МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ БУДІВЕЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

УДК 693.28

ВИЗНАЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ СПЕКТРІВ ОЦІНЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ ФОРМУВАННЯ ДЕКОРАТИВНИХ БЕТОННИХ ВИРОБІВ

Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян, О.Д. Панкевич

Вступ

Для дослідження динамічних властивостей мобільних вібраційних машин слід застосовувати методи математичного моделювання [1]. Мобільна вібраційна машина для виготовлення декоративних стінових бетонних виробів при цьому розглядається як елемент замкненої динамічної системи “Вібраційна машина – робочий орган – бетонна суміш” для виготовлення декоративних бетонних виробів [2,3].

При математичному моделюванні вказаної динамічної системи велике значення має визначення характеристик взаємодії елементів цієї системи, оскільки вони впливають на якість формування декоративних стінових бетонних виробів і можуть бути віднесені до технологічних параметрів [4].

Однією з центральних задач при синтезі моделей зовнішніх реакцій на елементи такої мобільної вібраційної машини є розрахунки комплексних спектрів оцінювання реакцій елементів системи за експериментальними даними.

Постановка задачі досліджень

Задача знаходження комплексного спектра дослідної реалізації $f(t)$ полягає у розрахунку функції $S(\omega)$:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega\cdot t}dt,\quad j=\sqrt{-1}. \qquad (1)$$

Існують два підходи до оцінювання комплексного спектра $S(\omega)$ – параметричний та непараметричний.

Недолік параметричного підходу – необхідність апріорного уявлення характеру спектра.

Непараметричне оцінювання, як правило, полягає у використанні дискретного перетворення Фур’є (ДПФ) й подальшому згладжуванні отриманої оцінки спектра. Недоліки цієї процедури – спотворення істинного спектра ваговою функцією вікна і головне – дискретний характер отримуваної при цьому оцінки спектральної щільності. У подальшому використанні цієї оцінки залишається відкритим питання про характер поведінки її поза вузлами, в той час як у задачах моделювання зазвичай необхідно здійснювати розрахунки на нерівномірній сітці.

Результати дослідження

Запропонований нижче підхід полягає у представленні комплексного спектра $S(\omega)$ у вигляді функціонального ряду й використанні часткових сум цього ряду для розрахунку оцінки спектра із заданою точністю [5].

Нехай задана функція $f(t)$ тотожно дорівнює нулю поза сегментом $\left[-{T}/{2},\ {T}/{2}\right]$. Додатково вважатимемо, що вона належить до класу функцій $L_1\left(-{T}/{2},\ {T}/{2}\right)$.

У точках диференційовності функція $f(t)$ єдиним чином може бути представлена своїм рядом Фур’є:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot n\cdot \frac{t}{T}}\ , \tag{2}$$

де

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{j\cdot 2\pi\cdot n\cdot \frac{t}{T}}dt,\ \ t\in\left[-T/2,\ T/2\right] \tag{3}$$

Ряд Фур’є поза інтервалом розкладу збігається до функції, що періодично повторюється $f(t)$ всередині інтервалу розкладу з періодом, що дорівнює довжині інтервалу розкладу.

Позначимо $F(t)$ функцію, до котрої збігається ряд (2) на всій числовій осі, а її комплексний спектр – $S_F(\omega)$. Вводячи у розгляд функцію:

$$\Lambda(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t\in\left[-T/2,\ T/2\right],\\ 0 \text{ при } t\notin\left[-T/2,\ T/2\right],\end{cases} \tag{4}$$

можна записати:

$$f(t)=\Lambda(t)\cdot F(t)=\frac{\Lambda(t)}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot \frac{n}{T}\cdot (t-x)}dx\,. \tag{5}$$

Виражаючи $S(\omega)$ через $S_F(\omega)$, отримаємо:

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin\left\{(\omega-\omega_1)\cdot\frac{T}{2}\right\}}{\omega-\omega_1}\cdot S_F(\omega_1)d\omega_1\,. \tag{6}$$

Спектр $S_F(\omega)$ може бути представлений з використанням δ-функції П. Дірака, тобто:

$$S_F(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(2\pi\cdot\frac{n}{T}-\omega\right)\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot e^{-j\cdot 2\pi\cdot\frac{n}{T}\cdot x}dx\,. \tag{7}$$

Підставляючи останній вираз у формулу $S(\omega)$, після перетворень отримаємо представлення комплексного спектра $S(\omega)$ у вигляді ряду:

$$S(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\cdot\frac{sin\left\{\frac{\omega T}{2}-\pi n\right\}}{\left\{\frac{\omega T}{2}-\pi n\right\}},\ \ n\in Z, \tag{8}$$

де

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{T} \cdot x} dx . \tag{9}$$

Коефіцієнти ряду збігаються з коефіцієнтами ряду Фур'є функції $f(x)$ й можуть бути отримані із використанням дискретного перетворення Фур'є без застосування будь-якої вагової функції.

Для практичного застосування доцільно використати часткову суму ряду (8):

$$S_{2m}(\omega) = \sum_{n=-m}^{m} a_n \cdot \frac{\sin\left\{\frac{\omega T}{2} - \pi n\right\}}{\left\{\frac{\omega T}{2} - \pi n\right\}}, \quad n \in Z. \tag{10}$$

Для оцінювання похибки ε оцінимо модуль залишку ряду:

$$\varepsilon = |r_{2m}| = |S(\omega) - S_{2m}(\omega)| \le \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)| dx \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{4\omega T}{4\pi^2 n - \omega^2 T} \right|. \tag{11}$$

Належність $f(x)$ до класу функцій $L_1\left(-T/2,\ T/2\right)$ визначає похибку $f(x)$, тобто наявність точної верхньої границі:

$$\sup |f(x)| = C. \tag{12}$$

Тоді:

$$|r_{2m}| \le CT \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{4\omega T}{4\pi^2 n^2 - \omega^2 T^2} \right| = 4CT^2 \cdot |\omega| \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{1}{4\pi^2 n^2 - \omega^2 T^2} \right|. \tag{13}$$

Ряд:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left| \frac{du}{4\pi^2 u^2 - \omega^2 T^2} \right|. \tag{14}$$

мажорує ряд:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2 - \omega^2 T^2}. \tag{15}$$

Із його аналізу можна встановити:

$$|r_{2m}| \le 2CT \cdot arcth\left\{ \frac{4\pi \cdot m}{|\omega| \cdot T} \right\}. \tag{16}$$

Таким чином, забезпечення точності при використанні часткової суми ряду (10) для апроксимації спектра $S(\omega)$ полягає у виборі m за максимально припустимої величини похибки ε :

$$m \geq \max\left\{\begin{array}{c} \dfrac{|\omega| \cdot T}{4\pi} \cdot cth\left[\dfrac{\varepsilon}{\sup|f(x)|}\right] \\ \dfrac{|\omega| \cdot T}{4\pi} \end{array}\right\}. \tag{17}$$

При виборі m згідно залежності (17) спектр оцінювання реакцій елементів системи апроксимується з достатньою для практичного застосування точністю.

Висновки

- З метою підвищення якості виробництва декоративних бетонних виробів доцільно за результатами математичного моделювання встановити раціональні технологічні параметри робочого процесу ущільнення бетонної суміші.
- При математичному моделюванні оцінювання взаємодії елементів системи формування декоративних бетонних виробів обов'язковим є визначення комплексних спектрів замкнутої динамічної системи.

Список літератури

1. Слободян Н.М. Математична модель розрахунків прогинів еластичного привантаження під час формування декоративних бетонних блочків / Н.М. Слободян // Вісник ВПІ. – 2001. – №1. – С. 10-12.
2. Брауде Ф.Г. О влиянии бетонной смеси на колебания вибрационной площадки / Ф.Г. Брауде, С.А. Осмаков, В.Б. Голод. – М., 1969. – С. 208-213. (В кн.: Теория формования бетона)
3. Слободян Н.М. Критерії необхідності врахування взаємодії коливної системи та джерела енергії у процесі вібраційного формування бетонних блочків / Н.М. Слободян // Техніка будівництва. – 2002. – №12. – С. 28-31.
4. Ратушняк Г.С. Порівняльний аналіз математичних моделей розрахунків прогинів еластичного привантаження під час формування декоративних бетонних блочків: моделі гнучких пластин та мембран / Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян // Вестник ХГТУ. – 2002. – № 2(15).Ч.I, Ч.II – С. 393-398.
5. Ісаханов Г.В. Чисельні методи розв'язування задач будівництва / Г.В. Ісаханов, С.М. Чорний. – К.:Вища школа, 1995. – 374 с.

Ратушняк Георгій Сергійович – к.т.н., професор, завідувач кафедри теплогазопостачання Вінницького національного технічного університету.

Слободян Наталія Михайлівна – к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання Вінницького національного технічного університету.

Панкевич Ольга Дмитрівна – к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання Вінницького національного технічного університету.