МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ БУДІВЕЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

УДК 519.635

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩ З ВРАХУВАННЯМ ЯВИЩА РЕЛАКСАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ

В.І. Риндюк, С.В. Риндюк, Т.О. Міщук

Вступ

Вивчення процесів тепло- і масопереносу має важливе значення для ряду галузей промисловості, зокрема в інженерних спорудах. Процеси теплообміну характеризуються великою різноманітністю і складністю. На сучасному етапі розвитку науково-технічного прогресу все більш широке застосування знаходять складні процеси інтенсивного тепломасопереносу з великими градієнтами та швидкими змінами у часі. Тому при врахуванні релаксації процесу теплопереносу в математичному моделюванні отримують не тільки якісний, а й значною мірою, кількісний збіг теоретичних і експериментальних результатів [1, 2].

Розробка методів розрахунку температурних полів кусково-однорідних середовищ в даному випадку є актуальною задачею.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

У випадку багатошарових середовищ в релаксуючих середовищах необхідно дослідити температурні поля в кожному шарі з врахуванням початкових та граничних умов третього роду. Для цього розглянемо тришарове двовимірне середовище (рис.1)

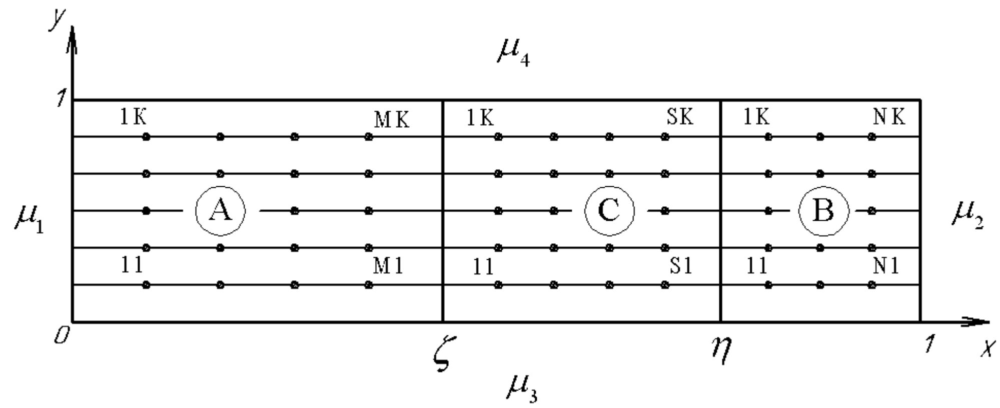

Рис. 1. Розрахункова схема теплопровідності двовимірного неоднорідного середовища

Задача зводиться до розв'язання такого рівняння, яке характерне для кожного шару середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \tau^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,y,t), \tag{1}$$

в області $\{x,y,t\}, 0<x<1, 0<y<1, x\neq\zeta, x\neq\eta,$ яка задовольняє початкову умову (2), умови на межах границь (3):

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \varphi_1(x,y), \tag{2}$$

$$\gamma_1 u(0,y,t)+\beta_1\frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x}=\mu_1(t),\quad \gamma_2 u(1,y,t)+\beta_2\frac{\partial u(1,y,t)}{\partial x}=\mu_2(t),$$
$$, \qquad (3)$$
$$\gamma_3 u(x,0,t)+\beta_3\frac{\partial u(1,0,t)}{\partial y}=\mu_3(t),\quad \gamma_4 u(x,1,t)+\beta_4\frac{\partial u(x,1,t)}{\partial y}=\mu_4(t),$$

і умови спряження (4-5):

$$u\Big|_{x=\zeta-0}=u\Big|_{x=\zeta+0},\ u\Big|_{y=\eta-0}=u\Big|_{y=\eta+0}, \qquad (4)$$

$$a_A\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta-0}=a_C\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta+0},\ a_C\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\eta-0}=a_B\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\eta+0}, \qquad (5)$$

де τ^* – параметр релаксації теплового потоку для різних шарів вважатимемо однаковим;
$\varphi(x,y),\ \varphi_1(x,y)$ - задані функції;
$\overline{\gamma_1,\gamma_4},\ \overline{\beta_1,\beta_4}$ - const;
$a(x,y)$ - коефіцієнт теплопровідності, що має значення:

$$a_A,\ 0<x<\zeta,\ 0<y<1;\quad a_B,\ \eta<x<1,\ 0<y<1;\quad a_C,\ \zeta<x<\eta,\ 0<y<1. \qquad (6)$$

Для простоти роздумів вважатимемо коефіцієнти $a_A,\ a_B,\ a_C,\ \gamma_1-\gamma_4$ постійними величинами.

Для чисельно-аналітичного розв’язання задачі (1-6) по осі x вводиться сітка відповідно з кроком:

$$h_{Ax}=\frac{\zeta}{M+1},\ h_{Cx}=\frac{\eta-\zeta}{S+1},\ h_{Bx}=\frac{1-\eta}{N+1}.$$

Відносно осі y на інтервалі (0, 1) введемо сітку з кроком:

$$h_{\grave{A}y}=h_{\tilde{N}y}=h_{By}=\frac{1}{K+1}.$$

Використаємо методику, яка запропонована в роботі [3, 5] і наближений розв’язок задачі (1-6) будемо шукати у вигляді квадратичного полінома:

$$P_{ml}(x,x_m,y,y_k,t)=\sum_{i,j=0}^{2}A_{ij}(t)(x-x_m)^i(y-y_l)^j,\ x\in[0,\zeta],\ y\in[0,1],$$

$$P_{sl}(x,x_s,y,y_k,t)=\sum_{i,j=0}^{2}C_{ij}(t)(x-x_s)^i(y-y_l)^j,\ x\in[\zeta,1],\ y\in[0,1], \qquad (7)$$

$$P_{nk}(x,x_n,y,y_k,t)=\sum_{i,j=0}^{2}B_{ij}(t)(x-x_n)^i(y-y_k)^j,\ x\in[\eta,1],\ y\in[0,1],$$

де $k=\overline{1,K},\ m=\overline{1,M},\ n=\overline{1,N},\ s=\overline{1,S}.$

Проінтегруємо (1) на інтервалах:

$$[x_{mk}-\alpha_{mk}h_{Ax},x_{mk}+\alpha_{mk}h_{Ax}],\ [y_{mk}-\alpha_{mk}h_{Ay},y_{mk}+\alpha_{mk}h_{Ay}];$$

$$[x_{sk}-\alpha_{sk}h_{Cx},x_{sk}+\alpha_{sk}h_{Cx}],\ [y_{sk}-\alpha_{sk}h_{Ay},y_{sk}+\alpha_{sk}h_{Ay}];$$

$$[x_{nk}-\alpha_{nk}h_{Bx},x_{nk}+\alpha_{nk}h_{Bx}],\ [y_{nk}-\alpha_{nk}h_{By},y_{nk}+\alpha_{nk}h_{By}],$$

з урахуванням наближеного розв'язку (7), де $\alpha_{mk},\alpha_{sk},\alpha_{nk}$ – числові коефіцієнти, отримаємо таку систему M×K + S×K + N×K неоднорідних диференційних рівнянь другого порядку відносно коефіцієнтів $A_{00}^{mk},C_{00}^{sk},B_{00}^{nk}$:

$$\tau^*(\ddot{A}_{00}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2}{3}h_{Ax}^2\ddot{A}_{20}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2}{3}h_{Ay}^2\ddot{A}_{02}^{mk})+\dot{A}_{00}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2}{3}h_{Ax}^2\dot{A}_{20}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2}{3}h_{Ay}^2\dot{A}_{02}^{mk}=2a_AA_{20}^{mk}+2a_AA_{02}^{mk}+\Phi_A^{mk};$$

$$\tau^*(\ddot{C}_{00}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2}{3}h_{Cx}^2\ddot{C}_{20}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2}{3}h_{Cy}^2\ddot{C}_{02}^{sk})+\dot{C}_{00}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2}{3}h_{Cx}^2\dot{C}_{20}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2}{3}h_{Ay}^2\dot{C}_{02}^{sk}=2a_CC_{20}^{sk}+2a_CC_{02}^{sk}+\Phi_C^{sk};\quad (8)$$

$$\tau^*(\ddot{B}_{00}^{nk}+\frac{\alpha_{nk}^2}{3}h_{Bx}^2\ddot{B}_{20}^{nk}+\frac{\alpha_{nk}^2}{3}h_{By}^2\ddot{B}_{02}^{nk})+\dot{B}_{00}^{nk}+\frac{\alpha_{nk}^2}{3}h_{Bx}^2\dot{B}_{20}^{nk}+\frac{\alpha_{nk}^2}{3}h_{By}^2\dot{B}_{02}^{nk}=2a_BB_{20}^{nk}+2a_BB_{02}^{nk}+\Phi_B^{nk},$$

де *Ф* – подвійний інтеграл від *f*(*x,y*) на відповідному інтервалі інтегрування;

$$k=\overline{1,K},\ m=\overline{1,M},\ n=\overline{1,N}.$$

Для розв'язання отриманої системи перепишемо початкові умови (2) з урахуванням (7):

$$P_{mk}(x_m,x_m,y_k,y_k,0)=A_{00}^{mk}(0)=u(x_m,y_k,0)=\varphi(x_m,y_k);$$

$$P_{sk}(x_s,x_s,y_k,y_k,0)=C_{00}^{sk}(0)=u(x_s,y_k,0)=\varphi(x_s,y_k);$$

$$P_{nk}(x_n,x_n,y_k,y_k,0)=B_{00}^{nk}(0)=u(x_n,y_k,0)=\varphi(x_n,y_k);$$

$$\dot{P}_{mk}(x_m,x_m,y_k,y_k,0)=\dot{A}_{00}^{mk}(0)=\dot{u}(x_m,y_k,0)=\varphi_1(x_m,y_k);\quad (9)$$

$$\dot{P}_{sk}(x_s,x_s,y_k,y_k,0)=\dot{C}_{00}^{sk}(0)=\dot{u}(x_s,y_k,0)=\varphi_1(x_s,y_k);$$

$$\dot{P}_{nk}(x_n,x_n,y_k,y_k,0)=\dot{B}_{00}^{nk}(0)=\dot{u}(x_n,y_k,0)=\varphi_1(x_n,y_k).$$

Підставляючи (7) в (4), (5) і враховуючи умови неперервності температури на межах інтервалів розбиття відповідно на (0, ζ)×(0, 1), (ζ, η)×(0, 1) і (η, 1)×(0, 1) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів поліномів (7). Після її розв'язання знаходимо рекурентні вирази [4] для коефіцієнтів $A_{20}^{mk}, A_{02}^{mk}, C_{20}^{sk}, C_{02}^{sk}, B_{20}^{nk}, B_{02}^{nk}$, так як вони входять в систему (8).

Знайдені коефіцієнти підставляємо в (8) і після відповідних алгебраїчних операцій отримуємо неоднорідну систему M×K + S×K + N×K диференційних рівнянь другого порядку відносно коефіцієнтів $A_{00}^{mk}, C_{00}^{sk}, B_{00}^{nk}$, яку запишемо в наступній матричній формі:

$$q\ddot{R}_{00} + r\dot{R}_{00} = pR_{00} + \psi + \Phi, \tag{10}$$

де $\dot{R}_{00} = \left\{ \dot{A}_{00}^{m,k}, \dot{C}_{00}^{s,k}, \dot{D}_{00}^{m,l}, \dot{E}_{00}^{s,l}, \right\}^T$, $R_{00} = \left\{ A_{00}^{m,k}, C_{00}^{s,k}, D_{00}^{m,l}, E_{00}^{s,l}, \right\}^T$, $\psi = \psi\left(\mu_k, \dot{\mu}_k, \ddot{\mu}_k \right)^T$,

q, r – відповідні квадратні матриці з числовими та змінними коефіцієнтами α_{ij} при стовпцях $\ddot{R}_{00}$, $\dot{R}_{00}$;

p – квадратна матриця з постійними коефіцієнтами при стовпці R_{00};

Φ – матриця-стовпець подвійних інтегралів від $f\left(x, t\right)$.

Для поліпшення розв'язку числові коефіцієнти α_{ij} знайдемо з умови того, що наближені розв'язки (7) при t = 0 із врахуванням початкових умов (3) задовільняли б рівняння (1):

$$\dot{A}_{00}^{mk}(0) = \varphi_1(x_m, y_k);$$

$$\tau^* \ddot{A}_{00}^{mk}(0) + \dot{A}_{00}^{mk}(0) = a(\varphi_{xx}(x_m, y_k) + \varphi_{yy}(x_m, y_k)) + f(x_m, y_k, 0);$$

$$\dot{C}_{00}^{s,k}(0) = \varphi_1(x_s, y_k);$$

$$\tau^* \ddot{C}_{00}^{s,k}(0) + \dot{C}_{00}^{s,k}(0) = a(\varphi_{xx}(x_s, y_k) + \varphi_{yy}(x_s, y_k)) + f(x_s, y_k, 0); \tag{11}$$

$$\dot{B}_{00}^{n,k}(0) = \varphi_1(x_n, y_k);$$

$$\tau^* \ddot{B}_{00}^{n,k}(0) + \dot{B}_{00}^{nk}(0) = a(\varphi_{xx}(x_n, y_k) + \varphi_{yy}(x_n, y_k)) + f(x_n, y_k, 0).$$

З урахуванням (11) і (10) отримаємо систему M×K + S×K + N×K незалежних алгебраїчних рівнянь відносно відповідних числових коефіцієнтів α_{ij}. Знайденні коефіцієнти α_{ij} підсталяємо в матриці *q* і *r* системи (10) і знаходимо покращені розв'язки у відповідних вузлових точках розбиття інтервалів неоднорідного середовища з граничними умовами третього роду. Розв'язок системи (10) можна отримати при таких значеннях α_{ij}:

$\alpha_{ij} = 0$ – розв'язок, аналогічний звичайному методу сіток;

$\alpha_{ij}^2 = 0{,}5$ – розв'язок, аналогічний покращеному методу сіток;

$\alpha_{ij} = 1$ – звичайний інтегральний метод [5].

З урахуванням різних значень α_{ij} та отримання відповідних розв'язків, можна зробити висновок про їх достовірність порівняно з експериментальними даними. Якщо не враховувати параметр релаксації теплового потоку τ^*, то отримаємо розв'язок задачі, який характерний для двовимірного рівняння теплопровідності Фур'є.

Висновки

- Запропонована методика дозволяє аналізувати компоновку матеріалів в їх поєднанні з метою теплоізоляційних властивостей відповідних конструкцій.
- Алгоритм розв'язання задачі застосовується і для задач з врахуванням граничних умов першого та другого роду в режимі створеної загальної програми розрахунку на електронно-обчислювальних машинах.
- Задаючи в (1) різні коефіцієнти теплопровідності матеріалів a_i і внутрішні джерела енергії можна дослідити температурне поле багатошарових середовищ різного характеру.

Список літератури

1. Ликов А.В. Теория тепло- и масопереноса / А.В. Ликов, Ю.А. Михайлов. – М.: – Л.: Гос-енергоиздат, 1963. – 536 с.
2. Булавацький В.М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В.М. Булавацький, Ю.Г. Кривонос, В.В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2005. – 282 с.
3. Риндюк В.І. Методика теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища / В.І. Риндюк, Т.В. Прилипко // Вісник ВПІ. – 2003. – №3. – С. 35-38.
4. Риндюк В.І. Моделювання процесу теплопровідності двомірного тришарового середовища / В.І. Риндюк, Т.О. Міщук, С.В. Риндюк // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. Науково – технічний збірник. – 2008. – №5. – С. 99-103.
5. Рындюк В.И. Применение улучшенного интегрального метода прямых к решению задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом / В.И. Рындюк // Ред. Инженерно-физический журнал. – Минск, 1989. – 9 с. деп. в ВИНИТИ 30.02.89, №2069-В.

Риндюк Володимир Іванович – к.ф-м.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Риндюк Світлана Володимирівна – магістрантка Вінницького національного технічного університету.

Міщук Тетяна Олексіївна - магістрантка Вінницького національного технічного університету.