1.348i \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^5 - 2.429i \times 10^3 \\ 1.118 \times 10^5 - 3.118i \times 10^3 \\ 1.119 \times 10^5 - 3i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 153.751 - 81.131i \\ 56.518 - 30.997i \\ 139.835 - 77.252i \\ 27.047 - 16.756i \\ 2.746 - 1.216i \end{pmatrix} \quad S1 = \begin{pmatrix} 2.499 \times 10^7 + 1.202i \times 10^7 \\ 1.698 \times 10^7 + 9.02i \times 10^6 \\ 2.697 \times 10^7 + 1.403i \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^5 - 2.432i \times 10^3 \\ 1.118 \times 10^5 - 3.122i \times 10^3 \\ 1.119 \times 10^5 - 3.005i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 153.867 - 80.975i \\ 56.569 - 30.936i \\ 139.969 - 77.1i \\ 27.084 - 16.72i \\ 2.744 - 1.214i \end{pmatrix} \quad S1 = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^7 + 1.2i \times 10^7 \\ 1.7 \times 10^7 + 9i \times 10^6 \\ 2.7 \times 10^7 + 1.4i \times 10^7 \end{pmatrix}$$

За значеннями вектора потужностей S1 контролюють збіжність ітераційного процесу. Як правило, достатнім є виконання трьох ітерацій.

**Приклад 1.8.** Виконати розрахунок замкнутої мережі (рис. 1.12) в режимі заданої потужності з використанням вузлового рівняння у формі балансу потужностей за вихідними даними, наведеними в прикладі 1.7.

**Розв'язування.** Розв'язування виконують з використанням підпрограми Given/Find.

$$U0 := \begin{pmatrix} 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \quad U := U0$$

Given

$$\text{diag}(\bar{U}) \cdot Y \Sigma \cdot \text{stack}(U, 115 \cdot 10^3) = \bar{S}$$

$$U := \text{Find}(U)$$

$$U\Delta := U - 115000$$

$$U\delta := M^T \cdot U\Delta$$

$$I := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z^{-1} \cdot U\delta$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^5 - 2.432i \times 10^3 \\ 1.118 \times 10^5 - 3.122i \times 10^3 \\ 1.119 \times 10^5 - 3.005i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 153.861 - 80.978i \\ 56.566 - 30.937i \\ 139.962 - 77.103i \\ 27.083 - 16.721i \\ 2.744 - 1.213i \end{pmatrix}$$

У разі якщо статичні характеристики активної потужності мають квадратичні залежності від напруги, що еквівалентно поданню навантажень опорами, підпрограма розрахунку має такий вигляд:

$$U_0 := \begin{pmatrix} 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \quad \underline{U}_0 := U_0$$

Given

$$\text{diag}(\underline{U}) \cdot Y \Sigma \cdot \text{stack}(U, 115 \cdot 10^3) = \text{diag}(\underline{S}) \left( \frac{\sqrt{\text{Re}(U)^2 + \text{Im}(U)^2}}{110 \cdot 10^3} \right)^2$$

$U := \text{Find}(U)$

$$\underline{U}_{AA} := U - 115000$$

$$\underline{U}_B := M^T \cdot U_A$$

$$\underline{I}_W := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z^{-1} \cdot U_B$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.125 \times 10^5 - 2.534i \times 10^3 \\ 1.117 \times 10^5 - 3.237i \times 10^3 \\ 1.118 \times 10^5 - 3.11i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 160.373 - 84.576i \\ 58.667 - 32.154i \\ 144.947 - 80.027i \\ 27.609 - 17.131i \\ 2.956 - 1.317i \end{pmatrix}$$

## 1.8 Розрахунок втрат потужності

Втрати активної та реактивної потужностей в електричних мережах будь-якої конфігурації можуть бути визначені з використанням формул

$$\underline{\Delta S} = \sqrt{3} \left[ \underline{U}_B^T \underline{\hat{I}} \right]; \quad \underline{\Delta S} = \sqrt{3} \left[ \underline{U}_\Delta^T \underline{\hat{J}} \right]; \quad (1.20)$$

$$\underline{\Delta S} = 3 \left[ \underline{\hat{I}}^T \underline{Z}_B \underline{\hat{I}} \right]; \quad \underline{\Delta S} = 3 \left[ \underline{\hat{J}}^T \underline{Z} \underline{\hat{J}} \right], \quad (1.21)$$

де  $\underline{U}_B^T, \underline{U}_\Delta^T$  – вектори-рядки комплексних напруг віток та вузлів відносно балансувального вузла;

$\underline{\hat{I}}, \underline{\hat{J}}$  – вектори-стовпці спряжених комплексних струмів віток та вузлових навантажень;

$\underline{Z} = \underline{R} + j\underline{X}$  – матриця комплексних вузлових опорів.

Досить часто для аналізу електричних мереж використовують заступну R-схему, яка містить лише резистивні елементи. У цьому випадку втрати активної потужності можна визначити з формул

$$\underline{\Delta P} = 3 \left[ \underline{\hat{I}}^T \underline{R}_B \underline{\hat{I}} \right]; \quad \underline{\Delta P} = 3 \left[ \underline{\hat{J}}^T \underline{R} \underline{\hat{J}} \right].$$

Втрати реактивної потужності можна визначити з формул

$$\underline{\Delta Q} = 3 \left[ \underline{\hat{I}}^T \underline{X}_B \underline{\hat{I}} \right]; \quad \underline{\Delta Q} = 3 \left[ \underline{\hat{J}}^T \underline{X} \underline{\hat{J}} \right].$$

Для розподілення втрат потужності між споживачами пропорційно їх навантаженням визначають вектор-стовпець втрат потужності, які відносять на баланс окремих споживачів:

$$\Delta P = \sqrt{3} \operatorname{Re}(\dot{U}_{\Delta}^D \dot{J}); \quad \Delta P = 3 \operatorname{Re}(\dot{J}^D Z J),$$

де  $\dot{U}_{\Delta}^D$  – діагональна матриця комплексних напруг вузлів відносно балансувального вузла;

$\dot{J}^D$  – діагональна матриця комплексних спряжених струмів вузлових навантажень.

Матриця перетоків потужностей визначається з формули

$$\underline{S}_{\Pi} = \sqrt{3} [\operatorname{diag} U_{\Sigma} \mathbf{M}_{\Sigma} \operatorname{diag} \hat{\mathbf{I}}], \quad (1.22)$$

де  $\operatorname{diag}(U_{\Sigma})$  – діагональна матриця напруг вузлів  $U_{\Sigma}$  з напругою базисного вузла  $U_6$  в останньому рядку,

$\operatorname{diag} \hat{\mathbf{I}}$  – діагональна матриця комплексно спряжених струмів віток.

В отриманій матриці  $\underline{S}_{\Pi}$  рядки відповідають потужностям вузлів (якщо  $P_i < 0$  – споживаній, якщо  $P_i > 0$  – генерованій), а стовпці – перетокам потужностей по вітках.

Сума потужностей елементів відповідного стовпця матриці  $\underline{S}_{\Pi}$  визначає втрати потужності у відповідній вітці:

$$\Delta S_{Bj} = \sum_{i=1}^{n+1} S_{nij}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.23)$$

де  $n+1$  – кількість вузлів схеми разом із базисним вузлом (кількість рядків матриці  $\underline{S}_{\Pi}$ );

$m$  – кількість віток (кількість стовпців матриці  $\underline{S}_{\Pi}$ ).

За результатами обчислення вектора втрат потужностей у вітках  $\Delta S_B$  можна побудувати діаграму втрат потужності у вітках.

Сумарні втрати потужності в мережі (сума елементів матриці  $\Delta S_B$ )

$$\Delta S_{\Sigma} = \sum_{j=1}^m \Delta S_{Bj}. \quad (1.24)$$

Перевірка балансу потужностей проводиться шляхом зіставлення результатів обчислення перетоків потужностей за допомогою матриці  $\underline{S}_{\Pi}$  та матриці навантажень вузлів  $\underline{S}$  для заданого усталеного режиму. Сума елементів останнього рядка (для балансувального вузла) матриці  $\underline{S}_{\Pi}$  має відповідати сумі елементів матриці навантажень  $\underline{S}$

$$\sum_{j=1}^m S_{n6j} = \sum_{i=1}^n S_i. \quad (1.25)$$

Якщо рівність (1.25) виконується, то розрахунок виконано правильно.

**Приклад 1.9.** Виконати розрахунок втрат потужності в кільцевій мережі 110 кВ (рис. 1.9) за вихідними даними, наведеними в прикладі 1.2.

**Розв'язування.** Розрахунок виконуємо для режиму заданої потужності.

$$U\Sigma := \text{stack}(U, 115 \cdot 10^3)$$

$$S_i = \sqrt{3} \cdot (\text{diag}(U\Sigma) \cdot M\Sigma \cdot \text{diag}(i))$$

$$U\Sigma = \begin{pmatrix} 1.135 \times 10^5 & -1.74i \times 10^3 \\ 1.137 \times 10^5 & -1.45i \times 10^3 \\ & & 1.15 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad M\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_i = \begin{pmatrix} -5.714 \times 10^6 - 2.851i \times 10^6 & 0 & -1.907 \times 10^6 - 9.597i \times 10^5 \\ 0 & -9.53 \times 10^6 - 4.777i \times 10^6 & 1.909 \times 10^6 + 9.667i \times 10^5 \\ 5.746 \times 10^6 + 2.978i \times 10^6 & 9.574 \times 10^6 + 4.953i \times 10^6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 1 \ 1) \cdot S_i = (3.167 \times 10^4 + 1.267i \times 10^5 \quad 4.393 \times 10^4 + 1.757i \times 10^5 \quad 1.77 \times 10^3 + 7.079i \times 10^3)$$

$$(1 \ 1 \ 1) \cdot S_i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7.736 \times 10^4 + 3.095i \times 10^5 \quad S_i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.621 \times 10^6 - 3.811i \times 10^6 \\ -7.621 \times 10^6 - 3.811i \times 10^6 \\ 1.532 \times 10^7 + 7.93i \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Отже, сумарні втрати активної потужності – 77,36 кВт, що становить 0,5% від сумарного споживання. Найбільші втрати (43,93 кВт) виникають в Л-2 з найбільшим навантаженням.

Розрахунок втрат потужності використовують для вибору місць розміщення відновлюваних джерел енергії та компенсувальних пристроїв.

**Приклад 1.10.** Кільцева однорідна мережа (див. рис. 1.10) характеризується матрицею вузлових активних опорів

$$R = \begin{bmatrix} 0,74 & 0,12 & 0,43 & 0,43 \\ 0,12 & 1,35 & 0,74 & 0,74 \\ 0,43 & 0,74 & 2,58 & 2,58 \\ 0,43 & 0,74 & 2,58 & 6,58 \end{bmatrix}$$

З матриці вузлових активних опорів випливає, що найбільше значення власного опору має вузол 4. Отже, з погляду мінімуму втрат, джерело реактивної потужності доцільно приєднати у вузлі 4.

На рис. 1.13 наведено залежності втрат активної потужності в мережі за однакових навантажень вузлів  $S_j=20+j20$  МВА як функцій реактивної потужності навантаження  $i$ -го вузла  $Q_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ , з якого видно, що для зменшення втрат потужності, дійсно, найкращим є розміщення джерела реактивної потужності у вузлі 4. З рисунка також випливає, що генерована реактивна потужність у вузлі 4 не має перевищувати 11,4 МВАр, після



чого втрати зростають. Водночас перекомпенсація у вузлі 4 з економічно вигідна лише незначно, значно меншими втрати будуть у разі одночасного встановлення КУ в 4 і 3 вузлах навантаження.

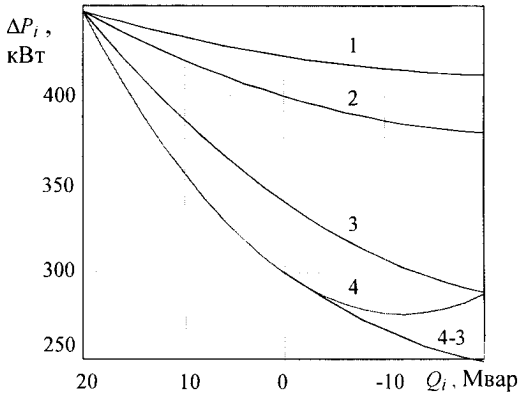


Рисунок 1.13 – Залежності втрат активної потужності в мережі як функції реактивної потужності навантажень вузлів у разі встановлення КУ

Розподільні електричні мережі мають розімкнуту структуру. Однак під час проектування на етапі вибору схеми мережі може розглядатися повна замкнута мережа, розмикання якої здійснюється за мінімумом втрат електричної енергії, за мінімумом втрат напруги або по вітках з найменшими струмами.

**Приклад 1.11.** Виконати розрахунок замкнутої мережі 10 кВ (рис. 1.14) в режимі заданої потужності з використанням вузлового рівняння у формі балансу струмів. Мережа напругою 10 кВ виконана повітряними лініями довжиною {5; 4; 3; 4; 2; 2; 3} км. Переріз проводів ліній 1,...,3 становить 120 мм<sup>2</sup>, ліній 4,...,7 – 50 мм<sup>2</sup>. Навантаження кожного з вузлів становить 850 кВт. Напругу базисного вузла 6 прийняти 10 кВ.

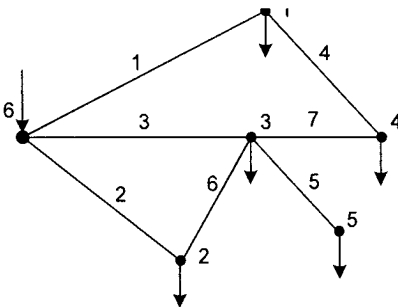


Рисунок 1.14 – Граф повної розподільної мережі

**Розв'язування.** Розрахунок виконуємо з використанням автоматизованої форми введення даних [6]. Опори ПЛІ задаються їх питомими значеннями.

$ORIGIN := 1$

$V :=$

**Автоматизована форма вводу даних про електричну мережу**

Дані про вітки схеми								Навантаження вузлів				
№ вітки	Початковий вузол	Кінцевий вузол	Конструктивне вимочання вітки	Марка	Довжина лінії, м	Активний опір вітки, $\Omega$ , Ом	Реактивний опір вітки, $\Omega$ , Ом	Втрати холостого ходу активної потужності на вітці, кВт, кВт	Втрати холостого ходу реактивної потужності на вітці, кВар, кВар	№ вузла	Активна потужність вузла, кВт	Реактивна потужність вузла, кВар
1	6	1	Провід	120	5	1,25	1,68			1	850	0
2	6	2	Провід	120	4	1	1,344			2	850	0
3	6	3	Провід	120	3	0,75	1,008			3	850	0
4	1	4	Провід	50	4	2,412	1,459			4	850	0
5	3	5	Провід	50	2	1,206	0,73			5	850	0
6	2	3	Провід	50	2	1,206	0,73			6		
7	3	4	Провід	50	3	1,809	1,094					
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												

0

$M :=$  for  $i \in 1..rows(V)$   
 if  $V_{i,1} \neq "" \wedge V_{i,2} \neq ""$   
 $M\Sigma_{V_{i,1},i} \leftarrow 1$   
 $M\Sigma_{V_{i,2},i} \leftarrow -1$   
 $M \leftarrow submatrix(M\Sigma, 1, rows(M\Sigma) - 1, 1, cols(M\Sigma))$   
 $M$

$n := rows(M)$        $m_j := cols(M)$

$M\alpha := submatrix(M, 1, n, 1, n)$

$$M\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$M\beta := submatrix(M, 1, n, n + 1, m)$

$$M\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$j := \sqrt{-1}$

$$Z := \begin{cases} \text{for } i \in 1..m \\ Z_i \leftarrow V_{i,6} + j \cdot V_{i,7} \\ Z \end{cases}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1.25 + 1.68i \\ 1 + 1.344i \\ 0.75 + 1.008i \\ 2.412 + 1.459i \\ 1.206 + 0.73i \\ 1.206 + 0.73i \\ 1.809 + 1.094i \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 850 \\ 850 \\ 850 \\ 850 \\ 850 \\ 850 \end{pmatrix}$$

$$S_{i,1} := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ S_{i,1} \leftarrow V_{i,12} + j \cdot V_{i,13} \\ S \end{cases}$$

$$U0 := \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{diag}(Z)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1.25 + 1.68i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 1.344i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 + 1.008i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.412 + 1.459i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.206 + 0.73i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.206 + 0.73i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.809 + 1.094i \end{pmatrix}$$

Програма розрахунку мережі в режимі заданої потужності з використанням вузлового рівняння у формі балансу струмів має такий вигляд:

$$Y := M \cdot Z^{-1} \cdot M^T$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.589 - 0.567i & 0 & 0 & -0.304 + 0.184i & 0 \\ 0 & 0.963 - 0.846i & -0.607 + 0.367i & 0 & 0 \\ 0 & -0.607 + 0.367i & 2.094 - 1.618i & -0.405 + 0.245i & -0.607 + 0.367i \\ -0.304 + 0.184i & 0 & -0.405 + 0.245i & 0.708 - 0.428i & 0 \\ 0 & 0 & -0.607 + 0.367i & 0 & 0.607 - 0.367i \end{pmatrix}$$

$$U := U0$$

1 ітерація

$$J_{i,j} := \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot (\text{diag}(U))^{-1} \cdot \bar{S} \cdot 10^3$$

$$U_{\Delta} := \sqrt{3} \cdot (Y^{-1} \cdot J - M \cdot Z^{-1} \cdot E)$$

$$U_b := M^T \cdot U_{\Delta}$$

$$U := 10000 + U_{\Delta}$$

$$I := Z^{-1} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U_b + E \right)$$

$$SI := -\sqrt{3} \cdot \text{diag}(U) \cdot \bar{J} \cdot 10^{-3}$$

$$U = \begin{pmatrix} 9841.664 - 199.283i \\ 9884.36 - 161.116i \\ 9847.78 - 188.914i \\ 9753.765 - 245.551i \\ 9740.986 - 249.835i \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 70.152 - 2.218i \\ 68.349 + 1.179i \\ 111.418 - 4.287i \\ 20.308 - 1.21i \\ 50.345 - 1.29i \\ 18.714 + 1.987i \\ 29.972 - 0.055i \end{pmatrix} \quad S1 = \begin{pmatrix} 849.989 - 0.015i \\ 849.993 - 0.011i \\ 849.989 - 0.014i \\ 849.981 - 0.02i \\ 849.979 - 0.022i \end{pmatrix}$$

На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що вітки 4 та 6 з найменшими струмами можна розімкнути, а відповідні лінії електропередач не споруджувати. Для моделювання розмикання віток Л-4 та Л-6 всі елементи четвертого і шостого стовпців матриці  $M$  прирівнюють до нуля. Результати розрахунків після розмикання Л-4 та Л-6 такі:

$$U = \begin{pmatrix} 9890.514 - 142.769i \\ 9912.938 - 114.215i \\ 9794.719 - 258.274i \\ 9631.811 - 348.948i \\ 9686.917 - 318.744i \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 49.608 - 0.716i \\ 49.499 - 0.57i \\ 151.55 - 4.819i \\ 0 \\ 50.603 - 1.662i \\ 0 \\ 50.88 - 1.839i \end{pmatrix} \quad S1 = \begin{pmatrix} 849.997 - 0.004i \\ 849.998 - 0.002i \\ 849.968 - 0.043i \\ 849.936 - 0.065i \\ 849.95 - 0.055i \end{pmatrix}$$

У цьому випадку різко збільшилось навантаження Л-3. Однак такий струм є допустимим для проводу АС-120.

Сумарні втрати активної потужності збільшуються з 78,8 кВт до 91,7 кВт (з 1,8 до 2,1% від сумарного споживання). Втрати у вітках до і після розмикання Л-4 та Л-6:

$$\Delta S_b = (18473 + 24822i \ 14019 + 18837i \ 27973 + 37587i \ 2995 + 1812i \ 9176 + 5551i \ 1281 + 775i \ 4875 + 2949i)$$

$$\Delta S_b = (9230 + 12403i \ 7351 + 9878i \ 51729 + 69508i \ 0 \ 9275 + 5610i \ 0 \ 14068 + 8510i)$$

Найбільшими втрати стають в Л-3: 51,7 кВт. Для зменшення втрат потужності в Л-3 можна спробувати розімкнути Л-6 та Л-7. Результати розрахунків після розмикання Л-6 та Л-7 такі:

$$U = \begin{pmatrix} 9769.6687 - 287.293i \\ 9912.9379 - 114.2148i \\ 9866.5282 - 171.8283i \\ 9549.8846 - 407.7838i \\ 9760.0465 - 232.8235i \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 101.4736 - 3.6555i \\ 49.4991 - 0.5702i \\ 99.9747 - 2.0629i \\ 51.288 - 2.1835i \\ 50.2517 - 1.1977i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S1 = \begin{pmatrix} 849.9513 - 0.0646i \\ 849.9985 - 0.002i \\ 849.9911 - 0.012i \\ 849.8906 - 0.1076i \\ 849.9822 - 0.0181i \end{pmatrix}$$

Однак при цьому сумарні втрати потужності в розподільній мережі збільшилися до 96,7 кВт. Втрати у вітках після розмикання Л-6 та Л-7:

$$\Delta S_b = (38663 + 51952i \ 7351 + 9878i \ 22498 + 30231i \ 19068 + 11535i \ 9141 + 5530i \ 0 \ 0)$$

## 1.9 Прямі методи розв'язування рівнянь стану електричних мереж

Для розрахунку ustalених режимів застосовують методи прямого розрахунку та ітераційні методи. Методи прямого розрахунку: метод оберненої матриці, метод Гаусса, метод прогонки.

**Метод Гаусса.** Алгоритм із зворотним ходом складається з двох етапів: прямого і зворотного ходу. На першому етапі систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.26)$$

з квадратною матрицею коефіцієнтів

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

зводять до системи рівнянь з верхньою трикутною матрицею. Для цього на першому кроці перше рівняння системи

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

ділять на  $a_{11}$  (нормалізація напрямного рядка) і, домноживши отримане рівняння на  $a_{i1}$  та віднявши його відповідні коефіцієнти від коефіцієнтів кожного наступного  $i$ -го рівняння, вилучають з них  $x_1$  (визначення коефіцієнтів наступних рядків).

На другому кроці за такою ж схемою вилучають  $x_2$  з третього і наступних рівнянь. Аналогічно виконуть наступні кроки. На другому етапі визначають невідомі, починаючи з останнього рівняння.

Метод Гаусса реалізується вбудованою підпрограмою Mathcad «lsolve(A,b)». В підпрограмі «lsolve(A,b)» насправді використано ортогональний LU-розклад матриці  $\mathbf{A}$ . LU-розклад можна також реалізувати за допомогою підпрограми «lu (A)». Результат подано у вигляді:  $[\mathbf{PLU}]$ , де  $\mathbf{P}$  – матриця перестановок;  $\mathbf{L}$  – нижня трикутна матриця;  $\mathbf{U}$  – верхня трикутна матриця. Матриця  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{LU}$ .

Розв'язування  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  виконується у такій послідовності: 1)  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ , 2)  $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ . На обох етапах зліва – трикутні матриці і розрахунок не містить операції обертання матриці.

Метод Гаусса не має методичної похибки. Однак будь-яка неточність вихідних даних або округлення можуть призвести до суттєвих помилок розв'язування погано обумовлених систем рівнянь. Для оцінювання

помилку використовують поняття норми матриці. Переважно розглядають такі норми матриці [6]:

1) найбільша сума абсолютних значень елементів матриці за рядками або найбільша сума абсолютних значень елементів матриці за стовпцями

$$\|\mathbf{A}\|_{1i} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i=1, \dots, n; \quad \|\mathbf{A}\|_{1j} = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, j=1, \dots, n; \quad (1.27)$$

2) Евклідова норма, яку визначають як корінь квадратний із суми квадратів модулів усіх елементів матриці

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}; \quad (1.28)$$

3) спектральна норма, яку визначають за найбільшим модулем власного значення матриці  $\max |\lambda_i|, i = 1, \dots, n$ .

Власними значеннями квадратної матриці  $\mathbf{A}$  називають корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Власні значення у загальному випадку комплексні. Значення першої та другої норм і власні значення матриці вузлових провідностей з прикладу 1.7 (рис. 1.12) будуть такими:

$$\begin{aligned} \text{norm1}(Y) &= 0.199 & \text{eigenvals}(Y) &= \begin{pmatrix} 0.054 - 0.179i \\ 0.032 - 0.106i \\ 0.015 - 0.052i \end{pmatrix} \\ \text{norm2}(Y) &= 0.187 \end{aligned}$$

Для симетричних матриць

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max |\lambda_i|, i=1, \dots, n; \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min |\lambda_i|}, i = 1, \dots, n,$$

де  $\lambda_i$  – власні значення матриці  $\mathbf{A}$ .

Відношення похибки розв'язку до похибки правої частини називають числом обумовленості матриці, для визначення якого використовують формулу

$$\mathcal{Q}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2.$$

Для симетричних матриць

$$\vartheta(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}.$$

Якщо число обумовленості матриці  $\vartheta(\mathbf{A}) \approx 1 \div 10$ , то матриця  $\mathbf{A}$  вважається добре обумовленою, якщо  $\vartheta(\mathbf{A}) \approx 100 \div 1000$ , то матриця  $\mathbf{A}$  вважається погано обумовленою і отриманий прямими методами розв'язок необхідно уточнювати. Для наведених вище власних значень матриці вузлових провідностей число обумовленості  $\vartheta(\mathbf{Y}) = 3,46$ .

**Метод прогонки** застосовують для розв'язування систем рівнянь зі слабо заповненими матрицями коефіцієнтів. Такий вигляд матриць є характерним для розподільних мереж. Розглянемо систему рівнянь з тридіагональною матрицею

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Здійснивши  $n$ -кроків за методом Гаусса, систему рівнянь можна звести до вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix},$$

де  $p_1 = c_1/b_1$ ;  $v_1 = f_1/b_1$ ;  $p_k = c_k/(b_k - a_k p_{k-1})$ ;  $v_k = (f_k - a_k v_{k-1})/(b_k - a_k p_{k-1})$  – коефіцієнти прогонки.

Для обчислення невідомих на зворотному ході використовують формули  $x_n = v_n$ ;  $x_k = v_k - p_k x_{k+1}$ .

### 1.10 Ітераційні методи розв'язування рівнянь стану електричних мереж

До ітераційних методів відносяться: метод простої ітерації, метод Зейделя, метод Ньютона та інші. Ітераційні методи розрахунку переважно застосовують для розв'язування нелінійних задач.

Метод простої ітерації можна реалізувати шляхом зведення вихідної системи рівнянь  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  до такого вигляду [7]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \tau(\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}) = (\mathbf{1} - \tau\mathbf{A})\mathbf{x}_k + \tau\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}, \quad (1.29)$$

де  $\tau$  – довжина кроку процесу.

Систему рівнянь згідно з методом простої ітерації розв'язують у такому порядку. Задають початкове наближення розв'язку  $\mathbf{x}_0$ . В подальшому на кожному кроці ітераційного процесу визначають наступне наближення  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}$ .

Процес продовжують до тих пір, поки  $|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – мале задане значення, що визначає необхідну точність ітераційного процесу.

Для збіжності методу простої ітерації за  $k \rightarrow \infty$  достатньо, щоб будь-яка перша норма матриці  $\mathbf{C}$  була меншою від одиниці  $\|\mathbf{C}\| < 1$ , наприклад:

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, i=1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1, j=1, \dots, n.$$

для збіжності методу простої ітерації за  $k \rightarrow \infty$  необхідно і достатньо, щоб евклідова норма матриці  $\mathbf{C}$  була меншою від одиниці або матриця  $\mathbf{C}$  мала всі власні значення  $|\lambda_i| < 1$ .

Для розв'язування системи рівнянь  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  методом простої ітерації її можна звести до вигляду [8]:

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{F}\mathbf{x}_k = \mathbf{b}. \quad (1.30)$$

Для цього матрицю  $\mathbf{A}$  з ненульовими діагональними коефіцієнтами розбивають на нижню та верхню трикутні матриці

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Як результат отримаємо

$$\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}). \quad (1.31)$$

Звідси впливають необхідні та достатні умови збіжності процесу ітерацій, які визначають відносно матриці:  $\mathbf{C} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}$ .

Якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь (1.23)  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ , то її можна звести до вигляду (1.27) таким чином:



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n); \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n); \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}). \end{aligned} \right\} (1.32)$$

Процедура розв'язування системи рівнянь  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  методом простої ітерації може бути реалізована з використанням розкладання

$$\mathbf{A}_D \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{Ax}_k - \mathbf{A}_D \mathbf{x}_k = \mathbf{b},$$

звідки

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_D^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_k).$$

На кожному кроці реалізації методу простої ітерації для визначення  $i$ -ої змінної використовують значення змінних, які були отримані на попередньому кроці.

В методі Зейделя, на відміну від методу простої ітерації, на кожному кроці для визначення  $i$ -ої змінної використовують значення змінних, які були отримані як на попередньому кроці, так і на цьому кроці.

Перевага ітераційних процесів – простота. Недолік – повільна збіжність, і можлива розбіжність. Особливо повільно процес збігається під час розрахунку мереж з пристроями поздовжньої компенсації, з трьохобмотковим трансформатором або автотрансформатором з малим опором обмотки середньої напруги, а також для мереж з сильною неоднорідністю параметрів.

**Приклад 1.12.** Виконати розрахунок замкнутої мережі (див. рис. 1.12) в режимі заданої потужності методом Зейделя.

**Розв'язування.** Підпрограму розрахунків за методом Зейделя розроблено з використанням алгоритму (1.32). У програмі рівняння вузлових напруг подано в формі (1.16).

ORIGIN := 1

$$Z := \begin{pmatrix} 3.24 + 10.83i \\ 11.4 + 38.1i \\ 4.44 + 14.84i \\ 5.4 + 18.05i \\ 8.52 + 28.47i \end{pmatrix}$$

Z := diag(Z)

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{xx} := 10^6 \cdot \begin{pmatrix} -25 - 12i \\ -17 - 9i \\ -27 - 14i \end{pmatrix}$$

$$Y := M \cdot Z^{-1} \cdot M^T$$

$$Yb := -Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_{ll} := \text{stack}(Y, Yb^T)^T$$

$$U0 := 115 \cdot 10^3$$

```

Zaidel(Y,J) := A ← YΣ
               B ← S̄
               n ← rows(A)
               h ← 0
               k ← 1
               for j ∈ 1..n
                 x0_j ← U0
               while h < 30
                 |
                 | x1_k ← 1/A_{k,k} [ B_k / x0_k - ∑_{j=1}^n [(A_{k,j})·x0_j] - A_{k,j+1}·U0 + A_{k,k}·x0_k ]
                 |
                 | x0_k ← x1_k
                 | if k = n
                 |   | for j ∈ 1..n
                 |   |   | x0_j ← x1_j
                 |   |   | k ← 0
                 |   | k ← k + 1
                 |   | h ← h + 1
                 |
                 | x1

```

$$U := \text{Zaidel}(Y, \bar{S})$$

$$U1 := \text{stack}(U, U0)$$

$$W_{uv} := \text{diag}(\bar{U}) \cdot Y1 \cdot U1 - \bar{S}$$

$$U\Delta := U - U0$$

$$U_b := M^T \cdot U\Delta$$

$$I := Z^{-1} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U_b \right)$$

За початкове наближення вибрано напругу базисного вузла. Критерієм зупинення ітераційного процесу є наближення до нульових значень елементів вектора небалансу  $W(\hat{U}) = \text{diag}(\hat{U})Y_{\Sigma}\hat{U}_{\Sigma} - \hat{S}$ .

У цьому випадку використано  $30/3=10$  ітераційних циклів. Результати розрахунків в 1, ..., 3 циклах:

$$U = \begin{pmatrix} 1.139 \times 10^5 - 1.26i \times 10^3 \\ 1.134 \times 10^5 - 1.663i \times 10^3 \\ 1.126 \times 10^5 - 2.505i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 78.444 - 37.653i \\ 29.762 - 15.234i \\ 115.287 - 59.606i \\ 15.755 - 9.566i \\ -20.265 + 10.681i \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1.258 \times 10^7 - 6.598i \times 10^6 \\ 1.2 \times 10^7 - 6.299i \times 10^6 \\ 2.629 \times 10^5 - 8.826i \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.132 \times 10^5 - 1.884i \times 10^3 \\ 1.124 \times 10^5 - 2.712i \times 10^3 \\ 1.121 \times 10^5 - 2.862i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 118.067 - 59.003i \\ 48.727 - 25.521i \\ 132.791 - 71.648i \\ 32.013 - 18.472i \\ -4.008 + 3.192i \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 7.991 \times 10^6 - 4.332i \times 10^6 \\ 1.876 \times 10^6 - 1.42i \times 10^6 \\ 5.892 \times 10^4 - 1.422i \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.128 \times 10^5 - 2.277i \times 10^3 \\ 1.12 \times 10^5 - 3.005i \times 10^3 \\ 1.12 \times 10^5 - 2.964i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 143.295 - 73.227i \\ 54.256 - 29.131i \\ 137.841 - 75.31i \\ 28.545 - 17.558i \\ 0.758 + 0.269i \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 2.357 \times 10^6 - 1.574i \times 10^6 \\ 5.479 \times 10^5 - 4.295i \times 10^5 \\ 1.826 \times 10^4 - 4.154i \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Збіжність процесу порівняно невисока.

**Метод Ньютона.** Ідея методу Ньютона полягає в послідовній лінеаризації системи нелінійних рівнянь на кожному кроці ітерації. Проілюструємо ідею на прикладі розв'язування одного нелінійного рівняння  $w(x) = 0$  (рис. 1.15). Задамо початкове наближення  $x_0$ . Лінеаризуємо  $w(x) = 0$  в околі точки  $x_0$ , провівши дотичну на графіку  $w(x)$  в точці  $x_0$ .

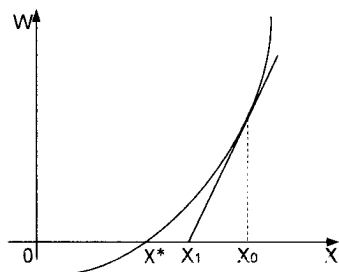


Рисунок 1.15 – Зображення пошуку розв'язку для нелінійної функції методом Ньютона

Оскільки  $\frac{dw(x_k)}{dx} = -\frac{w(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$ , то рекурентна формула методу Ньютона для нелінійного рівняння має такий вигляд:

$$x_{k+1} = x_k - \left( \frac{dw(x_k)}{dx} \right)^{-1} w(x_k). \quad (1.33)$$

Метод Ньютона можна використати для розв'язування системи нелінійних рівнянь

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

для якої рекурентна формула методу Ньютона має такий вигляд:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_k^{-1} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}_k), \quad (1.34)$$

де  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_k)$  – вектор нев'язок, розрахованих для  $k$ -го наближення;

$\mathbf{J}_k$  – матриця Якобі (матриця перших частинних похідних) для  $k$ -го наближення:

$$\mathbf{J}_k = \frac{d\mathbf{W}}{d\mathbf{x}} \Big|_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial W_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial W_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial W_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Помилка на кроці ітерації визначається матрицею Гессе (матрицею других частинних похідних), яка у такому випадку є кубічною матрицею розміром  $n \times n \times n$ .

Застосування методу Ньютона для розрахунку електричних мереж зводиться до рекурентної формули відносно напруг вузлів

$$\dot{\mathbf{U}}_{k+1} = \dot{\mathbf{U}}_k - \mathbf{J}_k^{-1} \cdot \underline{\mathbf{W}}(\dot{\mathbf{U}}_k), \quad (1.36)$$

де  $\underline{\mathbf{W}}(\dot{\mathbf{U}}_k)$  – вектор нев'язок значень комплексних потужностей вузлів, розрахованих для  $k$ -го наближення;

$\mathbf{J}_k$  – матриця Якобі для  $k$ -го наближення.

Для розв'язування рівняння вузлових напруг (1.16) в декартовій системі координат вектор небалансу

$$\mathbf{W}(\dot{\mathbf{U}}) = \underline{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{U}} - (\text{diag } \hat{\mathbf{U}})^{-1} \hat{\underline{\mathbf{S}}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\sigma} \dot{\mathbf{U}}_{\sigma}, \quad (1.37)$$

матриця Якобі

$$\mathbf{J} = \underline{\mathbf{Y}} + \left( \text{diag} \cdot |\dot{\mathbf{U}}|^{-2} \right) \hat{\underline{\mathbf{S}}}. \quad (1.38)$$

У разі побудови алгоритму з використанням рівняння вузлових напруг у формі балансу потужностей (1.18) вектор небалансу

$$\mathbf{W}(\dot{\mathbf{U}}) = \text{diag}(\hat{\mathbf{U}}) \underline{\mathbf{Y}}_{\Sigma} \dot{\mathbf{U}}_{\Sigma} - \hat{\underline{\mathbf{S}}}. \quad (1.39)$$

Формування матриці Якобі можна здійснювати за формулами:

$$J_{ii} = \left( 2\dot{U}_i \underline{Y}_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \dot{U}_j \underline{Y}_{ij} - \dot{U}_{\sigma} \underline{Y}_{i,\sigma} \right) e^{-j2 \arg U_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$J_{ij} = -\dot{U}_i \underline{Y}_{ij} e^{-j2 \arg U_i}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j.$$

Матрицю Якобі можна записати в матричній формі

$$\mathbf{J} = \left[ \text{diag}(\underline{\mathbf{Y}}_d \cdot \dot{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\Sigma} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{\Sigma}) + (\underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{Y}}_d) \text{diag}(\dot{\mathbf{U}}) \right] \cdot \text{diag} \left( e^{-j2 \arg \dot{\mathbf{U}}} \right). \quad (1.40)$$

Множником  $\text{diag} \left( e^{-j2 \arg \dot{\mathbf{U}}} \right)$  можна знехтувати.

**Приклад 1.13.** Виконати розрахунок замкнутої мережі (див. рис. 1.12) за допомогою системи рівнянь (1.18) методом Ньютона з використанням декартової системи координат.

### Розв'язування.

$$Z := \begin{pmatrix} 3.24 + 10.83i \\ 11.4 + 38.1i \\ 4.44 + 14.84i \\ 5.4 + 18.05i \\ 8.52 + 28.47i \end{pmatrix} \quad Z := \text{diag}(Z) \quad M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Y := M \cdot Z^{-1} \cdot M^T$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.041 - 0.136i & -0.015 + 0.051i & 0 \\ -0.015 + 0.051i & 0.032 - 0.107i & -9.647 \times 10^{-3} + 0.032i \\ 0 & -9.647 \times 10^{-3} + 0.032i & 0.028 - 0.094i \end{pmatrix}$$

$$Y_b := -Y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y_{11} := \text{stack}(Y, Y_b^T)^T$$

$$Y1 = \begin{pmatrix} 0.041 - 0.136i & -0.015 + 0.051i & 0 & -0.025 + 0.085i \\ -0.015 + 0.051i & 0.032 - 0.107i & -9.647 \times 10^{-3} + 0.032i & -7.208 \times 10^{-3} + 0.024i \\ 0 & -9.647 \times 10^{-3} + 0.032i & 0.028 - 0.094i & -0.019 + 0.062i \end{pmatrix}$$

$$U0 := \begin{pmatrix} 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \quad U := U0 \quad U1 := \text{stack}(U, 115 \cdot 10^3) \quad S_{xx} := 10^6 \cdot \begin{pmatrix} -25 & -12i \\ -17 & -9i \\ -27 & -14i \end{pmatrix}$$

$$W_{xx} := \text{diag}(U) \cdot Y1 \cdot U1 - \bar{S}$$

$$dW1 := \text{diag}(Y11) \cdot U + Y1 \cdot \text{diag}(U1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y11 := \text{diag}(Y) \quad dW2 := \text{diag}(U) \cdot (Y - \text{diag}(Y11))$$

$$dW := \text{diag}(dW1) + dW2 \quad \Delta U := -(dW^{-1} \cdot W) \quad U := U + \Delta U$$

Результати розрахунків у першому та другому циклах:

$$dW = \begin{pmatrix} 4.336 \times 10^3 - 1.449i \times 10^4 & -1.673 \times 10^3 + 5.594i \times 10^3 & 0 \\ -1.673 \times 10^3 + 5.594i \times 10^3 & 3.491 \times 10^3 - 1.167i \times 10^4 & -1.061 \times 10^3 + 3.546i \times 10^3 \\ 0 & -1.061 \times 10^3 + 3.546i \times 10^3 & 3.004 \times 10^3 - 1.004i \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.127 \times 10^5 - 2.67i \times 10^3 \\ 1.12 \times 10^5 - 3.404i \times 10^3 \\ 1.121 \times 10^5 - 3.288i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} -1.681 \times 10^6 - 1.865i \times 10^6 \\ -9.17 \times 10^5 - 7.418i \times 10^5 \\ -1.738 \times 10^6 - 1.529i \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$dW = \begin{pmatrix} 3.977 \times 10^3 - 1.53i \times 10^4 & -1.851 \times 10^3 + 5.692i \times 10^3 & 0 \\ -1.876 \times 10^3 + 5.642i \times 10^3 & 3.068 \times 10^3 - 1.203i \times 10^4 & -1.19 \times 10^3 + 3.577i \times 10^3 \\ 0 & -1.187 \times 10^3 + 3.581i \times 10^3 & 2.593 \times 10^3 - 1.052i \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^5 - 2.439i \times 10^3 \\ 1.118 \times 10^5 - 3.132i \times 10^3 \\ 1.119 \times 10^5 - 3.009i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} -1.217 \times 10^5 + 2.346i \times 10^5 \\ -1.488 \times 10^5 + 2.411i \times 10^5 \\ -8.845 \times 10^4 + 2.758i \times 10^5 \end{pmatrix}$$

Порівнявши результати розрахунку першого та другого циклів, можна дійти висновку, що збіжність ітераційного процесу за методом Ньютона з використанням декартової системи координат недостатньо висока.

Значно вищу збіжність має метод Ньютона з використанням рівняння вузлових напруг в полярній системі координат.

**Рівняння вузлових напруг у формі балансу потужностей в полярній системі координат.** Виразивши комплексні вузлові провідності в (1.17) через активну та реактивну складові  $\underline{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$  і подавши комплексні напруги в полярній системі координат

$$U_i^* \cdot \dot{U}_j = U_i \cdot U_j e^{j(\delta_j - \delta_i)} = U_i \cdot U_j (\cos(\delta_j - \delta_i) + j \sin(\delta_j - \delta_i)),$$

можна отримати комплексні рівняння балансу потужностей в полярній системі координат [9]:

$$U_i \sum_{j=1}^{n+1} U_j (G_{ij} + jB_{ij}) (\cos(\delta_j - \delta_i) + j \sin(\delta_j - \delta_i)) = P_i - jQ_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (1.41)$$

кожне з яких можна записати у вигляді двох дійсних рівнянь

$$U_i \sum_{j=1}^{n+1} U_j (G_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)) = P_i, \quad i=1, \dots, n;$$

$$U_i \sum_{j=1}^{n+1} U_j (G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i)) = -Q_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (1.42)$$

У разі застосування методу Ньютона для розв'язування системи рівнянь балансу потужностей в полярній системі координат (1.42) рекурентна формула для  $k$ -го наближення має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \delta \\ U \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ U \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \frac{\partial W_P}{\partial \delta} & \frac{\partial W_P}{\partial U} \\ \frac{\partial W_Q}{\partial \delta} & \frac{\partial W_Q}{\partial U} \end{bmatrix}_k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} W_P \\ W_Q \end{bmatrix}_k, \quad (1.43)$$

де  $W_P, W_Q$  – вектори нев'язок активних і реактивних потужностей вузлів.

Матриця Якобі складається з чотирьох підматриць розмірністю  $n \times n$ . Отже, її розмірність  $2n \times 2n$ .

Частинні похідні:

$$\frac{\partial W_{Pi}}{\partial \delta_i} = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} U_j [G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial W_{Pi}}{\partial \delta_j} = -U_i U_j [G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (j \neq i);$$

$$\frac{\partial W_{Pi}}{\partial U_i} = 2U_i G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} U_j [G_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial W_{Pi}}{\partial U_j} = U_i [G_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (j \neq i);$$

$$\frac{\partial W_{Qi}}{\partial \delta_i} = -U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} U_j [G_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial W_{Qi}}{\partial \delta_j} = U_i U_j [G_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (j \neq i);$$

$$\frac{\partial W_{Qi}}{\partial U_i} = 2U_i B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} U_j [G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial W_{Qi}}{\partial U_j} = U_i [G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i)] \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (j \neq i).$$

**Приклад 1.14.** Виконати розрахунок замкнутої мережі (див. рис. 1.12) за допомогою системи рівнянь (1.18) методом Ньютона з використанням полярної системи координат.

## Розв'язування.

$$U0 := \begin{pmatrix} 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \\ 110 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

$$G := \operatorname{Re}(Y\Sigma) \quad B := \operatorname{Im}(Y\Sigma)$$

$$P := \operatorname{Re}(\bar{S}) \quad Q := \operatorname{Im}(\bar{S})$$

$$n := \operatorname{rows}(Y)$$

$$U := U0$$

$$U\Sigma := \operatorname{stack}(U, 115 \cdot 10^3)$$

$$Y_{\text{mod}} := \sqrt{\operatorname{Re}(U\Sigma)^2 + \operatorname{Im}(U\Sigma)^2} \quad \delta_{\text{mod}} := \operatorname{arg}(U\Sigma)$$

$$V1 := \sqrt{\operatorname{Re}(U)^2 + \operatorname{Im}(U)^2} \quad \delta1 := \operatorname{arg}(U)$$

$$Wp := \text{for } i \in 1..n$$

$$Wp_i \leftarrow -P_i + V_i \sum_{j=1}^{n+1} [V_j \cdot (G_{1,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{1,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i))]$$

Wp

$$Wq := \text{for } i \in 1..n$$

$$Wq_i \leftarrow -Q_i + V_i \sum_{j=1}^{n+1} [V_j \cdot (G_{1,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{1,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i))]$$

Wq

$$dWp1 := \text{for } i \in 1..n$$

$$\text{for } j \in 1..n$$

$$\left[ \begin{array}{l} dWp1_{i,j} \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..n+1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} dWp1_{i,j} \leftarrow dWp1_{i,j} \text{ if } k=i \\ dWp1_{i,j} \leftarrow dWp1_{i,j} + V_i [V_k \cdot (G_{1,k} \cdot \sin(\delta_k - \delta_i) + B_{1,k} \cdot \cos(\delta_k - \delta_i))] \text{ if } k \neq i \end{array} \right] \end{array} \right]$$

if j = i if j = i

$$\left[ \begin{array}{l} dWp1_{i,j} \leftarrow -V_i \cdot V_j \cdot (G_{1,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{1,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i)) \text{ if } j \neq i \end{array} \right]$$

dWp1

$$dWp2 := \text{for } i \in 1..n$$

$$\text{for } j \in 1..n$$

$$\left[ \begin{array}{l} dWp2_{i,j} \leftarrow G_{1,j} \cdot V_i + \sum_{j=1}^{n+1} [V_j \cdot (G_{1,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{1,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i))] \text{ if } j=i \\ dWp2_{i,j} \leftarrow V_i \cdot (G_{1,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{1,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i)) \text{ if } j \neq i \end{array} \right]$$

dWp2



$$dWq1 := \left[ \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left[ \begin{array}{l} dWq1_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } k \in 1..n+1 \\ \quad \left[ \begin{array}{l} dWq1_{i,j} \leftarrow dWq1_{i,j} \text{ if } k = i \\ \left[ dWq1_{i,j} \leftarrow dWq1_{i,j} - V_i [V_k (G_{i,k} \cdot \cos(\delta_k - \delta_i) - B_{i,k} \cdot \sin(\delta_k - \delta_i))] \text{ if } k \neq i \right] \\ dWq1_{i,j} \leftarrow V_i V_j (G_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) - B_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i)) \text{ if } j \neq i \end{array} \right] \end{array} \right] \text{ if } j = i \text{ if } j = i \end{array} \right] dWq1$$

$$dWq2 := \left[ \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left[ \begin{array}{l} dWq2_{i,j} \leftarrow B_{i,j} V_i + \sum_{j=1}^{n+1} [V_j (G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i))] \text{ if } j = i \\ dWq2_{i,j} \leftarrow V_i (G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i)) \text{ if } j \neq i \end{array} \right] \end{array} \right] dWq2$$

$$W := \text{stack}(Wp, Wq)$$

$$dW1 := \text{stack}(dWp1, dWq1)$$

$$dW2 := \text{stack}(dWp2, dWq2)$$

$$dW := \text{augment}(dW1, dW2)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1.105 \times 10^7 \\ 1.304 \times 10^7 \\ 1.682 \times 10^7 \\ 3.461 \times 10^7 \\ 4.249 \times 10^6 \\ 2.002 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$dW = \begin{pmatrix} 1.687 \times 10^9 & -6.153 \times 10^8 & 0 & 4.336 \times 10^3 & -1.673 \times 10^3 & 0 \\ -6.153 \times 10^8 & 1.31 \times 10^9 & -3.901 \times 10^8 & -1.673 \times 10^3 & 3.491 \times 10^3 & -1.061 \times 10^3 \\ 0 & -3.901 \times 10^8 & 1.172 \times 10^9 & 0 & -1.061 \times 10^3 & 3.004 \times 10^3 \\ 5.048 \times 10^8 & -1.841 \times 10^8 & 0 & -1.449 \times 10^4 & 5.594 \times 10^3 & 0 \\ -1.841 \times 10^8 & 3.92 \times 10^8 & -1.167 \times 10^8 & 5.594 \times 10^3 & -1.167 \times 10^4 & 3.546 \times 10^3 \\ 0 & -1.167 \times 10^8 & 3.508 \times 10^8 & 0 & 3.546 \times 10^3 & -1.004 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$v\delta := v\delta - (dW^{-1} \cdot W)$$

$$\delta_{xx} := \text{submatrix}(v\delta, 1, n, 1, 1)$$

$$V_{xx} := \text{submatrix}(v\delta, n+1, 2-n, 1, 1)$$

$$U := \text{diag}(e^{j \cdot \delta}) \cdot V$$

Розв'язок цієї задачі з достатньою точністю отримують уже після другого циклу:

$$W = \begin{pmatrix} 38.917 - 1.119i \times 10^3 \\ -312.355 - 299.501i \\ -77.445 - 611.071i \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^5 - 2.432i \times 10^3 \\ 1.118 \times 10^5 - 3.122i \times 10^3 \\ 1.119 \times 10^5 - 3.005i \times 10^3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 153.862 - 80.973i \\ 56.567 - 30.936i \\ 139.963 - 77.099i \\ 27.083 - 16.721i \\ 2.745 - 1.213i \end{pmatrix}$$

Збіжність ітераційного процесу за методом Ньютона з використанням системи вузлових рівнянь в полярній системі координат найвища. Це пояснюється фізичними властивостями електричної системи, що виражаються в «сильному» зв'язку між активною потужністю  $P_i$  і фазовим кутом напруги  $\delta_i$ , та між реактивною потужністю  $Q_i$  і модулем напруги  $U_i$  та «слабкому» зв'язку між  $P_i$  і  $U_i$  та між  $Q_i$  і  $\delta_i$ .

### Контрольні запитання

1. Розрахункова та заступна схеми. Які вимоги до побудови цих схем?
2. Дайте означення основних понять графа: «дерево», «хорда».
3. Як формуються перша та друга матриці з'єднань (інциденцій)?
4. Яким чином визначається друга матриця з'єднань на основі узагальної топологічної властивості графа?
5. Яку форму і розмірність мають матриці напруг на вітках, електрорушійних сил, визначальних струмів, вузлів та напруг вузлів відносно вузла балансу?
6. Яку форму мають матриці опорів та провідностей віток схеми за відсутності та наявності магнітнозв'язаних віток?
7. Запишіть закони електричних кіл в матричній формі.
8. Як складається узагальнене, вузлове та контурне рівняння стану?
9. Запишіть рівняння вузлових напруг електричної мережі у формі балансу струмів.
10. Запишіть рівняння вузлових напруг у формі балансу потужностей.
11. Наведіть алгоритм розв'язування рівняння вузлових напруг у формі балансу потужностей.
12. Як врахувати статичні характеристики вузлів навантажень?
13. Як здійснюється визначення втрат потужності?
14. Як реалізується метод Гаусса?
15. Що таке «норма матриці»? Як визначаються норми матриць? Як визначити обумовленість рівнянь?
16. Як сформулювати рівняння для виконання ітерацій?
17. Суть методу Ньютона з використанням декартової та полярної системи координат.

## 2 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

### 2.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Випадковою подією називається будь-який факт (результат), який під час експлуатації (досліді, випробування, експерименту) може відбутися або не відбутися. Приклад випадкової події – відмова елемента мережі (лінії, трансформатора, вимикача).

Сучасна теорія ймовірностей [10, 11] ґрунтується на аксіоматичному підході А. М. Колмогорова і спирається на елементарні поняття теорії множин та теорії міри. Одна з причин застосування теорії множин полягає у тому, що для множин визначено важливі перетворення, що базуються на теорії алгебри логіки.

Сумою або об'єднанням подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  називають таку подію  $A$ , поява якої еквівалентна появі хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad (2.1)$$

де  $\cup$  – знак логічного додавання,

$\bigcup$  – знак логічної суми подій.

Добутком або перерізом подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  називають таку подію  $A$ , поява якої еквівалентна появі одночасно всіх подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i, \quad (2.2)$$

де  $\cap$  – знак логічного множення,

$\bigcap$  – знак логічного добутку подій.

Повна група подій – така сукупність подій, для якої в результаті досліді має статися хоча б одна з подій цієї сукупності.

Якщо події  $A_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) становлять повну групу подій, то їх сума є достовірною подією

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega. \quad (2.3)$$

Протилежна подія відносно деякої події  $A$  – подія, яка полягає у не появи цієї події (позначається  $B = \bar{A}$ ). Очевидно, що події  $A$  і  $B$  становлять повну групу подій. Область протилежної події  $B$  доповнює область  $A$  до повного простору  $\Omega$ . Із визначення протилежної події випливає, що

$$A + B = \Omega. \quad (2.4)$$

Властивості протилежних подій відображені в законах де Моргана:

$$A_1 \cap A_2 = \overline{B_1 \cup B_2}; \quad A_1 \cup A_2 = \overline{B_1 \cap B_2}.$$

На основі заданої системи множин, що є подіями, можна утворювати нові події, що відповідають конструкціям висловів із логічними операціями «не», «та», «або», які у теорії множин відповідають операціям доповнення, перерізу, об'єднання.

### Аксиоми теорії ймовірностей [10, 11].

1. Кожній з випадкових подій можна поставити у відповідність функцію  $P(\cdot)$ , що набуває числових значень  $P(\cdot) = 0 \dots 1$ , яку називають ймовірністю та яка є мірою можливої появи цієї події.

2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці

$$P(\Omega) = 1. \quad (2.5)$$

3. Для будь-яких несумісних подій  $A_1, A_2$  ( $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ) має місце аксіома додавання ймовірностей

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (2.6)$$

4. Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  становлять групу попарно несумісних подій, а  $A$  – об'єднання цих подій, то

$$P(A) = P\left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \right\} = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (2.7)$$

5. Нехай події  $A_i, i = 1, 2, \dots$  та  $A_j, j = 2, 3, \dots$  попарно несумісні:  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Тоді має місце розширена аксіома додавання, яка рівносильна аксіомі неперервності ймовірності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j). \quad (2.8)$$

**Теорема додавання і множення ймовірностей** [10, 11]. Під час визначення ймовірності розрізняють сумісні та несумісні, залежні та незалежні події.

Сумісні події – такі події, поява одної з яких не усуває можливості появи іншої. Несумісні події – такі події, поява одної з яких унеможливує появу іншої.

Залежні події – такі події, поява одної з яких впливає на ймовірність появи іншої події. Незалежні події – такі події, поява одної з яких не впливає на ймовірність появи іншої події.

Якщо події  $A_1, A_2$  сумісні, то має місце теорема додавання ймовірностей

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2), \quad (2.9)$$

яка має просте геометричне подання у вигляді діаграми Ейлера, на якій простір елементарних подій  $\Omega$  зображується у вигляді прямокутника, а

інші множини – у вигляді плоских фігур, обмежених замкнутими лініями (рис. 2.1).

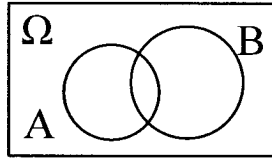


Рисунок 2.1 – Діаграма Ейлера для сумісних подій

Щоб сформулювати в загальному випадку теорему добутку ймовірностей для залежних подій, введемо поняття умовної ймовірності. Умовна ймовірність події  $A_1$  в припущенні, що подія  $A_2$  відбулася:

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}. \quad (2.10)$$

Властивості  $P(\cdot | A_2)$  аналогічні властивостям  $P(\cdot)$ :

$$1) P(\Omega | A_2) = 1; \quad 2) P(A_1 | A_2) + P(\bar{A}_1 | A_2) = 1.$$

З означення (2.10) випливає так звана *теорема добутку ймовірностей*. Ймовірність добутку (спільної появи) двох залежних подій  $A_1, A_2$  дорівнює ймовірності одної з них, помноженій на умовну ймовірність іншої в припущенні, що перша подія відбулася:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2). \quad (2.11)$$

Для незалежних подій

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Наприклад, ймовірність відмови одного кола двоколової лінії електропередачі 0,2, а ймовірність аварії другого кола після відмови першого дорівнює 0,3. Яка ймовірність відмови двох паралельних кіл?

Ймовірність відмови двох паралельних кіл:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

Для незалежних подій

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

## 2.2 Ймовірнісні моделі надійності електричних мереж

Основними характеристиками надійності елементів мережі є відмова елемента мережі (лінії, трансформатора). Відмови елементів в подальшому позначені  $b_i$ . Протилежною до відмови є подія, яка називається безвідмовністю. Безвідмовності елементів позначені  $a_i$ . Відмова і безвідмовність елемента мережі утворюють повну групу подій.

Основними показниками надійності елементів мережі є ймовірності відмови та безвідмовності:

- $q(t)$  – ймовірність відмови за час  $t$  – ймовірність того, що в межах заданого часу відмова елемента виникне;
- $p(t)$  – ймовірність безвідмовної роботи за час  $t$  – ймовірність того, що в межах заданого часу відмова елемента не виникає.

За розрахунковий період часу  $t$ , як правило, вибирають рік:  $p(t=1\text{ рік})=p$ ,  $q(t=1\text{ рік})=q$ .

В електричних мережах можна виділити послідовне та паралельне (рис. 2.2) з'єднання елементів. Послідовним називають таке з'єднання, коли відмова одного елемента призводить до відмови системи в цілому тобто коли безвідмовність всіх елементів забезпечує безвідмовність системи. Паралельним називають з'єднання, коли відмова усіх елементів призводить до відмови системи.

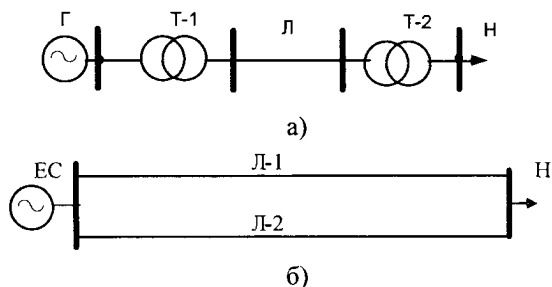


Рисунок 2.2 – Послідовне та паралельне з'єднання елементів

Для спрощення розрахунків надійності електричних мереж часто вважають, що відмови є сумісними і незалежними. У такому випадку для послідовного з'єднання декількох елементів ймовірність безвідмовної роботи системи (одного кола системи) дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи її елементів [12]:

$$p = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (2.12)$$

Для паралельного з'єднання декількох елементів ймовірність їх відмови дорівнює добутку ймовірностей відмов її елементів:

$$q = \prod_{i=1}^n q_i. \quad (2.13)$$

**Приклад 2.1.** Для електричної мережі, яку зображено на рис. 2.3, визначити надійність постачання електроенергії споживачам ПС-3. Ймовірність пошкодження генератора Г-1 –  $q_{Г-1}$ , ймовірність пошкодження трансформаторів Т-1, Т-2, Т-3 відповідно –  $q_{Т-1}$ ,  $q_{Т-2}$ ,  $q_{Т-3}$ , а ліній живлення –  $q_{Л-1}$ ,  $q_{Л-2}$ ,  $q_{Л-3}$ . Події пошкодження ліній,

трансформаторів і генератора є незалежними, але сумісними. Кожна ЛЕП розрахована на передачу 100% потужності генератора.

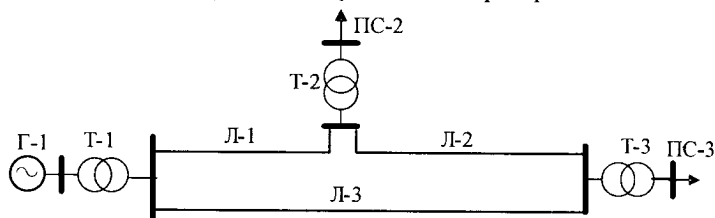


Рисунок 2.3 – Схема кільцевої електричної мережі

**Розв'язування.** В кільцевій мережі (рис. 2.3) лінії Л-1 та Л-2 з'єднані послідовно і паралельно до Л-3 у разі, якщо розглядається живлення ПС-3.

Необхідними умовами для передачі електроенергії від генератора Г-1 до споживачів ПС-3 є знаходження в роботі генератора Г-1, трансформаторів Т-1, Т-3, а також можливість передачі електроенергії по ЛЕП. Порушення транспортування електроенергії по ЛЕП буде мати місце тільки у випадку одночасного пошкодження двох ЛЕП: Л-1 або Л-2 та Л-3.

Ймовірність пошкодження кола з послідовно з'єднаних двох ліній (Л-1 та Л-2) згідно з теоремою додавання сумісних незалежних подій

$$q_{л-1+л-2} = q_{л-1} + q_{л-2} - q_{л-1}q_{л-2}.$$

Ймовірність припинення електропостачання ПС-3 внаслідок одночасного пошкодження двох ЛЕП (Л-1 або Л-2 та Л-3):

$$q_{ЛЕП} = (q_{л-1} + q_{л-2} - q_{л-1}q_{л-2})q_{л-3}.$$

Надійність постачання ПС-3 визначимо як подію, коли одночасно будуть знаходитись в роботі генератор Г-1, трансформатори Т-1 і Т-3, а також ЛЕП:

$$p_{ПС-3} = (1 - q_{ЛЕП}) \cdot (1 - q_{Г-1}) \cdot (1 - q_{Т-1}) \cdot (1 - q_{Т-3}).$$

**Приклад 2.2.** Визначити ймовірність безвідмовної роботи електричної мережі з трьома паралельними ЛЕП (рис. 2.4), для нормального функціонування якої достатньо двох ЛЕП (кожна ЛЕП розрахована на 50% потужності навантаження).

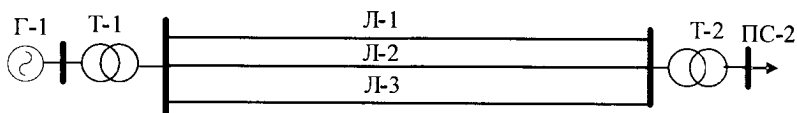


Рисунок 2.4 – Схема електричної мережі з трьома паралельними ЛЕП обмеженої потужності

**Розв'язування.** Ймовірність відмови двох з трьох ЛЕП становить

$$q_{1/2} = q_1 \cdot q_2 + q_2 \cdot q_3 + q_3 \cdot q_1.$$

Для  $q_1 = q_2 = q_3 = 0,1$  отримаємо  $q_{1/2} = 0,03$ .

**Приклад 2.3.** Визначити ймовірність відмови двоколової схеми живлення споживачів (рис. 2.5). Ймовірності відмов елементів протягом року: кіл ЛЕП  $q_{Л1} = q_{Л2} = 0,1$ , вимикачів:  $q_{В} = 0,01$ .

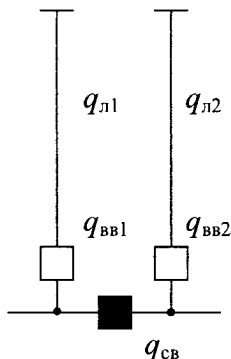


Рисунок 2.5 – Двоколова схема живлення споживачів

**Розв'язування.** Ймовірність відмови системи знаходять за формулою суми умовних ймовірностей [13]

$$q = q_{Л} p_{ВВ} p_{СВ} + 0,5 p_{Л} (q_{ВВ} p_{СВ} + p_{ВВ} q_{СВ} + q_{ВВ} q_{СВ}),$$

де  $q_{Л}$ ,  $q_{ВВ}$ ,  $q_{СВ}$ ;  $p_{Л}$ ,  $p_{ВВ}$ ,  $p_{СВ}$  – ймовірності відмов та безвідмовної роботи відповідно двокової лінії, двох ввідних вимикачів та секційного вимикача, причому  $q_{Л} = q_{Л1} q_{Л2} = 0,01$ ,  $q_{ВВ} = q_{ВВ1} + q_{ВВ2} = 0,02$ , секційного вимикача  $q_{СВ} = (q_{Л1} + q_{Л2}) \cdot q_{В} = 0,002$ .

Підставивши значення, дістанемо

$$q = 0,01 \cdot 0,98 \cdot 0,998 + 0,5 \cdot 0,99 (0,02 \cdot 0,998 + 0,98 \cdot 0,002 + 0,02 \cdot 0,002) = 0,0098 + 0,5 \cdot 0,99 (0,01996 + 0,00196 + 0,00004) = 0,0207.$$

Отже, надійність двокової схеми живлення споживачів є достатньо високою.

### 2.3 Методи мінімальних шляхів та перерізів

Під час аналізу надійності складних електричних мереж, структурні схеми яких не зводяться до послідовного або паралельного з'єднання елементів, можна скористатися логіко-ймовірнісними методами – мінімальних шляхів і мінімальних перерізів [14].



Мінімальним шляхом схеми відносно вузла називають сукупності мінімальної кількості елементів, безвідмовні стани яких забезпечують безвідмовне живлення вузла. Мінімальним перерізом називається набір елементів, одночасна відмова яких призводить до відмови мережі, а відновлення роботоздатності будь-якого з них – до відновлення роботоздатності мережі. Під перерізом розуміють множину елементів, видалення яких робить граф незв'язним. Під час аналізу надійності розглядають перерізи, які поділяють граф на дві частини: зв'язану та незв'язану з джерелом живлення.

**Приклад 2.4.** Визначити ймовірність безвідмовної роботи електричної мережі відносно вузла 3 з використанням методів мінімальних шляхів і мінімальних перерізів (рис. 2.6).

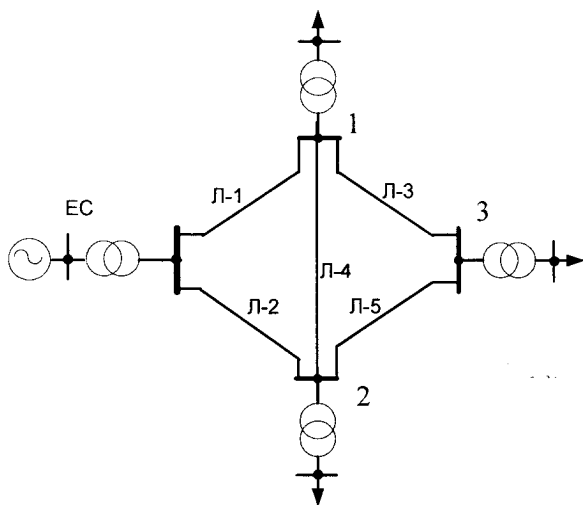


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема електричної мережі

**Розв'язування.** Для замкнутої електричної мережі чотири шляхи від вузла живлення до вузла 3, які проходять через вітки: 1) 1 і 3, 2) 2 і 5; 3) 1, 4 і 5; 4) 2, 3 і 4.

Виразимо відмови кожного шляху через символи безвідмовності елементів

$$B_{ш1} = (1 - a_1 a_3); B_{ш2} = (1 - a_2 a_5); B_{ш3} = (1 - a_1 a_4 a_5); B_{ш4} = (1 - a_2 a_3 a_4),$$

де  $a_i$  – символи безвідмовності елементів.

Оскільки шляхи з'єднані умовно паралельно, то функцію відмов мережі можна записати у вигляді логічного добутку відмов шляхів

$$B_{ш} = B_{ш1} \cap B_{ш2} \cap B_{ш3} \cap B_{ш4}.$$

Підставивши функції відмов кожного шляху, отримують функцію відмов мережі

$$B_{III} = (1 - a_1 a_3)(1 - a_2 a_5)(1 - a_1 a_4 a_5)(1 - a_2 a_3 a_4).$$

Оскільки змінні  $a_i$  розглядаються як альтернативні (або булеві) і можуть набувати тільки значень 1 або 0, то при піднесенні до степеня будь-яка змінна  $a_i$  не змінює свого значення, тобто  $a_i^n = a_i^{n-1} = \dots = a_i^2 = a_i$ .

Скориставшись цією властивістю, функцію безвідмовності мережі можна записати у такому вигляді:

$$A_{III} = 1 - B_{III} = a_1 a_3 + a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 a_4 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_5 - a_1 a_3 a_4 a_5 - a_2 a_3 a_4 a_5 + 2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

Замінивши символи безвідмовності елементів  $a_i$  відповідними ймовірностями безвідмовної роботи  $p_i$ , отримаємо вираз для визначення ймовірності безвідмовної роботи мережі за методом шляхів:

$$P_{III} = p_1 p_3 + p_2 p_5 + p_1 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_5 - p_1 p_3 p_4 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 + 2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$$

Припустимо, що значення ймовірностей безвідмовної роботи протягом року всіх ЛЕП однакові і дорівнюють 0,9. Тоді ймовірність безвідмовного живлення вузла 3 дорівнює 0,97848.

Потрібно зазначити, що метод мінімальних шляхів дає точне значення ймовірності безвідмовної роботи тільки для порівняно простих мереж з невеликою кількістю елементів. Для більш складних мереж метод дає тільки її наближену оцінку – нижню межу.

Для розрахунку верхньої межі оцінки ймовірності безвідмовної роботи мережі потрібно скористатися методом мінімальних перерізів. У заданій мережі мінімальних перерізів чотири:

1) ЛЕП 1 і 2, 2) 3 і 5; 3) 1, 4 і 5; 4) 2, 3 і 4.

Послідовність дій за цим методом аналогічна методу мінімальних шляхів. Виразимо безвідмовність кожного перерізу через символи відмов елементів

$$A_{п1} = [1 - b_1 b_2]; A_{п2} = [1 - b_3 b_5]; A_{п3} = [1 - b_1 b_4 b_5]; A_{п4} = [1 - b_2 b_3 b_4],$$

де  $b_i$  – символи відмов елементів.

Оскільки перерізи з'єднані умовно послідовно, то функцію безвідмовності ПС-3 мережі можна записати у вигляді логічного добутку функцій безвідмовності її перерізів

$$A_{п} = A_{п1} \cap A_{п2} \cap A_{п3} \cap A_{п4}$$

або

$$A_n = (1 - B_{n1}) \cap (1 - B_{n2}) \cap (1 - B_{n3}) \cap (1 - B_{n4}).$$

Підставивши функції відмов кожного перерізу, отримують функцію безвідмовності мережі

$$A_n = [1 - b_1 b_2] [1 - b_3 b_5] [1 - b_1 b_4 b_5] [1 - b_2 b_3 b_4],$$

з якої після перетворень з використанням логічних змінних і заміни символів відмов на символи ймовірності відмов  $q_i$ , отримують вираз для ймовірності відмови за методом мінімальних перерізів:

$$q_n = q_1 q_2 + q_3 q_5 + q_1 q_4 q_5 + q_2 q_3 q_4 - q_1 q_2 q_3 q_5 - q_1 q_2 q_4 q_5 - q_1 q_2 q_3 q_4 - q_1 q_3 q_4 q_5 - q_2 q_3 q_4 q_5 + 2 q_1 q_2 q_3 q_4 q_5.$$

Таким чином, для електричної мережі (див. рис. 2.6) з п'яти елементів верхня оцінка ймовірності безвідмовної роботи, отримана методом мінімальних перерізів, і нижня, отримана методом мінімальних шляхів, збіглися. Однак для більш складних мереж, що складаються з різних за надійністю елементів, цього може і не статися. Тому для оцінювання меж ймовірності безвідмовної роботи складних мереж методи мінімальних шляхів і перерізів доцільно поєднувати.

**Приклад 2.5.** Визначити ймовірність безвідмовної роботи електричної мережі (рис. 2.7) відносно вузла 3 з використанням методу мінімальних перерізів. Розглянути можливість використання методу мінімальних перерізів для розрахунку надійності мережі у випадку, якщо кожна з ЛЕП може забезпечити передавання лише половини сумарної потужності навантаження. Припустимо, що значення ймовірностей безвідмовної роботи всіх ЛЕП, окрім Л-4, однакові і дорівнюють 0,9, а ймовірність безвідмовної роботи Л-4 дорівнює 0,8.

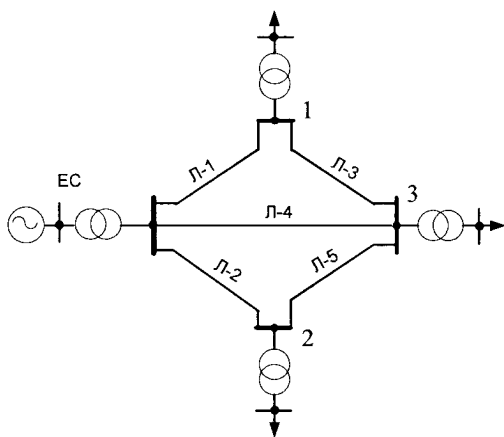


Рисунок 2.7 – Розрахункова схема електричної мережі

**Розв'язування.** У цій мережі мінімальних перерізів відносно вузла 3 чотири: 1) ЛЕП 1, 2 і 4, 2) 1, 4 і 5; 3) 2, 3 і 4; 4) 3, 4 і 5.

Функція безвідмовності ПС-3

$$A_{п} = (1 - B_{п1}) \cap (1 - B_{п2}) \cap (1 - B_{п3}) \cap (1 - B_{п4})$$

набуває вигляду

$$A_{п} = [1 - b_1 \ b_2 \ b_4] [1 - b_3 \ b_4 \ b_5] [1 - b_1 \ b_4 \ b_5] [1 - b_2 \ b_3 \ b_4].$$

Після перетворень з використанням логічних змінних і заміни символів відмов на символи ймовірності відмов  $q_i$ , отримують значення ймовірності відмови, яке значно менше, ніж для попередньої схеми, незважаючи на те, що ймовірність відмови Л-4 взято вдвічі більшою.

Визначимо ймовірність втрати живлення половиною споживачів. Ймовірність відмови двох ЛЕП по першому перерізу

$$q_{п1} = q_1 q_2 p_4 + q_1 q_4 p_2 + q_2 q_4 p_1.$$

Ймовірність відмов по другому, третьому та четвертому перерізах

$$q_{п2} = q_1 q_4 p_5; \quad q_{п3} = q_2 q_4 p_3; \quad q_{п4} = q_3 q_4 q_5.$$

Підставивши значення, дістанемо  $q_{п1} = 0,044$ ,  $q_{п2} = 0,02$ ,  $q_{п3} = 0,02$ ,  $q_{п4} = 0,002$ . У цих випадках пошкодження двох ЛЕП призводить до втрати живлення половиною навантаження і може розглядатися як відмова мережі. Ймовірність втрати живлення половиною споживачів

$$q_{0,5} = 1 - (1 - q_{п1})(1 - q_{п2})(1 - q_{п3})(1 - q_{п4}).$$

Підставивши значення, дістанемо  $q_{0,5} = 0,086$ . Тоді ймовірність відмови мережі відносно вузла 3 становить  $q + 0,5q_{0,5} = 0,051$ .

**Алгоритм базисних перерізів [15].** Для визначення базисних перерізів формується основна матриця  $R = [I|S|V]$ ,  $I$  – одинична діагональна матриця базисних перерізів, які проходять через одну із віток дерева графа і розмір якої ( $n \times n$ ) визначається кількістю віток дерева (кількістю незалежних вузлів);  $S$  – підматриця хорд, для визначення якої користуються таким правилом:  $S_{ij} = 1$  – якщо базисний  $i$ -й переріз містить  $j$ -ту хорду і  $S_{ij} = 0$  – якщо  $i$ -й переріз не містить  $j$ -ту хорду;  $V$  – підматриця вузлів, для визначення якої користуються таким правилом:  $V_{ik} = 1$  – якщо  $k$ -й вузол відсікається  $i$ -м перерізом від джерела живлення і  $V_{ik} = 0$  – якщо  $k$ -й вузол не відсікається  $i$ -м перерізом від джерела живлення.

Сукупність усіх перерізів зображають за допомогою розширеної матриці перерізів  $R_{\Sigma}$ , яка, крім основної матриці, містить інші перерізи, що визначаються з використанням базисних перерізів за допомогою операції знаходження суми за модулем два (виключне АБО), згідно з якою:  $0 \oplus 0 = 0$ ,

$1 \oplus 1 = 0$ ;  $0 \oplus 1 = 1$ ;  $1 \oplus 0 = 1$ . Мінімальні перерізи відносно  $k$ -го вузла визначають за одиницею в стовпці, що відповідає  $k$ -му вузлу.

**Приклад 2.6.** Визначити ймовірність безвідмовної роботи електричної мережі (рис. 2.7) з використанням алгоритму базисних перерізів.

**Розв'язування.** В табл. 2.1 зображено розширену матрицю перерізів мережі рис. 2.7. Отже, для вузлів 1 та 2 існує по три мінімальних перерізи, а для вузла 3 – чотири.

Таблиця 2.1 – Розширена матриця перерізів

Перерізи	1			S		V		
	1	2	3	4	5	1	2	3
$R_1$ (п. 2)	1	0	0	1	1	1	0	1
$R_2$ (п. 5)	0	1	0	0	1	0	1	0
$R_3$ (п. 4)	0	0	1	1	1	0	0	1
$R_4 = R_1 \oplus R_2$ (п. 1)	1	1	0	1	0	1	1	1
$R_5 = R_1 \oplus R_3$ (п. 6)	1	0	1	0	0	1	0	0
$R_6 = R_2 \oplus R_3$ (п. 3)	0	1	1	1	0	0	1	1

В табл. 2.2 наведено ймовірності повної та часткової відмов перерізів та частка  $r$  втраченого навантаження в результаті відмов відповідно всіх (двох або трьох) і двох ЛЕП перерізу. Перерізи  $R_2$  і  $R_5$  раніше не були враховані. Вони містять дві ЛЕП. Ймовірності відмов для цих перерізів однакові  $q_{п5} = q_{п6} = 0,01$ .

Таблиця 2.2 – Ймовірності відмов перерізів та частка  $r$  втраченого навантаження

Відмова перерізу	повна		часткова	
	$q_{п}$	$r$	$q_{п}$	$r$
$R_1$ (п. 2)	0,002	0,67	0,02	0,5
$R_2$ (п. 5)	0,01	0,33	0,01	0,33
$R_3$ (п. 4)	0,002	0,33	0,002	0,33
$R_4 = R_1 \oplus R_2$ (п. 1)	0,002	1	0,044	0,5
$R_5 = R_1 \oplus R_3$ (п. 6)	0,01	0,33	0,01	0,33
$R_6 = R_2 \oplus R_3$ (п. 3)	0,002	0,67	0,02	0,5

Надійність мережі можна оцінити ймовірностями відмов у разі повної та часткової відмов перерізів, а також їх суми:

$$q_{п} \approx 2 \cdot 0,002 \cdot 0,67 + 2 \cdot 0,01 \cdot 0,33 + 0,002 \cdot 0,33 + 0,002 \cdot 1 = 0,009;$$

$$q_4 \approx 2 \cdot 0,02 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,01 \cdot 0,33 + 0,002 \cdot 0,33 + 0,044 \cdot 0,5 = 0,049;$$

$$q = 0,009 + 0,049 = 0,058.$$

## 2.4 Моделі розподілу часу безвідмовної роботи

**Експоненціальний розподіл.** Розглянемо можливість визначення функції розподілу часу безвідмовної роботи вимикачів. Нехай кожне  $i$ -те вимкнення вимикача відбувається без пошкодження  $A_i$  або з пошкодженням  $B_i$ . Ці події протилежні. Якщо ймовірність пошкодження під час кожного вимкнення  $P\{B_i\} = \gamma$ , то ймовірність вимкнення без пошкодження  $P\{A_i\} = 1 - \gamma$ .

Ймовірність того, що у випадку  $k$  вимкнень не відбудеться пошкодження вимикача

$$P\{\tau > k\} = (1 - \gamma)^k.$$

Це, так званий геометричний розподіл часу безвідмовної роботи, який відповідає випадку, коли час відраховується у вигляді дискретних одиниць (одне вимкнення, друге вимкнення, ...).

Близьким до геометричного розподілу є експоненціальний розподіл, для якого ймовірність безвідмовної роботи

$$P\{\tau > k\} \approx e^{-k\gamma}.$$

Для неперервного часу ймовірність безвідмовної роботи

$$P\{\tau > t\} = e^{-\omega t},$$

де  $\omega$  – частота відмов вимикача.

Частота відмов  $\omega$  визначається відношенням кількості елементів, які відмовляють в середньому протягом року, до загальної кількості елементів.

Функція експоненціального розподілу часу до відмови

$$F(t) = P\{\tau \leq t\} = 1 - P\{\tau > t\} = 1 - e^{-\omega t}.$$

Густина експоненціального розподілу часу безвідмовної роботи

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \omega e^{-\omega t}.$$

Експоненціальна модель відповідає випадку, коли частоту відмов можна вважати сталою в часі ( $\omega(t) = \text{const}$ ).

Математичне сподівання часу безвідмовної роботи (середній наробіток на відмову) у разі експоненціального розподілу

$$M[\tau] = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t \omega e^{-\omega t} dt = \frac{1}{\omega}.$$

Дисперсія часу безвідмовної роботи

$$D[\tau] = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt - (M[\tau])^2 = \int_0^{+\infty} t^2 \omega e^{-\omega t} dt - \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}.$$

**Модель Вейбулла-Гнеденко.** Частота відмов може як зменшуватися, так і збільшуватися з часом. На першому етапі експлуатації, як правило, частота відмов є великою, а потім поступово зменшується. Після певного часу частота відмов збільшується внаслідок старіння ізоляції, зношення механічних вузлів. Модель Вейбулла-Гнеденко запропонована шведським вченим В. Вейбуллом як модель міцності матеріалів, а потім обґрунтована українським математиком Б. В. Гнеденком як модель надійності обладнання, яке містить велику кількість однотипних елементів, пошкодження будь-якого з них призводить до відмови.

Густина розподілу часу безвідмовної роботи за моделлю надійності Вейбулла-Гнеденко

$$f(t) = \beta \lambda (\lambda t)^{\beta-1} \exp(-(\lambda t)^\beta).$$

Ймовірність безвідмовної роботи і функція розподілу часу до відмови за моделлю надійності Вейбулла-Гнеденко відповідно будуть:

$$P(t) = \exp(-(\lambda t)^\beta); F(t) = 1 - \exp(-(\lambda t)^\beta).$$

Розподіл двопараметровий, з параметрами масштабу  $\lambda$  та асиметрії  $\beta$ . Характеристика закону змінюється залежно від параметра  $\beta$ . У разі  $\beta=1$  розподіл Вейбулла-Гнеденко стає експоненційним ( $\lambda = \text{const}$ ), а якщо  $\beta=2$  – розподілом Релея:

$$f(t) = 2\lambda^2 t \exp(-(\lambda t)^2) = \frac{t}{9^2} \exp\left(-\frac{t^2}{29^2}\right).$$

Якщо  $\beta > 1$ , то частота відмов збільшується, а якщо  $\beta < 1$ , то частота відмов зменшується:

$$\omega(t) = \beta \lambda t^{\beta-1}.$$

Математичне сподівання часу безвідмовної роботи (середній наробіток на відмову) у разі розподілу Вейбулла-Гнеденко

$$M[\tau] = \frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\lambda}.$$

Дисперсія часу безвідмовної роботи

$$D[\tau] = \frac{1}{\lambda^2} \left( \Gamma(1 + 2/\beta) - (M[\tau])^2 \right).$$

Вибір моделі надійності – складна науково-технічна проблема. Вона може бути задовільно вирішена стандартними методами математичної статистики, якщо є великий статистичний матеріал про відмови досліджуваних об'єктів. Через високу надійність систем електропостачання та їх компонентів, як правило, статистичних даних про відмови небагато.

У разі наближених оцінок ймовірностей відмов часто обирається експоненційна модель як найбільш зручна з погляду аналітичних перетворень. У цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи системи з послідовним з'єднанням елементів:

$$p(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_n(t) = e^{-\omega_1 t} e^{-\omega_2 t} \dots e^{-\omega_n t} = e^{-(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)t}$$

Отже частота відмов системи з послідовним з'єднанням елементів протягом року

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n.$$

Експоненційну модель рекомендується застосувати для розрахунків надійності в разі відсутності інших вихідних даних для розрахунку, крім частоти відмов.

У разі наявності більш повних вихідних даних доцільно користуватися іншою, більш точною моделлю, наприклад, моделлю Вейбулла-Гнеденко. Ймовірність безвідмовної роботи системи з послідовним з'єднанням елементів, модель поведінки яких оснований на використанні розподілу Вейбулла-Гнеденко, дорівнює

$$p(t) = \prod_{i=1}^n \exp(-(\lambda_i t)^{\beta_i}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n (\lambda_i t)^{\beta_i}\right).$$

Експоненційний розподіл часу між відмовами відповідає моделі пуассонівського потоку відмов, який характеризується властивостями *стаціонарності*, *ординарності* та *відсутністю післядії*. *Стаціонарність* – властивість потоку, яка виражається в тому, що параметри потоку не залежать від часу. *Ординарність* – властивість потоку, яка виражається в тому, що в один і той самий момент часу може статися тільки одна подія. *Відсутність післядії* – властивість потоку, яка виражається в тому, що ймовірність настання цієї події не залежить від того, коли відбулися попередні події і скільки їх було.

Реальні потоки відмов енергетичних об'єктів, як правило, мають властивості ординарності і відсутності післядії, тобто є пуассонівськими. Більше того, для більшості з них потоки відмов виявляються і стаціонарними, тобто найпростішими.

Найпростіший потік серед потоків подій відіграє особливу роль: сума ординарних, стаціонарних потоків з практично будь-якою післядією утворює потік, який близький до найпростішого. Умови, які мають для



цього дотримуватися – потоки, що додаються, мають мати приблизно рівномірно малий вплив на суму.

Модель Пуассона дозволяє визначити ймовірність того, що на заданому інтервалі часу відбулося  $m$  відмов, а час між окремими відмовами розподілений експоненційно з параметром  $\lambda$ :

$$P(t, m) = \frac{(\lambda \cdot t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Ймовірність безвідмовної роботи (за  $m = 0$ ) буде  $P(t, 0) = e^{-\lambda \cdot t}$ .

Однією з переваг застосування моделей функцій розподілу є можливість експериментального визначення частоти відмов і ймовірності відмов за невеликими вибірками експериментальних даних. Наприклад, в експлуатації протягом  $t$  років знаходиться  $n$  вимикачів, серед яких відмовили  $m$  вимикачів по роках:  $t_1, t_2, \dots$  в кількості  $m_1, m_2, \dots$ . Припустимо, що час, за який відбувається відмова, підлягає експоненціальному закону розподілу. На основі принципу правдоподібності запишемо функцію правдоподібності

$$\Psi = (e^{-\omega \cdot t})^{n-m} \prod_{i=1}^m \omega e^{-\omega t_i}.$$

З рівняння правдоподібності

$$\frac{\partial \ln \Psi}{\partial \omega} = -(n-m)t + \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\omega} - t_i \right) = 0$$

отримують наробіток на відмову

$$\frac{1}{\omega} = \frac{(n-m)}{m} t + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_i.$$

Наприклад, в експлуатації протягом трьох років знаходиться 100 вимикачів певного типу, з яких відмовили 5 вимикачів: два на першому році експлуатації, один – на другому, два – на третьому. Наробіток на відмову становитиме

$$1/\omega = [(100-5)/5] \cdot 3 + (1+1+2+3+3)/5 = 59 \text{ років.}$$

Частота відмов

$$\omega = 1/59 = 0,017 \text{ рік}^{-1}.$$

## 2.5 Аналіз надійності електричних мереж напругою 10-35 кВ

Основним принципом побудови електричних мереж з повітряними лініями (ПЛ) напругою 10-35 кВ взято магістральний принцип, який передбачає: радіальну (деревоподібну) схему живлення споживачів по магістралях, які секціонуються вимикачами або роз'єднувачами.

**Приклад 2.7.** В електроенергетичному районі (рис. 2.8) є споживачі електричної енергії  $B_j$  з відомими потужностями навантаження  $P_{Bj}$  та джерела електричної енергії  $A_i$  з відомими наявними потужностями  $P_{Ai}$ . Необхідно вибрати оптимальну конфігурацію електричної мережі, вважаючи, що всі лінії електропередач (ЛЕП) напругою 35 кВ виконуються провідниками однакового перерізу. Розрахувати частоту відмов та недовідпущення електроенергії споживачам. Середні навантаження споживачів дорівнюють  $P_{Bj} = \{4; 4; 6; 6\}$  МВт.

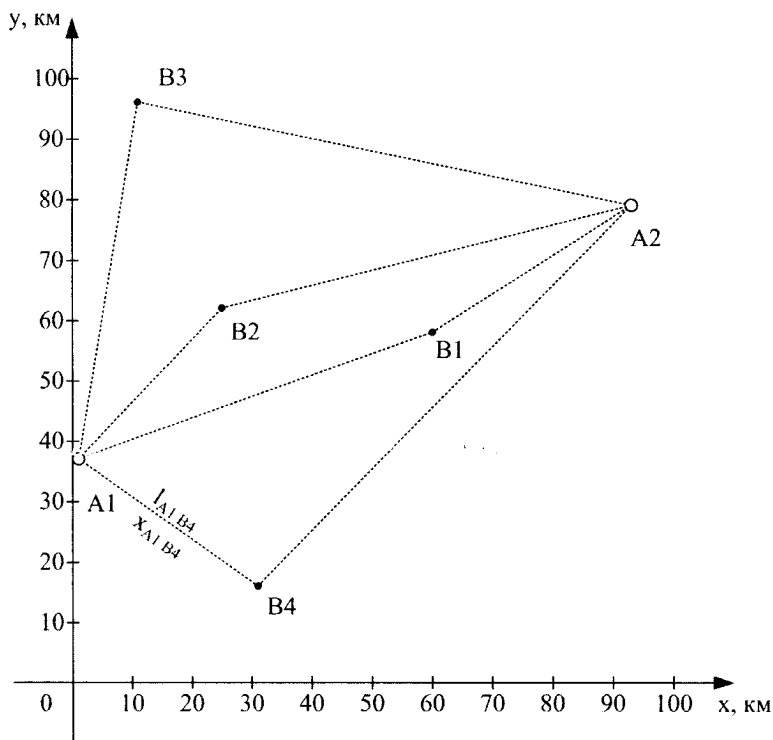


Рисунок 2.8 – Електроенергетичний район з позначенням ЛЕП 35 кВ

**Розв’язування.** В табл. 2.3 наведено відстані між джерелами живлення і споживачами.

Таблиця 2.3 – Відстані між підстанціями та споживачами, км

Споживачі →		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
Джерела ↓	$A_1$	62,6	34,7	59,8	36,6
	$A_2$	39,1	70,1	83,7	88,4

Відстань між вузлами  $i$  та  $j$  визначається як

$$l_{AiBj} = \sqrt{(x_{Ai} - x_{Bj})^2 + (y_{Ai} - y_{Bj})^2}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

де  $x_{Ai}$  та  $x_{Bj}$  – відповідно координати по осі  $x$  вузлів  $A_i$  та  $B_j$ ;

$y_{Ai}$  та  $y_{Bj}$  – відповідно координати по осі  $y$  вузлів  $A_i$  та  $B_j$ .

Розглянемо випадок живлення споживачів від одного з джерел живлення. Жирним шрифтом позначено джерело живлення окремого споживача. Розподілення споживачів між джерелами живлення здійснено за критерієм мінімальної сумарної довжини ЛЕП з дотриманням приблизно однакового навантаження на підстанції. У цьому випадку навантаження підстанцій однаково  $P_{Aj} = \{10; 10\}$  МВт.

Значення сумарної довжини ліній у разі живлення кожного споживача від одного джерела становить:

$$L = 39,1 + 34,7 + 83,7 + 36,6 = 194,1 \text{ км.}$$

Частота відмов мережі

$$\omega = 0,01 \cdot 2 \cdot 194,1 = 3,9 \text{ на рік.}$$

Сумарне недовідпущення електроенергії споживачам:

$$W_{\text{нед.а}} = 0,01 \cdot 2 \cdot 10 (39,1 \cdot 4 + 34,7 \cdot 4 + 83,7 \cdot 6 + 36,6 \cdot 6) = 159,5 \text{ МВт} \cdot \text{год/рік.}$$

У разі двостороннього живлення споживачів якщо увімкненням резервного джерела живлення здійснюється вручну за командою диспетчера, то тривалість відновлення зменшується з 10 год до приблизно 0,5 год:

$$W_{\text{нед.а}} = 0,01 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot (39,1 \cdot 4 + 34,7 \cdot 4 + 83,7 \cdot 6 + 36,6 \cdot 6) = 7,97 \text{ МВт} \cdot \text{год/рік.}$$

У разі двостороннього живлення споживачів з автоматичним увімкненням резервного джерела живлення тривалість відновлення зменшується з 10 год до  $6 \div 9$  с ( $9/3600 = 0,0024$  год). Недовідпущення електроенергії споживачам становитиме:

$$W_{\text{нед.а}} = 0,01 \cdot 2 \cdot 0,0024 \cdot (39,1 \cdot 4 + 34,7 \cdot 4 + 83,7 \cdot 6 + 36,6 \cdot 6) = 0,038 \text{ МВт} \cdot \text{год/рік.}$$

Таким чином, автоматизація є одним з основних завдань підвищення надійності розподільних електричних мереж напругою 10-35 кВ. Особливо актуальним є автоматизація мереж напругою 10 кВ з використанням реклоузерів для секціонування ЛЕП.

## 2.6 Ймовірнісні моделі електричних навантажень

**Застосування біноміального закону розподілу** Розподіл випадкової величини кількості одночасно ввімкнених електроприймачів  $m$  із загального числа  $n$ , увімкнення і вимкнення яких є незалежними,

підпорядкований біноміальному закону розподілу, згідно з яким ймовірність збігу ввімкнення  $m$  ЕП визначається за формулою Бернуллі ...

$$P(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad (2.14)$$

а функція розподілу за формулою

$$F(m) = \sum_{i=0}^m C_n^i p^i q^{n-i},$$

де  $p$  – ймовірності ввімкненого стану ЕП (коефіцієнт увімкнення) протягом циклу роботи (наприклад, робочої зміни).

Математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за біноміального розподілу визначають за такими формулами:

$$M[X] = \sum_{m=0}^n mP(m) = np; \quad D[X] = \sum_{m=0}^n (m-np)^2 P(m) = npq.$$

**Приклад 2.8.** Визначити ймовірність одночасного увімкнення  $m$  електроприймачів (ЕП), якщо ймовірність (коефіцієнт) увімкнення кожного з них становить 0,1. Події ввімкнення в роботу і вимкнення кожного ЕП є незалежними.

**Розв'язування.** Розрахунок виконано в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Розрахунок ймовірності увімкнення  $m$  електроприймачів

Кількість увімкнених електроприймачів, $m$	Можливі варіанти результатів увімкнення	Кількість варіантів $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Ймовірність одного з варіантів $p^m(1-p)^{n-m}$	Ймовірність увімкнення $m$ електроприймачів $P(A_m)$
4	(1111)	1	1/10000	1/10000
3	(0111); (1011); (1101); (1110)	4	9/10000	36/10000
2	(0011); (0101); (1001); (0110); (1010); (1100)	6	81/10000	486/10000
1	(0001); (0010); (0100); (1000)	4	729/10000	2916/10000
0	(0000)	1	6561/10000	6561/10000

Отже, найбільш ймовірним є те, що всі електроприймачі будуть відімкненими. Ймовірність увімкнення не більше одного ЕП приблизно дорівнює 0,95. Ймовірність увімкнення двох і більше ЕП приблизно дорівнює 0,05.

**Приклад 2.9.** Від кабельної лінії живляться дві групи ЕП, кожна з яких містить вісім ЕП. Ймовірності увімкнення в роботу кожного ЕП першої групи  $p_1=0,3$ ; другої групи –  $p_2=0,6$ . Події увімкнення в роботу і вимкнення кожного ЕП кожної групи є незалежними. Визначити кількість увімкнених ЕП, сумарна ймовірність увімкнення перевищує 0,95.

**Розв'язування.** Визначимо ймовірності  $P(m)$  для  $p=0,3$ ;  $n=8$  (табл. 2.5, рис. 2.9, а) та  $p=0,6$ ;  $n=8$  (табл. 2.6, рис. 2.9, б).

Таблиця 2.5 – Ймовірності одночасного увімкнення  $m$  ЕП для біноміального розподілу за  $p=0,3$ ;  $n=8$

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(m)$	0,058	0,198	0,296	0,254	0,136	0,047	0,010	0,001	0,000

Таблиця 2.6 – Ймовірності одночасного увімкнення  $m$  ЕП для біноміального розподілу за  $p=0,6$ ;  $n=8$

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(m)$	0,000	0,008	0,041	0,124	0,232	0,279	0,209	0,090	0,017

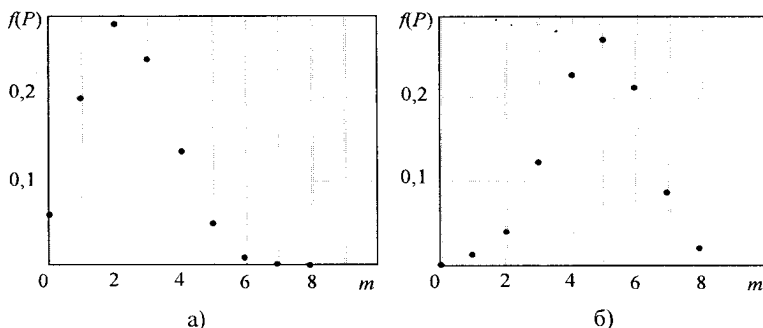


Рисунок 2.9 – Біноміальний закон розподілу навантаження:

а)  $n=8$ ,  $p=0,3$  ( $np=2,4$ ;  $npq=1,68$ )

б)  $n=8$ ,  $p=0,6$  ( $np=4,8$ ;  $npq=1,92$ )

З наведених таблиць для першої групи беремо п'ять одночасно увімкнених ЕП, а для другої – сім.

**Приклад 2.10.** Від кабельної лінії живляться ЕП: 1) 10 кВт; 2) 12 кВт; 3) 15 кВт; 4) 17 кВт; 5) 20 кВт. Ймовірності увімкнення в роботу кожного ЕП –  $p_1=0,1$ . Події увімкнення в роботу і вимкнення кожного ЕП є незалежними. Визначити максимальну потужність ЕП.

**Розв'язування.** Визначимо ймовірності одночасного увімкнення  $m$  ЕП  $P(m)$  (табл. 2.7).

Таблиця 2.7 – Ймовірності одночасного увімкнення  $m$  ЕП

$m$	0	1	2	3	4	5
$P(m)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Ймовірність увімкнення трьох ЕП відносно мала. Ймовірність увімкнення двох ЕП перевищує 0,05. Отже, будь-які два ЕП можуть бути одночасно увімкнені. Розрахункову потужність визначають за двома найбільш потужними ЕП: 37 кВт.

**Застосування розподілу Пуассона.** Формула Бернуллі (2.14) за великих  $n$  призводить до громіздких обчислень. У багатьох застосунках можна зустріти ситуацію, коли  $n$  є відносно великим,  $p$  – відносно малим, а добуток  $pn = \lambda$  і не малий, і не великий. У цьому випадку наближений вираз для ймовірності (2.14) набуде вигляду [10, 11]

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Отже, ймовірність увімкнення  $m$  ЕП великої групи, що містить  $n$  ЕП з однаковими ймовірностями  $p$  ввімкненого стану ЕП (коефіцієнтом увімкнення) протягом циклу роботи (наприклад, робочої зміни), визначається законом Пуассона

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots, \lambda = pn, \quad (2.15)$$

а функція розподілу за формулою

$$F(m) = \sum_{i=0}^m \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

На практиці формула (2.15) є достатньо гарним наближенням для (2.14), якщо  $n \geq 100$ ,  $0 \leq np \leq 10$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ .

**Приклад 2.11.** Від магістрального шинопроводу цеху промислового підприємства отримують електроенергію установки контактного електрозварювання (УКЕ), кількість яких  $n=200$ . Середнє значення ймовірності ввімкнення в роботу УКЕ  $p=0,02$ . Події ввімкнення в роботу і вимкнення УКЕ є незалежними. Визначити максимальну кількість увімкнених УКЕ, сумарна ймовірність увімкнення яких становить 0,999.

**Розв'язування.** Ймовірність одночасного ввімкнення  $m$  УКЕ визначаємо за формулою Пуассона (2.15).

Показник степеня  $\lambda = p \cdot n = 0,02 \cdot 200 = 4$  (табл. 2.8).

Таблиця 2.8 – Ймовірність одночасного ввімкнення  $m$  УКЕ

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(m)$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	0,104	0,06	0,03	0,013	0,005	0,002	0,0006
$F(m)$	0,018	0,091	0,238	0,433	0,628	0,784	0,888	0,948	0,978	0,991	0,996	0,998	0,999

Отже, максимальна кількість одночасно ввімкнених з групи УКЕ, ймовірність увімкнення яких дорівнює 0,999, становить 12.

**Неперервні функції розподілу навантажень.** Електричні навантаження в багатьох випадках можна подати неперервною випадковою величиною з рівномірним або нормальним законом розподілу (табл. 2.9).

Таблиця 2.9 – Закони розподілу електричних навантажень

Назва	Графічні залежності густини і функції розподілу	Аналітичний вираз густини розподілу
Рівномірний розподіл		$f(P) = 0$ , якщо $P < P_{\min}$ $f(P) = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}}$ , якщо $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$ $f(P) = 0$ , якщо $P > P_{\max}$
Нормальний розподіл		$f(P) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(P-P_c)^2}{2\sigma^2}}$

Якщо випадкова величина розподілена нормально, то для визначення односторонньої довірчої ймовірності в багатьох випадках беруть  $P_{\text{дов}} = 0,95$  і тоді максимальне значення величини

$$x_M = m_x + 1,65\sigma_x.$$

Необхідно також відмітити, що за рівномірного розподілу математичне сподівання та дисперсія визначаються як  $m_x = \frac{a+b}{2}$ ,  $\sigma_x = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$ , що приводить до формули  $x_M = m_x + 1,73\sigma_x$ .

**Формування групових графіків навантаження.** Під час підсумовування випадкових величин закони їх розподілу змінюють свою форму. Закон розподілу суми незалежних випадкових величин  $f(x) = f(x_1 + x_2)$ , які мають розподіл  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$ , визначають через інтеграл згортки

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z)f_2(x-z)dz,$$

де  $z$  – незалежна змінна.

Оскільки визначення законів розподілу групових графіків навантаження є достатньо складною задачею, то необхідним є обґрунтування можливості визначення максимального навантаження за довільного закону розподілу. Аналіз законів розподілу у разі підсумовування випадкових величин з різними законами розподілу показав, що інтегральні криві для широкого класу законів розподілу (рівномірного, трикутного, трапецієподібного, нормального, експоненціального і двомодальних з невеликою глибиною антимодальності) в околі 0,05-го та 0,95-го квантилів перетинаються між собою у вузькому інтервалі значень  $x/\sigma_x \approx 1,65$ .

Отже, інтерквантильний проміжок з дев'яностовідсотковою ймовірністю знаходження в ньому випадкової величини  $\Delta_{0,9}$  має властивість однозначного співвідношення з середнім квадратичним відхиленням незалежно від виду закону розподілу ( $\Delta_{0,9} = 1,65\sigma_x$ ). Тому за відсутності даних про вид закону розподілу групових графіків для визначення односторонньої довірчої ймовірності потрібно використовувати  $P_{\text{дов}} = 0,95$  і максимальне значення величини

$$x_M = m_x + 1,65\sigma_x.$$

**Приклад 2.12.** Визначити розрахункове навантаження, якщо за максимально завантаженою зміну середнє значення та середньоквадратичне відхилення активної потужності навантаження становлять  $P_c = 400$  кВт;  $\sigma_p = 90$  кВт, відповідно.

**Розв'язування.** Розрахункове навантаження

$$P_p = P_c + 1,65\sigma_p = 400 + 1,65 \cdot 90 = 548 \text{ кВт.}$$



## 2.7 Статистичний аналіз електричних навантажень

**Статистичний ряд, гістограма та функція розподілу.** Сукупність експериментально отриманих значень випадкової величини називають вибіркою.

Якщо кількість спостережень є великою, то дані необхідно згрупувати. Для цього спочатку визначають кількість інтервалів  $k$ , на які розподіляють статистичний матеріал. Кількість інтервалів  $k$  вибирають в межах від 8 до 20. Кількість інтервалів можна розрахувати за формулою Стержеса

$$k \approx 1 + 3,2 \ln n.$$

За найбільшим і найменшим значеннями статистичних даних  $x_{\max}$  і  $x_{\min}$  визначають довжину інтервалу

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Визначивши частоту потрапляння в кожний інтервал, статистичний матеріал подається як статистичний ряд (табл. 2.10). Геометричне зображення статистичного ряду отримало назву *гістограми* (рис. 2.10).

Таблиця 2.10 – Статистичний ряд навантаження підстанції

Розряд	700-750	750-800	800-850	850-900	900-950	950-1000	1000-1050	1050-1100
$n_i^*$	5	20	50	100	80	60	40	10
$p_i^*$	0,014	0,055	0,137	0,274	0,219	0,164	0,110	0,027
$F^*(x)$	0,014	0,069	0,206	0,480	0,699	0,863	0,973	1,000

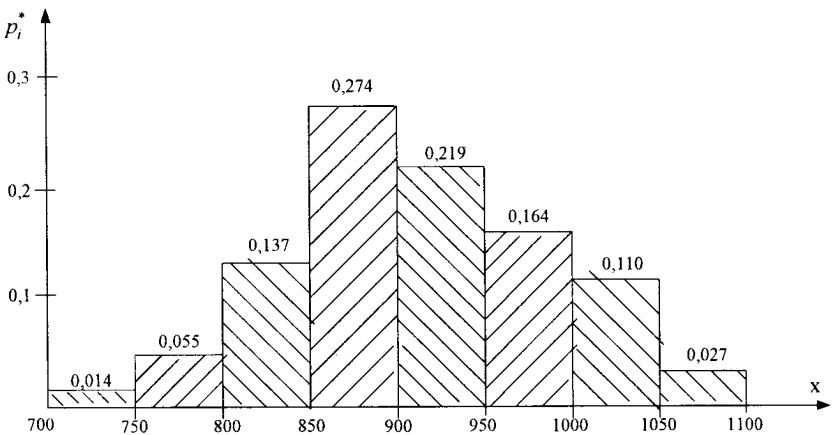


Рисунок 2.10 – Гістограма навантажень

Для побудови статистичної функції розподілу випадкової величини  $F^*(x)$  (рис. 2.11) використовують границі розрядів, які фігурують в статистичному ряді:

$$F^*(750) = P^*(-\infty \leq x < 750) = 0,014;$$

$$F^*(800) = P^*(-\infty \leq x < 800) = 0,069; \dots$$

$$F^*(1100) = P^*(-\infty \leq x < 1100) = 1,000.$$

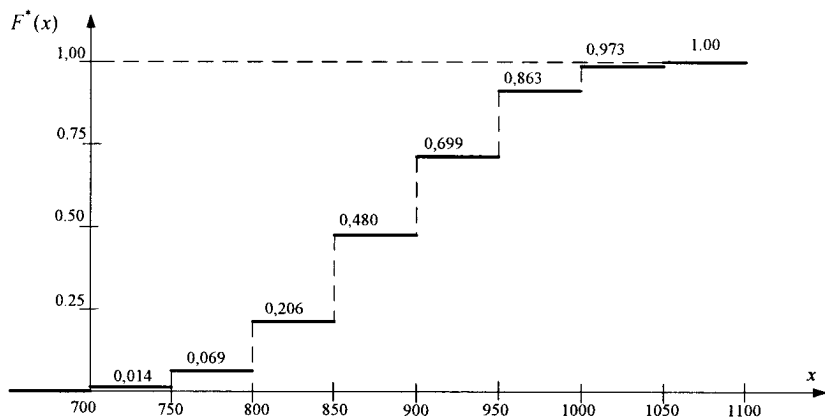


Рисунок 2.11 – Статистична функція розподілу

**Числові характеристики статистичного розподілу випадкової величини.** Для статистичних розподілів використовують ті самі числові характеристики випадкових величин, що і в теорії ймовірностей.

В процесі обробки результатів експериментальних досліджень статистичні оцінки математичного сподівання  $m_x^*$  і дисперсії  $D_x^*$  випадкової величини визначають за такими формулами:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n-1}, \quad (2.16)$$

де значення  $n-1$  вводиться для усунення зміщення оцінки дисперсії.

Згідно з законом великих чисел за достатньо великого  $n$  статистичні оцінки наближаються до математичного сподівання  $m_x$  і дисперсії  $D_x$ .

У разі великої кількості дослідів визначення числових характеристик за цими формулами стає надзвичайно громіздкою процедурою. У цьому випадку можна скористатись розрядами статистичного ряду, на які був розподілений статистичний матеріал під час побудови гістограми.

Виходячи з припущення, що значення випадкової величини у кожному розряді приблизно можна вважати постійним і таким, що дорівнює середньому значенню, наведемо формули для спрощеного визначення числових характеристик статистичного розподілу:

$$M^*(x) = m_x^* = \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i p_i^*; \quad D^*(x) = \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^*;$$

де  $p_i^*$  – частота  $i$ -го розряду;

$\tilde{x}_i$  – середнє значення  $i$ -го розряду.

Для наведених в табл. 2.9 даних оцінки математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення:  $m^* = 909,9$ ;  $\sigma^* = 75,8$  кВт.

**Інтервальні оцінки випадкових величин.** Для визначення достовірності точкових оцінок, які отримано з використанням обмеженого масиву даних, в математичній статистиці розглядаються довірчі інтервали:

- довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання:

$$m_x^* \pm \frac{t_{k-1, \alpha} \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

де  $t_{k-1, \alpha}$  – коефіцієнти розподілу Стьюдента для  $(k-1)$  ступеня вільності і рівня достовірності  $\alpha$ , який зазвичай береться 0,95;

- довірчий інтервал стандартного відхилення (або дисперсії):

$$\frac{D_x^* \cdot (n-1)}{\chi_{k-1, \beta/2}^2} \leq D_x^* \leq \frac{D_x^* \cdot (n-1)}{\chi_{k-1, 1-\beta/2}^2},$$

де  $\chi_{k-1, \beta/2}^2$  – коефіцієнти розподілу Пірсона

$p = \left(2^{n/2} \Gamma(n/2)\right)^{-1} \int_0^{\chi_{k-1, \beta/2}^2} x^{n-1} e^{-x/2} dx$  для  $(k-1)$  ступеня вільності і статистичної надійності  $\beta$ .

Параметри  $t_{k-1, \alpha}$  і  $\chi_{k-1, \beta/2}^2$  визначають з довідкових таблиць (табл. 2.11 і табл. 2.12).

Таблиця 2.11 – Квантили розподілу Стьюдента (для  $\alpha = 0,95$ )

$(k-1)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{k-1, \alpha}$	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23
$(k-1)$	20	30	40	50	60	70	80	90	$\infty$
$t_{k-1, \alpha}$	2,09	2,04	2,02	2,01	2,00	1,99	1,99	1,98	1,96

Таблиця 2.12 – Квантили розподілу Пірсона (для  $\beta = 0,05$ )

$(k-1)$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50
$\chi_{k-1, \beta/2}^2$	0,35	0,71	1,14	1,63	2,17	2,73	3,32	3,94	7,3	10,9	34,8
$\chi_{k-1, 1-\beta/2}^2$	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3	25,0	31,4	67,5

### Перевірка гіпотез про закон розподілу випадкової величини

Гістограма і статистична функція розподілу є підґрунтям для визначення закону розподілу випадкової величини.

Після побудови гістограми або статистичної кривої функції розподілу ймовірностей з її зовнішнього вигляду можна припустити, що закон розподілу ймовірностей відповідає тому чи іншому відомому теоретичному закону. Таке припущення потребує перевірки.

Якщо у статистичному розподілі мають місце відмінності у розподілі ймовірностей порівняно з теоретичною кривою, то ці відмінності можуть мати дві причини:

- 1) статистичні числові характеристики та закон розподілу відрізняються від теоретичних через недостатню кількість дослідів;
- 2) неправильне припущення про закон розподілу ймовірностей.

Досить часто висувають гіпотезу про нормальний закон розподілу ймовірностей випадкової величини. Оскільки інтеграл функції нормального розподілу ймовірностей

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-(x-m)^2 / 2\sigma^2\right] dx$$

через елементарні функції не визначається, то використовують функцію Лапласа  $\Phi(t)$  – табульовану функцію нормального розподілу ймовірностей з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і середньоквадратичним відхиленням, яке дорівнює одиниці, ( $t = (x - m) / \sigma$ ):

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-(t)^2 / 2\right] dt,$$

Використовуючи гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини  $X$  з математичним сподіванням  $m^*$  і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma^*$ , дістанемо такі значення теоретичної ймовірності потрапляння в  $i$ -ий інтервал:

$$p_i = F(x_{B_i}) = \Phi\left(\frac{x_{B_i} - m^*}{\sigma^*}\right);$$

$$p_i = F(x_{B_i}) - F(x_{H_i}) = \Phi\left(\frac{x_{B_i} - m^*}{\sigma^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_{H_i} - m^*}{\sigma^*}\right), \quad i = 2, \dots, k-1; \quad (2.17)$$

$$p_k = 1 - F(x_{H_k}) = 1 - \Phi\left(\frac{x_{H_k} - m^*}{\sigma^*}\right).$$

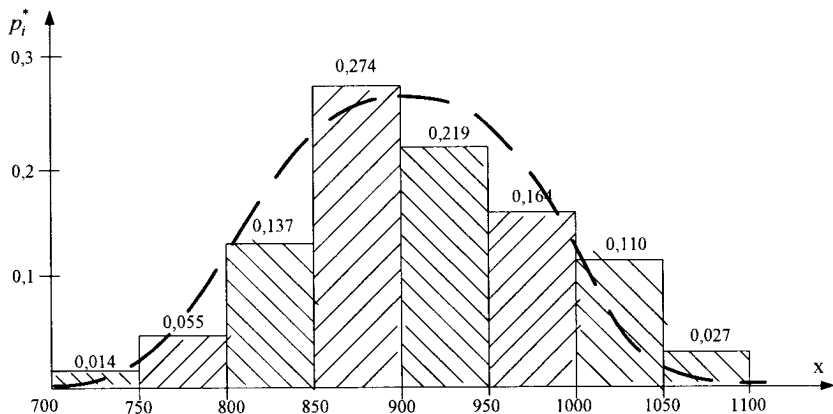


Рисунок 2.12 – Статистична та теоретична щільності розподілу випадкової величини

**Критерій  $\chi^2$  (хі-квадрат) Пірсона.** За міру розбіжності статистичного і теоретичного розподілів критерію, запропонованого К. Пірсоном, взято величину  $\chi^2$  (хі-квадрат) [16]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i^* - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}, \quad (2.18)$$

де  $k$  – кількість інтервалів, на які поділено діапазон вимірювань випадкової величини;

$p_i$  – теоретична ймовірність потрапляння в  $i$ -й інтервал згідно з гіпотезою про розподіл імовірностей випадкової величини.

Водночас варто мати на увазі, що занадто малі значення для  $np_i$  неприпустимі. На практиці інтервали, для яких  $np_i < 5$ , об'єднують з сусідніми інтервалами.

Алгоритм використання критерію  $\chi^2$  такий:

1. Вибирається рівень значимості  $\alpha$ , тобто ймовірність, за якої розбіжності статистичного і теоретичного розподілів можна вважати практично неможливими. Зазвичай вибирають  $\alpha = 0,05$ ;

2. Визначається кількість ступенів вільності

$$\rho = (k-1) - l,$$

де  $l$  – кількість оцінюваних параметрів теоретичного розподілу ймовірностей. У випадку нормального розподілу ймовірностей оцінюються два параметри – математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення. Для такого випадку  $\rho = k - 3$ ;

3. Для вибраного рівня значимості і знайденої кількості ступенів вільності з табл. 2.10 знаходять квантілі розподілу Пірсона

$$p = \left( 2^{n/2} \Gamma(n/2) \right)^{-1} \int_0^{\chi_{p,n}^2} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx;$$

4. Порівнюють попередньо розраховане значення  $\overline{\chi^2}$  з  $\chi_{\alpha}^2$ . Якщо  $\overline{\chi^2} < \chi_{\alpha}^2$ , то емпіричні дані узгоджуються з обраним теоретичним розподілом ймовірностей. Якщо  $\overline{\chi^2} \geq \chi_{\alpha}^2$ , то гіпотеза відкидається з ймовірністю помилки не більшою від  $\alpha$ .

**Приклад 2.13.** Перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу статистичних даних, наведених в табл. 2.10, за критерієм Пірсона. Оцінки математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення  $m^* = 909,9$ ;  $\sigma^* = 75,8$  кВт.

**Розв'язування.** Розрахунок проводимо в табл. 2.13.

Таблиця 2.13 – Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу за критерієм Пірсона

Розряд	700-750	750-800	800-850	850-900	900-950	950-1000	1000-1050	1050-1100
$n_i^*$	5	20	50	100	80	60	40	10
$p_i^*$	0,014	0,055	0,137	0,274	0,219	0,164	0,110	0,027
$p_i$	0,018	0,056	0,141	0,234	0,254	0,181	0,085	0,032
$n_i$	6,6	20,4	51,5	85,4	92,7	66,1	31,0	11,7
$\frac{(n_i^* - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$	0,375	0,009	0,042	2,493	1,743	0,556	2,598	0,241

Значення теоретичної ймовірності потрапляння в  $i$ -й інтервал визначено за формулами (2.17).

Згідно з критерієм Пірсона (2.18) гіпотеза про нормальний закон розподілу може бути прийнята, оскільки

$$\chi^{-2} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i^* - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = 8,057 < \chi_{p,5}^2 = 11,1,$$

де  $\chi_{p,5}^2 = 11,1$  – значення функції на рівні значимості 0,95 для п'яти ступенів вільності.

**Критерій Колмогорова.** Згідно з теоремою Колмогорова ймовірність виконання нерівності

$$\sup |F^*(x) - F(x)| < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \quad (2.19)$$

де знак  $\sup$  означає верхню межу, прямує у разі  $n \rightarrow \infty$  рівномірно за  $\lambda$  до ймовірності, що визначається значенням функції Колмогорова:

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}.$$

Причому значенню  $K(\lambda) = 0,95$  відповідає  $\lambda = 1,34$ .

Отже, виконання умови

$$\sup |F^*(x) - F(x)| < \frac{1,34}{\sqrt{n}}$$

говорить про те, що гіпотеза про закон розподілу може бути взята з довірчою ймовірністю 0,95, а невиконання нерівності – про те, що гіпотезу потрібно відхилити з ймовірністю помилки не більшою від 0,05.

**Приклад 2.14.** Перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу статистичних даних, наведених в табл. 2.10, за критерієм Колмогорова. Оцінки математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення  $m^* = 909,9$ ;  $\sigma^* = 75,8$  кВт.

**Розв'язування.** Розрахунок проводимо в табл. 2.14.

Таблиця 2.14 – Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу

Розряд	700- 750	750- 800	800- 850	850- 900	900- 950	950- 1000	1000- 1050	1050- 1100
$n_i^*$	5	20	50	100	80	60	40	10
$p_i^*$	0,014	0,055	0,137	0,274	0,219	0,164	0,110	0,027
$F^*(x)$	0,014	0,069	0,206	0,480	0,699	0,863	0,973	1,000
$F(x)$	0,018	0,074	0,215	0,448	0,702	0,883	0,968	0,994

Значення функції розподілу в верхніх точках інтервалів розраховано за формулою

$$F(x_i) = \Phi\left(\frac{x_{Bi} - m^*}{\sigma^*}\right).$$

Згідно з критерієм Колмогорова (2.19)

$$\sup|F^*(x) - F(x)| = 0,036 < \frac{1,34}{\sqrt{365}} = 0,07$$

гіпотеза про нормальний закон розподілу може бути взята на рівні значимості 0,95.

## 2.8 Лінійні регресійні моделі

Залежність двох випадкових величин відрізняється від звичайного розуміння функціональної залежності двох величин. Якщо одна з випадкових величин набуває конкретного значення, то це не означає, що й інша, залежна від неї, величина також буде набувати певного конкретного значення. Ця величина є випадковою, тому вона може набувати тих чи інших значень. Такими випадковими величинами в енергетиці є добовий виробіток електроенергії і добовий максимум навантаження енергосистеми, сумарне електричне навантаження і температура навколишнього середовища тощо.

Мірою залежності між випадковими величинами  $Y$  і  $X$  є кореляційний момент  $K_{xy}$ . Під кореляційним моментом розуміється математичне сподівання добутку центрованих випадкових величин:

$$K_{xy} = M[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)].$$

Для статистичного визначення кореляційного моменту та коефіцієнта кореляції між двома випадковими величинами  $X$  і  $Y$  потрібно мати ряд спостережень цих величин. Якщо інформація про пари одночасних значень  $X$  і  $Y$ :  $x_1, y_1$ ;  $x_2, y_2$ ; ...;  $x_n, y_n$  зібрана, то для знаходження статистичної оцінки кореляційного моменту використовують формулу:

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*) (y_i - m_y^*) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - m_x^* m_y^*), \quad (2.20)$$

де  $n$  – кількість дослідів (спостережень).

Поряд з кореляційним моментом  $K_{xy}$  для оцінювання кореляційної залежності застосовують коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$ , який є безрозмірною величиною і визначається за формулою



$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

де  $\sigma_x, \sigma_y$  – стандартне відхилення випадкових величин  $X$  і  $Y$ , відповідно.

Якщо  $K_{xy} \neq 0$  або  $r_{xy} \neq 0$ , то це є ознакою кореляційної залежності між випадковими величинами  $X$  і  $Y$ . Навпаки, якщо  $K_{xy} = 0$  і  $r_{xy} = 0$ , то величини  $X$  і  $Y$  будуть незалежними між собою.

**Одновимірні регресійні залежності.** Якщо певному значенню  $x$  незалежної величини  $X$  відповідає декілька випадкових значень величини  $Y$ , то зв'язок  $Y = f(x)$  називають *регресійним*.

У випадку кореляції між двома залежними випадковими величинами, між якими існує причинно-наслідковий зв'язок, рівняння лінійної регресії можна записати згідно з означенням коефіцієнта кореляції:

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = r_{xy} \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

у вигляді 
$$y = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x). \quad (2.21)$$

Практичне значення побудови рівняння регресії (2.21) полягає в можливості його застосування для прогнозного оцінення динаміки електричних навантажень, попиту на електричну енергію тощо.

Більш універсальним для визначення регресійного рівняння є застосування методу найменших квадратів (МНК), згідно з яким сума квадратів відхилень експериментальних значень від розрахованих за рівнянням регресії має бути мінімальною:

$$Z = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 \rightarrow \min, \quad (2.22)$$

де  $y_i, y_i^*$  – експериментальне та розрахункове значення вихідної функції, відповідно;

$y_i^* = a + bx_i$  – для лінійних залежностей;

$y_i^* = a + bx_i + cx_i^2$  – для параболічних залежностей тощо.

Покажемо, як можна підібрати рівняння прямої так, щоб сума квадратів відхилень (2.22) була мінімальною:

$$Z = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 \rightarrow \min.$$

Умову мінімуму функції  $Z$  для невідомих коефіцієнтів регресії  $a$  і  $b$  знаходять шляхом порівнювання до нуля частинних похідних:

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i)) = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i)) \cdot x_i = 0,$$

які можна переписати у такому вигляді:

$$n \cdot a + \sum_{i=1}^n x_i \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot a + \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i.$$

**Приклад 2.15.** Кореляційний аналіз ВВП України та споживання електроенергії.

Розрахунок виконано в табл. 2.15.

Таблиця 2.15 – Кореляційний аналіз ВВП України та споживання електроенергії

Рік	$x_i$ , млрд дол.	$y_i$ , млрд кВт·год	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$	$y_i^*$	$(y_i - y_i^*)$
2005	86,309	185.2	7449	34299	15984	182,7	2,5
2006	107,753	192.1	11611	36902	20699	185,5	6,6
2007	142,719	195.1	20369	38064	27844	190,1	5,0
2008	179,382	191.7	32178	36749	34388	196,0	-4,3
2009	117,152	172.9	13725	29894	20256	186,7	-13,8
2010	136,420	187.9	18610	35306	25655	189,3	-1,4
2011	165,239	194.1	27304	37675	32073	193,1	1,0
2012	176,308	198,0	31085	39204	34909	194,6	3,4
Сума	1111,3	1517	162330	288094	211787		

Середні значення

$$m_x = \sum x_i / n = 1111,3 / 8 = 138,9 \text{ млрд дол.};$$

$$m_y = \sum y_i / n = 1517 / 8 = 189,6 \text{ млрд кВт·год.}$$

Вибіркові дисперсії:

$$\sigma_x^2 = \sum x_i^2 / n - m_x^2 = 162330/8 - 138,9^2 = 995,19 \text{ (млрд дол.)}^2;$$

$$\sigma_y^2 = \sum y_i^2 / n - m_y^2 = 288094/8 - 189,6^2 = 54,11 \text{ (млрд кВт·год)}^2.$$

Середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_x = 31,547 \text{ млрд дол.};$$

$$\sigma_y = 7,356 \text{ млрд кВт·год.}$$

Коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = (\sum (x_i \cdot y_i) / n - m_x \cdot m_y) / (\sigma_x \cdot \sigma_y) = \\ = (211787/8 - 189,6 \cdot 138,9) / (31,547 \cdot 7,356) = 0.571.$$

Рівняння лінійної регресії:  $y = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)$ :

$$y = 189,6 + 0,571 \cdot (7,356/31,547) \cdot (x - 138,9) = 171,1 + 0,1332 \cdot x \text{ млрд кВт} \cdot \text{год.}$$

Система рівнянь за МНК буде мати такий вигляд:

$$8 \cdot a + 1111,3 \cdot b = 1517;$$

$$1111,3 \cdot a + 162330 \cdot b = 211787,$$

звідки значення коефіцієнтів регресії:  $b = 0,1332$ ,  $a = 171,1$ .

Отже, і за МНК рівняння лінійної регресії:

$$y = 171,1 + 0,1332 \cdot x \text{ млрд кВт} \cdot \text{год.}$$

Адекватність розрахункової моделі експериментальним даним можна також визначити за середньоквадратичною помилкою:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - y_i^*|}{y_i}} 100 \%,$$

яка не має перевищувати 5%.

Якщо за достатньої кількості даних умова не виконується, то необхідно розглянути іншу, більш складну (як правило, нелінійну) форму моделі або ввести в рівняння регресії додаткові фактори.

**Перевірка значимості** коефіцієнта кореляції та парної лінійної регресії виконується з використанням  $t$ -критерію

$$t = r_{xy} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \geq t_{\text{крит}},$$

де  $t_{\text{крит}}$  визначають з таблиці Стьюдента з рівнем значимості  $\alpha=0,05$  і  $k = n - 2$  ступенями вільності. Якщо  $t < t_{\text{крит}}$ , то отримане значення коефіцієнта кореляції та моделі регресії є незначимим.

Перевіримо значимість коефіцієнта кореляції та парної лінійної регресії з використанням  $t$ -критерію Стьюдента

$$t = r_{xy} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = 0,571 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-0,571^2}} = 1,703.$$

З таблиці Стьюдента з рівнем значимості  $\alpha=0,05$  і  $k=6$  ступенями вільності знаходимо  $t_{\text{крит}}=2,447$ . Оскільки  $t < t_{\text{крит}}$ , то отримане значення коефіцієнта кореляції та моделі регресії є незначимим.

У загальному випадку значимість лінійної регресії перевіряють з використанням  $F$ -критерію Фішера:

$$F = \frac{n-m-1}{m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_c)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2} = \frac{n-m-1}{m} \cdot \frac{D_y^*}{\Delta D} \geq F_{\text{крит}},$$

де  $m$  – кількість факторів в моделі ( $m=1$  для парної регресії).

Розрахункові значення  $F$ -критерію зручно розрахувати через коефіцієнт детермінації

$$F = \frac{n-m-1}{m} \frac{R^2}{1-R^2},$$

де  $R^2$  – коефіцієнт детермінації, який у загальному випадку знаходять як

$$\text{відношення дисперсій } R^2 = \frac{D_y^*}{D_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_c)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_c)^2}.$$

Коефіцієнт детермінації у випадку парної лінійної регресії дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції, а тому

$$F = \frac{n-m-1}{m} \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Критичне значення критерію Фішера визначають за  $k_1=m-1$  і  $k_2=n-1-m$  ступенів вільності. Якщо  $F < F_{\text{крит}}$ , то отримане рівняння регресії статистично ненадійне.

Перевіримо значимість лінійної регресії з використанням критерію Фішера

$$F = \frac{n-m-1}{m} \frac{r^2}{1-r^2} = \frac{8-1-1}{1} \frac{0,571^2}{1-0,571^2} = 2,9.$$

Критичне значення критерію Фішера за  $k_1=m-1$  і  $k_2=n-1-m=6$  ступенів вільності:  $F_{\text{крит}}=5,99$ . Оскільки  $F < F_{\text{крит}}$ , то отримане рівняння регресії статистично ненадійне.

**Ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена.** Якщо залежності величин мають нелінійний характер, то виявити кореляційний зв'язок досить складно. У такому випадку використовують ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена.

**Приклад 2.16.** Для вихідних значень  $x$ ,  $y$  визначаємо ранги значень  $d_x$ ,  $d_y$  та їх різницю  $d$  (табл. 2.16).

Таблиця 2.16 – Визначення рангового коефіцієнта кореляції

$x$	1	2	4	3	5	6	7	8
$y$	1	2	3	1,5	5	2,5	4	5,5
$d_x$	1	2	4	3	5	6	7	8
$d_y$	1	3	5	2	7	4	6	8
$d$	0	1	1	1	2	2	1	0

Коефіцієнт кореляції Спірмена визначається за формулою

$$r = 1 - 6 \frac{\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - 6 \frac{12}{8^3 - 8} = 0,86.$$

Перевіримо значимість коефіцієнта кореляції Спірмена з використанням  $t$ -критерію Стьюдента

$$t = r \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = 0,86 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-0,86^2}} = 4,1.$$

З таблиці Стьюдента з рівнем значимості  $\alpha=0,05$  і  $k=6$  ступенями вільності знаходимо  $t_{\text{крит}}=2,447$ . Оскільки  $t > t_{\text{крит}}$ , то отримане значення коефіцієнта кореляції Спірмена є значимим.

**Множинний регресійний аналіз.** Під час прогнозування електричних навантажень часто використовують не один, а декілька технологічних факторів виробництва: обсяги виробленої продукції, продуктивність основного обладнання, склад сировини тощо. Аналогічно на термін безвідмовної роботи електрообладнання впливають кліматичні фактори, режими нормальних та аварійних навантажень.

Для побудови відносно простого математичного опису таких об'єктів значного поширення набув метод множинного регресійного аналізу, в якому використовують емпіричні багатофакторні рівняння:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, \quad (2.23)$$

де  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  – невідомі постійні коефіцієнти;

$Y, X_1, X_2, \dots, X_n$  – величини, для кожної з яких під час спостережень отримано  $m$  відповідних значень.

В матричній формі ці рівняння мають такий вигляд:

$$Y = X \cdot A, \quad (2.24)$$

де  $Y$  – вектор експериментальних значень залежної величини розмірністю  $m \times 1$ ;

$X$  – матриця експериментальних значень незалежних величин розмірністю  $m \times n+1$ ;

$A$  – вектор коефіцієнтів рівняння регресії розмірністю  $n+1 \times 1$ .

Параметри рівняння регресії визначають за методом найменших квадратів. В матричній формі ця умова має такий вигляд:

$$Z = \mathbf{1}^T \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A})^2 \rightarrow \min, \quad (2.25)$$

де  $\mathbf{1}^T$  – одиничний транспонований вектор розмірністю  $1 \times m$ .

Для розв'язування цієї задачі можна використати таку формулу:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (2.26)$$

**Приклад 2.17.** На основі спостережень впливу вологості ( $x_1$ ) та грозового фактора ( $x_2$ ) на термін безвідмовної роботи ( $y$ ) роз'єднувачів (табл. 2.17) необхідно побудувати лінійну множинну регресійну модель.

Таблиця 2.17 – Дані спостережень

$x_1$	0,69	0,92	0,81	0,61	0,66	0,77	0,68	0,69
$x_2$	5,06	10,25	9,12	3,9	6,18	7,16	6,9	5,85
$y$	8,46	5,12	6,43	9,79	8,83	7,81	8,56	9,0
$y^*$	8,78	5,18	6,64	9,90	8,89	7,47	8,53	8,62

Увівши матрицю значень  $\mathbf{X}$  та вектор  $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0.69 & 5.06 \\ 1 & 0.92 & 10.25 \\ 1 & 0.81 & 9.12 \\ 1 & 0.61 & 3.9 \\ 1 & 0.66 & 6.18 \\ 1 & 0.77 & 7.16 \\ 1 & 0.68 & 6.9 \\ 1 & 0.69 & 5.85 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 8.46 \\ 5.12 \\ 6.43 \\ 9.79 \\ 8.83 \\ 7.81 \\ 8.56 \\ 9.0 \end{bmatrix},$$

з формули (2.26) отримують вектор коефіцієнтів  $\mathbf{A}$  регресійної моделі:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 8 & 5.83 & 54.4 \\ 5.83 & 4.32 & 41.0 \\ 54.4 & 41.0 & 400.3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 64 \\ 45.6 \\ 414.3 \end{bmatrix};$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 22.4 & -48.9 & 1.96 \\ -48.9 & 115.2 & -5.16 \\ 1.96 & -5.16 & 0.264 \end{bmatrix}$$

$$A = (X^T X)^{-1} (X^T Y) = \begin{bmatrix} 22.4 & -48.9 & 1.96 \\ -48.9 & 115.2 & -5.16 \\ 1.96 & -5.16 & 0.264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 \\ 45.6 \\ 414.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.52 \\ -11.25 \\ -0.195 \end{bmatrix}.$$

Отже, множинна регресійна модель має такий вигляд

$$y^* = 17,52 - 11,25x_1 - 0,195x_2.$$

Результати розрахунків (табл. 2.16) добре збігаються з вихідними даними.

Коефіцієнт детермінації

$$R^2 = \frac{D_y^*}{D_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - y_c)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_c)^2} = 0,974.$$

Згідно з критерієм Фішера

$$F = \frac{n-m-1}{m} \frac{R^2}{1-R^2} = \frac{8-2-1}{2} \frac{0,974}{1-0,974} = 93,2.$$

За рівня значимості  $\alpha=0,05$  для  $k_1=m=2$  і  $k_2=n-1-m=5$  ступенів вільності критичне значення з таблиці розподілу Фішера–Снедекера  $F_{\text{крит}}=5,79$ .

Оскільки  $F > F_{\text{крит}}$ , то отримане рівняння регресії статистично надійне.

### Контрольні запитання

1. Теорема додавання і множення ймовірностей.
2. Теорема про повторення незалежних дослідів (схема Бернуллі).
3. Як визначається ймовірність безвідмовної роботи системи за послідовного та паралельного з'єднання елементів?
4. Як визначається ймовірність безвідмовної роботи двоколової схеми живлення споживачів?
5. Як визначається ймовірність безвідмовної роботи системи за методом мінімальних шляхів?
6. Як визначається ймовірність безвідмовної роботи системи за методом мінімальних перерізів?
7. Яка відмінність точного і спрощеного алгоритмів визначення надійності за методом мінімальних перерізів?
8. Поясніть, що таке функція розподілу випадкової величини.
9. Числові характеристики випадкових величин.
10. Застосування експоненційного закону розподілу.

11. Застосування біноміального закону розподілу.
12. Застосування розподілу Пуассона.
13. Як побудувати гістограму та статистичну функцію розподілу випадкової величини?
14. Послідовність перевірки гіпотези за критерієм Колмогорова.
15. Послідовність перевірки гіпотези за критерієм Пірсона.
16. Яким чином побудувати лінійне рівняння регресії з використанням коефіцієнта кореляції?
17. Як визначити коефіцієнт кореляції?
18. Процедура використання методу найменших квадратів для побудови регресійного рівняння.
19. Як здійснюють перевірку значимості моделі регресії?
20. Яким чином побудувати рівняння множинної регресії?



## 3 МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ

### 3.1 Математичні моделі перехідних режимів

Математичними моделями перехідних режимів є диференціальні рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

або системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m); \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m);$$

$$x_i(t_0) = x_{i_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

які зручно подати в матрично-векторній формі

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.3)$$

де  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  – вектор шуканих функцій змінних стану;

$\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$  – вектор початкових значень змінних стану.

Диференціальні рівняння подано в нормальній формі Коші, яка є зручною для застосування чисельних методів.

Під час складання диференціальних рівнянь за шукані змінні в електротехніці беруть струми через індуктивності та напруги на ємностях – змінні стану.

Наприклад, послідовне  $RL$ -коло (рис. 3.1) можна описати диференціальним рівнянням першого порядку відносно струму

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u(t) - R \cdot i(t)), \quad i(t_0) = i_0.$$

Прикладена до кола напруга  $u(t)$  може мати будь-яку форму: синусоїдну, пилкоподібну тощо. У разі коли напруга живлення дорівнює нулю, а початкове значення не нульове, то розглядається вільний процес.

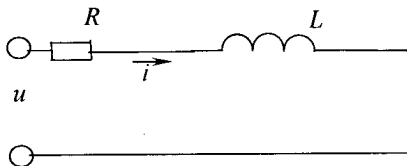


Рисунок 3.1 – Схема електричного  $RL$ -кола

У загальному вигляді лінійне диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.4)$$

а систему лінійних диференціальних рівнянь можна подати у такому вигляді:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \quad (3.5)$$

**Приклад 3.1** Записати рівняння для розрахунку перехідного процесу увімкнення послідовного  $RLC$ -кола на напругу  $u(t)$  відносно змінних стану (рис. 3.2).

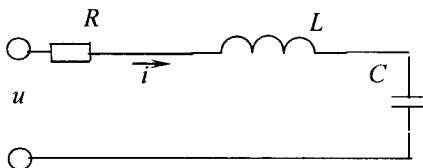


Рисунок 3.2 – Схема електричного кола

Запишемо компонентні рівняння для індуктивності та ємності

$$L \frac{di}{dt} = u_L; \quad C \frac{du_C}{dt} = i.$$

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$R \cdot i + u_L + u_C = u.$$

Система рівнянь в нормальній формі Коші має такий вигляд:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u - R \cdot i - u_C); \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i.$$

Отже,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Приклад 3.2** Записати рівняння для розрахунку перехідного процесу увімкнення  $RLC$ -кола на напругу  $u(t)$  відносно змінних стану (рис. 3.3).

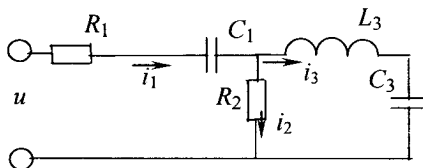


Рисунок 3.3 – Схема електричного кола

Запишемо компонентні рівняння для ємностей та індуктивності

$$C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_1; \quad L_3 \frac{di_3}{dt} = u_{L3}; \quad C_3 \frac{du_{C3}}{dt} = i_3.$$

Запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа та за другим законом Кірхгофа для двох контурів:

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad u_{L3} + u_{C3} = R_2 \cdot i_2; \quad R_1 \cdot i_1 + u_{C1} + R_2 \cdot i_2 = u.$$

Система рівнянь в нормальній формі Коші має такий вигляд:

$$\frac{du_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1}(i_2 + i_3); \quad \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L_3}(R_2 \cdot i_2 - u_{C3}); \quad \frac{du_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_3.$$

**Приклад 3.3** Записати рівняння для розрахунку перехідного процесу увімкнення  $RLC$ -кола на напругу  $u(t)$  відносно змінних стану (рис. 3.4).

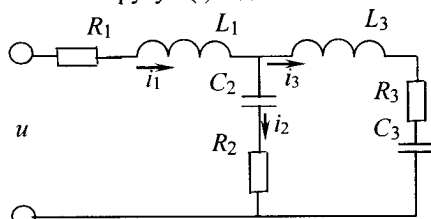


Рисунок 3.4 – Схема електричного кола

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для двох контурів

$$R_1 \cdot i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_{C2} + R_2 \cdot i_2 = u;$$

$$R_3 \cdot i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + u_{C3} = R_2 \cdot i_2 + u_{C2}.$$

Доповнимо отримані рівняння компонентними співвідношеннями для ємностей

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_1 - i_3; \quad C_3 \frac{du_{C3}}{dt} = i_3.$$

Розглянемо однофазний трансформатор (рис. 3.5). Диференціальні рівняння однофазного трансформатора згідно з другим законом Кірхгофа

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u_1; \tag{3.6}$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = u_2,$$

де  $i_1, i_2$  – струми первинної та вторинної обмоток трансформатора, відповідно;

$u_1, u_2$  – напруги первинної та вторинної обмоток трансформатора, відповідно;

$R_1, R_2$  – активні опори первинної та вторинної обмоток трансформатора, відповідно;

$L_1, L_2$  – індуктивності первинної та вторинної обмоток трансформатора, відповідно;

$M$  – взаємоіндуктивність між обмотками трансформатора.

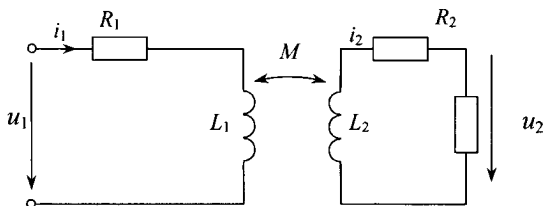


Рисунок 3.5 – Заступна схема однофазного трансформатора

Для отримання системи рівнянь відносно струмів в нормальній формі Коші потрібно використати обернення матриці індуктивностей

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.7)$$

Враховавши, що потокозчеплення первинної та вторинної обмоток трансформатора відповідно будуть

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2, \quad \psi_2 = L_2 i_2 + M i_1, \quad (3.8)$$

систему диференціальних рівнянь можна записати в нормальній формі Коші відносно потокозчеплень обмоток

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= u_1 - \frac{1}{\Delta} R_1 (L_2 \psi_1 - M \psi_2); \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= u_2 - \frac{1}{\Delta} R_2 (L_1 \psi_2 - M \psi_1), \end{aligned} \quad (3.9)$$

де  $\Delta = L_1 L_2 - M^2$  – значення визначника матриці індуктивностей.

Для моделювання асинхронних двигунів, які становлять переважну частину електричного навантаження споживачів, здійснюють перехід від трифазної системи координат до двофазної системи  $\alpha\beta$ -координат, яка є нерухомою відносно статора (рис. 3.6) [17].

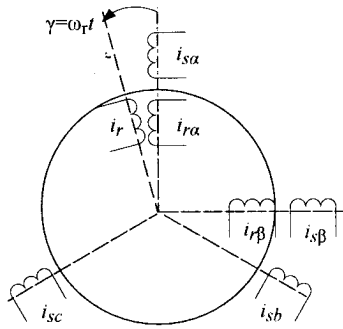


Рисунок 3.6 – Просторова модель асинхронного двигуна

Перехід від системи нерухомих фазних координат статора до системи нерухомих  $\alpha\beta$ -координат статора можна здійснити за формулами

$$i_{s\alpha} = \frac{2}{3}(i_a - 0,5(i_b + i_c)); \quad i_{s\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i_b - i_c).$$

Виразивши струми через потокозчеплення з виразів

$$\begin{aligned} \psi_{s\alpha} &= L_s i_{s\alpha} + L_\mu i_{r\alpha}; \quad \psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + L_\mu i_{r\beta}, \\ \psi_{r\alpha} &= L_r i_{r\alpha} + L_\mu i_{s\alpha}; \quad \psi_{r\beta} = L_r i_{r\beta} + L_\mu i_{s\beta}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

і підставивши їх в рівняння напруг для статора і ротора, отримують математичну модель АД в ортогональній системі координат, нерухомій відносно статора (системі  $\alpha\beta$ -координат)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} &= u_{s\alpha} - AR_s (L_r \psi_{s\alpha} - L_\mu \psi_{r\alpha}) \\ \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} &= u_{s\beta} - AR_s (L_r \psi_{s\beta} - L_\mu \psi_{r\beta}) \\ \frac{d\psi_{r\alpha}}{dt} &= -AR_r (L_s \psi_{r\alpha} - L_\mu \psi_{s\alpha}) - z_p \omega_r \psi_{r\beta}; \\ \frac{d\psi_{r\beta}}{dt} &= -AR_r (L_s \psi_{r\beta} - L_\mu \psi_{s\beta}) + z_p \omega_r \psi_{r\alpha}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де  $A = 1/(L_s L_r - L_\mu^2)$ ;

$z_p$  – число пар полюсів АД.

Порівняно з рівняннями для трансформатора, останні містять додаткові ЕРС обертання, які отримують в результаті диференціювання рівняння напруг ротора.

Для аналізу електромеханічних перехідних процесів диференціальні рівняння АД (3.11) необхідно доповнити рівнянням механічного руху

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{\frac{P(t)}{\omega_r} - M(t)}{J} = \frac{\frac{3}{2} z_p L_\mu A [\psi_{s\beta}(t) \psi_{r\alpha}(t) - \psi_{s\alpha}(t) \psi_{r\beta}(t)] - M(t)}{J}, \quad (3.12)$$

де  $M(t)$  – механічний момент навантаження;

$J$  – момент інерції АД з приводним механізмом.

Під час вивчення квазіусталених режимів синхронних двигунів (СД) використовують рівняння Парка-Горєва в  $d, q$ -координатах, які в спрощеному вигляді (без урахування демпферних обмоток) можна записати через діючі значення величин:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_d}{dt} &= \alpha_{11}(-U_d + z_p \omega_r L_q I_q - R_s I_d) + \alpha_{12}(U_f - R_f I_f); \\ \frac{dI_f}{dt} &= \alpha_{12}(-U_d + z_p \omega_r L_q I_q - R_s I_d) + \alpha_{22}(U_f - R_f I_f); \\ \frac{dI_q}{dt} &= \alpha_q(E - U_q - z_p \omega_r L_d I_d - R_s I_q), \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

де  $\alpha_{11} = L_f / (L_f L_d - M_{sf}^2)$ ;  $\alpha_{12} = M_{sf} / (L_f L_d - M_{sf}^2)$ ;

$\alpha_{22} = L_d / (L_f L_d - M_{sf}^2)$  – обернені індуктивності, що характеризують зв'язок між струмами та ЕРС обмотки збудження та обмотки статора по поздовжній осі;

$\alpha_q = 1 / L_q$  – обернена індуктивність статора по поперечній осі;

$R_s, R_f$  – активні опори відповідно обмотки статора та обмотки збудження;

$L_d, L_q, L_f$  – індуктивності статорної обмотки відповідно по поздовжній і поперечній осях та обмотки збудження;

$M_{sf}$  – взаємодуктивність між обмотками статора і збудження;

$U_d = U \sin \theta$ ,  $U_q = U \cos \theta$ ,  $U_f$  – напруги відповідно обмотки статора по осях  $d, q$  та обмотки збудження.

Рівняння (3.13) доповнюють рівняннями, що характеризують електромеханічні процеси

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{-\frac{P(t)}{\omega_r} - M(t)}{J}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_r - \frac{\omega}{p_0}. \quad (3.14)$$

### 3.2 Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь

Розглянемо спочатку розв'язування задачі Коші для одного диференціального рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

**Метод Ейлера** полягає в поданні похідної кінцевою різницею

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \approx y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

і використанні на кожному інтервалі часу такої різницевої схеми:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k_{1n}, \quad (3.15)$$

де  $k_{1n} = y'(t_n) = f(t_n, y_n)$ .

**Методи Рунге-Кутта** основані на апроксимації похідних від правих частин диференціальних рівнянь з використанням значень функції в декількох точках, наприклад,  $t_n, t_n + \frac{h}{2}, t_n + h$ .

Метод Рунге-Кутта другого порядку (метод Ейлера-Коші) можна подати такою схемою:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} \cdot [k_1 + k_2], \quad (3.16)$$

де  $k_1 = f(t_n, y_n)$ ,  $k_2 = f(t_n + h, y_n + h \cdot k_1)$ .

Метод Рунге-Кутта другого порядку можна подати також схемою:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot k_2,$$

де  $k_1 = f(t_n, y_n)$ ;  $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \cdot \frac{k_1}{2}\right)$ .

Поширення набув однокроковий явний метод Рунге-Кутта четвертого порядку

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.17)$$

де  $k_1 = f(t_n, y_n)$ ,  $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \cdot \frac{k_1}{2}\right)$ ,  $k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \cdot \frac{k_2}{2}\right)$ ,  
 $k_4 = f(t_n + h, y_n + h \cdot k_3)$ .

**Приклад 3.4** Нехай є диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y_0 = 1.$$

Алгоритм методу Ейлера має такий вигляд ( $h = 0,1$ ):

$$y := \left| \begin{array}{l} y_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } n \in 0..9 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k_1 \leftarrow h \cdot n + y_n \\ y_{n+1} \leftarrow y_n + h \cdot k_1 \end{array} \right. \\ y \end{array} \right.$$

	0
0	1
1	1.1
2	1.22
3	1.362
4	1.528
5	1.721
6	1.943
7	2.197
8	2.487
9	2.816
10	3.187

Алгоритм методу Рунге-Кутта другого порядку такий ( $h = 0,1$ ):

$$y := \left\{ \begin{array}{l} y_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } n \in 0..9 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 \leftarrow h \cdot n + y_n \\ k_2 \leftarrow h \cdot (n+1) + (y_n + h \cdot k_1) \\ y_{n+1} \leftarrow y_n + h \cdot \frac{k_1 + k_2}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

	0
0	1
1	1.11
2	1.242
3	1.398
4	1.582
5	1.795
6	2.041
7	2.323
8	2.646
9	3.012
10	3.428

Алгоритм методу Рунге-Кутта четвертого порядку має вигляд ( $h = 0,1$ ):

$$y := \left\{ \begin{array}{l} y_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } n \in 0..9 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 \leftarrow h \cdot n + y_n \\ k_2 \leftarrow h \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right) + \left( y_n + h \cdot \frac{k_1}{2} \right) \\ k_3 \leftarrow h \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right) + \left( y_n + h \cdot \frac{k_2}{2} \right) \\ k_4 \leftarrow h \cdot (n+1) + (y_n + h \cdot k_3) \\ y_{n+1} \leftarrow y_n + h \cdot \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

	0
0	1
1	1.11
2	1.243
3	1.4
4	1.584
5	1.797
6	2.044
7	2.328
8	2.651
9	3.019
10	3.437



Аналітичний розв'язок для наведеного прикладу  $y = 2e^t - t - 1$ . Для  $t_n = nh = 10h = 1$  ( $h = 0,1$ ) точне значення  $y_n = 3,437$ . Похибка визначення  $y_{n=10}$  за методом Ейлера становить  $-7,3\%$ , за методом Ейлера-Коші буде  $0,26\%$ , а за методом Рунге-Кутта четвертого порядку похибка практично відсутня.

Похибка на кроці інтегрування методу Рунге-Кутта четвертого порядку  $\delta = ch^5$ . Щоб більше оцінити похибку, необхідно визначити верхню межу для  $c$ . Виявляється, що це непроста задача. А без знання похибки на кроці важко правильно вибрати величину кроку. Це є одним з недоліків методів Рунге-Кутта.

**Метод Рунге-Кутта-Мерсона.** В методах з автоматичним вибором кроку потрібен критерій, який вказує на необхідність зміни кроку. Одним з таких методів є метод Рунге-Кутта-Мерсона. Розрахункові формули:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_{1n} + 4k_{4n} + k_{5n}); \\ k_{1n} &= f(t_n, y_n); \\ k_{2n} &= f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}h \cdot k_{1n}); \\ k_{3n} &= f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}h \cdot k_{1n} + \frac{1}{6}h \cdot k_{2n}); \\ k_{4n} &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}h \cdot k_{1n} + \frac{3}{8}h \cdot k_{3n}); \\ k_{5n} &= f(t_n + h, y_n + \frac{1}{2}h \cdot k_{1n} - \frac{3}{2}h \cdot k_{3n} + 2h \cdot k_{4n}). \end{aligned}$$

Похибка на кроці  $\delta = \frac{h}{3} \cdot (k_{1n} - \frac{9}{2}k_{3n} + 4k_{4n} - \frac{1}{2}k_{5n})$ . Критерій зміни кроку  $h$ : якщо похибка в п'ять разів більша від заданого значення  $\varepsilon$ , то обчислення повторюються від попередньої точки зі зменшеним вдвічі кроком  $h/2$ . Якщо  $\frac{5}{32}\varepsilon \leq \delta \leq 5\varepsilon$ , то крок не змінюється. У разі виконання нерівності  $\delta < \frac{5}{32}\varepsilon$  інтегрування продовжується від нової точки з подвійним кроком.

Розглянуті методи відносять до явних однокрокових методів. Їхнім недоліком є неможливість застосування для розв'язування жорстких диференціальних рівнянь через розбіжності розв'язання. Жорсткими називають диференціальні рівняння, корені характеристичного рівняння яких відрізняються в сотні, тисячі разів.

**Неявні методи.** Найпростішим є неявний метод Ейлера, який полягає у застосуванні такої різницевої схеми

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Оснований на використанні формул диференціювання назад, тобто містить невідому в неявному вигляді і потребує на кожному кроці розв'язування нелінійного рівняння.

Сучасна теорія і практика чисельних методів для систем диференціальних рівнянь [18, 19] виділяє серед різноманіття схем неявні методи, які поєднують в собі одночасно вимоги високої точності, стійкості та ефективної програмної реалізації. До них відносять однокрокові неявні методи Рунге-Кутта, які в найзагальнішому випадку записують у вигляді:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_{jn};$$

$$k_{in} = f \left( t_n + c_i h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} k_{jn} \right), i = 1, \dots, s, \quad (3.18)$$

де  $s$  – кількість коректорів,

$h$  – локальний крок сітки чисельного інтегрування задачі,

$c_i$  (абсциси),  $a_{ij}$  та  $b_j$  (ваги) – коефіцієнти схеми,

$k_{jn}$  – невідомі коректори, геометричний зміст яких – напрямок руху вздовж траєкторії розв'язання.

Співвідношення (3.18) є неявними алгебраїчними рівняннями розмірністю  $n \times s$  відносно невідомих коректорів  $k_{jn}$ . Якщо  $a_{ij} = 0$  для  $j > i$ , то такий метод називається діагонально-неявним методом і для переходу на новий часовий шар необхідно послідовно ( $s$  разів) розв'язувати системи нелінійних рівнянь розмірністю  $n$ .

Для класифікації методів Дж. Бутчером було запропоновано зручну форму подання у вигляді таблиці Бутчера:

$c_1$	$a_{11}$	.	.	.	$a_{1s}$
.	.			.	.
$c_s$	$a_{s1}$	.	.	.	$a_{ss}$
	$b_1$	.	.	.	$b_s$

Найбільш відомий явний однокроковий метод Рунге-Кутта четвертого порядку характеризується таблицею Бутчера вигляду:

0	0	0	0	0
0.5	0.5	0	0	0
0.5	0	0.5	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Одними з ефективних неявних методів є методи Радо. В їх основу покладено застосування такої схеми [19]

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, y(t)) dt \approx y(t_n) + \frac{h}{4} (f(t_n, y(t_n)) + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, y(t_n + \frac{2}{3}h))), \quad (3.19)$$

в якій проміжне значення шуканої функції апроксимується таким чином:

$$y(t_n + \frac{2}{3}h) \approx \frac{5}{9}y(t_n) + \frac{4}{9}y(t_{n+1}) + \frac{2}{9}hf(t_n, y_n). \quad (3.20)$$

Таблиця Бутчера для методу Радо п'ятого порядку точності має такий вигляд:

$\frac{4 - \sqrt{6}}{10}$	$\frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4 + \sqrt{6}}{10}$	$\frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88 + 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

**Метод Розенброка.** З метою спрощення процедури Розенброк запропонував записати одну ньютонівську ітерацію для визначення невідомих значень коректорів  $k_{jn}$  в діагонально-неявному вигляді і розставити в отриманому записі вільні коефіцієнти. В такому випадку вигляд отриманої схеми буде залежати від вибору початкових наближень для невідомих  $k_j, j = 1 \dots s$ . У більш загальному випадку для їх визначення доводиться розв'язувати  $s$  систем лінійних рівнянь розмірністю  $n$ .

В найпростішому випадку метод Розенброка полягає у застосуванні такої схеми [19]

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{j=1}^s d_j k_{jn}, \quad (3.21)$$

де  $k_{1n} = [1 - ha_1 J(y_n)]^{-1} \cdot f(y_n)$ ;

$k_{2n} = [1 - ha_2 J(y_n + c_1 k_{1n})]^{-1} \cdot f(y_n + b_1 k_{1n}), \dots$ , тут  $a_1 = \frac{6 + \sqrt{6}}{6}$ ;

$a_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{6}$ ;  $b_1 = c_1 \approx 0,173787$ ;  $d_1 \approx -0,413154$ ;  $d_2 \approx -1,413154$ .

**Метод Булірша-Штера** (іноді називають методом Грегга-Булірша-Штера). У. Грегг в 1963 р. довів [19, С. 234], що послідовність  $T_h(x)$ , яку отримують за допомогою алгоритму

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0), \\ y_{i+1} &= y_{i-1} + 2h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \\ T_h(x) &= \frac{1}{4}(y_{2n-1} + 2y_{2n} + y_{2n+1}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

має асимптотичний розклад за парними степенями  $h$  і задовільні властивості стійкості.

Алгоритм Булірша-Штера оснований на ітераційному визначенні трапецієподібних сум  $T_{i,k}$ , для яких  $\lim_{i \rightarrow \infty} T_{i,k} = y(x)$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$

У разі поліноміальної екстраполяції інтерполяційна формула має такий вигляд:

$$T_{i,k+1} = T_{i,k} + \frac{T_{i,k} - T_{i-1,k}}{\left(\frac{n_i}{n_i - k}\right)^2 - 1}. \quad (3.23)$$

Для реалізації алгоритму використовується розбиття інтервалу інтегрування на кроки різної довжини  $h_i = \frac{h}{n_i}$ , де  $n_i = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, \dots$  – послідовність Булірша.

**Багатокрокові методи.** Для зменшення похибки розрахунку перехідних процесів необхідно використовувати якомога більше членів ряду Тейлора

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)h^2}{2!} + \frac{y'''(t_n)h^3}{3!} + \dots$$

У разі використання першої та другої похідних отримують покращений метод Ейлера. У разі використання першої, другої та третьої похідних отримують метод Адамса.

Для знаходження другої та третьої похідних використовують першу та другу різниці похідних

$$y''_n \approx \frac{1}{h} \cdot \Delta_n + \frac{1}{2h} \cdot \delta_n; \quad y'''_n \approx \frac{1}{h^2} \cdot \delta_n,$$

де  $\Delta_n, \delta_n$  – перша та друга різниці похідних  $\Delta_n = y'_n - y'_{n-1}$ ,  $\delta_n = \Delta_n - \Delta_{n-1} = y'_n - 2y'_{n-1} + y'_{n-2}$ , відповідно.

Формула методу Адамса третього порядку, записана через різниці похідних, має такий вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h}{2} \cdot \Delta_n + \frac{5h}{12} \cdot \delta_n.$$

Підставивши значення різниць похідних, дістанемо

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \cdot (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}). \quad (3.24)$$

На практиці використовують явні методи Адамса-Бешфорта, неявні методи Адамса-Мултона, а також методи, в яких поєднані явний та неявний методи. Формула для методу Адамса-Бешфорта четвертого порядку має такий вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} \cdot (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}).$$

Формули для методів Адамса-Мултона третього та четвертого порядків мають відповідно вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \cdot (5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1});$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} \cdot (9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}).$$

На практиці використовують також поєднання явного та неявного методів Адамса високих порядків – так званих предикторно-коректорних методів Адамса. Формули для предикторно-коректорного методу Адамса шостого порядку має такий алгоритм:

$$P: \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} \cdot \left( \begin{array}{l} 4277y'_n - 7923y'_{n-1} + 9982y'_{n-2} - \\ - 7298y'_{n-3} + 2877y'_{n-4} - 475y'_{n-5} \end{array} \right);$$

$$E: \quad y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1});$$

$$C: \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} \cdot \left( \begin{array}{l} 475y'_{n+1} + 1427y'_n - 798y'_{n-1} + \\ + 482y'_{n-2} - 173y'_{n-3} + 27y'_{n-4} \end{array} \right).$$

В MathCAD використовується декілька вбудованих функцій для розв'язування систем диференціальних рівнянь різними методами:

- rkfixed – метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком інтегрування, який є найпростішим і найшвидшим;

- Rkadapt – метод Рунге-Кутта зі змінним кроком інтегрування, який адаптується до швидкості змінення функції розв'язання. Цей метод дозволяє ефективно знаходити розв'язки диференціальних рівнянь у випадку, якщо вони містять як плавно-, так і швидкозмінні дільниці;

- Bulstoer – метод Булірша-Штера. Цей метод більш ефективний, ніж метод Рунге-Кутта, у випадку, якщо розв'язок є плавною функцією.

Застосування будь-якої з перерахованих функцій має однаковий синтаксис. Наприклад, функція `rkfixed` має такий синтаксис: `rkfixed(y,a,b,n,D)` (функції `Rkadapt` і `Bulstoer` записують аналогічно), де

- $y$  – вектор невідомих функцій, які входять в систему;
- $a$  – початок відрізка інтегрування, на якому відшукується розв’язок;
- $b$  – кінець відрізка інтегрування;
- $n$  – кількість частин, на які розбивається відрізок  $[a, b]$ . Чим більше це число, тим точніший розв’язок;

-  $D(t,y)$  – векторна функція, елементи якої містять праві частини рівнянь системи в нормальній формі запису (аргументами цієї функції є вектор  $y$ , елементи якого відповідають невідомим функціям системи диференціальних рівнянь, і скалярний аргумент  $t$ , що відповідає незалежній змінній).

В `MathCAD` передбачено також три функції для розв’язування жорстких задач такими методами:

- `Radau` – метод `RADAU5` (`RADAU IIa`);
- `Stiffb` – метод Булірша-Штера, адаптований для жорстких систем;
- `Stiffr` – метод Розенброка.

Функція `Radau` має такий самий синтаксис, що і функції `rkfixed` – `Radau(y,a,b,n,D)`. Функції `Stiffb` та `Stiffr` мають додатковий аргумент  $J$ : `Stiffb(y,a,b,n,D,J)`. Додатковий аргумент – матрична функція  $J(t,y)$ , яку записують таким чином: для системи з  $n$  рівнянь матриця  $J$  складається з  $n$  рядків і  $n+1$  стовпців; елементи першого стовпця (стовпця з індексом 0) матриці  $J$  – похідні від елементів вектора  $D$  за незалежною змінною; решта матриці  $J$  (квадратна матриця  $n \times n$ ) – матриця Якобі системи рівнянь (похідні від елементів вектора  $D$  за залежними змінними  $y$ ).

В пакеті прикладних програм `Matlab` використовують як явні, так і неявні методи розв’язування диференціальних рівнянь.

### 3.3 Приклади розв’язування диференціальних рівнянь

**Приклад 3.5** Програма для розв’язування диференціальних рівнянь лінійного послідовного *RLC*-кола:

$$t := 0..10000 \quad f := 50 \quad T_{\omega} := \frac{1}{f} \quad T = 0.02 \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 314.159$$

$$U(t) := 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) \quad R_{\omega} := 2 \quad L_{\omega} := 10^{-2} \quad C_{\omega} := 10^{-3}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,y) := \begin{bmatrix} \frac{1}{L} [U(t) - (R \cdot y_0 + y_1)] \\ \frac{y_0}{C} \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 1, 10000, D) \quad n := 0..10000$$

$$t := Z^{(0)} \quad i_L := Z^{(1)} \quad u_C := Z^{(2)}$$

Графіки перехідного процесу для змінних стану лінійного послідовного  $RLC$ -кола зображено на рис. 3.7.

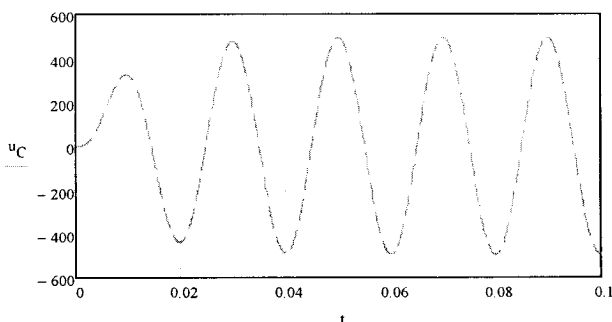
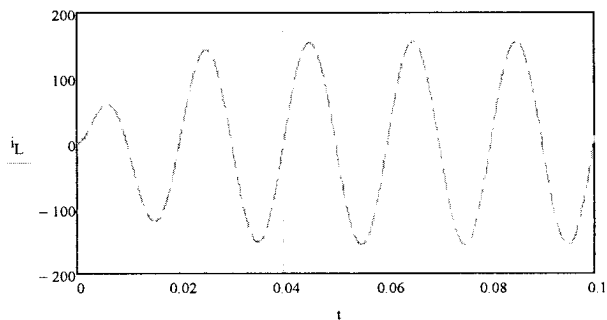


Рисунок 3.7 – Графіки залежностей для змінних стану лінійного послідовного  $RLC$ -кола

Програма для розв'язування диференціальних рівнянь нелінійного послідовного  $RLC$ -кола:

$t := 0..10000$      $f := 50$      $\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$      $U(t) := 6300 \cdot \sin(\omega t)$      $R := 10$      $C := 10^{-5}$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \left( \operatorname{asinh} \left( \frac{y_0}{300} \right) \right)^2} [U(t) - (R \cdot y_0 + y_1)] \\ \frac{y_0}{C} \end{bmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 1, 10000, D)$

$n := 0..10000$

$t := Z^{(0)}$

$i_L := Z^{(1)}$

$u_C := Z^{(2)}$

Графіки перехідного процесу для змінних стану нелінійного послідовного  $RLC$ -кола зображено на рис. 3.8.

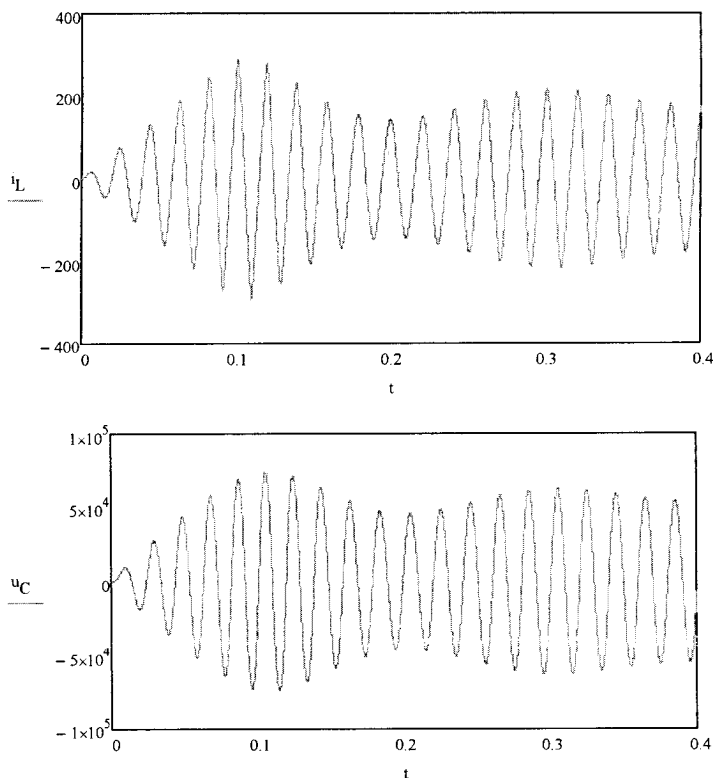
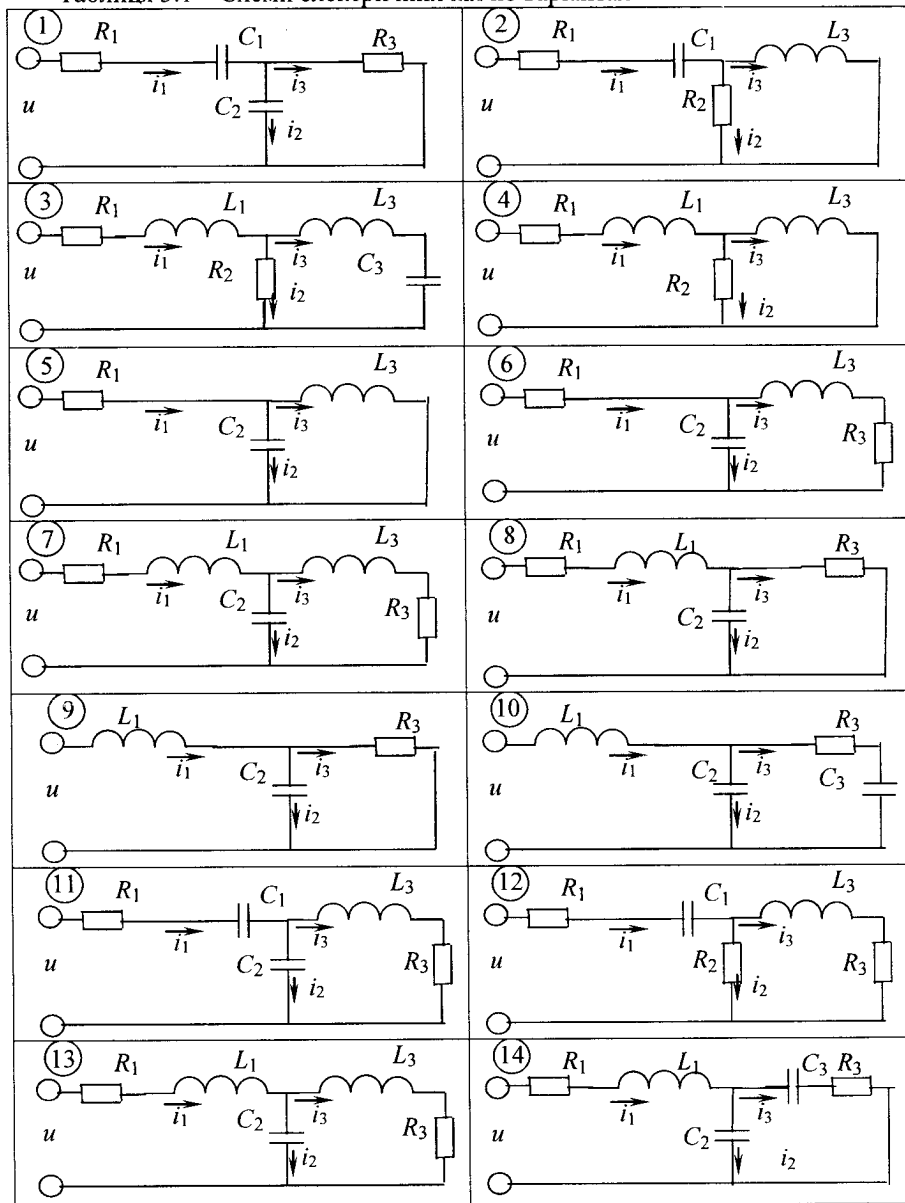


Рисунок 3.8 – Графіки залежностей для змінних стану нелінійного послідовного  $RLC$ -кола

**Контрольне завдання.** Записати рівняння для розрахунку перехідного процесу увімкнення  $RLC$ -кола на напругу  $u(t)$  відносно змінних стану (табл. 3.1). Розв'язати систему диференціальних рівнянь  $RLC$ -кола в середовищі MathCAD з використанням вбудованої функції `rkfixed`. Вихідні дані:  $U=220$  В;  $f=50$  Гц;  $R_1=1$  Ом;  $R_2=2$  Ом;  $R_3=3$  Ом;  $C_1=600$  мкФ;  $C_2=300$  мкФ;  $C_3=150$  мкФ;  $L_1=10$  мГн;  $L_3=30$  мГн.



Таблиця 3.1 – Схеми електричних кіл по варіантах



Програма для розв'язування диференціальних рівнянь (3.11) і (3.12) під час пуску АД в середовищі MathCAD з використанням вбудованої функції rkfixed має такий вигляд:

$$t := 0..1000 \quad f := 50 \quad \frac{T}{\omega} := \frac{1}{f} \quad T = 0.02 \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 314.159$$

$$U_{\alpha s}(t) := 310 \cos(\omega t) \quad R_s := 1.66 \quad L_{\sigma s} := 0.00624 \quad L_0 := 0.185 \quad J := 0.108 \quad M_c := 20$$

$$U_{\beta s}(t) := 310 \cdot \sin(\omega t) \quad R_r := 1.28 \quad L_{\sigma r} := 0.0107 \quad L_\mu := \frac{3}{2} \cdot L_0 \quad z_p := 2$$

$$L_s := L_{\sigma s} + L_\mu \quad L_r := L_{\sigma r} + L_\mu \quad \frac{A}{\omega} := \frac{1}{L_s \cdot L_r - L_\mu^2}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \psi(t)_{\alpha s} = y_0 \\ \psi(t)_{\beta s} = y_1 \\ \psi(t)_{\alpha r} = y_2 \\ \psi(t)_{\beta r} = y_3 \\ \omega_r(t) = y_4 \end{matrix}$$

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} U_{\alpha s}(t) - A \cdot R_s \cdot (y_0 \cdot L_r - y_2 \cdot L_\mu) \\ U_{\beta s}(t) - A \cdot R_s \cdot (y_1 \cdot L_r - y_3 \cdot L_\mu) \\ -A \cdot R_r (y_2 \cdot L_s - y_0 \cdot L_\mu) - y_3 \cdot y_4 \cdot z_p \\ -A \cdot R_r (y_3 \cdot L_s - y_1 \cdot L_\mu) + y_2 \cdot y_4 \cdot z_p \\ \left[ \frac{-3}{2} \cdot z_p \cdot L_\mu \cdot A \cdot (y_0 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2) \right] - M_c \end{bmatrix} \quad J$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 1, 10000, D)$$

$$n := 0..10000$$

$$t := Z^{(0)} \quad \psi_{\alpha s} := Z^{(1)} \quad \psi_{\beta s} := Z^{(2)} \quad \psi_{\alpha r} := Z^{(3)} \quad \psi_{\beta r} := Z^{(4)} \quad \omega_r := Z^{(5)}$$

$$M_n := \frac{-3}{2} \cdot z_p \cdot L_\mu \cdot A \cdot (\psi_{\alpha s_n} \cdot \psi_{\beta r_n} - \psi_{\beta s_n} \cdot \psi_{\alpha r_n})$$

$$i_{\alpha s} := A \cdot (L_r \cdot \psi_{\alpha s} - L_\mu \cdot \psi_{\alpha r}) \quad i_{\beta s} := A \cdot (L_r \cdot \psi_{\beta s} - L_\mu \cdot \psi_{\beta r})$$

$$i_s := \sqrt{i_{\alpha s}^2 + i_{\beta s}^2}$$

$$i_{\alpha r} := A \cdot (L_s \cdot \psi_{\alpha r} - L_\mu \cdot \psi_{\alpha s})$$

$$i_{\beta r} := A \cdot (L_s \cdot \psi_{\beta r} - L_\mu \cdot \psi_{\beta s})$$

$$i_r := \sqrt{i_{\alpha r}^2 + i_{\beta r}^2}$$

Залежності діючого значення струму в лінії живлення під час пуску АД зображено на рис. 3.9. Пуск триває приблизно 0,8 с, пусковий струм перевищує номінальне значення приблизно в 5 разів.

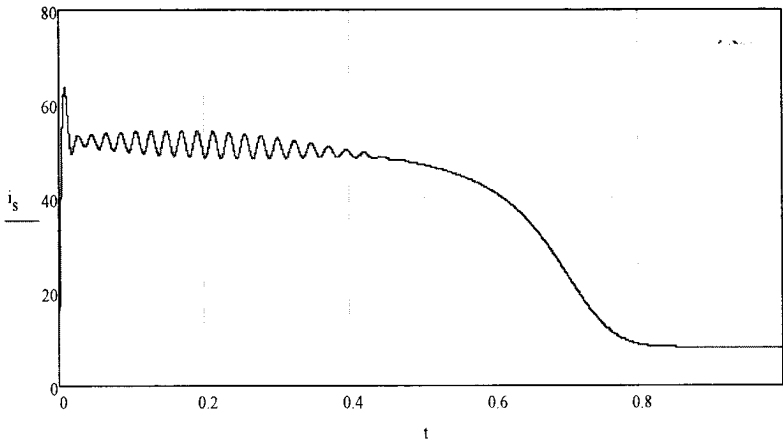


Рисунок 3.9 – Залежність струму під час пуску АД

### 3.4 Застосування операторного методу

Перетворення Лапласа дозволяє перейти від диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.25)$$

Перетворивши (3.25) за Лапласом, дістанемо

$$pX(p) - x_0 = aX(p) + bU(p). \quad (3.26)$$

Звідси

$$X(p) = \frac{x_0}{p-a} + \frac{b}{p-a}U(p). \quad (3.27)$$

Після зворотного перетворення Лапласа (3.27) будемо мати

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau. \quad (3.28)$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \quad (3.29)$$

Розв'язок векторно-матричного рівняння (3.29) отримують аналогічним чином:

$$p\mathbf{X}(p) - \mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p), \quad (3.30)$$

звідки

$$\mathbf{X}(p) = [p\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{X}_0 + [p\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(p), \quad (3.31)$$

де  $\mathbf{E}$  – одинична діагональна матриця.

Після зворотного перетворення Лапласа можна записати

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau, \quad (3.32)$$

де  $e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\{[p\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1}\}$  – матрична функція або матрична експонента (перехідна матриця).

Для обчислення матричної експоненти знаходять власні значення матриці  $\mathbf{A}$  або корені характеристичного рівняння, яке отримують з виразу

$$\det[p\mathbf{E} - \mathbf{A}] = 0 \quad (3.33)$$

і записують оригінали операторних зображень.

**Приклад 3.6** Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 100 [-2x_1(t) - x_2(t) + u(t)];$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 1000x_1(t);$$

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0.$$

**Розв'язування.** Матриця

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -200 & -100 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix}; \quad [p\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} p+200 & 100 \\ -1000 & p \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$p^2 + 200p + 10^5 = 0.$$

Його корені  $p_{1,2} = -\delta_0 \pm j\omega_0 = -200 \pm j300$  рад/с.

Обернена матриця

$$[p\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{p^2 + 200p + 10^5} \begin{bmatrix} p & -1000 \\ 100 & p + 200 \end{bmatrix}^T = \\ = \frac{1}{p^2 + 200p + 10^5} \begin{bmatrix} p & 100 \\ -1000 & p + 200 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо зображення і оригінали кожного члена матриці за теоремою розкладання і записуємо матричну експоненту, яка для комплексно-спряжених коренів матиме такий вигляд [20, С. 91]:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2p_k + 200} \begin{bmatrix} p_k & 100 \\ -1000 & p_k + 200 \end{bmatrix} e^{p_k t} = \\ = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{2p_1 + 200} e^{p_1 t} + \frac{p_2}{2p_2 + 200} e^{p_2 t} & \frac{100}{2p_1 + 200} e^{p_1 t} + \frac{100}{2p_2 + 200} e^{p_2 t} \\ \frac{-1000}{2p_1 + 200} e^{p_1 t} + \frac{-1000}{2p_2 + 200} e^{p_2 t} & \frac{p_1 + 200}{2p_1 + 200} e^{p_1 t} + \frac{p_2 + 200}{2p_2 + 200} e^{p_2 t} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\delta_0 t} \sin(\omega_0 t - \varphi_0) & -\frac{1}{\omega_0 L} e^{-\delta_0 t} \sin \omega_0 t \\ \frac{1}{\omega_0 C} e^{-\delta_0 t} \sin \omega_0 t & -\frac{\omega}{\omega_0} e^{-\delta_0 t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{bmatrix},$$

де  $\varphi_0 = \arctg(\omega_0 / \delta_0)$ .

Розв'язок (3.32) в загальному випадку є досить складним [20, С. 90–93]. Відносно простими є аналіз вільних коливань у разі вимкнення кола та увімкнення на постійну напругу.

### Приклад 3.7 Рівняння руху синхронного генератора

$$T_J \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \gamma \frac{d\delta}{dt} + P_m \sin \delta = P_0(t), \quad (3.34)$$

де  $\delta$  – кут вибігу ротора відносно поля статора;

$T_J$  – стала часу інерції ротора;

$\gamma$  – демпферний коефіцієнт, що характеризує втрати потужності.

Перетворимо (3.34) за Лапласом. Перехід здійснюється шляхом заміни:

$$x(t) \Rightarrow X(p); \quad \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow pX(p) - x(0^-); \quad \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow p^2 X(p) - px(0^-) - \frac{dx(0^-)}{dt}.$$

Для диференціального рівняння генератора (3.34) лінеаризоване операторне рівняння буде мати такий вигляд:

$$T_J \left[ p^2 \delta(p) - p\delta(0^-) - \frac{d\delta(0^-)}{dt} \right] + \gamma \left[ p\delta(p) - \delta(0^-) \right] + k \cdot \delta(p) = P_0(p), \quad (3.35)$$

$$\text{де } k = \frac{P_m \cdot \sin \delta(0^-)}{\delta(0^-)}.$$

Якщо  $P_0(t) = 0$ ,  $\delta(0^-) = \delta_0$ ,  $\frac{d\delta(0^-)}{dt} = 0$ , то операторне рівняння набуде вигляду

$$T_J p^2 \delta(p) - T_J p \delta_0 + \gamma p \delta(p) - \gamma \delta_0 + k \cdot \delta(p) = 0,$$

звідки операторне зображення кута вибігу генератора

$$\delta(p) = \frac{T_J p \delta_0 + \gamma \delta_0}{T_J p^2 + \gamma p + k}.$$

Якщо поліном знаменника прирівняти до нуля, то дістанемо характеристичне рівняння, назване так тому, що воно визначає характер вільного руху системи. Корені характеристичного рівняння називають полюсами системи. Корені полінома чисельника називають нулями.

Розглянемо випадок  $\gamma/T_J = 3$ ;  $k/T_J = 2$ , тоді дістанемо:

$$\delta(p) = \frac{(p+3)\delta_0}{(p+1)(p+2)}.$$

Розкладемо останній вираз на елементарні дроби

$$\delta(p) = \frac{k_1}{(p+1)} + \frac{k_2}{(p+2)},$$

$$\text{де } k_1 = \frac{(p+3)\delta_0}{(p+1)(p+2)}(p+1) = 2 \quad \text{за } p = -1;$$

$$k_2 = \frac{(p+3)\delta_0}{(p+1)(p+2)}(p+2) = -1 \quad \text{за } p = -2.$$

Дістанемо

$$\delta(p) = \frac{2 \cdot \delta_0}{(p+1)} + \frac{-1 \cdot \delta_0}{(p+2)}.$$

Застосувавши зворотнє перетворення Лапласа, отримаємо

$$\delta(t) = \delta_0(2e^{-t} - 1e^{-2t}).$$

### 3.5 Моделювання систем автоматичного керування

Системи автоматичного керування (САК) є невід'ємною частиною багатьох електроустановок. Кожен з агрегатів електричної станції оснащений регулятором потужності та регулятором збудження. В синхронних двигунах використовується автоматичний регулятор збудження. Статичні тиристорні та синхронні компенсатори оснащено автоматичними регуляторами реактивної потужності.

Однією з основних ознак класифікації САК є принцип керування [21, 22]. Основним принципом автоматичного керування є «керування за відхиленням». Структурна схема найпростішої САК, побудованої за таким принципом, містить (рис. 3.10): вимірювальний елемент ВЕ, регулятор Р, виконавчий пристрій ВП, об'єкт керування ОК.

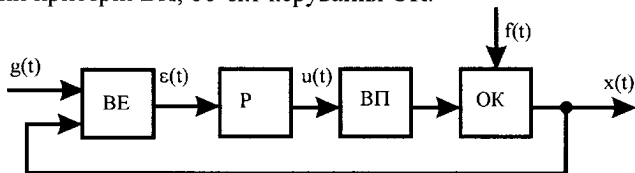


Рисунок 3.10 – Структурна схема САК з керуванням за відхиленням

Вимірювальний елемент забезпечує перетворення вихідної величини  $x(t)$  для порівняння її з задавальною дією  $g(t)$  і формування помилки  $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ . Регулятор формує сигнал керування  $u(t)$ , який діє через виконавчий пристрій ВП на об'єкт керування ОК, змінюючи значення вихідної величини  $x(t)$  в потрібному напрямку. Задавальна дія  $g(t)$  може бути сталою  $g(t) = \text{const}$  або змінюватись за певною залежністю, яка визначається САК вищого ієрархічного рівня. На ОК діє збурення  $f(t)$ , яке заважає підтримувати  $x(t) = g(t)$ . Регулятори Р можуть бути виконані з різними залежностями  $u(\varepsilon)$ , зокрема широко застосовуються пропорційні (П), пропорційно-інтегровальні (ПІ), пропорційно-інтегровально-диференціальні (ПІД) регулятори та інші.

**Передаточною функцією** системи називають відношення зображень Лапласа вихідної і вхідної величин за нульових початкових умов [23]

$$W(p) = \frac{X(p)}{U(p)}.$$

Визначення передаточної функції замкнутої системи здійснюється за співвідношеннями для окремих елементів САК (див. рис. 3.9)

$$X(p) = W(p) U(p); \quad U(p) = K(p) E(p); \quad E(p) = G(p) - X(p), \quad (3.36)$$

де  $W(p)$  – передаточна функція об'єкта керування;

$K(p)$  – передаточна функція регулятора;

$G(p)$ ,  $E(p)$ ,  $U(p)$ ,  $X(p)$  – операторні зображення задавальної величини  $g(t)$ , помилки  $\varepsilon(t)$ , сигналу керування  $u(t)$  та вихідної величини  $x(t)$ , відповідно.

Після підстановки виразів (3.36) дістанемо формулу для головної передаточної функції замкнутої системи

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{W(p)K(p)}{1 + W(p)K(p)}. \quad (3.37)$$

**Приклад 3.8** Записати вираз для головної передаточної функції замкнутої системи (рис. 3.11).

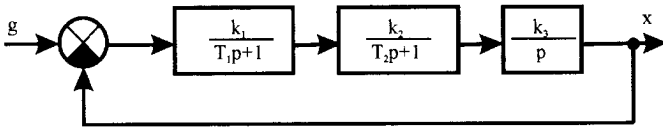


Рисунок 3.11 – Структура схема системи третього порядку

**Розв'язування.** Головна передаточна функція замкнутої системи

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{K_1(p)K_2(p)K_3(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)}$$

**Приклад 3.9** Визначити головну передаточну функцію замкнутої системи керування синхронним генератором. Рівняння руху синхронного генератора

$$T_J \frac{d^2\delta}{dt^2} + \gamma \frac{d\delta}{dt} + P_m \sin \delta = P_0(t),$$

де  $\delta$  – кут вибігу ротора відносно поля статора;

$T_J$  – стала часу інерції ротора;

$\gamma$  – демпферний коефіцієнт, що характеризує втрати потужності.

За нульових початкових умов операторне рівняння набуде вигляду

$$T_J p^2 \delta(p) + \gamma p \delta(p) + k \cdot \delta(p) = P_0(p).$$

Знайдемо передаточну функцію СГ:

$$W(p) = \frac{\delta(p)}{P_0(p)} = \frac{1}{T_J p^2 + \gamma p + k}$$

У разі керування за відхиленням з використанням ПІ-регулятора  $K(p) = k + 1/(p\tau)$  головна передаточна функція замкнутої системи керування СГ

$$\Phi(p) = \frac{W(p)K(p)}{1 + W(p)K(p)} = \frac{p\tau k + 1}{p^3 T_J \tau + p^2 \gamma \tau + 2p\tau k + 1}$$



**Приклад 3.10** Визначити головну передаточну функцію замкнутої системи керування двигуном постійного струму (рис. 3.12).

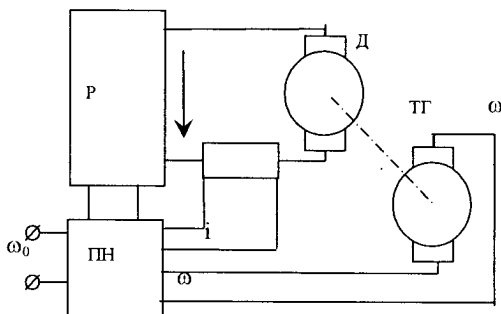


Рисунок 3.12 – Функціональна схема САК двигуном постійного струму

Двигун постійного струму (ДПС) описується системою двох диференціальних рівнянь

$$L_a \frac{dI}{dt} + R_a I + E_d = U; \quad J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M, \quad (3.38)$$

де  $R_a$  – активний опір обмотки якоря;

$L_a$  – індуктивність обмотки якоря;

$E_d = C_e \omega$ ;  $M_d = C_M I$ . Припустимо  $M = k_M \omega$ .

Після підстановки операторних зображень за нульових початкових умов

$$(pL_a + R_a)I(p) + C_e \Omega(p) = U(p);$$

$$(pJ + k_M)\Omega(p) = C_M I(p),$$

дістанемо формулу для передаточної функції ДПС

$$W(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{C_M}{(pL_a + R_a)(pJ + k_M) + C_e C_M}.$$

Напряга на виході регулятора (P)

$$u = -k_1 i - k_2 (\omega - \omega_0),$$

де  $k_1, k_2$  – коефіцієнти передавання струму якоря і швидкості обертання до вхідної напруги кола якоря.

Після підстановки операторних зображень за нульових початкових умов

$$pL_a I(p) + R_a I(p) + C_e \Omega(p) + k_1 I(p) + k_2 \Omega(p) = k_2 \Omega_0(p);$$

$$pJ \Omega(p) = C_M I(p) - k_M \Omega(p),$$

дістанемо формулу для головної передаточної функції замкнутої системи

$$\Phi(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_0(p)} = \frac{C_M k_2}{p^2 L_a J + p J (R_a + k_1) + p L k_M + k_M (R_a + k_1) + C_e C_M k_2}.$$

У разі застосування ПІ-регулятора  $K(p) = k + 1/(p\tau)$  головна передаточна функція САК ДПС набуде вигляду

$$\Phi(p) = \frac{(p\tau k + 1)C_M k_2}{p^3 \tau L_a J + p^2 \tau (J(R_a + k_1) + L k_M) + p\tau (k_M (R_a + k_1) + C_e C_M k_2 + k) + 1}.$$

### 3.6 Аналіз статичної стійкості систем

**Стійкість системи** – це її властивість зберігати усталений стан за будь-яких збурень. Під статичною стійкістю розуміють здатність системи протистояти малим збуренням. Під динамічною стійкістю систем розуміють здатність системи відновлювати свій стан після різких раптових порушень режиму її роботи.

**Дослідження стійкості лінійних систем.** Необхідною (але не достатнього) умовою статичної стійкості лінійних систем є додатні значення всіх коефіцієнтів ( $a_i$ ) характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (3.39)$$

Для забезпечення статичної стійкості лінійних систем необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння системи знаходились в лівій півплощині ( $\sigma, j\omega$ ); якщо ж серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є хоча б один корінь, який знаходиться в правій півплощині, то система нестійка [21]. Якщо корінь характеристичного рівняння системи знаходиться на уявній осі комплексної площини ( $\sigma, j\omega$ ), то система знаходиться на границі стійкості.

Для перевірки статичної стійкості потрібно визначити корені характеристичного рівняння і переконатися, що їх дійсні частини від'ємні. Оскільки обчислення коренів характеристичного рівняння вище четвертого порядку є досить складним, то розроблено алгебраїчні оцінювання стійкості, в яких знаходження коренів не передбачається.

**Критерій Рауса-Гурвіца.** Критерій, отриманий Раусом в 1877 р., формулюється так: для забезпечення статичної стійкості необхідно і достатньо, щоб всі елементи першого стовпця таблиці Рауса були додатними (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Таблиця Рауса

$a_{11} = a_0$	$a_{12} = a_2$	$a_{13} = a_4$	$a_{14} = a_6$
$a_{21} = a_1$	$a_{22} = a_3$	$a_{23} = a_5$	$a_{24} = a_7$
$a_{31} = a_{12} - a_{22} \frac{a_{11}}{a_{21}}$	$a_{32} = a_{13} - a_{23} \frac{a_{11}}{a_{21}}$	$a_{33} = a_{14} - a_{24} \frac{a_{11}}{a_{21}}$	...
$a_{41} = a_{22} - a_{32} \frac{a_{21}}{a_{31}}$	$a_{44} = a_{23} - a_{33} \frac{a_{21}}{a_{31}}$	$a_{43} = a_{24} - \dots$	...
$a_{51} = a_{32} - a_{42} \frac{a_{31}}{a_{41}}$	$a_{52} = a_{33} - a_{43} \frac{a_{31}}{a_{41}}$	...	...

**Приклад 3.11** Перевірити стійкість системи за критерієм Рауса, якщо:

$$p^4 + 7p^3 + 12p^2 + 23p + 10 = 0.$$

**Розв'язання.** Складемо таблицю Рауса:

1	12	10
7	23	0
$12 - 23 \frac{1}{7} = \frac{61}{7}$	$10 - 0 \frac{1}{7} = 10$	
$23 - 10 \frac{7}{61} = \frac{913}{61}$	0	
$10 - 0 \frac{913}{61} = 10$		

Оскільки всі значення першого стовпця додатні, то система стійка.

Критерій, отриманий Гурвіцем, формулюється так: для стійкості лінійної системи  $n$ -го порядку необхідно і достатньо, щоб за додатних коефіцієнтів  $a_i$  були додатними  $n$  визначників Гурвіца:

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}; \dots$$

Для додатності всіх визначників Гурвіца достатньо перевірити знаки всіх непарних визначників (критерій Льенара – Шіпара).

**Приклад 3.12** Дослідити за критерієм Гурвіца систему, характеристичне рівняння якої:

$$p^4 + 7p^3 + 12p^2 + 23p + 10 = 0.$$

**Розв'язування.** Визначники Гурвіца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 61 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 23 & 0 \\ 1 & 12 & 10 \\ 0 & 7 & 23 \end{vmatrix} = 913 > 0$$

додатні. Отже, система стійка.

**Приклад 3.13** Дослідити за критерієм Гурвіца стійкість динамічної системи із зворотним зв'язком (див. рис. 3.11).

**Розв'язування.** Характеристичне рівняння

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k = 0.$$

Визначники Гурвіца

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 - k T_1 T_2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k & 0 \\ T_1 & T_2 & 1 \\ 0 & T_1 + T_2 & k \end{vmatrix} = (-1)^6 k \Delta_2$$

Отже, для забезпечення стійкості необхідно, щоб  $k < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$ .

**Критерії стійкості А. В. Михайлова.** Розглянемо характеристичний вектор

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Прирівнявши до нуля і знайшовши корені характеристичного рівняння  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , розкладемо характеристичний вектор на множники

$$D(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0.$$

У разі, якщо  $p = j\omega$ , то

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

Кожен із множників  $d_i(j\omega) = d_i(\omega) e^{j\varphi} = (j\omega - p_i)$  є елементарним вектором, початок якого знаходиться в місці розміщення кореня, а кінець – на осі ординат (рис. 3.13). У разі змінення частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  кут кожного елементарного вектора, що знаходиться в лівій півплощині, збільшується на  $\pi/2$ . Водночас модуль кожного елементарного вектора, що знаходиться в лівій або правій півплощині, монотонно збільшується.

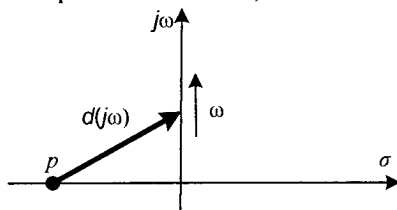


Рисунок 3.13 – Розміщення елементарного вектора

Оскільки характеристичний вектор  $D(j\omega)$  є добутком елементарних векторів

$$D(j\omega) = D e^{j\varphi} = a_0(d_1 d_2 \dots d_n) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)},$$

то за зміння частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  його модуль монотонно збільшується, а кут визначається сумою кутів елементарних векторів.

Якщо всі  $n$  коренів знаходяться в лівій півплощині (система статично стійка), то характеристичний вектор  $D(j\omega)$  у разі зміння частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  повернеться на кут  $n\pi/2$ .

Якщо хоча б один корінь знаходиться в правій півплощині (система статично нестійка), то кут цього елементарного вектора, навпаки, зменшиться на  $\pi/2$ , а отже, характеристичний вектор  $D(j\omega)$  за зміни частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  повернеться на кут, менший від  $n\pi/2$ .

Отже, для того, щоб система була статично стійкою, необхідно і достатньо, щоб характеристичний вектор

$$D(j\omega) = u(j\omega) + jv(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$$

у разі зміни  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  монотонно повертався проти годинникової стрілки на кут  $n\pi/2$ . Водночас модуль характеристичного вектора для всіх значень  $\omega$  має зростати. На рис. 3.14 показано годографи  $D(j\omega)$  для стійких систем третього і п'ятого порядків.

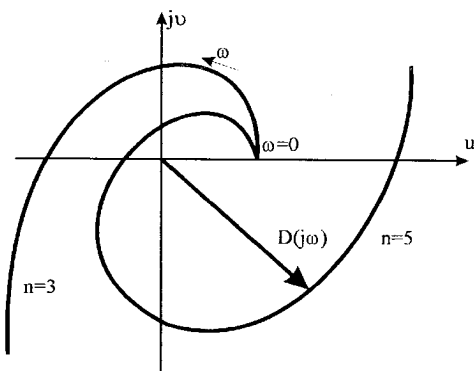


Рисунок 3.14 – Годографи Михайлова для стійких систем

Оскільки модуль характеристичного вектора у разі зміння частоти збільшується в десятки, сотні разів, то рекомендується визначити частоти, на яких характеристичний вектор перетинає дійсну та уявну осі, розв'язавши для цього рівняння  $\text{Re}(D(j\omega))=0$  та  $\text{Im}(D(j\omega))=0$ . За отриманими значеннями частот можна визначити послідовність проходження квадрантів характеристичним вектором при зміні частоти.

**Приклад 3.14** За критерієм А. В. Михайлова перевірити на стійкість систему, характеристичне рівняння якої:

$$0,12p^3 + 0,1p^2 + 1,72p + 0,5 = 0.$$

**Розв'язування.** Поклавши  $p=j\omega$  і виділивши дійсну та уявну складові характеристичного вектора  $D(j\omega)=u(\omega)+jv(\omega)$ :

$$u(\omega)=0,5-0,1\omega^2; v(\omega)=1,72\omega-0,12\omega^3 \text{ (табл. 3.3)}$$

будуємо частотний годограф  $D(j\omega)$  (рис. 3.15).

Таблиця 3.3 – Розрахунок частотного годографа Михайлова

$\omega$	$u(\omega)$	$v(\omega)$
0	0,5	0
1	0,4	1,6
2	0,1	2,48
3	-0,4	1,92
4	-1,1	-0,8
$\infty$	$-\infty$	$-\infty$

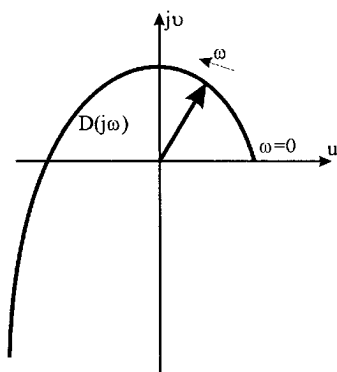
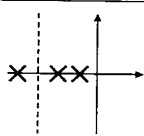
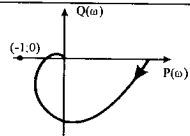
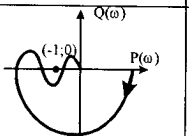
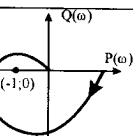
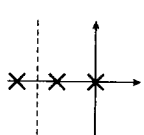
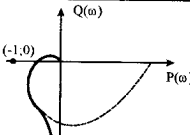
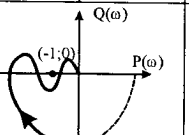
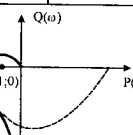
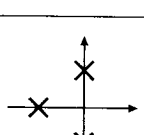
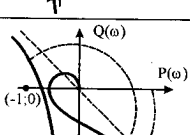
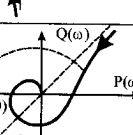
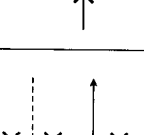
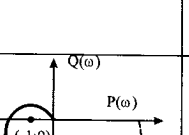


Рисунок 3.15 – Годограф Михайлова третього порядку

Видно, що годограф Михайлова послідовно проходить першу, другу і третю чверті, охопивши початок координат. Система стійка.

**Критерій Найквіста** формується таким чином: для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова характеристика (АФХ) розімкнутої системи не охоплювала точку  $(-1; j0)$ . Залежно від розміщення коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи спостерігаються різні АФХ для абсолютно стійких, умовно стійких та нестійких систем (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 – Годографи  $W(j\omega)$  розімкнених систем третього порядку

Розміщення коренів розімкнутої системи	Абсолютно стійка система	Умовно стійка система	Нестійка система
			
			
			
			

**Приклад 3.15** На рис. 3.16 зображено АФХ розімкнутої частини нестійкої системи з передаточною функцією

$$W(p) = \frac{0,1p^2 + p + 1}{0,001p^4 + 0,0025p^3 + 0,1p^2 + 0,1p + 1}$$

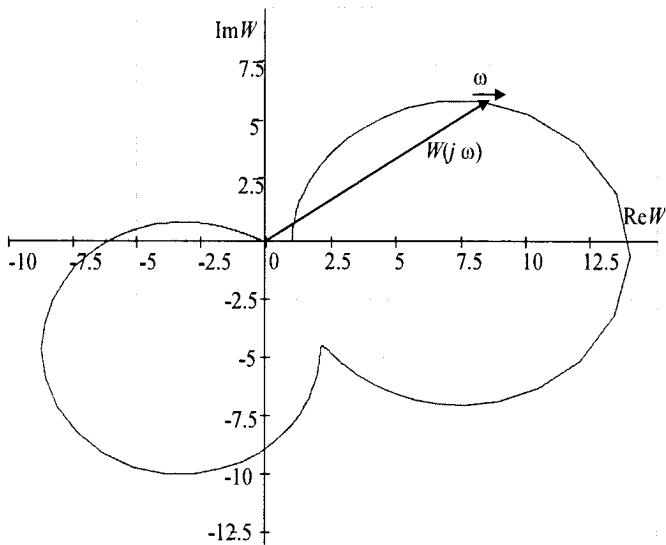


Рисунок 3.16 – АФХ розімкнутої частини нестійкої системи

Після замикання системи дістанемо вираз для головної передаточної функції замкнутої системи

$$\Phi(p) = \frac{K(p) \cdot (0,1p^2 + p + 1)}{(0,001p^4 + 0,0025p^3 + 0,1p^2 + 0,1p + 1) + K(p) \cdot (0,1p^2 + p + 1)}$$

Годограф Михайлова для  $K(p) = 1$  зображено на рис. 3.17.

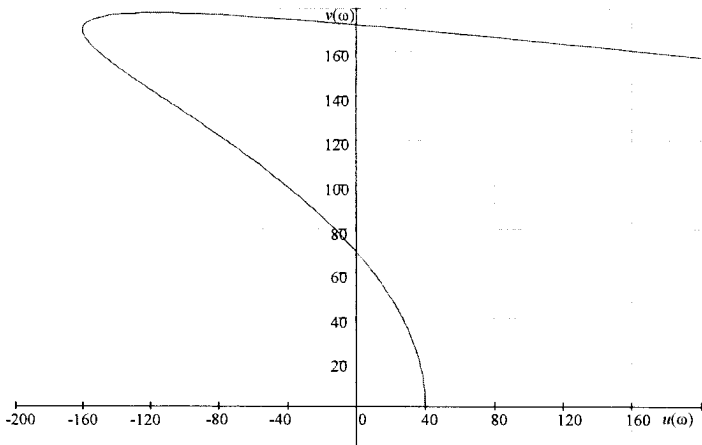


Рисунок 3.17 – Годограф Михайлова для нестійкої системи



У разі зменшення  $K(p)$ , наприклад, у разі  $K(p)=0,1$ , система буде стійкою.

Перевагами критерію Найквіста є, по-перше, можливість визначення нестійкості замкнутої системи за частотними характеристиками розімкнутої системи незалежно від типу і параметрів налаштування регулятора; по-друге, можливість використання для перевірки стійкості логарифмічних частотних характеристик, які порівняно просто будуються.

**Логарифмічні амплітудно-частотні характеристики (ЛАЧХ).** ЛАЧХ підсилювальної ланки:  $W(p)=k$ ;  $W(j\omega)=k$ ;  $A(\omega)=k$ ;  $L_m=20\lg k$ ;  $k=100$  (рис. 3.18).

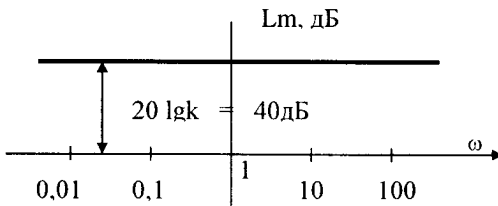


Рисунок 3.18 – ЛАЧХ підсилювальної ланки

Для інтегрувальної ланки (рис. 3.19):  $W(p)=\frac{k}{p}$ ;  $W(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$ ;  
 $A(\omega)=\frac{k}{\omega}$ ;  $L_m=20 \cdot \lg \frac{k}{\omega}=20 \cdot \lg k - 20 \cdot \lg \omega$ . Для  $\omega = 1$   $L_m=20 \lg k=20 \lg 100=40\text{дБ}$ ,  
 а для  $L_m = 0$ ;  $20 \lg k = 20 \lg \omega$ ;  $\omega = k = 100$ .

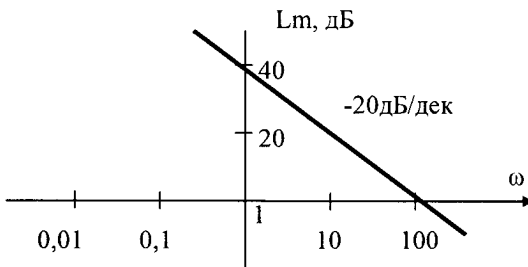


Рисунок 3.19 – ЛАЧХ інтегрувальної ланки

Для аперіодичної ланки (рис. 3.20):  $W(p)=\frac{k}{pT+1}$ ;  $W(j\omega)=\frac{k}{j\omega T+1}$ ;  
 $A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(\omega T)^2+1}}$ ;  $L_m=20\lg k-20\lg\sqrt{(\omega T)^2+1}$ .

Якщо  $\omega T < 1$ , то  $L_m \approx 20 \lg k - 20 \lg 1 \approx 20 \lg k$ ;

якщо  $\omega T > 1$ , то  $L_m \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T$ .

Для  $L_m = 0$ , отримаємо  $20 \lg k = 20 \lg \omega_3 T$ , де  $\omega_3 = k/T$  - частота зрізу.

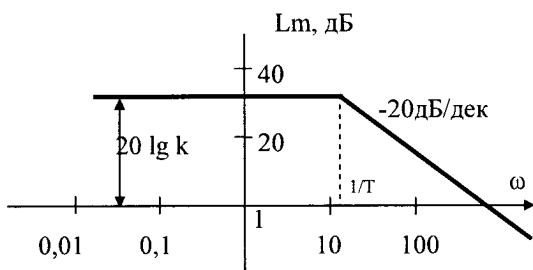


Рисунок 3.20 – ЛАЧХ аперіодичної ланки

Для двигуна постійного струму

$$W(p) = \frac{k}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$$

Для двигуна постійного струму потужністю 30 кВт сталі часу:

$$T_1 = \frac{1}{|p_1|} = \frac{1}{1,26}; \quad T_2 = \frac{1}{|p_2|} = \frac{1}{32}$$

Тоді з передаточної функції отримуємо

$$L_m = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \quad (\text{рис. 3.21}).$$

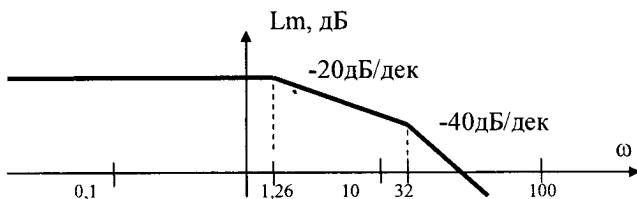


Рисунок 3.21 – ЛАЧХ двигуна постійного струму

За логарифмічними характеристиками можна визначити запас стійкості за амплітудою і фазою (рис. 3.22).

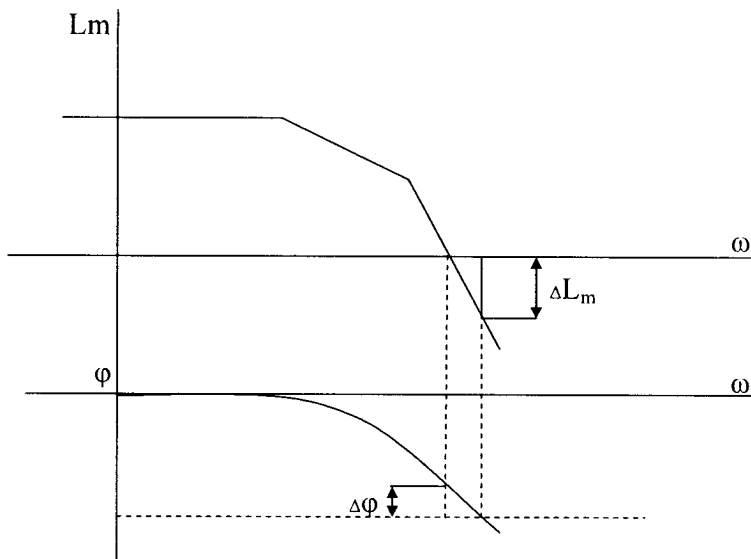


Рисунок 3.22 – Визначення запасу стійкості за ЛАЧХ

З рис. 3.22 випливає, що збільшення  $k$  призводить до переміщення графіка вгору і, відповідно, зменшує запас стійкості як за амплітудою, так і за фазою.

**Дослідження стійкості нелінійних систем. Перший метод Ляпунова.** Основою першого методу Ляпунова є використання лінеаризованих диференціальних рівнянь. Це можливо для випадку, якщо розв'язки є аналітичними функціями, які можна подати за допомогою степеневих рядів. Згідно з теоремами, доведеними О. М. Ляпуновим, для забезпечення статичної стійкості систем необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи знаходились в лівій півплощині ( $\sigma, j\omega$ ); якщо ж серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є хоча б один корінь, який знаходиться в правій півплощині, то система нестійка. Якщо корінь характеристичного рівняння лінеаризованої системи знаходиться на уявній осі комплексної площини ( $\sigma, j\omega$ ), то система потребує додаткових досліджень.

**Другий прямий метод Ляпунова.** Відповідно до теореми Лагранжа про стійкість системи: з наближенням до рівноважного стану потенційна енергія системи має зменшуватися. Основою другого прямого методу Ляпунова є використання спеціальних функцій, які називають функціями Ляпунова  $V(x)$ . Такі функції мають бути знакопостійними, наприклад, додатними  $V \geq 0$ , і, водночас, їх похідна для стійких систем має бути від'ємною  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ .

**Приклад 3.16** Дослідити на стійкість систему

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - 2x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2^3$$

в точці  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

Функція  $V = x_1^2 + x_2^2$  задовольняє умови теореми Ляпунова  $V \geq 0$ ,  
 $\frac{dV}{dt} = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = 2x_1(-x_1^3 - 2x_2) + 2x_2(2x_1 - x_2^3) = -2x_1^4 - 2x_2^4 \leq 0$ . Отже, рух системи асимптотично стійкий.

**Контрольні запитання**

1. Яка послідовність складання диференціальних рівнянь електричних кіл?
2. Запишіть систему диференціальних рівнянь для ідеального однофазного трансформатора.
3. Суть явних методів Ейлера та Рунге-Кутта.
4. Суть неявних методів Ейлера та Рунге-Кутта.
5. Суть методів Адамса.
6. В MathCAD використовується декілька вбудованих функцій для розв'язування систем диференціальних рівнянь. Назвіть їх.
7. Як формується операторне рівняння за диференціальним рівнянням?
8. Суть операторного методу.
9. Як визначається передаточна функція за наявності від'ємного зворотного зв'язку?
10. Що розуміють під статичною та динамічною стійкостями систем?
11. У чому суть критерію статичної стійкості Рауса-Гурвіца?
12. У чому суть критерію статичної стійкості Михайлова?
13. У чому суть критерію статичної стійкості Найквіста?
14. Логарифмічні частотні характеристики.
15. Як визначається запас стійкості САК?
16. У чому суть другого прямого методу Ляпунова?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики / Под ред. В. А. Веникова. М. : Высшая школа, 1981. 288 с.
2. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики. Львів : Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1982. 380 с.
3. Кириленко О. В., Сегеда М. С., Буткевич О. Ф., Мазур Т. А. Математичне моделювання в електроенергетиці : підручник. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010. 608 с.
4. Бурбело М. Й. Математичні задачі електроенергетики. Математичне моделювання електропостачальних систем. Вінниця : ВНТУ, 2016. 185 с.
5. Жданов П. С. Вопросы устойчивости электрических систем ; под ред. Л. А. Жукова. М. : Энергия, 1979. 456 с.
6. Войнаровский А. Ж., Клименко О. М. Форма автоматизованого введення даних // Вісник Вінницького політехнічного інституту, 2012, № 1. С. 146–150.
7. Охорзин В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD. Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2008. 352 с.
8. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы : в 2-х томах. М. : Наука, 1976. Т. 1. 304 с., Т. 2. 310 с.
9. Электрические системы. Электрические сети / В. А. Веников и др. ; под ред. В. А. Веникова и В. А. Строева. М. : Высшая школа, 1998. 511 с.
10. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник. М. : Наука, 1988. 448 с.
11. Єжов С. М. Теорія ймовірностей, математична статистика і випадкові процеси : навчальний посібник. К. : ВПЦ Київський університет, 2001. 140 с.
12. Казанський С. В., Матєєнко Ю. П., Сердюк Б. М. Надійність електроенергетичних систем. К. : НТУ «КПІ», 2011. 216 с.
13. Фокин Ю. А. Вероятностно-статистические методы в расчетах систем электроснабжения. М. : Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
14. Гук Ю. Б., Синенко М. М., Тремясов В. А. Расчет надежности схем электроснабжения. Л. : Энергоатомиздат, 1990. 216 с.
15. Обоскалов В. П. Структурная надежность электроэнергетических систем. Екатеринбург : УрФУ, 2012. 194 с.
16. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Киев : Знання, 2007. 556 с.
17. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин. М. : Высшая школа, 2001. 327 с.
18. Хайрер Э. Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990. 512 с.

19. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 685 с.

20. Демирчян К. С., Бутырин П. А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М. : Высшая школа, 1988. 335 с.

21. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М. : Наука, 1989. 304 с.

22. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування. К. : Либідь, 1997. 544 с.

23. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. Б. И. Копылова. М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 832 с.

*Навчальне видання*

**Михайло Йосипович Бурбело,  
Світлана Володимирівна Бевз,  
Олександр Миколайович Кравець**

## **МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ ПРАКТИКУМ**

Рукопис оформив *М. Бурбело*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *О. Кушнір*

Підписано до друку 16.08.2021 р.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 7,25.  
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2021-082.

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 65-18-06.  
**press.vntu.edu.ua;**  
*E-mail: kivc.vntu@gmail.com.*  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.