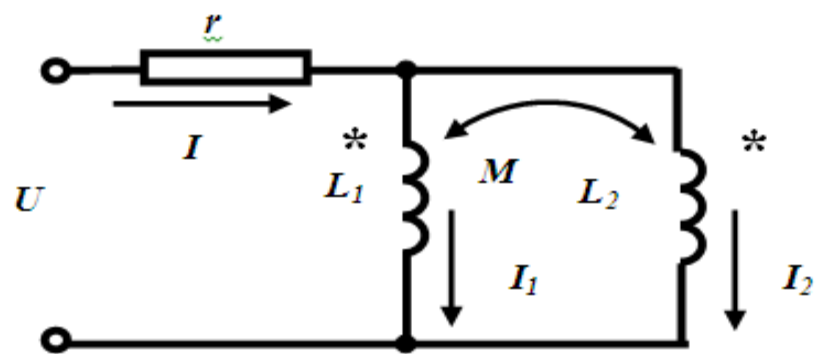


С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, В. Г. Мадьяров

НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, В. Г. Мадьяров

НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

МОНОГРАФІЯ

Вінниця, 2023

УДК 621.3(075)

К30

Автори:

С. Ш. Каців, В. В. Кухарчук, В. Г. Мадьяров

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №__ від _____)

Рецензенти:

В. П. Квасніков, доктор технічних наук, професор

В. Є. Кривонос, доктор технічних наук, професор

Нестандартний аналіз в електротехніці: монографія. / С. Ш. Каців, В. В. Кухарчук, В. Г. Мадьяров. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 106 с.

ISBN

Автори вперше запропонували використати математичний апарат нестандартного аналізу для розв'язання деяких нетривіальних задач теоретичної електротехніки. Показано, що аксіоматика нестандартного аналізу дозволяє значно спростити аналіз усталених та перехідних режимів електричних кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами. Наведені приклади розв'язання таких задач. Рекомендовано поширити область застосування методів нестандартного аналізу в задачах різноманітних галузей науки та техніки, що використовують диференційне обчислення, розв'язання яких обмежене або неможливе за допомогою стандартних підходів.

УДК 621.3(075)

ISBN

© С. Ш. Каців, В. В. Кухарчук, В. Г. Мадьяров, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ОСНОВНІ ЗАСАДИ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ.....	6
2 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ.....	9
3 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	12
3.1 Кола з ідеальними індуктивностями.....	13
3.2 Кола з ідеальними ємностями.....	32
4 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ПОРУШЕННЯМ ЗАКОНІВ КОМУТАЦІЇ.....	38
4.1 Індуктивні кола 1 порядку.....	38
4.2 Ємнісні кола 1 порядку.....	49
4.3 Кола 2 порядку.....	63
5 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕТРИВІАЛЬНИХ ЗАДАЧ В КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....	90
ВИСНОВКИ.....	104
ЛІТЕРАТУРА.....	105

ВСТУП

При розв'язанні різноманітних наукових та технічних задач час від часу дослідник зустрічається з необхідністю розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$. При цьому досить часто застосування класичних методів викликає певні ускладнення. В цих випадках набагато зручнішим є використання ідей та методів *нестандартного аналізу*.

Цікавим є те, що саме ідеї нестандартного аналізу (тобто *безпосереднє* використання *нескінченно малих чисел*) були тим фундаментом, на якому Лейбніц та Ньютон інтуїтивно будували засади диференційного та інтегрального обчислень. Але пізніше в працях Коші та інших математиків нескінченно малі числа були «вилучені з обігу» і в основу математичного апарату диференційного та інтегрального обчислення були покладені числові та функціональні послідовності і граничні співвідношення величин. Це підвищило аксіоматичну строгість математичного апарату, але, на жаль, ускладнило розв'язання певного кола задач.

Відродження ідей нестандартного аналізу відбулося в 60-х роках минулого сторіччя, коли А. Робінсон запропонував нову аксіоматику математичного аналізу, яка базується на множині *гіпердійсних* чисел, що містить окрім так званих *стандартних* (звичайних дійсних) чисел ще й так звані *нестандартні* (нескінченно малі, нескінченно великі та їх комбінації зі звичайними дійсними) числа.

В цій роботі розглянемо застосування нестандартного аналізу в електротехніці.

Для аналізу електричних кіл постійного струму використовуються різноманітні уніфіковані методи розрахунку, які базуються на законах Ома та Кірхгофа. Разом з тим, існує певне коло задач цього напрямку, для яких безпосереднє використання цих уніфікованих методів практично неможливе. Це стосується, наприклад, розрахунку кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами. Складність розрахунків в таких колах полягає в тому, що на постійному струмі опір

ідеальної індуктивності ($x_L = \omega L$) прямує до нуля, а опір ідеальної ємності ($x_C = \frac{1}{\omega C}$) – до нескінченності.

Зазвичай, для розв'язання таких задач одночасно із законами електротехніки використовують енергетичні характеристики індуктивностей та ємностей, що значно ускладнює аналіз таких кіл, особливо для складних схем. Тому є актуальним застосування математичного апарату нестандартного аналізу, який дозволить використати відомі уніфіковані методи для розрахунку таких кіл.

В наступному підрозділі будуть викладені основні засади нестандартного аналізу, які необхідні для розв'язання вищезгаданих електротехнічних задач.

1 ОСНОВНІ ЗАСАДИ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ

Нехай R – впорядкована множина дійсних чисел. Число α будемо називати *нескінченно малим числом* тоді та лише тоді, коли

$$\forall r \in R (\alpha < r). \quad (1.1)$$

Число $\beta = \frac{1}{\alpha}$ будемо називати *нескінченно великим числом*. В

цьому випадку можна записати

$$\forall r \in R (\beta > r). \quad (1.2)$$

До нескінченно малих та великих чисел можуть бути застосовані всі алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення, ділення, зведення в ступінь тощо) та теореми (комутативності, асоціативності тощо).

Будемо розрізняти нескінченно малі та великі числа різного порядку, а саме:

- $\alpha > \alpha^2 > \alpha^3 > \alpha^k$ – нескінченно малі числа першого, другого, третього, k -го порядку;

- $\beta < \beta^2 < \beta^3 < \beta^k$ – нескінченно великі числа першого, другого, третього, k -го порядку.

Разом з дійсними числами $r \in R$ нескінченно малі та великі числа утворюють впорядковану множину *гіпердійсних* чисел $*R$. Прийнято називати дійсні числа $r \in R$ *стандартними* або *архімедовими* на відміну від *нестандартних* (неархімедових) чисел $*r \in *R$.

Кожне нестандартне число містить стандартну частину

$$*r = r \pm \alpha, \quad (1.3)$$

тобто

$$r = st(*r), \quad (1.4)$$

інакше кажучи звичайне дійсне число є стандартною частиною деякого нестандартного числа (очевидно, таких чисел може бути нескінченна кількість).

Два стандартних числа a та b називаються рівними тоді та лише тоді коли

$$a - b = 0. \quad (1.5)$$

Два нестандартних числа $*a$ та $*b$ називаються *еквівалентними* (або *нескінченно близькими* одне до одного) тоді та лише тоді коли

$$*a - *b \approx \alpha. \quad (1.6)$$

Позначення \approx буде означати еквівалентність двох нестандартних чисел.

Для стандартних чисел m та n запишемо деякі співвідношення, які випливають з (1.1 – 1.6):

$$\frac{1}{\alpha^k} = \beta^k, \quad \frac{m}{\alpha} = m\beta, \quad \frac{m}{\alpha^k} = m\beta^k, \quad (1.7)$$

$$\frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n}, \quad \frac{m\alpha}{n} = \frac{m}{n}\alpha, \quad \frac{m}{n\alpha} = \frac{m}{n}\beta, \quad (1.8)$$

$$m\alpha + n \approx n, \quad m\beta + n \approx m\beta, \quad m\alpha^k + n \approx n, \quad m\beta^k + n \approx m\beta^k, \quad (1.9)$$

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1. \quad (1.10)$$

Цілком природньо, що таку ж нестандартну структуру може мати не лише множина дійсних чисел, а і множина уявних чисел, тобто площина комплексних чисел.

Тоді, за аналогією з (1.9) можна записати:

$$m\alpha + jn \approx jn, \quad m\beta + jn \approx m\beta, \quad m + jn\alpha \approx m, \quad m + jn\beta \approx jn\beta. \quad (1.11)$$

Крім того, задачі класичного аналізу перехідних процесів вимагають безпосереднього використання стандартного числа 0 і нескінченної величини ∞ тому сформулюємо їх нестандартну інтерпретацію.

Стандартне число 0 в нестандартному аналізі можна розглядати як *нескінченно мале число нескінченно великого порядку*, тобто

$$0 \approx \alpha^\beta, \quad (1.12)$$

тому

$$\frac{0}{\alpha} \approx 0, \quad 0 \cdot \beta \approx 0, \quad (1.13)$$

$$e^{-\beta \cdot 0} \approx 1, \quad e^{-\alpha} \approx 1, \quad e^\alpha \approx 1. \quad (1.14)$$

Нескінченна величина ∞ в нестандартному аналізі може бути подана як *нескінченно велике число нескінченно великого порядку*, тобто

$$\infty \approx \beta^\beta, \quad (1.15)$$

тому

$$\frac{\infty}{\beta} \approx \infty, \quad \infty \cdot \alpha \approx \infty, \quad (1.16)$$

$$e^{-\infty \cdot \alpha} \approx \alpha, \quad e^{-\beta} \approx \alpha. \quad (1.17)$$

Перед тим, як перейти до застосування вищенаведених виразів для розв'язання різноманітних прикладних задач зазначимо, що не існує загальних правил вибору параметру, який доцільно прирівняти до нескінченно малого (або нескінченно великого) числа. Цей вибір здійснюється дослідником в залежності від контексту конкретної задачі. При цьому слід мати на увазі, що у випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім не простою проблемою і вимагає, іноді, додаткових досліджень.

В наступному підрозділі розглянемо яким чином методи нестандартного аналізу можуть бути використані для обчислення похідних в математичному аналізі.

2 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Визначимо методами нестандартного аналізу похідні деяких поширених функцій.

1) Функція $y = x^n$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x + \alpha)^n - x^n}{\alpha} = \frac{x^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}\alpha + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2}\alpha^2 + \dots}{\alpha} \\ &\quad + \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}x^2\alpha^{n-2} + \frac{n!}{1!(n-1)!}x\alpha^{n-1} + \alpha^n - x^n}{\alpha} = \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2}\alpha + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2\alpha^{n-3} + \frac{n!}{1!(n-1)!}x\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} \approx nx^{n-1}. \end{aligned}$$

2) Функція $y = \frac{1}{x^n}$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{(x + \alpha)^n} - \frac{1}{x^n}}{\alpha} = \\ &= \frac{\frac{1}{x^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}\alpha + \dots + \frac{n!}{1!(n-1)!}x\alpha^{n-1} + \alpha^n} - \frac{1}{x^n}}{\alpha} = \\ &= \frac{x^n - x^n - \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}\alpha - \dots - \frac{n!}{1!(n-1)!}x\alpha^{n-1} - \alpha^n}{\alpha} \\ &= \frac{x^{2n} + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{2n-1}\alpha + \dots + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n+1}\alpha^{n-1} + x^n\alpha^n}{\alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1} - \dots - \frac{n!}{1!(n-1)!}x\alpha^{n-2} - \alpha^{n-1}}{x^{2n} + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{2n-1}\alpha + \dots + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n+1}\alpha^{n-1} + x^n\alpha^n} \approx \\
&\approx \frac{-\frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

3) Функція $y = \sqrt{x}$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x}}{\alpha} = \frac{(\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x})}{\alpha(\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x})} = \\
&= \frac{x+\alpha-x}{\alpha(\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x})} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

4) Функція $y = \sin x$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sin(x+\alpha) - \sin x}{\alpha} = \frac{\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x - \sin x}{\alpha} \approx \\
&\frac{\sin x \cdot 1 + \alpha \cos x - \sin x}{\alpha} \approx \cos x.
\end{aligned}$$

5) Функція $y = \cos x$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\cos(x+\alpha) - \cos x}{\alpha} = \frac{\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha - \cos x}{\alpha} \approx \\
&\frac{\cos x \cdot 1 - \sin x \cdot \alpha - \cos x}{\alpha} \approx -\sin x.
\end{aligned}$$

6) Функція $y = \operatorname{tg} x$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos(x+\alpha)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\alpha} = \frac{\frac{\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x}{\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\alpha} = \\ &= \frac{\cos x \sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos^2 x - \sin x \cos x \cos \alpha + \sin^2 x \sin \alpha}{\alpha \cos^2 x \cos \alpha - \alpha \cos x \sin x \sin \alpha} \approx \\ &\approx \frac{\alpha (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\alpha \cos^2 x - \alpha^2 \cos x \cdot \sin x} \approx \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \alpha \cos x \cdot \sin x} \approx \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

7) Функція $y = \operatorname{ctg} x$.

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(x+\alpha)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\alpha} = \frac{\frac{\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha}{\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\alpha} = \\ &= \frac{\sin x \cos x \cos \alpha - \sin^2 x \sin \alpha - \cos x \sin x \cos \alpha - \sin \alpha \cos^2 x}{\alpha \sin^2 x \cos \alpha + \alpha \sin \alpha \cos x \sin x} \approx \\ &\approx \frac{-\alpha (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\alpha \sin^2 x + \alpha^2 \cos x \sin x} \approx \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x + \alpha \cos x \sin x} \approx \frac{-1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

8) Функція $y = \operatorname{sec} x$.

Введемо заміну $dx = \alpha$. Оскільки $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$, запишемо

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{\cos(x+\alpha)} - \frac{1}{\cos x}}{\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha} - \frac{1}{\cos x}}{\alpha} = \\ &= \frac{\cos x - \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha}{\alpha \cos^2 x \cos \alpha - \alpha \cos x \sin x \sin \alpha} \approx \\ &\approx \frac{\alpha \sin x}{\alpha \cos^2 x - \alpha^2 \cos x \sin x} \approx \frac{\sin x}{\cos^2 x - \alpha \cos x \cdot \sin x} \approx \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

9) Функція $y = \operatorname{cosec}(x)$.

Введемо заміну $dx = \alpha$. Оскільки $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin x}$, запишемо

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin(x+\alpha)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x} - \frac{1}{\sin x} = \\ &= \frac{\sin x - \sin x \cos \alpha - \sin \alpha \cos x}{\alpha \sin^2 x \cos \alpha + \alpha \sin \alpha \cos x \sin x} \approx \\ &\approx \frac{-\alpha \cos x}{\alpha \sin^2 x + \alpha^2 \cos x \sin x} \approx -\frac{\cos x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

10) Функція $y = e^x$.

Оскільки $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, то в межах нестандартного аналізу можна записати

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^\beta \approx (1 + \alpha)^\alpha, \quad e^x \approx (1 + \alpha)^x$$

Введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\approx \frac{(1 + \alpha)^{x+\alpha} - (1 + \alpha)^x}{\alpha} = \frac{(1 + \alpha)^x (1 + \alpha)^\alpha - (1 + \alpha)^x}{\alpha} = \\ &= \frac{(1 + \alpha)^x (1 + \alpha)^\alpha - (1 + \alpha)^x}{\alpha} = \frac{(1 + \alpha)^x \left[(1 + \alpha)^\alpha - 1 \right]}{\alpha} = \\ &= \frac{(1 + \alpha)^x [1 + \alpha - 1]}{\alpha} = (1 + \alpha)^x \approx e^x. \end{aligned}$$

3 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

В цьому підрозділі розглянемо яким чином методи нестандартного аналізу можуть бути використані для аналізу кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами.

Оскільки коло постійного струму можна розглядати як коло синусоїдного змінного струму, частота якого дорівнює нулю, то розв'язання таких задач можна застосувати символічний метод за умови $\omega = \alpha$.

Розглянемо характерні приклади таких задач.

3.1 КОЛА З ІДЕАЛЬНИМИ ІНДУКТИВНОСТЯМИ

Прийнявши $\omega = \alpha$, для комплексного опору індуктивності можна записати

$$\underline{Z}_L \approx j\alpha L.$$

Приклад 3.1

В колі постійного струму (рис. 3.1) визначити струми в індуктивностях L_1, L_2 .

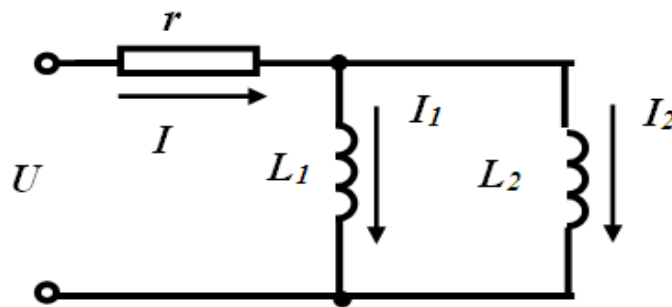


Рисунок 3.1 – Коло з ідеальними індуктивностями

Параметри кола: $U = 30$ В, $r = 10$ Ом, $L_1 = 0.2$ Гн, $L_2 = 0.1$ Гн.

На перший погляд здається, що струми в індуктивностях будуть однаковими ($I_1 = I_2 = \frac{I}{2} = \frac{U}{2r} = 1.5$ А), оскільки повні опори цих віток на постійному струмі дорівнюють нулю. Але спробуємо розв'язати цю задачу використовуючи нескінченно малі числа.

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\underline{Z}_{\text{ex}} \approx r + \frac{(j\alpha L_1)(j\alpha L_2)}{j\alpha L_1 + j\alpha L_2} = r + \frac{j^2 \alpha^2 L_1 L_2}{j\alpha(L_1 + L_2)} = r + j\alpha \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)},$$

і згідно з (1.11) $\underline{Z}_{\text{ex}} \approx r$.

Звідси $\underline{I} = \frac{U}{r} = 3$ А, напруга на індуктивностях

$$\underline{U}_L = j\alpha \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)} \underline{I} = \frac{U}{r} j\alpha \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)},$$

а струми у вітках

$$I_1 = \frac{U_L}{j\alpha L_1} = \frac{UL_2}{(L_1 + L_2)r} = 1 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{U_L}{j\alpha L_2} = \frac{UL_1}{(L_1 + L_2)r} = 2 \text{ А}.$$

Таким чином показано, що загальний струм I на вході в коло розподіляється між індуктивностями аж ніяк не однаково, а обернено пропорційно їх значенням.

Розглянемо тепер коло із закороченою ідеальною індуктивністю.

Приклад 3.2

В колі постійного струму (рис. 3.2) визначити струми в усіх вітках.

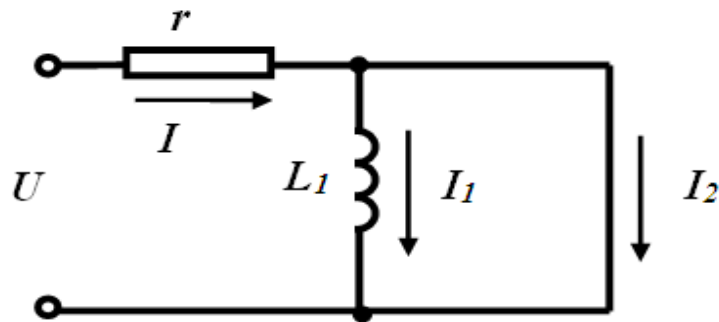


Рисунок 3.2 – Коло із закороченою ідеальною індуктивністю

Зі схеми кола видно, що індуктивність L_1 закорочена.

Виникає питання, яким чином краще представити вітку, яка увімкнена паралельно з L_1 .

Якщо цю вітку представити як ідеальний резистор R з нульовим опором, то в задачі з'являться одночасно два різних нескінченно малих числа $\omega \approx \alpha_1$ та $R \approx \alpha_2$. При цьому слід мати на увазі, що співвідношення між α_1 і α_2 нам невідоме.

Тому доцільніше представити цю вітку як ідеальну індуктивність L_2 , у якої $L_2 \approx \alpha_2$.

В цьому випадку, для повного комплексного опору цієї вітки можна записати

$$\underline{Z} \approx j\alpha_1\alpha_2.$$

Добуток двох нескінченно малих чисел є нескінченно малим числом більш високого порядку, ніж кожен зі співмножників, тому в загальному випадку має місце одна з нерівностей

$$j\alpha_1\alpha_2 \leq jm\alpha_1^2,$$

або

$$j\alpha_1\alpha_2 \leq jm\alpha_2^2.$$

Розв'яжемо задачу для першої нерівності (очевидно, що для другої результат буде аналогічним).

В результаті повний комплексний опір кола дорівнює

$$\underline{Z}_{ex} \approx r + \frac{(j\alpha_1 L_1)(jm\alpha_1^2)}{j\alpha_1 L_1 + jm\alpha_1^2} = r + \frac{j^2 m \alpha_1^3 L_1}{j\alpha_1(L_1 + m\alpha_1)} = r + jm\alpha_1^2 \frac{L_1}{(L_1 + m\alpha_1)},$$

і згідно з (1.11)

$$\underline{Z}_{ex} \approx r$$

Звідси

$$\underline{I} = \frac{U}{r}$$

напруга на паралельних вітках

$$\underline{U}_L = jm\alpha_1^2 \frac{L_1}{(L_1 + m\alpha_1)} \underline{I} = \frac{U}{r} jm\alpha_1^2 \frac{L_1}{(L_1 + m\alpha_1)},$$

і згідно з (1.9)

$$\underline{U}_L = \frac{U}{r} jm\alpha_1^2 \frac{L_1}{(L_1 + m\alpha_1)} \approx \frac{U}{r} jm\alpha_1^2 \frac{L_1}{L_1} = \frac{U}{r} jm\alpha_1^2.$$

Тоді струм у вітці з індуктивністю дорівнює

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_L}{j\alpha_1 L_1} = \frac{U}{r} \frac{jm\alpha_1^2}{j\alpha_1 L_1} = \frac{U}{r} \frac{m}{L_1} \alpha_1 \approx 0,$$

а паралельній вітці

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_L}{jm\alpha_1^2} = \frac{U}{r} \frac{jm\alpha_1^2}{jm\alpha_1^2} = \frac{U}{r},$$

Більш цікавим є випадок, коли в колі з ідеальними індуктивностями активні опори котушок є нескінченно малими числами різного порядку.

Приклад 3.3

Розглянемо коло постійного струму, яке зображене на рис. 3.3.

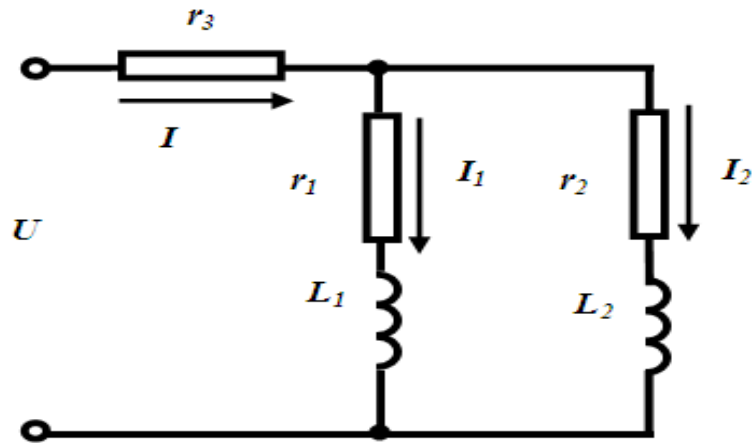


Рисунок 3.3 – Коло з ідеальними індуктивностями, у яких активні опори котушок є нескінченно малими числами різного порядку

Це коло буде вважатися колом з ідеальними індуктивностями, якщо опори r_1 , r_2 будуть нескінченно малими числами, тобто $r_1 \approx \alpha_1$, $r_2 \approx \alpha_2$.

Таким чином, при розв’язанні цієї задачі необхідно враховувати три *різних* нескінченно малих числа $\omega \approx \alpha$, $r_1 \approx \alpha_1$, $r_2 \approx \alpha_2$, співвідношення порядків яких заздалегідь невідоме.

Розглянемо можливі варіанти співвідношень порядків між цими різними нескінченно малими числами. При цьому є сенс вважати, що опори r_1 , r_2 є нескінченно малими числами одного порядку.

Варіант 1. Порядок частоти постійного струму ω дорівнює порядку опорів r_1 , r_2 , тобто

$$\alpha \approx \alpha_1 \approx \alpha_2.$$

Варіант 2. Порядок частоти постійного струму ω більше ніж порядок опорів r_1 , r_2 , тобто

$$\alpha < (\alpha_1 \approx \alpha_2).$$

Варіант 3. Порядок частоти постійного струму ω менше ніж порядок опорів r_1 , r_2 , тобто

$$\alpha > (\alpha_1 \approx \alpha_2).$$

Визначимо струми у вітках кола для кожного із вищенаведених варіантів.

Варіант 1.

В загальному вигляді можна записати

$$\alpha_1 \approx m\alpha, \alpha_2 \approx n\alpha,$$

де m, n – довільні стандартні числа (зокрема 1).

Тоді для повних комплексних опорів віток кола (рис. 3.3) можна записати

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= r_1 + j\omega L_1 = \alpha_1 + j\alpha L_1 = m\alpha + j\alpha L_1 = \alpha(m + jL_1), \\ \underline{Z}_2 &= r_2 + j\omega L_2 = \alpha_2 + j\alpha L_2 = n\alpha + j\alpha L_2 = \alpha(n + jL_2), \\ \underline{Z}_3 &= r_3.\end{aligned}$$

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{ex}} &= \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = r_3 + \frac{\alpha(m + jL_1)\alpha(n + jL_2)}{\alpha(m + jL_1) + \alpha(n + jL_2)} = \\ &= r_3 + \frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)} \approx r_3.\end{aligned}$$

Звідси $\underline{I} = \frac{U}{r_3}$, напруга на паралельних вітках \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2

$$\underline{U}_Z = \underline{I} \frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)} = \frac{U}{r} \frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)},$$

а струми у вітках

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_1} = \frac{\frac{U}{r} \frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)}}{\alpha(m + jL_1)} = \frac{U(n + jL_2)}{r[m + n + j(L_1 + L_2)]}, \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_2} = \frac{\frac{U}{r} \frac{\alpha(m + jL_1)(n + jL_2)}{m + n + j(L_1 + L_2)}}{\alpha(n + jL_2)} = \frac{U(m + jL_1)}{r[m + n + j(L_1 + L_2)]}.\end{aligned}$$

Легко помітити, що в першому варіанті, незважаючи на постійну напругу, струми в індуктивностях є комплексними величинами.

Варіант 2.

В загальному вигляді можна записати

$$\alpha \approx m\alpha_1^k, \alpha_2 \approx n\alpha_1,$$

де m, n – довільні стандартні числа (зокрема 1).

Тоді для повних комплексних опорів віток кола (рис. 3.3) можна записати

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = \alpha_1 + j\alpha L_1 = \alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1,$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = \alpha_2 + j\alpha L_2 = n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2,$$

$$\underline{Z}_3 = r_3.$$

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{ex}} &= \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = r_3 + \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2)}{\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1 + n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2} = \\ &= r_3 + \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{1 + jm\alpha_1^{k-1} L_1 + n + jm\alpha_1^{k-1} L_2} = \\ &= r_3 + \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)} \approx r_3.\end{aligned}$$

Звідси $\underline{I} = \frac{U}{r_3}$, напруга на паралельних вітках \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2

$$\begin{aligned}\underline{U}_Z &= \underline{I} \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)} = \\ &= \frac{U}{r} \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)},\end{aligned}$$

а струми у вітках

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_1} = \frac{\frac{U}{r} \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)}}{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)} = \\ &= \frac{U(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{r[n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)]} \approx \frac{Un}{r(n + 1)}, \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_2} = \frac{\frac{U}{r} \frac{(\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_1)(n + jm\alpha_1^{k-1} L_2)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)}}{n\alpha_1 + jm\alpha_1^k L_2} = \\ &= \frac{U}{r} \frac{(1 + jm\alpha_1^{k-1} L_1)}{n + 1 + jm\alpha_1^{k-1}(L_1 + L_2)} \approx \frac{U}{r(n + 1)}.\end{aligned}$$

Зазначимо, що в другому варіанті струми в індуктивностях не залежать від значень самих індуктивностей.

Варіант 3.

В загальному вигляді можна записати

$$\alpha_1 \approx m\alpha^k, \alpha_2 \approx n\alpha^k,$$

де m, n – довільні стандартні числа (зокрема 1).

Тоді для повних комплексних опорів віток кола (рис. 3.3) можна записати

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= r_1 + j\omega L_1 = \alpha_1 + j\alpha L_1 = m\alpha^k + j\alpha L_1 = \alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1), \\ \underline{Z}_2 &= r_2 + j\omega L_2 = \alpha_2 + j\alpha L_2 = n\alpha^k + j\alpha L_2 = \alpha(n\alpha^{k-1} + jL_2), \\ \underline{Z}_3 &= r_3.\end{aligned}$$

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{ex}} &= \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = r_3 + \frac{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)\alpha(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1) + \alpha(n\alpha^{k-1} + jL_2)} = \\ &= r_3 + \frac{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)} \approx r_3.\end{aligned}$$

Звідси $\underline{I} = \frac{U}{r_3}$, напруга на паралельних вітках \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2

$$\underline{U}_Z = \underline{I} \frac{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)} = \frac{U}{r} \frac{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)},$$

а струми у вітках

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_1} = \frac{\frac{U}{r} \frac{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)}}{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)} = \\ &= \frac{U(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{r[(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)]} \approx \frac{UL_2}{r(L_1 + L_2)}, \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}_2} = \frac{\frac{U}{r} \frac{\alpha(m\alpha^{k-1} + jL_1)(n\alpha^{k-1} + jL_2)}{(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)}}{\alpha(n\alpha^{k-1} + jL_2)} = \\ &= \frac{U(m\alpha^{k-1} + jL_1)}{r[(m+n)\alpha^{k-1} + j(L_1 + L_2)]} \approx \frac{UL_1}{r(L_1 + L_2)}.\end{aligned}$$

В третьому варіанті струми в індуктивностях залежать лише від значень самих індуктивностей. Саме цей варіант концептуально відповідає задачам, які зустрічаються в практиці викладання теорії електричних кіл. Тому, надалі, ми будемо вважати, що співвідношен-

ня порядків між різними нескінченно малими числами відповідають третьому варіанту.

Ще цікавіша ситуація спостерігається у колах з магнітним зв'язком.

Приклад 3.4

Нехай у колі, заданому в прикладі 3.1, між індуктивностями існує магнітний зв'язок. Якщо котушки увімкнені узгоджено (як це наведено на рис. 3.4-1), то система рівнянь за законами Кірхгофа буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 &= 0, \\ \underline{I}r + \underline{I}_1 j\alpha L_1 + \underline{I}_2 j\alpha M &= U, \\ \underline{I}_1 j\alpha L_1 + \underline{I}_2 j\alpha M &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 + \underline{I}_1 j\alpha M. \end{aligned}$$

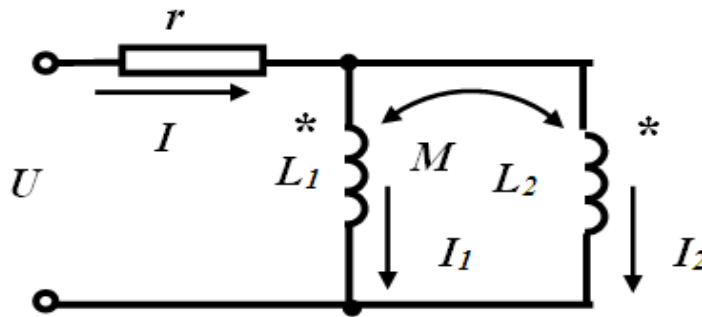


Рисунок 3.4-1 – Коло з ідеальними індуктивностями та магнітним зв'язком (узгоджене увімкнення)

Для другого рівняння цієї системи виконаємо еквівалентні перетворення.

$$\underline{I}r + \underline{I}_1 j\alpha L_1 + \underline{I}_2 j\alpha M \approx \underline{I}r = U.$$

Звідси $\underline{I} = \frac{U}{r} = 3$ А. Таким чином ми отримали нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{U}{r} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 &= 0, \\ \underline{I}_1 j\alpha L_1 + \underline{I}_2 j\alpha M &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 + \underline{I}_1 j\alpha M. \end{aligned}$$

Визначимо з першого рівняння струм \underline{I}_1 і підставимо його в друге рівняння.

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{r} - \underline{I}_2,$$

$$\left(\frac{U}{r} - \underline{I}_2\right)j\alpha L_1 + \underline{I}_2j\alpha M = \underline{I}_2j\alpha L_2 + \left(\frac{U}{r} - \underline{I}_2\right)j\alpha M.$$

Звідси випливає

$$\frac{U}{r}j\alpha L_1 - \underline{I}_2j\alpha L_1 + \underline{I}_2j\alpha M = \underline{I}_2j\alpha L_2 + \frac{U}{r}j\alpha M - \underline{I}_2j\alpha M,$$

$$\frac{U}{r}(j\alpha L_1 - j\alpha M) = \underline{I}_2(j\alpha L_1 + j\alpha L_2 - 2j\alpha M),$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\frac{U}{r}(j\alpha L_1 - j\alpha M)}{(j\alpha L_1 + j\alpha L_2 - 2j\alpha M)} = \frac{U(L_1 - M)}{r(L_1 + L_2 - 2M)},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{r} - \underline{I}_2 = \frac{U}{r} - \frac{U(L_1 - M)}{r(L_1 + L_2 - 2M)} = \frac{U(L_2 - M)}{r(L_1 + L_2 - 2M)}.$$

Числові розрахунки проведемо для трьох характерних випадків співвідношення між власними індуктивностями L_1 , L_2 та взаємодуктивністю M (значення L_1 , L_2 такі ж самі, як і в прикладі 3.1).

1. Нехай $M = 0.08$ Гн, тобто $M < L_2$.

Тоді $\underline{I}_1 = 0.429$ А, а $\underline{I}_2 = 2.571$ А. Цей випадок принципово не відрізняється від прикладу 3.1.

2. Прийнемо тепер $M = 0.1$ Гн, тобто $M = L_2$.

В цьому випадку весь струм протікає в другій котушці ($\underline{I}_2 = 3$ А), а в першій котушці він зникає ($\underline{I}_1 = 0$ А).

3. Найбільш цікавим є третій випадок $M = 0.14$ Гн, коли $L_2 < M < \sqrt{L_1 L_2}$.

Тут ми спостерігаємо яскраво виражений так званий «ефект хибної ємності», коли струми в кожній з котушок перевищують вхідний струм ($\underline{I}_1 = -6$ А, $\underline{I}_2 = 9$ А), а крім того в першій котушці струм міняє свій напрямок.

Тепер розглянемо випадок зустрічного увімкнення (рис. 3.4-2).

В цьому випадку система рівнянь за законами Кірхгофа буде мати вигляд:

$$\underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \underline{I}r + \underline{I}_1 j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha M &= U, \\ \underline{I}_1 j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha M &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \underline{I}_1 j\alpha M. \end{aligned}$$

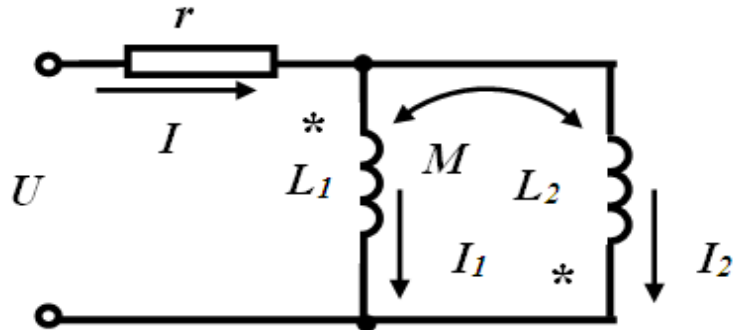


Рисунок 3.4-2 – Коло з ідеальними індуктивностями та магнітним зв'язком (зустрічне увімкнення)

Для другого рівняння цієї системи виконаємо еквівалентні перетворення.

$$\underline{I}r + \underline{I}_1 j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha M \approx \underline{I}r = U.$$

Звідси $\underline{I} = \frac{U}{r} = 3$ А. Таким чином ми отримали нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{U}{r} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 &= 0, \\ \underline{I}_1 j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha M &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \underline{I}_1 j\alpha M. \end{aligned}$$

Визначимо з першого рівняння струм \underline{I}_1 і підставимо його в друге рівняння.

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{U}{r} - \underline{I}_2, \\ \left(\frac{U}{r} - \underline{I}_2\right) j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha M &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \left(\frac{U}{r} - \underline{I}_2\right) j\alpha M. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} \frac{U}{r} j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha L_1 - \underline{I}_2 j\alpha M &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \frac{U}{r} j\alpha M + \underline{I}_2 j\alpha M, \\ \frac{U}{r} (j\alpha L_1 + j\alpha M) &= \underline{I}_2 (j\alpha L_1 + j\alpha L_2 + 2j\alpha M), \end{aligned}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\frac{U}{r}(j\alpha L_1 + j\alpha M)}{(j\alpha L_1 + j\alpha L_2 + 2j\alpha M)} = \frac{U(L_1 + M)}{r(L_1 + L_2 + 2M)},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{r} - \underline{I}_2 = \frac{U}{r} - \frac{U(L_1 + M)}{r(L_1 + L_2 + 2M)} = \frac{U(L_2 + M)}{r(L_1 + L_2 + 2M)}.$$

Числові розрахунки проведемо для тих самих значень взаємодуктивності M , що і для узгодженого увімкнення.

1. Нехай $M = 0.08$ Гн, тобто $M < L_2$.
Тоді $\underline{I}_1 = 1.174$ А, а $\underline{I}_2 = 1.826$ А.

2. Прийmemo тепер $M = 0.1$ Гн, тобто $M = L_2$.
Тоді $\underline{I}_1 = 1.2$ А, а $\underline{I}_2 = 1.8$ А.

3. В третьому випадку $M = 0.14$ Гн, коли $L_2 < M < \sqrt{L_1 L_2}$. Тоді $\underline{I}_1 = 1.241$ А, а $\underline{I}_2 = 1.759$ А.

Усі ці випадки принципово не відрізняються від прикладу 3.1, тобто нетривіальні результати спостерігаються лише при узгодженому увімкненні.

Приклад 3.5

Нехай у колі з трьома індуктивностями між двома з них існує магнітний зв'язок. Параметри кола: $U = 30$ В, $r = 10$ Ом, $L_1 = 0.2$ Гн, $L_2 = 0.1$ Гн, $L_3 = 0.12$ Гн.

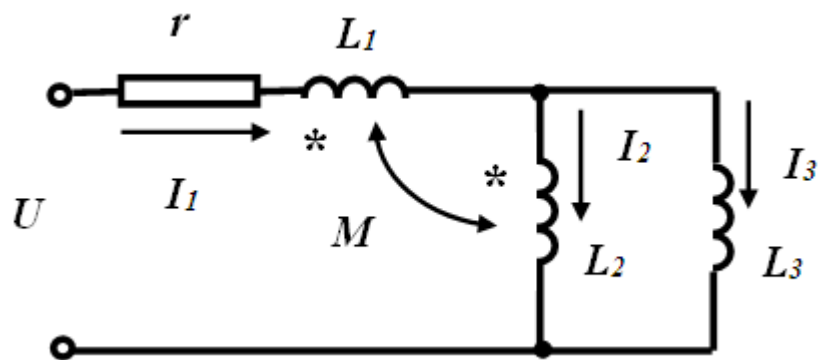


Рисунок 3.5-1 – Коло з трьома ідеальними індуктивностями та магнітним зв'язком між двома з них (узгоджене увімкнення)

Розглянемо спочатку узгоджене з'єднання котушок, як це наведено на рис. 3.5-1.

В цьому випадку система рівнянь за законами Кірхгофа буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0, \\ \underline{I}_1(r + j\alpha L_1 + j\alpha M) + \underline{I}_2(j\alpha L_2 + j\alpha M) &= U, \\ \underline{I}_3 j\alpha L_3 &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 + \underline{I}_1 j\alpha M. \end{aligned}$$

Для другого рівняння цієї системи виконаємо еквівалентні перетворення.

$$\underline{I}_1(r + j\alpha L_1 + j\alpha M) + \underline{I}_2(j\alpha L_2 + j\alpha M) \approx \underline{I}_1 r = U.$$

Звідси $\underline{I}_1 = \frac{U}{r} = 3$ А. Таким чином ми отримали нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{U}{r} - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0, \\ \underline{I}_3 j\alpha L_3 &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 + \frac{U}{r} j\alpha M. \end{aligned}$$

Визначимо з першого рівняння струм \underline{I}_3 і підставимо його в друге рівняння.

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \frac{U}{r} - \underline{I}_2, \\ \left(\frac{U}{r} - \underline{I}_2\right) j\alpha L_3 &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 + \frac{U}{r} j\alpha M. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} \frac{U}{r} j\alpha L_3 - \underline{I}_2 j\alpha L_3 &= \underline{I}_2 j\alpha L_2 + \frac{U}{r} j\alpha M, \\ \frac{U}{r} (j\alpha L_3 - j\alpha M) &= \underline{I}_2 (j\alpha L_3 + j\alpha L_2), \\ \underline{I}_2 &= \frac{\frac{U}{r} (j\alpha L_3 - j\alpha M)}{(j\alpha L_3 + j\alpha L_2)} = \frac{U(L_3 - M)}{r(L_3 + L_2)}, \\ \underline{I}_3 &= \frac{U}{r} - \underline{I}_2 = \frac{U}{r} - \frac{U(L_3 - M)}{r(L_3 + L_2)} = \frac{U(L_2 + M)}{r(L_3 + L_2)}. \end{aligned}$$

Числові розрахунки проведемо для трьох характерних випадків співвідношення між власними індуктивностями L_1, L_2, L_3 та взаємоіндуктивністю M .

1. Нехай $M = 0.05$ Гн, тобто $M < L_2$.

Тоді $I_2 = 0.955$ А, а $I_3 = 2.045$ А. Цей випадок принципово не відрізняється від прикладу 3.1.

2. Прийнемо тепер $M = 0.12$ Гн, тобто $M = L_3$.

В цьому випадку весь струм протікає в третій котушці ($I_3 = 3$ А), а в другій котушці він зникає ($I_2 = 0$ А).

3. Найбільш цікавим є третій випадок $M = 0.14$ Гн, коли $L_3 < M < \sqrt{L_1 L_2}$.

Тут ми спостерігаємо яскраво виражений так званий «ефект хибної ємності», коли струм в третій котушці ($I_3 = 3.273$ А) перевищують вхідний струм, а в другій котушці $I_2 = -0.273$ А струм міняє свій напрямок.

Тепер розглянемо випадок зустрічного увімкнення (рис. 3.5-2).

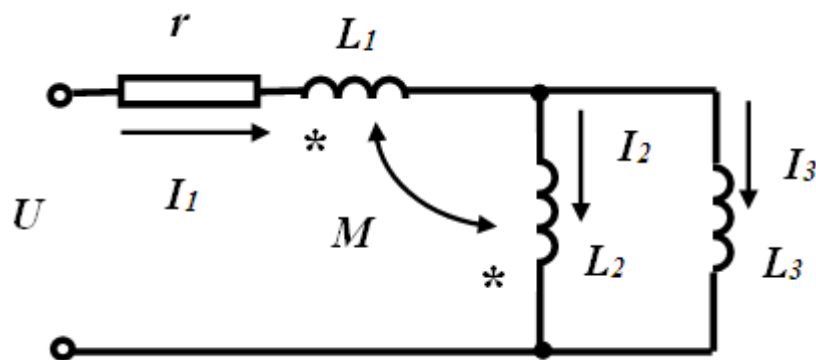


Рисунок 3.5-2 – Коло з трьома ідеальними індуктивностями та магнітним зв'язком між двома з них (зустрічне увімкнення)

В цьому випадку система рівнянь за законами Кірхгофа буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0, \\ I_1(r + j\alpha L_1 - j\alpha M) + I_2(j\alpha L_2 - j\alpha M) &= U, \\ I_3 j\alpha L_3 &= I_2 j\alpha L_2 - I_1 j\alpha M. \end{aligned}$$

Для другого рівняння цієї системи виконаємо еквівалентні перетворення.

$$I_1(r + j\alpha L_1 - j\alpha M) + I_2(j\alpha L_2 - j\alpha M) \approx I_1 r = U.$$

Звідси $\underline{I}_1 = \frac{U}{r} = 3$ А. Таким чином ми отримали нову систему рівнянь:

$$\frac{U}{r} - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0,$$

$$\underline{I}_3 j\alpha L_3 = \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \frac{U}{r} j\alpha M.$$

Визначимо з першого рівняння струм \underline{I}_3 і підставимо його в друге рівняння.

$$\underline{I}_3 = \frac{U}{r} - \underline{I}_2,$$

$$\left(\frac{U}{r} - \underline{I}_2\right) j\alpha L_3 = \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \frac{U}{r} j\alpha M.$$

Звідси випливає

$$\frac{U}{r} j\alpha L_3 - \underline{I}_2 j\alpha L_3 = \underline{I}_2 j\alpha L_2 - \frac{U}{r} j\alpha M,$$

$$\frac{U}{r} (j\alpha L_3 + j\alpha M) = \underline{I}_2 (j\alpha L_3 + j\alpha L_2),$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\frac{U}{r} (j\alpha L_3 + j\alpha M)}{(j\alpha L_3 + j\alpha L_2)} = \frac{U(L_3 + M)}{r(L_3 + L_2)},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{U}{r} - \underline{I}_2 = \frac{U}{r} - \frac{U(L_3 + M)}{r(L_3 + L_2)} = \frac{U(L_2 - M)}{r(L_3 + L_2)}.$$

Числові розрахунки проведемо для трьох характерних випадків співвідношення між власними індуктивностями L_1, L_2, L_3 та взаємодуктивністю M .

1. Нехай $M = 0.05$ Гн, тобто $M < L_2$.

Тоді $\underline{I}_2 = 2.318$ А, а $\underline{I}_3 = 0.682$ А. Цей випадок принципово не відрізняється від прикладу 3.1.

2. Прийmemo тепер $M = 0.1$ Гн, тобто $M = L_2$.

В цьому випадку весь струм протікає в другій котушці ($\underline{I}_2 = 3$ А), а в третій котушці він зникає ($\underline{I}_3 = 0$ А).

3. Найбільш цікавим є третій випадок $M = 0.14$ Гн, коли $L_2 < M < \sqrt{L_1 L_2}$.

Тут ми спостерігаємо яскраво виражений так званий «ефект хибної ємності», коли струм в другій котушці ($I_2 = 3.545$ А) перевищує вхідний струм, а в третій котушці $I_3 = -0.545$ А струм міняє свій напрямок.

Зазначимо, що цю задачу дуже складно розв'язати без допомоги методів нестандартного аналізу, а для наступної задачі це взагалі практично неможливо.

Приклад 3.6

В колі постійного струму (рис. 3.6-1) визначити струми в усіх вітках.

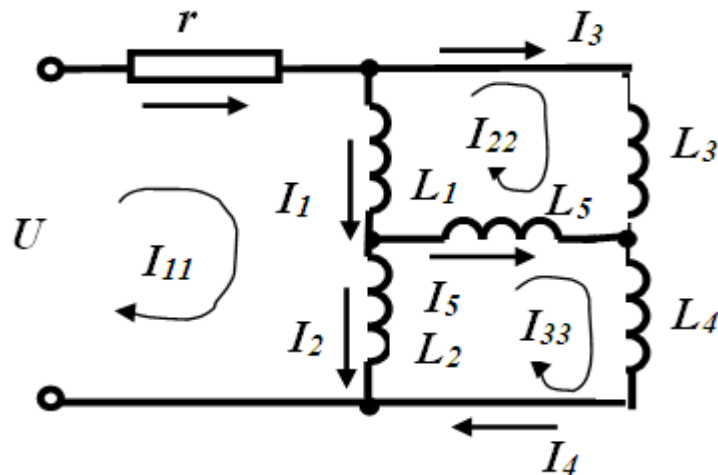


Рисунок 3.6-1 – Складне коло з ідеальними індуктивностями

Параметри схеми: $U = 100$ В, $r = 10$ Ом, $L_1 = 0.2$ Гн, $L_2 = 0.15$ Гн, $L_3 = 0.1$ Гн, $L_4 = 0.05$ Гн, $L_5 = 0.025$ Гн.

Проведемо цей розрахунок методом контурних струмів.

Спочатку визначимо вхідний опір цього кола, перетворивши зірку $L_1-L_2-L_5$ в еквівалентний трикутник $L_{15}-L_{15}-L_{25}$ (рис. 3.6-2).

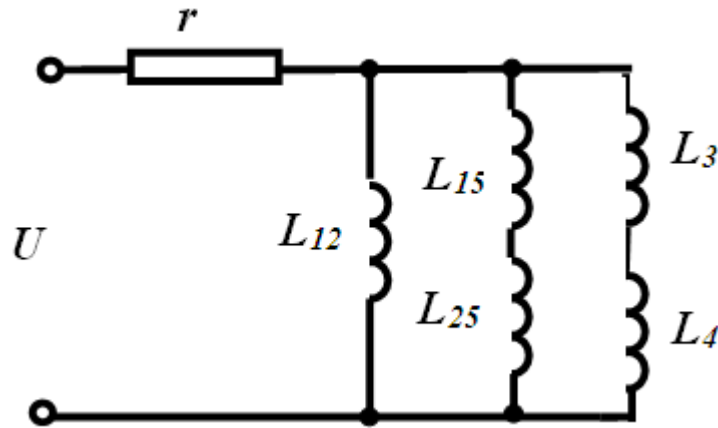


Рисунок 3.6-2 – Еквівалентна схема кола після перетворення зірки в трикутник

Знайдемо опори еквівалентного трикутника:

$$j\alpha L_{12} = j\alpha L_1 + j\alpha L_2 + \frac{j\alpha L_1 j\alpha L_2}{j\alpha L_5} = j\alpha L_1 + j\alpha L_2 + j\alpha \frac{L_1 L_2}{L_5} =$$

$$= j\alpha \cdot 0.2 + j\alpha \cdot 0.15 + j\alpha \frac{0.2 \cdot 0.15}{0.025} = j\alpha \cdot 1.55,$$

$$j\alpha L_{15} = j\alpha L_1 + j\alpha L_5 + \frac{j\alpha L_1 j\alpha L_5}{j\alpha L_2} = j\alpha L_1 + j\alpha L_5 + j\alpha \frac{L_1 L_5}{L_2} =$$

$$= j\alpha \cdot 0.2 + j\alpha \cdot 0.025 + j\alpha \frac{0.2 \cdot 0.025}{0.15} = j\alpha \cdot 0.258,$$

$$j\alpha L_{25} = j\alpha L_2 + j\alpha L_5 + \frac{j\alpha L_2 j\alpha L_5}{j\alpha L_1} = j\alpha L_2 + j\alpha L_5 + j\alpha \frac{L_2 L_5}{L_1} =$$

$$= j\alpha \cdot 0.15 + j\alpha \cdot 0.025 + j\alpha \frac{0.15 \cdot 0.025}{0.2} = j\alpha \cdot 0.194.$$

Зі схеми (рис. 3.6-2) визначимо вхідний опір:

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = r + \frac{j\alpha L_{12} \cdot j\alpha(L_{15} + L_{25}) \cdot j\alpha(L_3 + L_4)}{j\alpha L_{12} \cdot j\alpha(L_{15} + L_{25}) + j\alpha L_{12} \cdot j\alpha(L_3 + L_4) + j\alpha(L_{15} + L_{25}) \cdot j\alpha(L_3 + L_4)} =$$

$$= 10 + j\alpha \cdot 0.105 \approx 10 \text{ Ом.}$$

Звідси випливає, що контурний струм першого контуру відомий

$$\underline{I}_{11} = \frac{U}{r} = 10 \text{ A},$$

а система рівнянь матиме вигляд

$$\underline{I}_{11}\underline{Z}_{21} + \underline{I}_{22}\underline{Z}_{22} + \underline{I}_{33}\underline{Z}_{23} = 0,$$

$$\underline{I}_{11}\underline{Z}_{31} + \underline{I}_{22}\underline{Z}_{32} + \underline{I}_{33}\underline{Z}_{33} = 0.$$

Знайдемо власні та спільні опори контурів:

$$\underline{Z}_{21} = -j\alpha L_1, \quad \underline{Z}_{23} = -j\alpha L_5, \quad \underline{Z}_{31} = -j\alpha L_2,$$

$$\underline{Z}_{22} = j\alpha L_1 + j\alpha L_3 + j\alpha L_5, \quad \underline{Z}_{33} = j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5.$$

Підставивши вирази для першого контурного струму, а також контурних та спільних опорів, отримаємо

$$\frac{U}{r}(-j\alpha L_1) + \underline{I}_{22}(j\alpha L_1 + j\alpha L_3 + j\alpha L_5) + \underline{I}_{33}(-j\alpha L_5) = 0,$$

$$\frac{U}{r}(-j\alpha L_2) + \underline{I}_{22}(-j\alpha L_5) + \underline{I}_{33}(j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5) = 0.$$

Визначимо з першого рівняння третій контурний струм і підставимо його в друге рівняння.

$$\underline{I}_{33} = \frac{\frac{U}{r}(-j\alpha L_1) + \underline{I}_{22}(j\alpha L_1 + j\alpha L_3 + j\alpha L_5)}{j\alpha L_5} =$$

$$= \frac{\underline{I}_{22}(L_1 + L_3 + L_5) - \frac{U}{r}L_1}{L_5} = \underline{I}_{22} \frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5} - \frac{UL_1}{rL_5},$$

$$\frac{U}{r}(-j\alpha L_2) + \underline{I}_{22}(-j\alpha L_5) + \left(\underline{I}_{22} \frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5} - \frac{UL_1}{rL_5} \right) (j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5) =$$

$$= \underline{I}_{22} \left[\frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5} (j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5) - j\alpha L_5 \right] -$$

$$- \frac{UL_1}{rL_5} (j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5) - \frac{U}{r} j\alpha L_2 = 0.$$

Звідси знаходимо контурні струми

$$\begin{aligned} \underline{I}_{22} &= \frac{\frac{UL_1}{rL_5}(j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5) + \frac{U}{r}j\alpha L_2}{\frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5}(j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5) - j\alpha L_5} = \\ &= \frac{\frac{UL_1}{rL_5}(L_2 + L_4 + L_5) + \frac{U}{r}L_2}{\frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5}(L_2 + L_4 + L_5) - L_5} = 6.724 \text{ A}, \\ \underline{I}_{33} &= \frac{\frac{UL_1}{rL_5}(L_2 + L_4 + L_5) + \frac{U}{r}L_2}{\frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5}(L_2 + L_4 + L_5) - L_5} \cdot \frac{L_1 + L_3 + L_5}{L_5} - \frac{UL_1}{rL_5} = 7.414 \text{ A}. \end{aligned}$$

Далі легко знайти струми у вітках:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = 3.276 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{33} = 2.586 \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = 6.724 \text{ A}, \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_{33} = 7.414 \text{ A}, \quad \underline{I}_5 = \underline{I}_{33} - \underline{I}_{22} = 0.69 \text{ A}$$

Розподіл струмів між індуктивностями суттєво змінюється, якщо у вітку з L_5 увімкнути додатковий резистор.

Приклад 3.7

В колі постійного струму (рис. 3.7) визначити струми в усіх вітках.

Параметри схеми:

$$U = 100 \text{ В}, \quad r_1 = 10 \text{ Ом}, \quad r_2 = 20 \text{ Ом}, \quad L_1 = 0.2 \text{ Гн}, \quad L_2 = 0.15 \text{ Гн},$$

$$L_3 = 0.1 \text{ Гн}, \quad L_4 = 0.05 \text{ Гн}, \quad L_5 = 0.025 \text{ Гн}.$$

Проведемо цей розрахунок також методом контурних струмів.

Система рівнянь має вигляд

$$\underline{I}_{11}\underline{Z}_{11} + \underline{I}_{22}\underline{Z}_{12} + \underline{I}_{33}\underline{Z}_{13} = U,$$

$$\underline{I}_{11}\underline{Z}_{21} + \underline{I}_{22}\underline{Z}_{22} + \underline{I}_{33}\underline{Z}_{23} = 0,$$

$$\underline{I}_{11}\underline{Z}_{31} + \underline{I}_{22}\underline{Z}_{32} + \underline{I}_{33}\underline{Z}_{33} = 0.$$

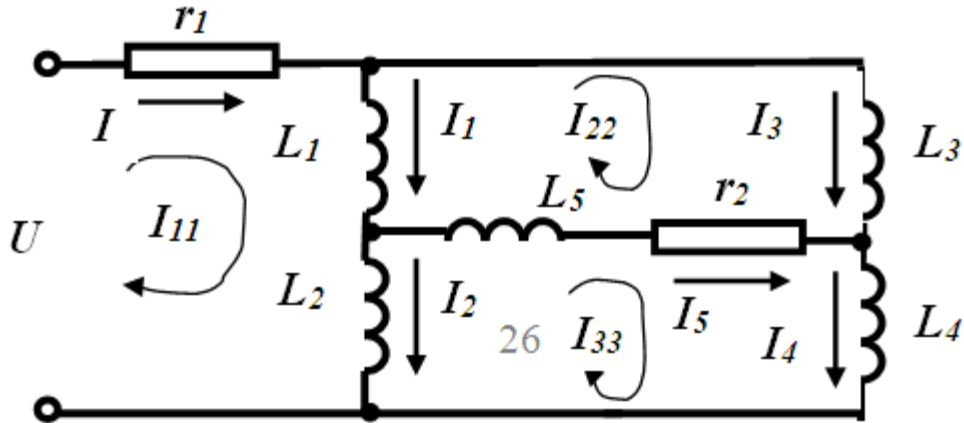


Рисунок 3.7 – Складне коло з ідеальними індуктивностями та резистором

Знайдемо власні та спільні опори контурів:

$$\underline{Z}_{21} = -j\alpha L_1, \quad \underline{Z}_{23} = -r_2 - j\alpha L_5, \quad \underline{Z}_{31} = -j\alpha L_2,$$

$$\underline{Z}_{22} = j\alpha L_1 + j\alpha L_3 + j\alpha L_5 + r_2, \quad \underline{Z}_{33} = j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5 + r_2.$$

Розглянемо спочатку перше рівняння, підставивши в нього вирази для власних та спільних опорів.

$$\underline{I}_{11}(r_1 + j\alpha L_1 + j\alpha L_2) + \underline{I}_{22}(-j\alpha L_1) + \underline{I}_{33}(-j\alpha L_2) = U.$$

Оскільки лише коефіцієнт при \underline{I}_{11} не є нескінченно малим, виконаємо еквівалентні перетворення:

$$\underline{I}_{11}(r_1 + j\alpha L_1 + j\alpha L_2) + \underline{I}_{22}(-j\alpha L_1) + \underline{I}_{33}(-j\alpha L_2) \approx \underline{I}_{11}r_1 = U.$$

Звідси випливає, що як і в попередньому прикладі

$$\underline{I}_{11} = \underline{I} = \frac{U}{r_1} = 10 \text{ А.}$$

Аналогічно виконаємо еквівалентні перетворення для другого рівняння.

$$\begin{aligned} \frac{U}{r_1}(-j\alpha L_1) + \underline{I}_{22}(j\alpha L_1 + j\alpha L_3 + j\alpha L_5 + r_2) + \underline{I}_{33}(-r_2 - j\alpha L_5) &\approx \\ \approx r_2 \underline{I}_{22} - r_2 \underline{I}_{33} &= 0, \end{aligned}$$

звідки

$$\underline{I}_{22} = \underline{I}_{33},$$

а

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{33} - \underline{I}_{22} = 0.$$

Проведемо еквівалентні перетворення для третього рівняння.

$$\frac{U}{r_1}(-j\alpha L_2) + \underline{I}_{22}(-r_2 - j\alpha L_5) + \underline{I}_{33}(j\alpha L_2 + j\alpha L_4 + j\alpha L_5 + r_2) \approx$$

$$\approx -r_2 \underline{I}_{22} + r_2 \underline{I}_{33} = 0.$$

Очевидно

$$\underline{I}_{22} = \underline{I}_{33}.$$

Оскільки струм в індуктивності L_5 відсутній, задача суттєво спрощується і за аналогією з прикладом 3.1 можна записати

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{U(L_3 + L_4)}{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)r_1} = 3 \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 = \frac{U(L_1 + L_2)}{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)r_1} = 7 \text{ А}.$$

3.2 КОЛА З ІДЕАЛЬНИМИ ЄМНОСТЯМИ

Прийнявши $\omega = \alpha$, для комплексного опору ємності можна записати

$$\underline{Z}_C \approx \frac{1}{j\alpha C}.$$

Приклад 3.8

В колі постійного струму (рис. 3.8) визначи напруги на ємностях C_1, C_2 . Параметри кола: $U = 100 \text{ В}$, $C_1 = 200 \text{ мкФ}$, $C_2 = 150 \text{ мкФ}$.

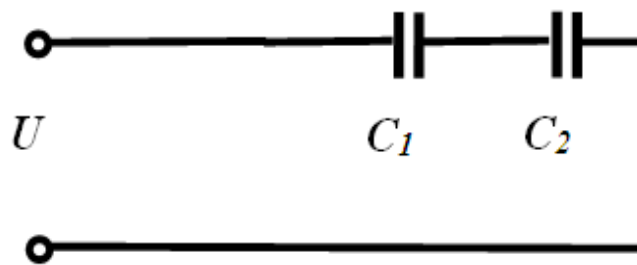


Рисунок 3.7 – Коло з ідеальними ємностями

Знайдемо повний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{вх}} \approx \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{1}{j\alpha C_2} = \frac{j\alpha C_1 + j\alpha C_2}{(j\alpha C_1)(j\alpha C_2)} = \frac{C_1 + C_2}{j\alpha C_1 C_2},$$

тоді струм, що через нього протікає

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{\text{ex}}} = \frac{Uj\alpha C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

звідси напруги на ємностях

$$U_{C_1} = \underline{I} \frac{1}{j\alpha C_1} = \frac{UC_2}{C_1 + C_2} = 42.857 \text{ В},$$

$$U_{C_2} = \underline{I} \frac{1}{j\alpha C_2} = \frac{UC_1}{C_1 + C_2} = 57.143 \text{ В}.$$

Приклад 3.9

В колі постійного струму (рис. 3.9) визначити напруги U_{C_1} , U_{C_2} , U_{ab} .

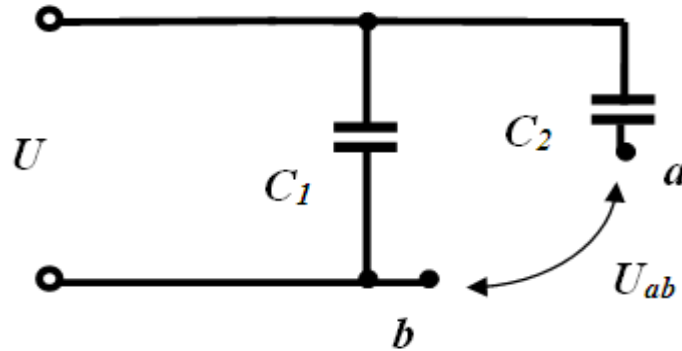


Рисунок 3.9 – Коло з ідеальними ємностями та розривом

По-перше, очевидно, що $U_{C_1} = U$.

По-друге, зі схеми кола видно, що вітка з ємністю C_2 розірвана.

Розрив вітки можна представити як умовний ідеальний конденсатор, у якого площа обкладинок прямує до нуля, а відстань між обкладинками прямує до нескінченності, тобто його ємність C дорівнює нескінченно малому числу.

Тоді комплексний опір цього умовного конденсатора буде дорівнювати

$$\underline{Z}_C \approx \frac{1}{j\alpha_1 \alpha_2}.$$

Добуток двох нескінченно малих чисел є нескінченно малим числом більш високого порядку, ніж кожен зі співмножників, тому в загальному випадку має місце одна з нерівностей

$$j\alpha_1\alpha_2 \leq jm\alpha_1^2,$$

або

$$j\alpha_1\alpha_2 \leq jm\alpha_2^2.$$

Розв'яжемо задачу для першої нерівності (очевидно, що для другої результат буде аналогічним).

Отже для комплексний опір цього умовного конденсатора можна записати

$$\underline{Z}_C \approx \frac{1}{jm\alpha_1^2}.$$

В результаті повний комплексний опір другої вітки дорівнює

$$\underline{Z} \approx \frac{1}{jm\alpha_1^2} + \frac{1}{j\alpha_1 C_2} = \frac{jm\alpha_1^2 + j\alpha_1 C_2}{(jm\alpha_1^2)(j\alpha_1 C_2)} = \frac{m\alpha_1 + C_2}{jm\alpha_1^2 C_2},$$

а струм другої вітки

$$\underline{I} = \frac{Ujm\alpha_1^2 C_2}{m\alpha_1 + C_2} \approx \frac{Ujm\alpha_1^2 C_2}{C_2} \approx Ujm\alpha_1^2.$$

Звідси напруги на ємності C_2

$$U_{C_2} = \underline{I} \frac{1}{j\alpha_1 C_2} = \frac{Ujm\alpha_1^2}{j\alpha_1 C_2} = \frac{Um\alpha_1}{C_2} \approx 0.$$

Напругу U_{ab} можна знайти як напругу на умовному конденсаторі

$$U_{ab} = \underline{I} \frac{1}{jm\alpha_1^2} = \frac{Ujm\alpha_1^2}{jm\alpha_1^2} = U.$$

Легко помітити, в цьому прикладі напруги на конденсаторах не залежать від їх ємностей.

Приклад 3.10

В колі постійного струму (рис. 3.10) визначити напруги на ємностях C_1, C_2, C_3 . Параметри кола: $U = 100$ В, $C_1 = 200$ мкФ, $C_2 = 150$ мкФ, $C_3 = 100$ мкФ.

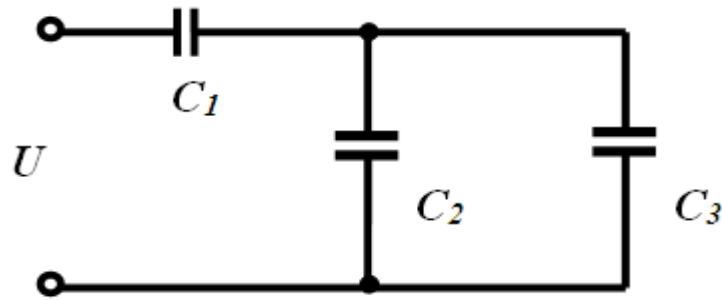


Рисунок 3.10 – Розгалужене коло з ідеальними ємностями

Знайдемо повний комплексний опір кола

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} &\approx \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{j\alpha C_2} + \frac{1}{j\alpha C_3}}} = \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{1}{\frac{(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)}{j\alpha C_2 + j\alpha C_3}} = \\ &= \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{1}{j\alpha C_2 + j\alpha C_3} = \frac{j\alpha C_1 + j\alpha C_2 + j\alpha C_3}{j\alpha C_1(j\alpha C_2 + j\alpha C_3)} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{j\alpha C_1(C_2 + C_3)}, \end{aligned}$$

тоді струм, що протікає через ємність C_1

$$\underline{I}_{C_1} = \frac{U}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{Uj\alpha C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Струми, що протікають через ємності C_2, C_3 знаходяться як

$$\begin{aligned} \underline{I}_{C_2} &= \underline{I}_{C_1} \frac{\frac{1}{j\alpha C_3}}{\frac{1}{j\alpha C_2} + \frac{1}{j\alpha C_3}} = \frac{Uj\alpha C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot \frac{(j\alpha C_2)}{j\alpha C_2 + j\alpha C_3} = \\ &= \frac{Uj\alpha C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{C_3} &= \underline{I}_{C_1} \frac{\frac{1}{j\alpha C_2}}{\frac{1}{j\alpha C_2} + \frac{1}{j\alpha C_3}} = \frac{Uj\alpha C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot \frac{(j\alpha C_3)}{j\alpha C_2 + j\alpha C_3} = \\ &= \frac{Uj\alpha C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}. \end{aligned}$$

Звідси напруги на ємностях

$$U_{C_1} = \underline{I}_{C_1} \frac{1}{j\alpha C_1} = \frac{Uj\alpha C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot \frac{1}{j\alpha C_1} = \frac{U(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 42.857 \text{ В},$$

$$U_{C_2} = \underline{I}_{C_2} \frac{1}{j\alpha C_2} = \frac{Uj\alpha C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot \frac{1}{j\alpha C_2} = \frac{U C_1}{C_1 + C_2 + C_3} = 57.143 \text{ В}.$$

$$U_{C_3} = \underline{I}_{C_3} \frac{1}{j\alpha C_3} = \frac{Uj\alpha C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot \frac{1}{j\alpha C_3} = \frac{U C_1}{C_1 + C_2 + C_3} = 57.143 \text{ В}.$$

Очевидно, напруги на ємностях C_2, C_3 однакові.

Приклад 3.11

В колі постійного струму (рис. 3.11) визначити напруги на всіх ємностях.

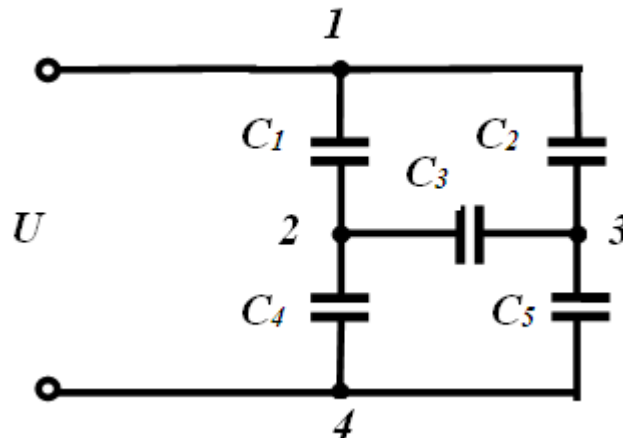


Рисунок 3.11 – Складне коло з ідеальними ємностями

Параметри кола: $U = 100 \text{ В}$, $C_1 = 200 \text{ мкФ}$, $C_2 = 150 \text{ мкФ}$, $C_3 = 100 \text{ мкФ}$, $C_4 = 50 \text{ мкФ}$, $C_5 = 25 \text{ мкФ}$.

Цю задачу зручно розв'язувати методом вузлових потенціалів, прийнявши вузол 4 базовим, тобто $\varphi_4 = 0$. Відзначимо, що $\varphi_1 = U$, тому задача зведеться до системи з 2-х рівнянь.

Запишемо систему рівнянь

$$-\varphi_1 Y_{21} + \varphi_2 Y_{22} - \varphi_3 Y_{23} = 0,$$

$$-\varphi_1 Y_{31} - \varphi_2 Y_{32} + \varphi_3 Y_{33} = 0.$$

Підставивши вирази для потенціалу першого вузла, а також власних та спільних провідностей, отримаємо

$$\begin{aligned} -U(j\alpha C_1) + \underline{\varphi}_2(j\alpha C_1 + j\alpha C_4 + j\alpha C_3) - \underline{\varphi}_3(j\alpha C_3) &= 0, \\ -U(j\alpha C_2) - \underline{\varphi}_2(j\alpha C_3) + \underline{\varphi}_3(j\alpha C_2 + j\alpha C_3 + j\alpha C_5) &= 0. \end{aligned}$$

Визначимо з першого рівняння потенціал другого вузла і підставимо його в друге рівняння.

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_2 &= \frac{U(j\alpha C_1) + \underline{\varphi}_3(j\alpha C_3)}{j\alpha C_1 + j\alpha C_4 + j\alpha C_3} = \frac{UC_1 + \underline{\varphi}_3 C_3}{C_1 + C_4 + C_3}, \\ -U(j\alpha C_2) - \frac{UC_1 + \underline{\varphi}_3 C_3}{C_1 + C_4 + C_3}(j\alpha C_3) + \underline{\varphi}_3(j\alpha C_2 + j\alpha C_3 + j\alpha C_5) &= \\ &= -U(j\alpha C_2) - \frac{UC_1(j\alpha C_3)}{C_1 + C_4 + C_3} - \frac{\underline{\varphi}_3 C_3}{C_1 + C_4 + C_3}(j\alpha C_3) + \\ &+ \underline{\varphi}_3(j\alpha C_2 + j\alpha C_3 + j\alpha C_5) = 0. \end{aligned}$$

Звідси знайдемо потенціали

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_3 &= \frac{UC_2 + \frac{UC_1 C_3}{C_1 + C_4 + C_3}}{C_2 + C_3 + C_5 - \frac{C_3^2}{C_1 + C_4 + C_3}} = 81.159 \text{ В}, \\ \underline{\varphi}_2 &= \frac{UC_1}{C_1 + C_4 + C_3} + \\ &+ \frac{UC_2 + \frac{UC_1 C_3}{C_1 + C_4 + C_3}}{C_2 + C_3 + C_5 - \frac{C_3^2}{C_1 + C_4 + C_3}} \frac{C_3}{C_1 + C_4 + C_3} = 84.058 \text{ В}. \end{aligned}$$

Далі легко знайти напруги на ємностях

$$U_{C_1} = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2 = 18.841 \text{ В},$$

$$U_{C_2} = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3 = 15.942 \text{ В},$$

$$U_{C_3} = \underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_2 = 2.899 \text{ В},$$

$$U_{C_4} = \underline{\varphi}_2 = 81.159 \text{ В},$$

$$U_{C_5} = \underline{\varphi}_3 = 84.058 \text{ В}.$$

4 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ПОРУШЕННЯМ ЗАКОНІВ КОМУТАЦІЇ

При аналізі перехідних режимів електричних кіл час від часу зустрічаються кола для яких безпосереднє використання законів комутації неможливе, тобто для таких кіл

$$\begin{aligned}i_L(0-) &\neq i_L(0+), \\ u_C(0-) &\neq u_C(0+).\end{aligned}$$

В таких випадках користуються більш узагальненими співвідношеннями, що стосуються неперервності поточкозчеплень (для індуктивностей) та зарядів (для ємностей), тобто

$$\begin{aligned}\psi_L(0-) &\neq \psi_L(0+), \\ q_C(0-) &\neq q_C(0+).\end{aligned}$$

Але такі задачі можна аналізувати використовуючи закони комутації в звичайному вигляді та методи нестандартного аналізу, як це буде показано нижче.

4.1 ІНДУКТИВНІ КОЛА 1 ПОРЯДКУ

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4.1. Розглянемо коло, яке зображене на рис. 4.1-1. Параметри схеми: $U = 600$ В, $r_1 = r_2 = 20$ Ом, $L_1 = 0.2$ Гн, $L_2 = 0.3$ Гн. Визначимо перехідні струми $i_1(t)$, $i_2(t)$.

Зазвичай, в такому колі аналіз перехідного процесу виконують застосовуючи узагальнений закон комутації, який відноситься до поточкозчеплень. Разом з тим, ми можемо використати і звичайний закон комутації, якщо застосувати методи нестандартного аналізу.

Оскільки вітка з комутаційним апаратом до комутації була закорочена, будемо вважати, що до комутації вона мала опір $r_3 = \alpha$. Після комутації замінимо розрив цієї вітки нескінченно великим опором $r_3 = \beta = \frac{1}{\alpha}$ (рис. 4.1-2)

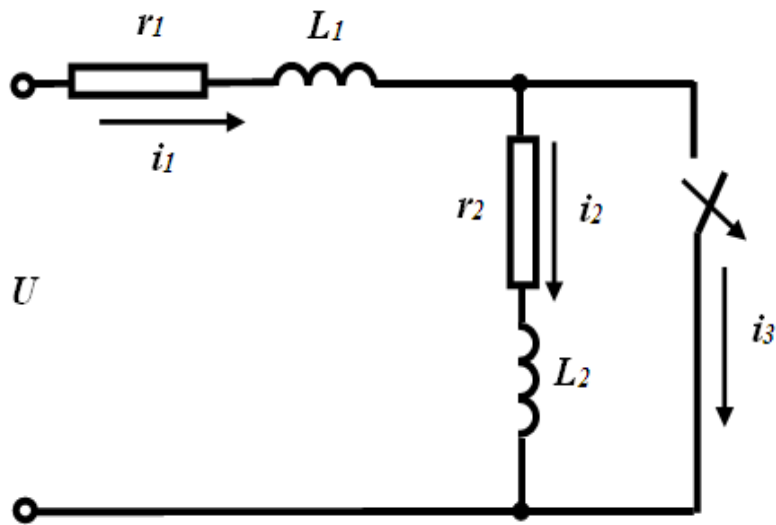


Рисунок 4.1-1 – Коло з ідеальними індуктивностями

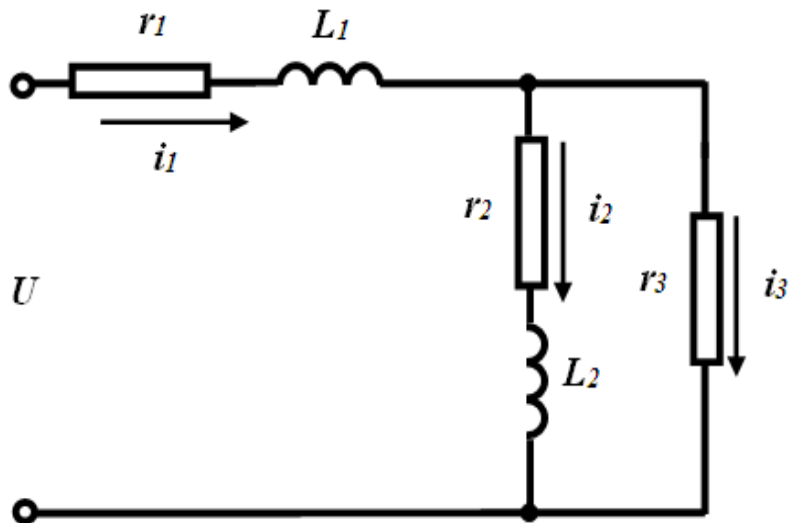


Рисунок 4.1-2 – Еквівалентне коло з ідеальними індуктивностями

Тоді початкові умови знаходяться як:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 \alpha}{r_2 + \alpha}} \approx \frac{U}{r_1} = 30 \text{ А,}$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = i_1(0_-) \frac{r_3}{r_2 + r_3} = i_1(0_-) \frac{\alpha}{r_2 + \alpha} \approx 0 \text{ А,}$$

$$i_3(0_-) = i_1(0_-) \frac{r_2}{r_2 + r_3} = i_1(0_-) \frac{r_2}{r_2 + \alpha} \approx i_1(0_-) \approx 30 \text{ A.}$$

Примусову складову визначимо як:

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 \frac{1}{\alpha}}{r_2 + \frac{1}{\alpha}}} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2}{\alpha r_2 + 1}} \approx \frac{U}{r_1 + r_2} = 15 \text{ A,}$$

$$i_{2np} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 \frac{1}{\alpha}}{r_2 + \frac{1}{\alpha}}} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2}{\alpha r_2 + 1}} \frac{1}{\alpha r_2 + 1} \approx \frac{U}{r_1 + r_2} = 15 \text{ A.}$$

За методом вхідного опору

$$Z_{\text{вх}}(p) = r_1 + pL_1 + \frac{(r_2 + pL_2) \frac{1}{\alpha}}{r_2 + pL_2 + \frac{1}{\alpha}} =$$

$$\frac{r_1 r_2 + p r_1 L_2 + r_1 \frac{1}{\alpha} + p r_2 L_1 + p \frac{1}{\alpha} L_1 + p^2 L_1 L_2 + r_2 \frac{1}{\alpha} + p \frac{1}{\alpha} L_2}{r_2 + pL_2 + \frac{1}{\alpha}}$$

сформуємо характеристичне рівняння:

$$p^2 L_1 L_2 + p \left(r_2 L_1 + r_1 L_2 + \frac{1}{\alpha} L_1 + \frac{1}{\alpha} L_2 \right) + r_1 r_2 + \frac{1}{\alpha} (r_1 + r_2) =$$

$$= \alpha p^2 L_1 L_2 + p (\alpha r_2 L_1 + \alpha r_1 L_2 + L_1 + L_2) + \alpha r_1 r_2 + (r_1 + r_2) = 0. \quad (4.1)$$

Це квадратне рівняння має два корені. Перший з них можна визначити, виконавши еквівалентні перетворення рівняння (4.1):

$$\alpha p^2 L_1 L_2 + p (\alpha r_2 L_1 + \alpha r_1 L_2 + L_1 + L_2) + \alpha r_1 r_2 + (r_1 + r_2) \approx$$

$$\approx p (L_1 + L_2) + (r_1 + r_2) = 0. \quad (4.2)$$

Звідси випливає

$$p_1 = -\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} = -80 \text{ с}^{-1}.$$

Другий корінь знайдемо за допомогою теореми Вієта:

для квадратного рівняння $ap^2 + bp + c = 0$ справедлива формула

$$p_1 p_2 = \frac{c}{a}, \text{ або } p_2 = \frac{c}{ap_1}.$$

З характеристичного рівняння (4.1) випливає, що $c = \alpha r_1 r_2 + r_1 + r_2$, а $a = \alpha L_1 L_2$, тому:

$$p_2 = \frac{\alpha r_1 r_2 + r_1 + r_2}{\alpha L_1 L_2 \left(-\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} \right)} = -\frac{(r_1 + r_2)(L_1 + L_2)}{\alpha L_1 L_2 (r_1 + r_2)} = -\frac{\beta(L_1 + L_2)}{\alpha L_1 L_2} = -\frac{8.333}{\alpha} \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$i_2(t) = i_{2np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 15 + A_1 e^{-80t} + A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha} t}, \quad (4.3)$$

а

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_2(t) + \frac{i_2(t)r_2 + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}}{r_3} = (i_{2np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) + \\ &+ \alpha r_2 (i_{2np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) + \alpha L_2 p_1 A_1 e^{p_1 t} + \alpha L_2 p_2 A_2 e^{p_2 t} \approx \\ &\approx 15 + A_1 e^{-80t} + A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha} t} - \left(\alpha \cdot 0.3 \cdot \frac{8.333}{\alpha} \right) A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha} t} \\ &\approx 15 + A_1 e^{-80t} - 1.5 A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha} t}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Струм $i_3(t)$ визначається як

$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = -2.5 A_2 e^{-\frac{8.333}{\alpha} t}. \quad (4.5)$$

Для визначення сталих інтегрування треба у виразах (4.3) та (4.4) підставити замість змінної t значення початкового моменту часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ (початковий моменту часу позначається символом α_1 ,

оскільки за своєю фізичною природою відрізняється від опору $r_3 = \beta = \frac{1}{\alpha}$).

При цьому виникає невизначеність $e^{-8.333 \frac{\alpha_1}{\alpha}}$.

Співвідношення нескінченно малих чисел α та α_1 неможливо встановити суто математичним шляхом, оскільки вони відносяться до *різномірних* параметрів. Проаналізуємо їх з фізичної точки зору. Нагадаємо, що α_1 – це *початковий моменту часу*, а α – це *активна провідність розриву кола*, яку ми спеціально вводимо для виконання стандартних законів комутації. Оскільки ці величини є *незалежними* одна від одної, то *завжди* можна вибрати їх так, щоб забезпечити умову $\alpha_1 \approx \alpha^2$. Таким чином можна записати

$$e^{-8.333 \frac{\alpha_1}{\alpha}} = e^{-8.333 \frac{\alpha^2}{\alpha}} = e^{-8.333\alpha} \approx 1, \quad (4.6)$$

Враховуючи (4.3), (4.4), (4.5) та (4.6) отримаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування

$$\begin{aligned} 15 + A_1 - 1.5A_2 &= 30, \\ 15 + A_1 + A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Звідси $A_1 = -3$, $A_2 = -12$.

Таким чином

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 15 - 3e^{-80t} + 18e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \text{ А}, \\ i_2(t) &= 15 - 3e^{-80t} - 12e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \text{ А}, \\ i_3(t) &= 30e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \text{ А}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оскільки $e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \approx \alpha$, можна записати

$$\begin{aligned}
\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) i_1(t) &= 15 - 3e^{-80t} + 18e^{-\frac{8.333}{\alpha}t} \approx \\
&\approx 15 - 3e^{-80t} + 18\alpha \approx 15 - 3e^{-80t}, \\
\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) i_1(t) &= 15 - 3e^{-80t} - 12e^{-8.333\beta t} \approx \\
&\approx 15 - 3e^{-80t} - 12\alpha \approx 15 - 3e^{-80t}, \\
\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) i_3(t) &= 30e^{-8.333\beta t} \approx 30\alpha \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Нагадаємо, що нескінченно великий опір $r_3 = \beta = \frac{1}{\alpha}$ було штучно введено для забезпечення виконання стандартних законів комутації. Розглянемо тепер які значення приймають струми у вітках в моменти $t = 0$ і $t = 0_+$ в реальному колі для якого $r_3 = \infty \approx \beta^\beta$.

Врахуємо при цьому, що

$$e^{-8.333\infty\alpha_1} \approx e^{-8.333\beta^\beta\alpha_1} \approx e^{-\frac{8.333}{\alpha^\beta}\alpha_1} \approx \alpha.$$

Як вже визначалось, до комутації при $t < 0$ (зокрема при $t = 0_-$) $i_1 = i_3 = 30$ А, $i_2 = 0$ А.

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ вирази (4.7) з урахуванням (4.2) приймуть вигляд

$$\begin{aligned}
i_1(0_+) &= 15 - 3e^{-80\alpha_1} + 18e^{-8.333\infty\alpha_1} \approx 15 - 3 + 18\alpha \approx 12 \text{ А}, \\
i_2(0_+) &= 15 - 3e^{-80\alpha_1} - 12e^{-8.333\infty\alpha_1} \approx 15 - 3 - 12\alpha \approx 12 \text{ А}, \\
i_3(t) &= 30e^{-8.333\infty\alpha_1} \approx 30\alpha \approx 0 \text{ А}.
\end{aligned}$$

В момент часу $t = 0 \approx \alpha_1^\beta$ вираз

$$e^{-8.333\infty 0} \approx e^{-\frac{8.333}{\alpha^\beta}\alpha_1^\beta} \approx e^{-8.333\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^\beta}$$

стає невизначеним, оскільки час та опір є *різномірними* параметрами, тому точне значення струмів в цей момент часу визначити неможливо.

Ми можемо лише знати інтервали їх можливих значень, як то

$$30 \geq i_1(0) \geq 12,$$

$$0 \leq i_2(0) \leq 12,$$

$$30 \geq i_3(0) \geq 0.$$

Нарешті розглянемо енергетичні співвідношення в колі.

До комутації ($t < 0$) енергія була запасена лише в магнітному полі першої котушки і дорівнювала

$$W(0_-) = \frac{L_1 i_1^2(0_-)}{2} = \frac{0.2 \cdot 30^2}{2} = 90 \text{ Дж.}$$

В перший момент часу після комутації ($t = 0_+$) енергія присутня вже в полі обох котушок

$$W(0_+) = \frac{L_1 i_1^2(0_+)}{2} + \frac{L_2 i_2^2(0_+)}{2} = 36 \text{ Дж.}$$

Таким чином дефіцит енергії складає

$$\Delta W = 90 - 36 = 54 \text{ Дж.}$$

В момент комутації струми в усіх вітках стрибком міняють своє значення. Час цих змін є нескінченно малим числом, тому в першій та в другій вітках, де активні опори мають скінчені значення, на цих резисторах втрати активної енергії за цей час відсутні. Опір же третьої вітки $r_3 = \beta = \frac{1}{\alpha}$, тому саме в ньому витрачається така кількість енергії.

Втрати енергії знайдемо, враховуючи що

$$e^{-\frac{\infty}{\alpha}} \approx e^{-\frac{\beta^\beta}{\alpha}} \approx e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta+1}} \approx \alpha,$$

$$e^{-\frac{0}{\alpha}} \approx e^{-\frac{\alpha^\beta}{\alpha}} \approx e^{-\alpha^{\beta-1}} \approx 1.$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_0^\infty i_3^2(t) r_3 dt = \int_0^\infty \left(30 e^{-\frac{8.333}{\alpha} t} \right)^2 \frac{1}{\alpha} dt = \frac{900 e^{-\frac{16.666}{\alpha} t}}{-16.666 \alpha} \Bigg|_0^\infty = \\ &= -54 e^{-\frac{16.666}{\alpha} \cdot \infty} + 54 e^{-\frac{16.666}{\alpha} \cdot 0} \approx -54 \alpha + 54 \approx 54 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Приклад 4.2. Розглянемо тепер коло, в якому між індуктивностями існує магнітний зв'язок (рис. 4.2).

Параметри схеми: $U = 60$ В, $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = r_3 = 10$ Ом, $L_1 = 0.1$ Гн, $L_2 = 0.2$ Гн, $M = 0.05$ Гн.

Визначимо перехідний струм $i_1(t)$.

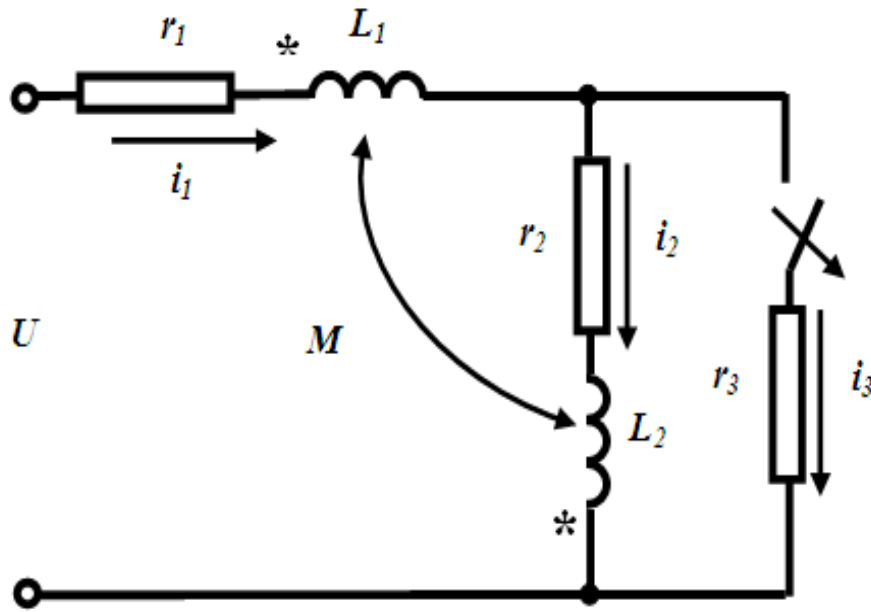


Рисунок 4.2 – Коло з ідеальними індуктивностями та магнітним зв'язком

Будемо вважати, що третя вітка після комутації буде мати опір

$$r_3 = \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Тоді початкові умови знаходяться як:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = 6 \text{ А},$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = i_1(0_-) \frac{r_3}{r_2 + r_3} = 3 \text{ А}.$$

Примусову складову визначимо як:

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 \frac{1}{\alpha}}{r_2 + \frac{1}{\alpha}}} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2}{\alpha r_2 + 1}} \approx \frac{U}{r_1 + r_2} = 4 \text{ A},$$

$$i_{2np} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 \frac{1}{\alpha}}{r_2 + \frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{\alpha} = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2}{\alpha r_2 + 1}} \frac{1}{\alpha r_2 + 1} \approx \frac{U}{r_1 + r_2} = 4 \text{ A}.$$

Для формування характеристичного рівняння складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3, \\ L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1 + r_3 i_3 &= U, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 - r_3 i_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Алгебраїзуємо цю систему, підставивши $i_3 = i_1 - i_2$.

$$\begin{aligned} (L_1 p + r_1 + r_3) i_1 - (M p + r_3) i_2 &= U, \\ -(M p + r_3) i_1 + (L_2 p + r_2 + r_3) i_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Запишемо визначник цієї системи та прирівняємо його нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} (L_1 p + r_1 + r_3) & -(M p + r_3) \\ -(M p + r_3) & (L_2 p + r_2 + r_3) \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} (L_1 p + r_1 + r_3)(L_2 p + r_2 + r_3) - (M p + r_3)^2 &= L_1 L_2 p^2 + L_1 p r_2 + L_1 p r_3 + \\ + r_1 L_2 p + r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_3 L_2 p + r_3 r_2 + r_3^2 - M^2 p^2 - 2M p r_3 - r_3^2 &= \\ = (L_1 L_2 - M^2) p^2 + [L_1 r_2 + L_2 r_1 + (L_1 + L_2 - 2M) r_3] p + & \\ + r_1 r_2 + (r_1 + r_2) r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Підставивши $r_3 = \beta = \frac{1}{\alpha}$ отримаємо

$$\begin{aligned} & (L_1 L_2 - M^2) p^2 + \left[L_1 r_2 + L_2 r_1 + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{1}{\alpha} \right] p + r_1 r_2 + (r_1 + r_2) \frac{1}{\alpha} = \\ & = \alpha (L_1 L_2 - M^2) p^2 + \alpha (L_1 r_2 + L_2 r_1) p + (L_1 + L_2 - 2M) p + \alpha r_1 r_2 + (r_1 + r_2) = 0. \end{aligned}$$

Після підстановки числових параметрів характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$0.018\alpha p^2 + (2\alpha + 0.2)p + 50\alpha + 15 = 0. \quad (4.11)$$

Це квадратне рівняння має два корені, перший з яких визначимо, виконавши необхідні перетворення

$$0.018\alpha p^2 + (2\alpha + 0.2)p + 50\alpha + 15 \approx (0.2p + 15) = 0,$$

звідки

$$p_1 = -\frac{15}{0.2} = -75 \text{ с}^{-1}.$$

Другий корінь знову знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$p_2 = \frac{c}{p_1 a} = \frac{50\alpha + 15}{(-75)0.018\alpha} \approx -\frac{15}{(-75)0.018\alpha} = -\frac{11.43}{\alpha} \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$i_1(t) = i_{1np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

і перше рівняння для визначення сталих інтегрування виглядає як

$$i_1(0_+) = i_{1np} + A_1 + A_2 = 4 + A_1 + A_2 = 6.$$

Знайдемо першу похідну струму $i_1(t)$:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Початкову умову для першої похідної струму визначимо за системою рівнянь (4.9) для моменту часу $t = (0_+)$.

$$\begin{aligned}
i_1(0_+) &= i_2(0_+) + i_3(0_+), \\
L_1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - M \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} + r_1 i_1(0_+) + r_3 i_3(0_+) &= U, \\
L_2 \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} - M \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} + r_2 i_2(0_+) - r_3 i_3(0_+) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Враховуючи, що

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 6 - 3 = 3 \text{ A},$$

і підставивши числові значення запишемо систему (4.12) у вигляді

$$\begin{aligned}
0.1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 0.05 \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} + 30 + \frac{3}{\alpha} &= 60, \\
0.2 \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} - 0.05 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} + 30 - \frac{3}{\alpha} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Визначимо з другого рівняння значення $\frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+}$

$$\frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{0.05 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 30 + \frac{3}{\alpha}}{0.2} = 0.25 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 150 + \frac{15}{\alpha}$$

підставимо його в перше рівняння

$$0.1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 0.05 \left(0.25 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 150 + \frac{15}{\alpha} \right) + 30 + \frac{3}{\alpha} = 60$$

та проведемо алгебраїчні перетворення

$$\begin{aligned}
&0.1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 0.05 \left(0.25 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 150 + \frac{15}{\alpha} \right) + 30 + \frac{3}{\alpha} = \\
&= 0.1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} - 0.0125 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} + 7.5 - \frac{0.75}{\alpha} + 30 + \frac{3}{\alpha} = \\
&0.0875 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} + 37.5 + \frac{2.25}{\alpha} = 60.
\end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{60 - 37.5 - \frac{2.25}{\alpha}}{0.0875} = 257.14 - \frac{25.71}{\alpha}$$

і система рівнянь для визначення сталих інтегрування прийме остаточний вигляд

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= -75 A_1 - \frac{11.43}{\alpha} A_2 = 257.14 - \frac{25.71}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Після перетворень другого рівняння системи отримаємо
 $-75\alpha A_1 - 11.43 A_2 = 257.14\alpha - 25.71 \approx -11.43 A_2 \approx -25.71$

звідки

$$A_2 = \frac{25.7}{11.43} = 2.25,$$

а

$$A_1 = 2 - A_2 = -0.25.$$

Таким чином

$$i_1(t) = 4 - 0.25e^{-75t} + 2.25e^{-\frac{11.43}{\alpha}t} \approx 4 - 0.25e^{-75t} \text{ А.}$$

4.2 ЄМНІСНІ КОЛА 1 ПОРЯДКУ

Приклад 4.3. Визначимо перехідні напруги на ємностях в колі, що зображене на рис. 4.3-1.

Параметри схеми: $U = 100$ В, $r_1 = 10$ Ом, $C_2 = 100$ мкФ, $C_3 = 150$ мкФ.

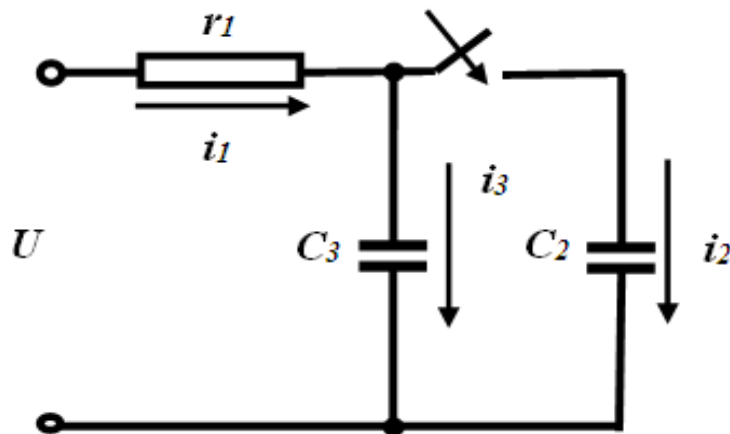


Рисунок 4.3-1 – Коло з ідеальними ємностями

Для забезпечення можливості використання другого закону комутації будемо вважати, що вітка з ємністю C_2 містить резистор $r_2 = \alpha$ (рис. 4.1-2).

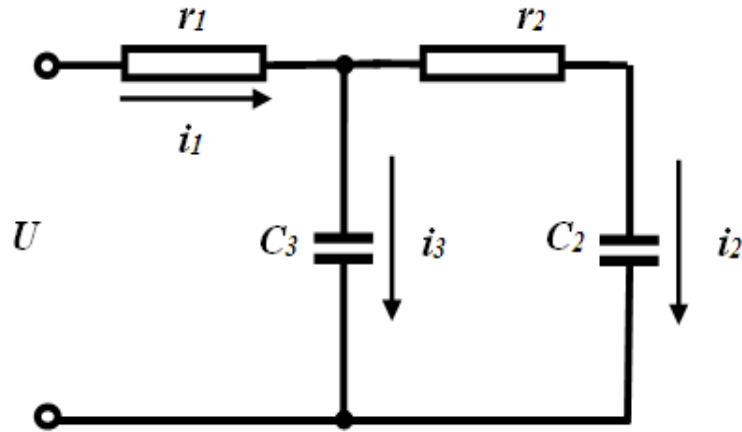


Рисунок 4.3-2 – Еквівалентне коло з ідеальними ємностями

Початкові умови знаходяться як

$$u_{C_3}(0_+) = u_{C_3}(0_-) = U = 100 \text{ В},$$

$$u_{C_2}(0_+) = u_{C_2}(0_-) = 0 \text{ В}.$$

Примусову складову визначимо як

$$u_{C_2np} = u_{C_3np} = U = 100 \text{ В}.$$

За методом вхідного опору

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}(p) &= r_1 + \frac{\left(r_2 + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{r_2 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = r_1 + \frac{\left(\alpha + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{\alpha + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \\ &= \frac{r_1(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) + \alpha C_2 p + 1}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p} = \\ &= \frac{\alpha r_1 C_2 C_3 p^2 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p} \end{aligned}$$

сформуємо характеристичне рівняння:

$$\alpha r_1 C_2 C_3 p^2 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 = 0. \quad (4.15)$$

Це квадратне рівняння має два корені, перший з яких визначимо, виконавши відповідні перетворення

$$\alpha r_1 C_2 C_3 p^2 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 \approx r_1(C_2 + C_3)p + 1 = 0,$$

звідки

$$p_1 = -\frac{1}{r_1(C_2 + C_3)} = -400 \text{с}^{-1}.$$

Другий корінь знайдемо згідно теореми Вієта (для квадратного рівняння $ap^2 + bp + c = 0$ справедлива формула $p_1 p_2 = \frac{c}{a}$)

$$p_2 = \frac{c}{p_1 a} = -\frac{1}{\alpha r_1 C_2 C_3 \frac{1}{r_1(C_2 + C_3)}} = -\frac{C_2 + C_3}{\alpha C_2 C_3} = -\frac{16667}{\alpha} \text{с}^{-1}.$$

Тоді

$$u_{C_2}(t) = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 100 + A_1 e^{-400t} + A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}, \quad (4.16)$$

а

$$\begin{aligned} u_{C_3}(t) &= u_{C_2}(t) + \alpha C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \\ &+ \alpha C_2 (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) = 100 + A_1 e^{-400t} + A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} - \\ &- \alpha 10^{-4} (400) A_1 e^{-400t} - \alpha 10^{-4} \left(\frac{16667}{\alpha} \right) A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} = 100 + \\ &+ A_1 e^{-400t} + A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} - \alpha 4 \cdot 10^{-2} A_1 e^{-400t} - 1.667 A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \approx \\ &\approx 100 + A_1 e^{-400t} - 0.667 A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для визначення сталих інтегрування треба у виразах (4.16) та (4.17) підставити замість змінної t значення початкового моменту часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ (початковий моменту часу позначається символом α_1 , оскільки за своєю фізичною природою відрізняється від опору $r_2 = \alpha$).

При цьому виникає невизначеність $e^{-16667\frac{\alpha_1}{\alpha}}$.

Співвідношення нескінченно малих чисел α та α_1 неможливо встановити суто математичним шляхом, оскільки вони відносяться до *різномірних* параметрів. Проаналізуємо їх з фізичної точки зору. Нагадаємо, що α_1 – це *початковий моменту часу*, а α – це *активна провідність ідеальної ємності*, яку ми спеціально вводимо для виконання стандартних законів комутації. Оскільки ці величини є *незалежними* одна від одної, то *завжди* можна вибрати їх так, щоб забезпечити умову $\alpha_1 \approx \alpha^2$. Таким чином можна записати

$$e^{-16667\frac{\alpha_1}{\alpha}} = e^{-16667\frac{\alpha^2}{\alpha}} = e^{-16667\alpha} \approx 1, \quad (4.18)$$

Враховуючи (4.16), (4.17) та (4.18) отримаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування

$$\begin{aligned} u_{C_2}(0_+) &= 100 + A_1 e^{-400\alpha_1} + A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha_1} \approx 100 + A_1 + A_2 = 0, \\ u_{C_3}(0_+) &= 100 + A_1 e^{-400\alpha_1} - 0.667 A_2 e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha_1} \approx 100 + A_1 - 0.667 A_2 = 100. \end{aligned}$$

З першого рівняння визначимо A_2 та підставимо в друге

$$\begin{aligned} A_2 &= -100 - A_1, \\ 100 + A_1 - 0.667(-100 - A_1) &= 100, \end{aligned}$$

Звідси

$$1.667 A_1 = -66.7$$

і

$$A_1 = \frac{-66.7}{1.667} = -40,$$

а

$$A_2 = -60.$$

Таким чином

$$u_{C_2}(t) = 100 - 40e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \text{ В}, \quad (4.19)$$

$$u_{C_3}(t) = 100 - 40e^{-400t} + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \text{ В.} \quad (4.20)$$

Оскільки $e^{-\frac{16667}{\alpha}t} = \alpha$, можна записати

$$\begin{aligned} \forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_2}(t) &= 100 - 40e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\ &\approx 100 - 40e^{-400t} - 60\alpha \approx 100 - 40e^{-400t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_3}(t) &= 100 - 40e^{-400t} + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\ &\approx 100 - 40e^{-400t} + 40\alpha \approx 100 - 40e^{-400t}. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що нескінченно малий опір $r_2 = \alpha$ було штучно введено для забезпечення виконання стандартних законів комутації. Розглянемо тепер які значення приймають напруги на ємностях в моменти $t = 0$ і $t = 0_+$ в реальному колі для якого $r_2 = 0 \approx \alpha^\beta$.

Як вже визначалось, до комутації при $t < 0$ (зокрема при $t = 0_-$) $u_{C_3} = 100$ В, $u_{C_2} = 0$ В.

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ вирази (4.16) та (4.17) приймуть вигляд

$$u_{C_2}(0_+) = 100 - 40e^{-400\alpha_1} - 60e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx 100 - 40e^{-400\alpha_1} - 60\alpha \approx 60 \text{ В,}$$

$$u_{C_3}(0_+) = 100 - 40e^{-400\alpha_1} + 40e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx 100 - 40e^{-400\alpha_1} + 40\alpha \approx 60 \text{ В.}$$

В момент часу $t = 0 \approx \alpha_1^\beta$ вираз $e^{-\frac{16667}{0}t}$ стає невизначеним, оскільки час та опір є *різнорідними* параметрами, тому точне значення напруг в цей момент часу визначити неможливо. Ми можемо лише знати інтервали їх можливих значень, як то

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{C_2}(0) \leq 60, \\ 60 &\leq u_{C_3}(0) \leq 100. \end{aligned}$$

Нарешті розглянемо енергетичні співвідношення в колі, для чого спочатку визначимо струм в ємності, яка вмикалась

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = 10^{-4} \frac{d \left(100 - 40e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right)}{dt} =$$

$$= 1.6e^{-400t} + \frac{100}{\alpha} e^{-\frac{16667}{\alpha}t}$$

До комутації ($t < 0$) енергія електричного поля була запасена лише в першому конденсаторі і дорівнювала

$$W(0_-) = \frac{C_3 u_{C_3}^2(0_-)}{2} = \frac{150 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 0.75 \text{ Дж.}$$

В перший момент часу після комутації ($t = 0_+$) енергія запасена вже в обох конденсаторах і дорівнює

$$W(0_+) = \frac{(C_3 + C_2) u_{C_3}^2(0_+)}{2} = \frac{250 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2}{2} = 0.45 \text{ Дж.}$$

Таким чином дефіцит енергії складає

$$\Delta W = 0.75 - 0.45 = 0.3 \text{ Дж.}$$

В традиційних підручниках з ТОЕ наявність цього дефіциту пояснюють втратами енергії при заряді конденсатора, який вмикається, але не наводять при цьому жодних математичних доказів. Спробуємо це довести в межах нестандартного аналізу.

$$\Delta W = \int_0^{\infty} i_2^2(t) r_2 dt = \int_0^{\infty} \left(1.6e^{-400t} + \frac{100}{\alpha} e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right)^2 \alpha dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(2.56\alpha e^{-800t} + 320e^{-\left(400 + \frac{16667}{\alpha}\right)t} + \frac{10000}{\alpha} e^{-\frac{33333}{\alpha}t} \right) dt =$$

$$= \left(-3.2 \cdot 10^{-3} \alpha e^{-800t} - \frac{320}{400 + \frac{16667}{\alpha}} e^{-\left(400 + \frac{16667}{\alpha}\right)t} - 0.3e^{-\frac{33333}{\alpha}t} \right) \Bigg|_0^{\infty} \approx$$

$$\approx -0.3e^{-\frac{33333}{\alpha} \cdot \infty} + 0.3e^{-\frac{33333}{\alpha} \cdot 0} \approx 0.3e^{-33333 \cdot 0} \approx 0.3 \text{ Дж.}$$

Закон збереження енергії виконується.

Приклад 4.4. Визначимо перехідні напруги на ємностях в колі, що зображене на рис. 4.4-1. Параметри кола: $U = 100$ В, $r_1 = 10$ Ом, $C_1 = 100$ мкФ, $C_2 = 120$ мкФ, $C_3 = 30$ мкФ.

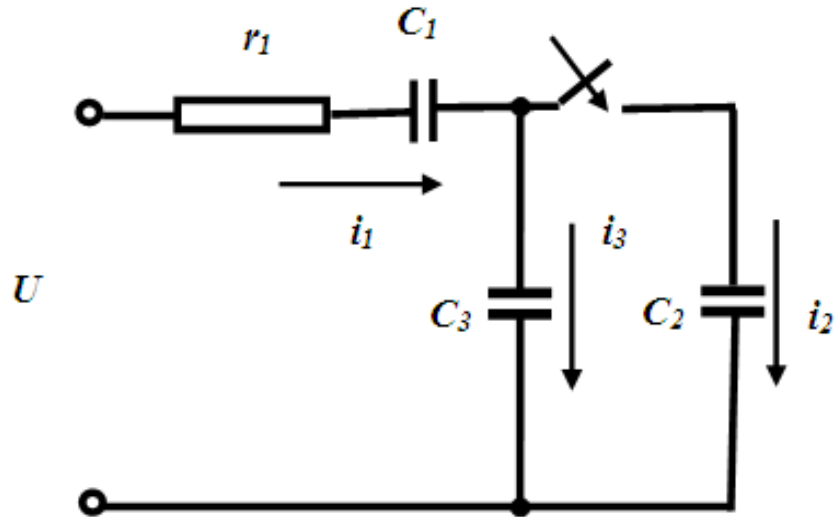


Рисунок 4.4-1 – Складне коло з ідеальними ємностями

Для визначення початкових умов приймемо, що $\omega = \alpha$, і для комплексного опору ємності запишемо $\underline{Z}_C \approx \frac{1}{j\alpha C}$.

Тоді комплексний опір кола до комутації

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ex}} &\approx r_1 + \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{1}{j\alpha C_3} = \frac{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot j\alpha C_3 + j\alpha C_3 + j\alpha C_1}{j\alpha C_1 \cdot j\alpha C_3} = \\ &= \frac{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot C_3 + C_3 + C_1}{j\alpha C_1 \cdot C_3}. \end{aligned}$$

Струм в колі

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{\text{ex}}} = \frac{U j\alpha C_1 C_3}{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot C_3 + C_3 + C_1}.$$

Звідси початкові умови знаходяться як

$$\begin{aligned}
u_{C_1}(0_+) = u_{C_1}(0_-) &= I \left(\frac{1}{j\alpha C_1} \right) = \frac{Uj\alpha C_1 C_3}{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot C_3 + C_3 + C_1} \left(\frac{1}{j\alpha C_1} \right) = \\
&= \frac{UC_3}{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot C_3 + C_3 + C_1} \approx \frac{UC_3}{C_3 + C_1} = 23.077 \text{ В}, \\
u_{C_3}(0_+) = u_{C_3}(0_-) &= I \left(\frac{1}{j\alpha C_3} \right) = \frac{Uj\alpha C_1 C_3}{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot C_3 + C_3 + C_1} \left(\frac{1}{j\alpha C_3} \right) = \\
&= \frac{UC_1}{r_1 \cdot j\alpha C_1 \cdot C_3 + C_3 + C_1} \approx \frac{UC_1}{C_3 + C_1} = 76.923 \text{ В},
\end{aligned}$$

Оскільки ключ розімкнений

$$u_{C_2}(0_+) = u_{C_2}(0_-) = 0 \text{ В.}$$

Для забезпечення можливості використання другого закону комутації будемо вважати, що вітка з ємністю C_2 містить резистор $r_2 = \alpha_1$ (рис. 4.4-2).

Зазначимо, що нескінченно малі числа α та α_1 є різнорідними параметрами та їх співвідношення нам невідоме.

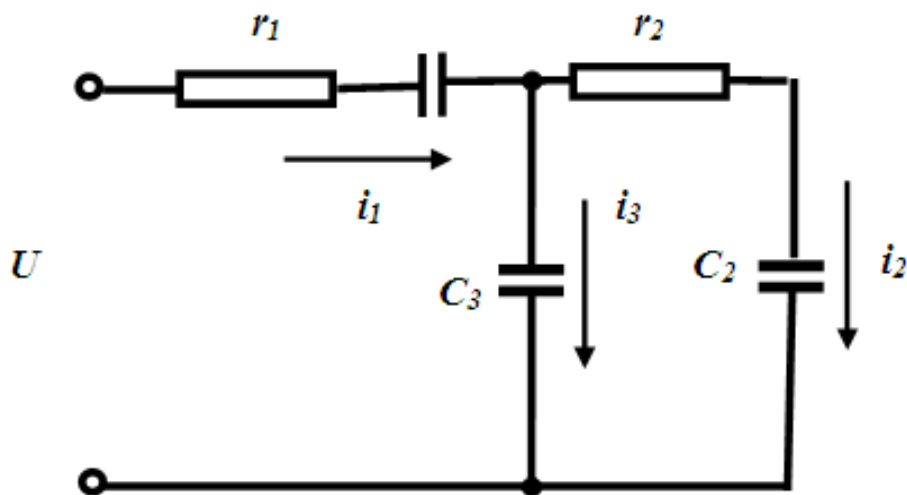


Рисунок 4.4-2 – Еквівалентне складне коло з ідеальними ємностями

Знайдемо тепер примусові складові. Повний комплексний опір кола після комутації визначається як

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\text{ex}} &\approx r_1 + \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{\left(r_2 + \frac{1}{j\alpha C_2}\right) \cdot \frac{1}{j\alpha C_3}}{\left(r_2 + \frac{1}{j\alpha C_2}\right) + \frac{1}{j\alpha C_3}} = \\
&= r_1 + \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{\frac{r_2}{j\alpha C_3} + \frac{1}{(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)}}{r_2 + \frac{1}{j\alpha C_2} + \frac{1}{j\alpha C_3}} = \\
&= \frac{r_1 j\alpha C_1 + 1}{j\alpha C_1} + \frac{\frac{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + (j\alpha C_3)}{(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)}}{\frac{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + j\alpha C_3 + j\alpha C_2}{(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)}} = \\
&= \frac{r_1 j\alpha C_1 + 1}{j\alpha C_1} + \frac{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + (j\alpha C_3)}{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + j\alpha C_3 + j\alpha C_2} = \\
&= \frac{\alpha_1(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)r_1 C_1 + j\alpha C_3 r_1 C_1 + j\alpha C_2 r_1 C_1 + \alpha_1(j\alpha C_2)(C_3) + C_3 + C_2}{\alpha_1(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)C_1 + j\alpha C_3 C_1 + j\alpha C_2 C_1}.
\end{aligned}$$

тоді струм, що протікає через ємність C_1

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{C_1} &= \frac{U}{\underline{Z}_{\text{ex}}} = \\
&= \frac{U[\alpha_1(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)C_1 + j\alpha C_3 C_1 + j\alpha C_2 C_1]}{\alpha_1(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)r_1 C_1 + j\alpha C_3 r_1 C_1 + j\alpha C_2 r_1 C_1 + \alpha_1(j\alpha C_2)(C_3) + C_3 + C_2}.
\end{aligned}$$

Струми, що протікають через ємності C_2 , C_3 знаходяться як

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{C_2} &= \underline{I}_{C_1} \frac{\frac{1}{j\alpha C_3}}{r_2 + \frac{1}{j\alpha C_2} + \frac{1}{j\alpha C_3}} = \underline{I}_{C_1} \frac{\frac{1}{j\alpha C_3}}{\frac{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + j\alpha C_3 + j\alpha C_2}{(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)}} = \\
&= \underline{I}_{C_1} \frac{(j\alpha C_2)}{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + j\alpha C_3 + j\alpha C_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{C_3} &= \underline{I}_{C_1} \frac{\frac{1}{j\alpha C_2}}{r_2 + \frac{1}{j\alpha C_2} + \frac{1}{j\alpha C_3}} = \underline{I}_{C_1} \frac{\frac{1}{j\alpha C_2}}{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + j\alpha C_3 + j\alpha C_2} = \\ &= \underline{I}_{C_1} \frac{(j\alpha C_3)}{r_2(j\alpha C_2)(j\alpha C_3) + j\alpha C_3 + j\alpha C_2}, \end{aligned}$$

Таким чином примусові складові визначимо як

$$\begin{aligned} u_{C_1 np} &= \underline{I}_{C_1} \left(r_1 + \frac{1}{j\alpha C_1} \right) \approx \frac{U(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 60 \text{ В}, \\ u_{C_2 np} &= \underline{I}_{C_2} \left(\alpha_1 + \frac{1}{j\alpha C_2} \right) \approx \frac{UC_1}{C_1 + C_2 + C_3} = 40 \text{ В}, \\ u_{C_3 np} &= \underline{I}_{C_3} \frac{1}{j\alpha C_3} \approx \frac{UC_1}{C_1 + C_2 + C_3} = 40 \text{ В}. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння сформуємо за методом вхідного опору

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}(p) &= r_1 + \frac{1}{pC_1} + \frac{\left(r_2 + \frac{1}{pC_2} \right) \frac{1}{pC_3}}{r_2 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = r_1 + \frac{1}{pC_1} + \frac{\left(\alpha_1 + \frac{1}{pC_2} \right) \frac{1}{pC_3}}{\alpha_1 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \\ &= \frac{\alpha_1(pC_2)(pC_3)r_1C_1 + pC_3r_1C_1 + pC_2r_1C_1 + \alpha_1(pC_2)(C_3) + C_3 + C_2}{\alpha_1(j\alpha C_2)(j\alpha C_3)C_1 + j\alpha C_3C_1 + j\alpha C_2C_1}. \end{aligned}$$

Воно буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_1(pC_2)(pC_3)r_1C_1 + pC_3r_1C_1 + pC_2r_1C_1 + \alpha_1(pC_2)(C_3) + C_3 + C_2 &= \\ = \alpha_1r_1C_1C_2C_3p^2 + (r_1C_3C_1 + r_1C_2C_1 + \alpha_1C_2C_3)p + C_3 + C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Це квадратне рівняння має два корені, перший з яких визначимо, виконавши відповідні перетворення

$$\alpha_1 r_1 C_1 C_2 C_3 p^2 + (r_1 C_3 C_1 + r_1 C_2 C_1 + \alpha_1 C_2 C_3) p + C_3 + C_2 =$$

$$(r_1 C_3 C_1 + r_1 C_2 C_1) p + C_3 + C_2 = r_1 C_1 (C_3 + C_2) p + C_3 + C_2 = 0,$$

звідки

$$p_1 = -\frac{C_2 + C_3}{r_1 C_1 (C_3 + C_2)} = -\frac{1}{r_1 C_1} = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

Другий корінь знайдемо згідно теореми Вієта (для квадратного рівняння $ap^2 + bp + c = 0$ справедлива формула $p_1 p_2 = \frac{c}{a}$).

Оскільки $a = \alpha_1 r_1 C_1 C_2 C_3$ а $c = C_2 + C_3$, то

$$p_2 = \frac{c}{p_1 a} = -\frac{C_2 + C_3}{\alpha_1 r_1 C_1 C_2 C_3 \frac{1}{r_1 C_1}} = -\frac{C_2 + C_3}{\alpha C_2 C_3} = -\frac{41667}{\alpha_1} \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$u_{C_2}(t) = u_{C_2 np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 40 + A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t}, \quad (4.22)$$

а

$$u_{C_3}(t) = u_{C_2}(t) + \alpha_1 C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = u_{C_2 np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} +$$

$$+ \alpha_1 C_2 (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) = 40 + A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} -$$

$$- \alpha_1 1.2 \cdot 10^{-4} (1000) A_1 e^{-1000t} - \alpha_1 1.2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{41667}{\alpha_1} \right) A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} = 40 + (4.23)$$

$$+ A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} - \alpha_1 1.2 \cdot 10^{-1} A_1 e^{-1000t} - 5 A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} \approx$$

$$\approx 40 + A_1 e^{-1000t} - 4 A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t}.$$

Струм в ємності C_1 визначається як

$$\begin{aligned}
i_{C_1}(t) &= C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} + C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} = C_2 \frac{d \left(A_1 e^{-1000t} + A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} \right)}{dt} + \\
&+ C_3 \frac{d \left(A_1 e^{-1000t} - 4A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} \right)}{dt} = -1.2 \cdot 10^{-4} (1000) A_1 e^{-1000t} - \\
&- 1.2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{41667}{\alpha_1} \right) A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} - 0.3 \cdot 10^{-4} (1000) A_1 e^{-1000t} + \\
&+ 1.2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{41667}{\alpha_1} \right) A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} = -0.15 A_1 e^{-1000t}.
\end{aligned}$$

Тоді напруга на ємності C_1

$$\begin{aligned}
u_{C_1}(t) &= U - u_{C_3}(t) - r_1 i_{C_1}(t) \approx 100 - \left(40 + A_1 e^{-1000t} - 4A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} \right) - \\
&- 10 \left(-0.15 A_1 e^{-1000t} \right) \approx 60 - A_1 e^{-1000t} + 4A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t} + 1.5 A_1 e^{-1000t} \approx (4.24) \\
&\approx 60 + 0.5 A_1 e^{-1000t} + 4A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1} t}.
\end{aligned}$$

Для визначення сталих інтегрування треба у виразах (4.22) та (4.23) підставити замість змінної t значення початкового моменту часу $t = 0_+ \approx \alpha_2$ (початковий моменту часу позначається символом α_2 , оскільки за своєю фізичною природою відрізняється від опору $r_2 = \alpha_1$).

При цьому виникає невизначеність $e^{-41667 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$.

Співвідношення нескінченно малих чисел α_1 та α_2 неможливо встановити суто математичним шляхом, оскільки вони відносяться до *різномірних* параметрів. Проаналізуємо їх з фізичної точки зору. Нага-

даємо, що α_2 – це початковий моменту часу, а α_1 – це активна провідність ідеальної ємності, яку ми спеціально вводимо для виконання стандартних законів комутації. Оскільки ці величини є незалежними одна від одної, то завжди можна вибрати їх так, щоб забезпечити умову $\alpha_2 \approx \alpha_1^2$. Таким чином можна записати

$$e^{-\frac{41667\alpha_2}{\alpha_1}} = e^{-\frac{41667\alpha_1^2}{\alpha_1}} = e^{-41667\alpha_1} \approx 1, \quad (4.25)$$

Враховуючи (4.22), (4.23) та (4.25) отримаємо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування

$$u_{C_2}(0_+) = 40 + A_1 e^{-1000\alpha_2} + A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1}\alpha_2} \approx 40 + A_1 + A_2 = 0,$$

$$u_{C_3}(0_+) = 40 + A_1 e^{-1000\alpha_2} - 4A_2 e^{-\frac{41667}{\alpha_1}\alpha_2} \approx 40 + A_1 - 4A_2 = 76.923.$$

З першого рівняння визначимо A_2 та підставимо в друге

$$\begin{aligned} A_2 &= -40 - A_1, \\ 40 + A_1 - 4(-40 - A_1) &= 76.923, \end{aligned}$$

Звідси

$$5A_1 = -83.077$$

і

$$A_1 = \frac{-83.077}{5} = -16.615,$$

а

$$A_2 = -23.385.$$

Таким чином

$$u_{C_2}(t) = 40 - 16.615e^{-1000t} - 23.385e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} \text{ В}, \quad (4.26)$$

$$u_{C_3}(t) = 40 - 16.615e^{-1000t} + 93.538e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} \text{ В}. \quad (4.27)$$

$$u_{C_1}(t) = 60 - 8.307e^{-1000t} - 93.538e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} \text{ В}. \quad (4.28)$$

Оскільки $e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} = \alpha_1$, можна записати

$$\begin{aligned}\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_2}(t) &= 40 - 16.615e^{-1000t} - 23.385e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} \approx \\ &\approx 40 - 16.615e^{-1000t} - 23.385\alpha_1 \approx 40 - 16.615e^{-1000t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_3}(t) &= 40 - 16.615e^{-1000t} + 93.538e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} \approx \\ &\approx 40 - 16.615e^{-1000t} + 93.538\alpha_1 \approx 40 - 16.615e^{-1000t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall(t > 0 \wedge t \neq 0_+) u_{C_1}(t) &= 60 - 11.45e^{-1000t} - 93.538e^{-\frac{41667}{\alpha_1}t} \approx \\ &\approx 60 - 8.307e^{-1000t} - 93.538\alpha_1 \approx 60 - 8.307e^{-1000t}.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що нескінченно малий опір $r_2 = \alpha_1$ було штучно введено для забезпечення виконання стандартних законів комутації. Розглянемо тепер які значення приймають напруги на ємностях в моменти $t = 0$ і $t = 0_+$ в реальному колі для якого $r_2 = 0 \approx \alpha_1^\beta$.

Як вже визначалось, до комутації при $t < 0$ (зокрема при $t = 0_-$) $u_{C_3} = 76.923$ В, $u_{C_2} = 0$ В.

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_2$ вирази (4.26), (4.27), (4.29) приймуть вигляд

$$\begin{aligned}u_{C_2}(0_+) &= 40 - 16.615e^{-1000\alpha_2} - 23.385e^{-\frac{41667}{0}\alpha_2} \approx \\ &\approx 40 - 16.615e^{-1000\alpha_2} - 23.385\alpha_1 \approx 23.385 \text{ В},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{C_3}(0_+) &= 40 - 16.615e^{-1000\alpha_2} + 93.538e^{-\frac{41667}{0}\alpha_2} \approx \\ &\approx 40 - 16.615e^{-1000\alpha_2} + 93.538\alpha_1 \approx 23.385 \text{ В},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{C_1}(0_+) &= 60 - 8.307e^{-1000\alpha_2} - 93.538e^{-\frac{41667}{0}\alpha_2} \approx \\ &\approx 60 - 8.307e^{-1000\alpha_2} - 93.538\alpha_1 \approx 51.693 \text{ В},\end{aligned}$$

4.3 КОЛА 2 ПОРЯДКУ

Приклад 4.5. Визначимо перехідні напруги на ємностях та струм в індуктивності в колі, що зображено на рис. 4.5-1.

Параметри схеми: $U = 100$ В, $r_1 = 50$ Ом, $L_1 = 100$ мГн, $C_2 = 100$ мкФ, $C_3 = 150$ мкФ.

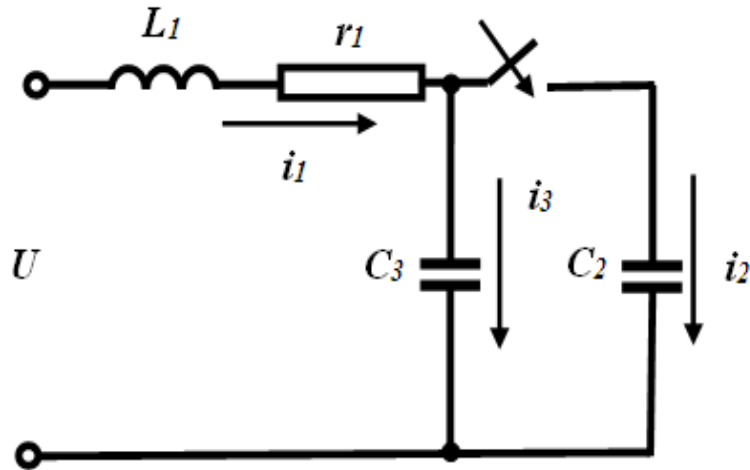


Рисунок 4.5-1 – Коло другого порядку

Для забезпечення можливості використання другого закону комутації будемо вважати, що вітка з ємністю C_2 містить резистор $r_2 = \alpha \approx 0$ (рис. 4.5-2).

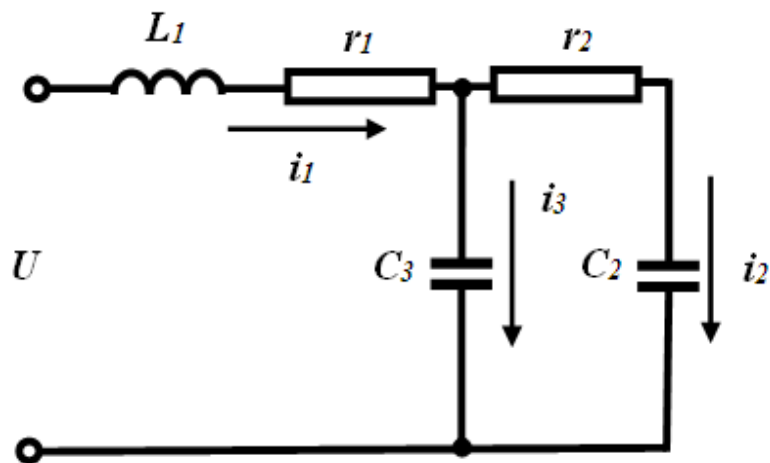


Рисунок 4.5-2 – Еквівалентне коло другого порядку

Початкові умови знаходяться як

$$\begin{aligned} u_{C_3}(0+) &= U = 100 \text{ В}, \\ u_{C_2}(0+) &= 0 \text{ В}, \\ i_1(0+) &= 0 \text{ А}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Примусові складові визначимо як

$$\begin{aligned} u_{C_2np} &= U = 100 \text{ В}, \\ u_{C_3np} &= U = 100 \text{ В}, \\ i_{1np} &= 0 \text{ А}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

За методом вхідного опору

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}(p) &= r_1 + pL_1 + \frac{\left(r_2 + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{r_2 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = r_1 + pL_1 + \frac{\left(\alpha + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{\alpha + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \\ &= \frac{r_1(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) + pL_1(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) + \alpha C_2 p + 1}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p} \end{aligned} \quad (4.31)$$

сформуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} \alpha L_1 C_2 C_3 p^3 + [\alpha r_1 C_2 C_3 + L_1(C_2 + C_3)]p^2 + \\ + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Це кубічне рівняння має три корені, перші два з яких визначимо, виконавши перетворення

$$\begin{aligned} \alpha L_1 C_2 C_3 p^3 + [\alpha r_1 C_2 C_3 + L_1(C_2 + C_3)]p^2 + \\ + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 \approx \\ L_1(C_2 + C_3)p^2 + r_1(C_2 + C_3)p + 1 \approx 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

звідки

$$p_1 = \frac{-r_1(C_2 + C_3) + \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4L_1(C_2 + C_3)}}{2L_1(C_2 + C_3)} = -100 \text{ с}^{-1},$$

$$p_2 = \frac{-r_1(C_2 + C_3) - \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4L_1(C_2 + C_3)}}{2L_1(C_2 + C_3)} = -400 \text{ с}^{-1}.$$

Зазначимо, що корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто перехідний процес має *апериодичний* характер.

Третій корінь знайдемо, використавши теорему розкладання полінома на множники, згідно з якою вираз (4.32) можна представити у вигляді

$$\alpha L_1 C_2 C_3 (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = 0.$$

З цієї теореми випливає, що

$$-\alpha L_1 C_2 C_3 p_1 p_2 p_3 = 1,$$

звідки

$$p_3 = -\frac{1}{L_1 C_2 C_3 \alpha p_1 p_2} = -\frac{16667}{\alpha} \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_{C_2}(t) &= U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} = \\ &= 100 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-400t} + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

а

$$\begin{aligned} u_{C_3}(t) &= u_{C_2}(t) + \alpha C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \\ &= 100 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-400t} + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} + \\ &+ 10^{-4} \left(-100 A_1 e^{-100t} - 400 A_2 e^{-400t} - \frac{16667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \right) \alpha = \\ &= 100 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-400t} + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} - \\ &- 0.01 \alpha A_1 e^{-100t} - 0.04 \alpha A_2 e^{-400t} - \frac{1.6667}{\alpha} \alpha A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \approx \\ &\approx 100 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-400t} - 0.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Струм в індуктивності визначимо як

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} + C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} = \\
 &= 10^{-4} \left(-100A_1 e^{-100t} - 400A_2 e^{-400t} - \frac{16667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right) + \\
 &+ 1.5 \cdot 10^{-4} \left(-100A_1 e^{-100t} - 400A_2 e^{-400t} + \frac{11111}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right) = \quad (4.36) \\
 &= -0.01A_1 e^{-100t} - 0.04A_2 e^{-400t} - \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} - \\
 &- 0.015A_1 e^{-100t} - 0.06A_2 e^{-400t} + \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} = \\
 &= -0.025A_1 e^{-100t} - 0.1A_2 e^{-400t}.
 \end{aligned}$$

Для визначення сталих інтегрування треба у виразах (4.34), (4.35), (4.36) підставити замість змінної t значення початкового моменту часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ (початковий моменту часу позначається символом α_1 , оскільки за своєю фізичною природою відрізняється від опору $r_3 = \alpha$). При цьому виникає невизначеність $e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha_1}$.

Співвідношення нескінченно малих чисел α та α_1 неможливо встановити суто математичним шляхом, оскільки вони відносяться до *різномірних* параметрів. Проаналізуємо їх з фізичної точки зору. Нагадаємо, що α_1 – це *початковий моменту часу*, а α – це *активна провідність розриву кола*, яку ми спеціально вводимо для виконання стандартних законів комутації. Оскільки ці величини є *незалежними* одна від одної, то *завжди* можна вибрати їх так, щоб забезпечити умову $\alpha_1 \approx \alpha^2$. Таким чином можна записати

$$e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha_1} = e^{-\frac{16667}{\alpha}\alpha^2} = e^{-16667\alpha} \approx 1. \quad (4.37)$$

З виразів (4.34), (4.35), (4.36) враховуючи (4.37) знайдемо сталі інтегрування, для чого складемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
u_{C_2}(0+) &= 100 + A_1 + A_2 + A_3 = 0, \\
u_{C_3}(0+) &= 100 + A_1 + A_2 - 0.6667A_3 = 100, \\
i_1(0+) &= -0.025A_1 - 0.1A_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.38}$$

Визначимо з третього рівняння

$$A_1 = -\frac{0.1A_2}{0.025} = -4A_2$$

та підставимо його в перше та друге рівняння

$$\begin{aligned}
100 - 4A_2 + A_2 + A_3 &= 0, \\
100 - 4A_2 + A_2 - 0.6667A_3 &= 100.
\end{aligned}$$

Тоді

$$A_3 = -100 + 3A_2$$

і

$$100 - 3A_2 - 0.6667(-100 + 3A_2) = 100.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{66.67}{5} = 13.334, \\
A_3 &= -100 + 3 \cdot 13.334 = -60, \\
A_1 &= -4 \cdot 13.334 = -53.335.
\end{aligned}$$

Таким чином, перехідні напруги на ємностях

$$\begin{aligned}
u_{C_2}(t) &= 100 - 53.335e^{-100t} + 13.334e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\
&\approx 100 - 53.335e^{-100t} + 13.334e^{-400t},
\end{aligned}
\tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
u_{C_3}(t) &= 100 - 53.335e^{-100t} + 13.334e^{-400t} + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\
&\approx 100 - 53.335e^{-100t} + 13.334e^{-400t},
\end{aligned}
\tag{4.40}$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = 1.333e^{-100t} - 1.333e^{-400t}. \tag{4.41}$$

Розглянемо тепер які значення приймають напруги на ємностях та струм в індуктивності в моменти $t = 0$ і $t = 0_+$ в реальному колі для якого $r_2 = 0 \approx \alpha^\beta$.

Як вже визначалось, до комутації при $t < 0$ (зокрема при $t = 0_-$) $u_{C_3} = 100$ В, $u_{C_2} = 0$ В, $i_1 = 0$ А.

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ вирази (4.39) та (4.40) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} u_{C_2}(0_+) &= 100 - 53.335e^{-100\alpha_1} + 13.334e^{-400\alpha_1} - 60e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx \\ &\approx 100 - 53.335e^{-100\alpha_1} + 13.334e^{-400\alpha_1} - 60\alpha \approx 60 \text{ В}, \\ u_{C_3}(0_+) &= 100 - 53.335e^{-100\alpha_1} + 13.334e^{-400\alpha_1} + 40e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx \\ &\approx 100 - 53.335e^{-100\alpha_1} + 13.334e^{-400\alpha_1} + 40\alpha \approx 60 \text{ В}, \end{aligned}$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = 1.333e^{-100\alpha_1} - 1.333e^{-400\alpha_1} \approx 0 \text{ А.}$$

В момент часу $t = 0 \approx \alpha_1^\beta$ вираз $e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1}$ стає невизначеним, оскільки час та опір є *різномірними* параметрами, тому точне значення напруг в цей момент часу визначити неможливо. Ми можемо лише знати інтервали їх можливих значень, як то

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{C_2}(0) \leq 60, \\ 60 &\leq u_{C_3}(0) \leq 100. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер енергетичні співвідношення в колі.

Оскільки до комутації ($t < 0$) струм в індуктивності та напруга на ємності C_2 дорівнювали нулю, то енергія була запасена лише в конденсаторі C_3 і дорівнювала

$$W(0_-) = \frac{C_3 u_{C_3}^2(0_-)}{2} = \frac{150 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 0.75 \text{ Дж.}$$

В перший момент часу після комутації ($t = 0_+$) енергія запасена вже в обох конденсаторах і дорівнює

$$W(0_+) = \frac{(C_3 + C_2)u_{C_3}^2(0_+)}{2} = \frac{250 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2}{2} = 0.45 \text{ Дж.}$$

Таким чином дефіцит енергії складає

$$\Delta W = 0.75 - 0.45 = 0.3 \text{ Дж.}$$

В традиційних підручниках з ТОЕ наявність цього дефіциту пояснюють втратами енергії при заряді конденсатора, який вмикається, але не наводять при цьому жодних математичних доказів. Спробуємо це довести в межах нестандартного аналізу.

Для цього спочатку визначимо струм в ємності C_2

$$\begin{aligned} i_2(t) &= C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \\ &= 10^{-4} \frac{d \left(100 - 53.335e^{-100t} + 13.334e^{-400t} - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right)}{dt} = \\ &= 0.533e^{-100t} - 0.533e^{-400t} + \frac{100}{\alpha} e^{-\frac{16667}{\alpha}t}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_0^{\infty} i_2^2(t) r_2 dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left(0.533e^{-100t} - 0.533e^{-400t} + \frac{100}{\alpha} e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right)^2 \alpha dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left(0.284\alpha e^{-200t} + 0.284\alpha e^{-800t} + \frac{10000}{\alpha} e^{-\frac{33333}{\alpha}t} - 0.568\alpha e^{-500t} - \right. \\ &\quad \left. -106.6e^{-\left(400 + \frac{16667}{\alpha}\right)t} + 106.6e^{-\left(100 + \frac{16667}{\alpha}\right)t} \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{aligned} & -3.55 \cdot 10^{-4} \alpha e^{-800t} - 1.42 \cdot 10^{-3} \alpha e^{-200t} - 0.3 e^{-\frac{33333}{\alpha}t} + 1.136 \cdot 10^{-3} \alpha e^{-500t} + \\ & + \frac{106.6}{400 + \frac{16667}{\alpha}} e^{-\left(400 + \frac{16667}{\alpha}\right)t} - \frac{106.6}{100 + \frac{16667}{\alpha}} e^{-\left(100 + \frac{16667}{\alpha}\right)t} \end{aligned} \right) \Bigg|_0^{\infty} \approx$$

$$\approx -0.3 e^{-\frac{33333}{\alpha} \cdot \infty} + 0.3 e^{-\frac{33333}{\alpha} \cdot 0} \approx 0.3 e^{-33333 \cdot 0} \approx 0.3 \text{ Дж.}$$

Закон збереження енергії виконується.

Графіки аперіодичного перехідного процесу виглядають так:

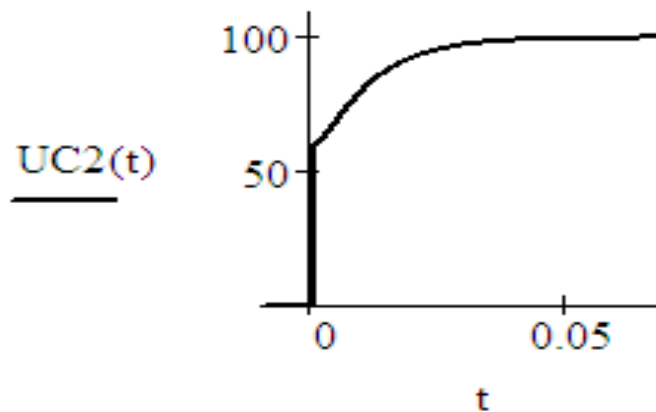


Рисунок 4.6 – Напруга на ємності C_2 (аперіодичний перехідний процес)

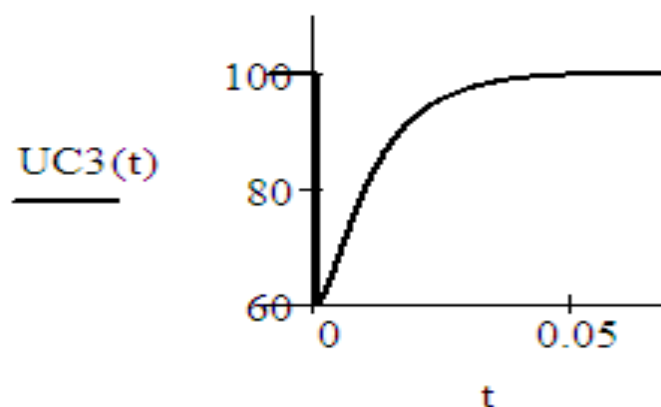


Рисунок 4.7 – Напруга на ємності C_3 (аперіодичний перехідний процес)

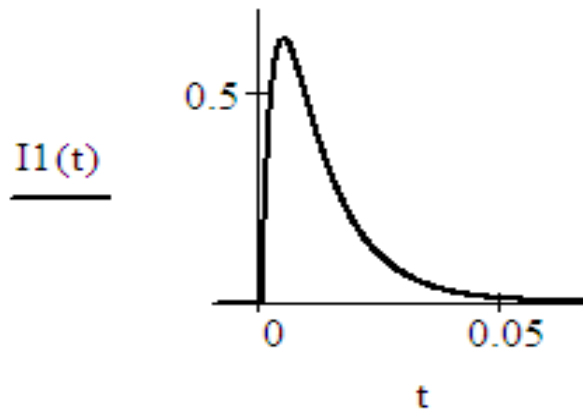


Рисунок 4.8 – Струм в індуктивності
(аперіодичний перехідний процес)

Розглянемо тепер перехідний процес в цьому ж колі при значенні $L_1 = 200$ мГн, коли перехідний процес буде мати *коливальний* характер.

Очевидно, що вирази (4.29), (4.30), (4.31), (4.32), (4.33) при цьому не зміняться.

Перші два корені характеристичного рівняння знайдемо як

$$p_1 = \frac{-r_1(C_2 + C_3) + \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4L_1(C_2 + C_3)}}{2L_1(C_2 + C_3)} = -125 + j66.144 \text{ с}^{-1},$$

$$p_2 = \frac{-r_1(C_2 + C_3) - \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4L_1(C_2 + C_3)}}{2L_1(C_2 + C_3)} = -125 - j66.144 \text{ с}^{-1}.$$

Звідси

$$\delta = -\mathbf{Re}(p_1) = 125,$$

$$\omega_0 = \mathbf{Im}(p_1) = 66.144.$$

Зазначимо, що корені характеристичного рівняння комплексні спряжені, тобто перехідний процес має *коливальний* характер.

Третій корінь знайдемо, аналогічно з попереднім випадком

$$p_3 = -\frac{1}{L_1 C_2 C_3 \alpha p_1 p_2} = -\frac{16667}{\alpha} \text{ с}^{-1}.$$

Звернемо увагу на те, що третій корінь не змінився
 Для коливального процесу вирази (4.34), (4.35) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
 u_{C_2}(t) &= U + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + A_3 e^{p_3 t} = \\
 &= 100 + e^{-125t} (A_1 \sin 66.144t + A_2 \cos 66.144t) + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}, \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
 u_{C_3}(t) &= u_{C_2}(t) + \alpha C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \\
 &= 100 + e^{-125t} (A_1 \sin 66.144t + A_2 \cos 66.144t) + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} + \\
 &+ \alpha 10^{-4} e^{-125t} (-125) (A_1 \sin 66.144t + A_2 \cos 66.144t) + \\
 &+ \alpha 10^{-4} e^{-125t} \cdot 66.144 \cdot (-A_2 \sin 66.144t + A_1 \cos 66.144t) - \\
 &- \frac{1.6667}{\alpha} \alpha A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} = 100 + e^{-125t} (A_1 \sin 66.144t + \\
 &+ A_2 \cos 66.144t - \alpha 0.0125 A_1 \sin 66.144t - \\
 &- \alpha 0.0125 A_2 \cos 66.144t - \alpha 0.006614 A_2 \sin 66.144t + \\
 &+ \alpha 0.006614 A_1 \cos 66.144t) - 1.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \approx \\
 &\approx 100 + e^{-125t} (A_1 \sin 66.144t + A_2 \cos 66.144t) - 0.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Тоді струми в ємностях

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = e^{-125t} (0.0125 A_1 \sin 66.144t - 0.0125 A_2 \cos 66.144t - \\
 &- 0.006614 A_2 \sin 66.144t + 0.006614 A_1 \cos 66.144t) - \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}, \\
 i_3(t) &= C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} = e^{-125t} (0.01875 A_1 \sin 66.144t - 0.01875 A_2 \cos 66.144t - \\
 &- 0.009921 A_2 \sin 66.144t + 0.009921 A_1 \cos 66.144t) + \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t},
 \end{aligned}$$

а струм в індуктивності

$$\begin{aligned}
 i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = & e^{-125t} (0.0125 A_1 \sin 66.144t - \\
 & - 0.0125 A_2 \cos 66.144t - 0.006614 A_2 \sin 66.144t + \\
 & + 0.006614 A_1 \cos 66.144t) - \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} + \\
 & + e^{-125t} (0.01875 A_1 \sin 66.144t - 0.01875 A_2 \cos 66.144t - \\
 & - 0.009921 A_2 \sin 66.144t + 0.009921 A_1 \cos 66.144t) + \\
 & + \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} = e^{-125t} (0.03125 A_1 \sin 66.144t - \\
 & - 0.03125 A_2 \cos 66.144t - 0.01654 A_2 \sin 66.144t + \\
 & + 0.01654 A_1 \cos 66.144t)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

З виразів (4.42), (4.43), (4.44) враховуючи (4.37) знайдемо сталі інтегрування, для чого складемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 u_{C_2}(0+) = 100 + A_2 + A_3 = 0, \\
 u_{C_3}(0+) = 100 + A_2 - 0.6667 A_3 = 100, \\
 i_1(0+) = -0.03125 A_2 + 0.01654 A_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Визначимо з другого рівняння

$$A_3 = \frac{A_2}{0.6667} = 1.5 A_2$$

та підставимо його в перше рівняння

$$100 + A_2 + 1.5 A_2 = 0.$$

Звідси

$$A_2 = -\frac{100}{2.5} = -40,$$

а

$$A_3 = 1.5 A_2 = -60.$$

Тоді з першого рівняння визначаємо

$$A_1 = \frac{0.03125 A_2}{0.01654} = -75.57.$$

Таким чином, перехідні напруги на ємностях

$$u_{C_2}(t) = 100 + e^{-125t}(-75.57 \sin 66.144t - 40 \cos 66.144t) - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx 100 + e^{-125t}(-75.57 \sin 66.144t - 40 \cos 66.144t), \quad (4.46)$$

$$u_{C_3}(t) = 100 + e^{-125t}(-75.57 \sin 66.144t - 40 \cos 66.144t) + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx 100 + e^{-125t}(-75.57 \sin 66.144t - 40 \cos 66.144t), \quad (4.47)$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = e^{-125t}(0.03125 A_1 \sin 66.144t - 0.03125 A_2 \cos 66.144t - 0.01654 A_2 \sin 66.144t + 0.01654 A_1 \cos 66.144t) = -1.7e^{-125t} \sin 66.144t. \quad (4.48)$$

Розглянемо тепер які значення приймають напруги на ємностях та струм в індуктивності в момент $t = 0_+$ в реальному колі для якого $r_2 = 0 \approx \alpha^\beta$.

Як вже визначалось, до комутації при $t < 0$ (зокрема при $t = 0_-$) $u_{C_3} = 100$ В, $u_{C_2} = 0$ В, $i_1 = 0$ А.

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ вирази (4.46) та (4.47) приймуть вигляд

$$u_{C_2}(0_+) = 100 + e^{-125\alpha_1}(-75.57 \sin 66.144\alpha_1 - 40 \cos 66.144\alpha_1) - 60e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx 100 - 75.57\alpha - 40 - 60\alpha \approx 60 \text{ В},$$

$$u_{C_3}(0_+) = 100 + e^{-125\alpha_1}(-75.57 \sin 66.144\alpha_1 - 40 \cos 66.144\alpha_1) + 40e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx 100 - 75.57\alpha - 40 + 40\alpha \approx 60 \text{ В},$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = -1.7e^{-125\alpha_1} \sin 66.144\alpha_1 \approx 0 \text{ А}.$$

Графіки коливального перехідного процесу виглядають так:

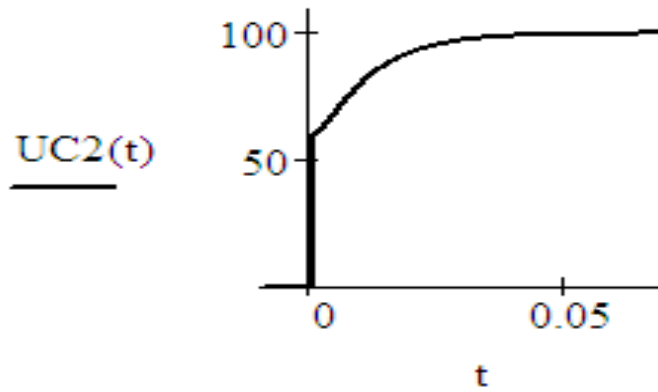


Рисунок 4.9 – Напруга на ємності C_2
(коливальний перехідний процес)

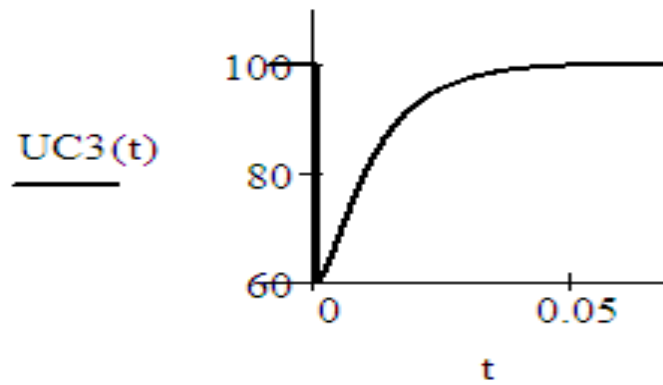


Рисунок 4.10 – Напруга на ємності C_3
(коливальний перехідний процес)

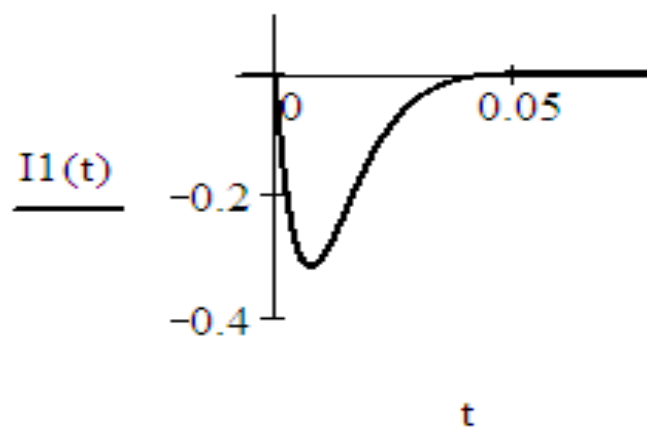


Рисунок 4.11 – Струм в індуктивності
(коливальний перехідний процес)

Нарешті розглянемо *критичний* перехідний процес в цьому ж колі. Він має місце тоді, коли дискримінант квадратного рівняння дорівнює нулю, тобто

$$[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4L_1(C_2 + C_3) = 0,$$

звідки

$$L_1 = \frac{[r_1(C_2 + C_3)]^2}{4(C_2 + C_3)} = 0.15625 \text{ Гн.}$$

В цьому випадку перші два корені характеристичного рівняння є дійсними однаковими і дорівнюють

$$p = -\frac{r_1}{2L_1} = -160 \text{ с}^{-1}.$$

Третій корінь знайдемо, аналогічно з попереднім випадком

$$p_3 = -\frac{1}{L_1 C_2 C_3 \alpha p_1 p_2} = -\frac{16667}{\alpha} \text{ с}^{-1}.$$

Третій корінь залишився без змін.

Для критичного процесу вирази (4.42), (4.43) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} u_{C_2}(t) &= U + e^{pt}(A_1 + A_2 t) + A_3 e^{p_3 t} = \\ &= 100 + e^{-160t}(A_1 + A_2 t) + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

а

$$\begin{aligned} u_{C_3}(t) &= u_{C_2}(t) + \alpha C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \\ &= 100 + e^{-160t}(A_1 + A_2 t) + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} + \\ &+ \alpha 10^{-4} e^{-160t} [(-160)(A_1 + A_2 t) + A_2] - 1.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\ &\approx 100 + e^{-160t}(A_1 + A_2 t) - 0.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Тоді струми в ємностях

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = 10^{-4} e^{-160t} [(-160)(A_1 + A_2 t) + A_2] - \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} =$$

$$= e^{-160t} \left[-0.016 A_1 - 0.016 A_2 t + 10^{-4} A_2 \right] - \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t},$$

$$i_3(t) = C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} =$$

$$= 1.5 \cdot 10^{-4} e^{-160t} [(-160)(A_1 + A_2 t) + A_2] + \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} =$$

$$= e^{-160t} \left[-0.024 A_1 - 0.024 A_2 t + 1.5 \cdot 10^{-4} A_2 \right] + \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t},$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = e^{-160t} \left[-0.04 A_1 - 0.04 A_2 t + 2.5 \cdot 10^{-4} A_2 \right] \quad (4.51)$$

З виразів (4.49), (4.50), (4.51) враховуючи (4.37) знайдемо сталі інтегрування, для чого складемо систему рівнянь:

$$u_{C_2}(0+) = 100 + A_1 + A_3 = 0,$$

$$u_{C_3}(0+) = 100 + A_1 - 0.6667 A_3 = 100, \quad (4.52)$$

$$i_1(0+) = -0.04 A_1 + 2.5 \cdot 10^{-4} A_2 = 0.$$

Визначимо з другого рівняння

$$A_3 = \frac{A_1}{0.6667} = 1.5 A_1$$

та підставимо його в перше рівняння

$$100 + A_1 + 1.5 A_1 = 0.$$

Звідси

$$A_1 = -\frac{100}{2.5} = -40,$$

а

$$A_3 = 1.5 A_1 = -60.$$

Тоді з першого рівняння визначаємо

$$A_2 = \frac{0.04A_1}{2.5 \cdot 10^{-4}} = -6400.$$

Таким чином, перехідні напруги на ємностях

$$\begin{aligned} u_{C_2}(t) &= 100 + e^{-160t}(-40 - 6400t) - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\ &\approx 100 + e^{-160t}(-40 - 6400t), \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} u_{C_3}(t) &= 100 + e^{-160t}(-40 - 6400t) + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\ &\approx 100 + e^{-160t}(-40 - 6400t), \end{aligned} \quad (4.54)$$

а струм в індуктивності

$$\begin{aligned} i_1(t) &= e^{-160t}(0.04 \cdot 40 + 0.04 \cdot 6400t - 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot 6400) = \\ &= e^{-160t} \cdot 256t \end{aligned} \quad (4.55)$$

Розглянемо тепер які значення приймають напруги на ємностях та струм в індуктивності в момент $t = 0_+$ в реальному колі для якого $r_2 = 0 \approx \alpha^\beta$.

Як вже визначалось, до комутації при $t < 0$ (зокрема при $t = 0_-$) $u_{C_3} = 100$ В, $u_{C_2} = 0$ В, $i_1 = 0$ А.

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ вирази (4.46) та (4.47) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} u_{C_2}(0_+) &= 100 + e^{-160\alpha_1}(-40 - 6400\alpha_1) - 60e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx \\ &\approx 100 - 40 - 60\alpha \approx 60 \text{ В}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{C_3}(0_+) &= 100 + e^{-160\alpha_1}(-40 - 6400\alpha_1) + 40e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx \\ &\approx 100 - 40 + 40\alpha \approx 60 \text{ В}, \end{aligned}$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = e^{-160\alpha_1} \cdot 256\alpha_1 \approx 0 \text{ А.}$$

Графіки критичного перехідного процесу виглядають так:

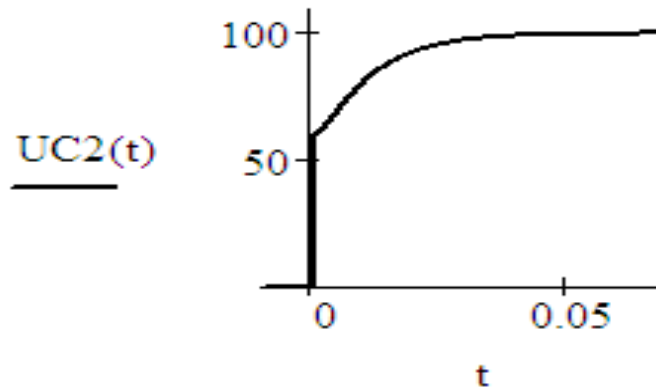


Рисунок 4.12 – Напруга на ємності C_2
(критичний перехідний процес)

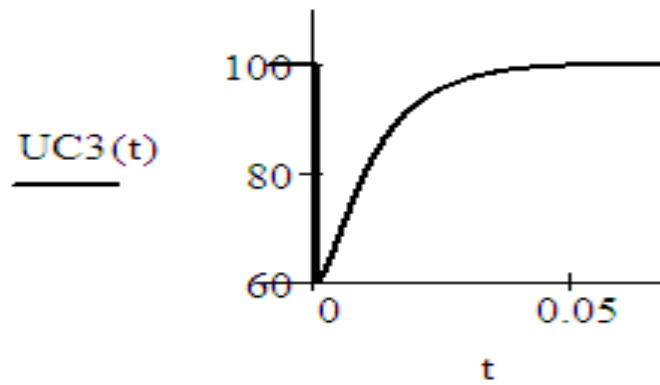


Рисунок 4.13 – Напруга на ємності C_3
(критичний перехідний процес)

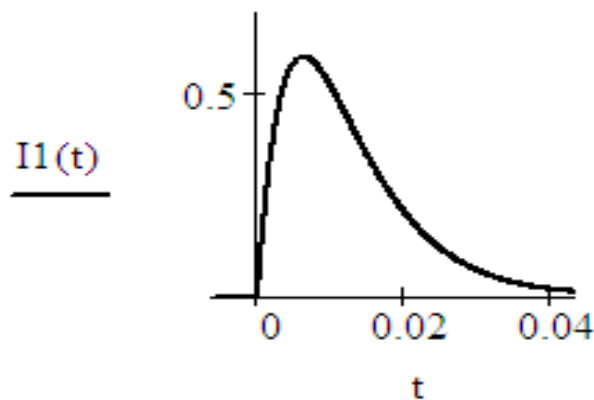


Рисунок 4.14 – Струм в індуктивності
(критичний перехідний процес)

Наостаннє розглянемо приклад кола 2 порядку з магнітним зв'язком та проаналізуємо, як характер перехідного процесу залежить від типу увімкнення котушок.

Приклад 4.6. Визначимо перехідні напруги на ємностях та вхідний струм в колі, що зображене на рис. 4.15-1.

Параметри схеми: $U = 100$ В, $r_1 = 50$ Ом, $L_1 = 100$ мГн, $L_2 = 50$ мГн, $M = 60$ мГн, $C_2 = 100$ мкФ, $C_3 = 150$ мкФ.

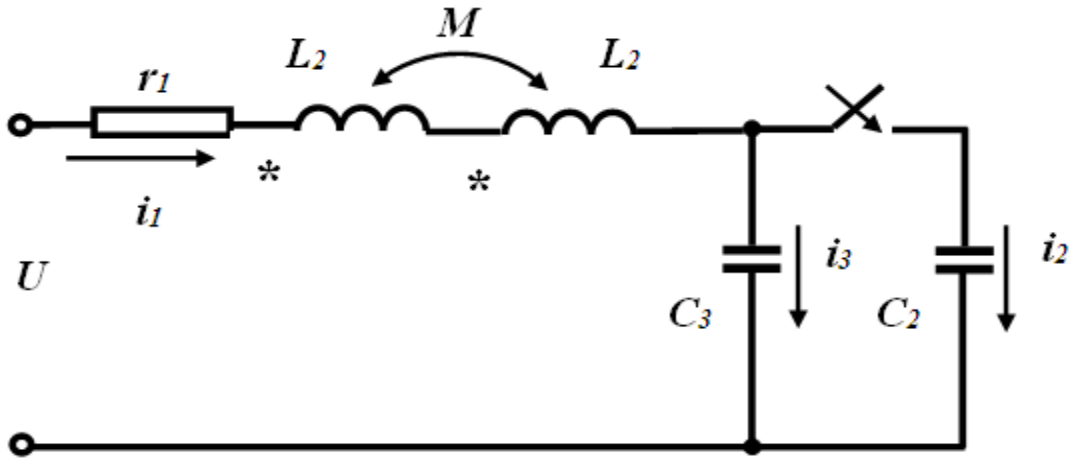


Рисунок 4.15-1 – Коло другого порядку з магнітним зв'язком

Для забезпечення можливості використання другого закону комутації будемо вважати, що вітка з ємністю C_2 містить резистор $r_2 = \alpha \approx 0$ (рис. 4.5-2).

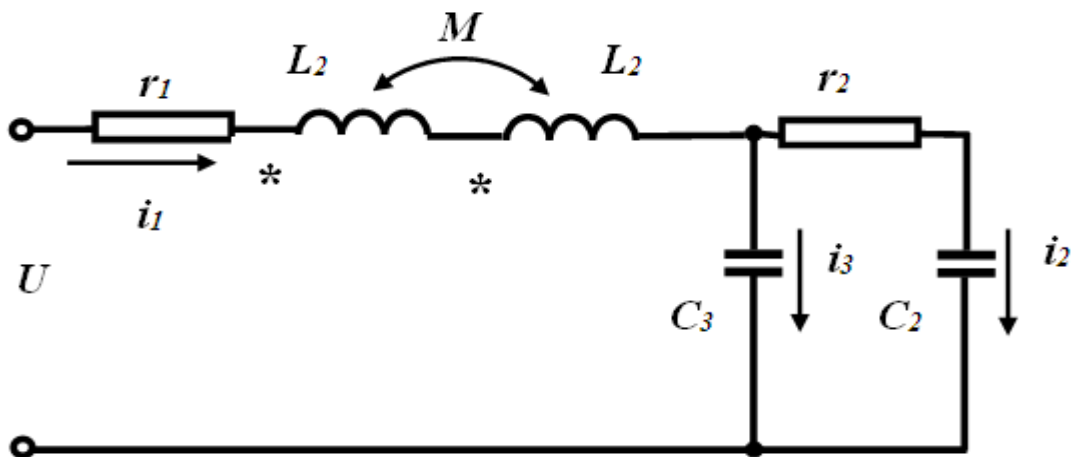


Рисунок 4.15-1 – Еквівалентне коло другого порядку з магнітним зв'язком

Початкові умови та примусові складові знайдемо за виразами (4.29) та (4.30).

Увімкнення котушок узгоджене.

Характеристичне рівняння сформуємо за методом вхідного опору.

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{вх}}(p) &= r_1 + p(L_1 + L_2 + 2M) + \frac{\left(r_2 + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{r_2 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \\
 &= r_1 + p(L_1 + L_2 + 2M) + \frac{\left(\alpha + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{\alpha + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \\
 &= \frac{r_1(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) +}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p} + \\
 &+ \frac{p(L_1 + L_2 + 2M)(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) + \alpha C_2 p + 1}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

звідки:

$$\begin{aligned}
 \alpha L_1 C_2 C_3 p^3 + [\alpha r_1 C_2 C_3 + (L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)]p^2 + \\
 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Це кубічне рівняння має три корені, перші два з яких визначимо, виконавши перетворення

$$\begin{aligned}
 \alpha L_1 C_2 C_3 p^3 + [\alpha r_1 C_2 C_3 + (L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)]p^2 + \\
 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 \approx \\
 (L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)p^2 + r_1(C_2 + C_3)p + 1 \approx 0,
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

звідки

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{-r_1(C_2 + C_3) + \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4(L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)}}{2(L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)} = \\
&= -92.59 + 79j, \\
p_2 &= \frac{-r_1(C_2 + C_3) - \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4(L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)}}{2(L_1 + L_2 + 2M)(C_2 + C_3)} = \\
&= -92.59 - 79j.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\delta &= -\mathbf{Re}(p_1) = 92.59, \\
\omega_0 &= \mathbf{Im}(p_1) = 79.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що корені характеристичного рівняння комплексні спряжені, тобто перехідний процес має *коливальний* характер.

Третій корінь знайдемо, аналогічно з попереднім випадком

$$p_3 = -\frac{1}{(L_1 + L_2 + 2M)C_2 C_3 \alpha p_1 p_2} = -\frac{16667}{\alpha} \text{ c}^{-1}.$$

Аналіз попередніх прикладів показує, що третій корінь залежить лише від значень ємностей.

Запишемо вирази для напруг на ємностях

$$\begin{aligned}
u_{C_2}(t) &= U + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + A_3 e^{p_3 t} = \\
&= 100 + e^{-92.59t} (A_1 \sin 79t + A_2 \cos 79t) + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
u_{C_3}(t) &= u_{C_2}(t) + \alpha C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \\
&= 100 + e^{-92.59t} (A_1 \sin 79t + A_2 \cos 79t) + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} + \\
&+ \alpha 10^{-4} e^{-92.59t} (-92.59) (A_1 \sin 79t + A_2 \cos 79t) + \\
&+ \alpha 10^{-4} e^{-92.59t} \cdot 79 \cdot (-A_2 \sin 79t + A_1 \cos 79t) - \frac{1.6667}{\alpha} \alpha A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 100 + e^{-92.59t} (A_1 \sin 79t + A_2 \cos 79t - \alpha 0.009259 A_1 \sin 79t - \\
&- \alpha 0.009259 A_2 \cos 79t - \alpha 0.0079 A_2 \sin 79t + \\
&+ \alpha 0.0079 A_1 \cos 79t) - 1.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \approx \\
&\approx 100 + e^{-92.59t} (A_1 \sin 66.144t + A_2 \cos 66.144t) - 0.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Тоді струми в ємностях

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = e^{-92.59t} (0.009259 A_1 \sin 79t - 0.009259 A_2 \cos 79t - \\
&- 0.0079 A_2 \sin 79t + 0.0079 A_1 \cos 79t) - \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t}, \\
i_3(t) &= C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} = e^{-92.59t} (0.01389 A_1 \sin 79t - 0.01389 A_2 \cos 79t - \\
&- 0.01185 A_2 \sin 79t + 0.01185 A_1 \cos 79t) + \frac{1.6667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t},
\end{aligned}$$

а струм в індуктивності

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= i_2(t) + i_3(t) = e^{-92.59t} (0.02315 A_1 \sin 79t - \\
&- 0.02315 A_2 \cos 79t - 0.01975 A_2 \sin 79t + \\
&+ 0.01975 A_1 \cos 79t)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Для визначення сталих інтегрування складемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
u_{C_2}(0+) &= 100 + A_2 + A_3 = 0, \\
u_{C_3}(0+) &= 100 + A_2 - 0.6667 A_3 = 100, \\
i_1(0+) &= -0.02315 A_2 + 0.01975 A_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Визначимо з другого рівняння

$$A_3 = \frac{A_2}{0.6667} = 1.5 A_2$$

та підставимо його в перше рівняння

$$100 + A_2 + 1.5 A_2 = 0.$$

Звідси

$$A_2 = -\frac{100}{2.5} = -40,$$

а

$$A_3 = 1.5A_2 = -60.$$

Тоді з першого рівняння визначаємо

$$A_1 = \frac{0.02315A_2}{0.01975} = -46.89.$$

Таким чином, перехідні напруги на ємностях

$$u_{C_2}(t) = 100 + e^{-92.59t}(-46.89\sin 79t - 40\cos 79t) - 60e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx 100 + e^{-92.59t}(-46.89\sin 79t - 40\cos 79t), \quad (4.63)$$

$$u_{C_3}(t) = 100 + e^{-92.59t}(-46.89\sin 79t - 40\cos 79t) + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx 100 + e^{-92.59t}(-46.89\sin 79t - 40\cos 79t), \quad (4.64)$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = e^{-92.59t}(0.02315A_1\sin 79t - 0.02315A_2\cos 79t - 0.01975A_2\sin 79t + 0.01975A_1\cos 79t) = -1.875e^{-92.59t}\sin 79t. \quad (4.65)$$

Аналогічно попередньому прикладу в момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ значення напруг дорівнює

$$u_{C_2}(0_+) = 100 + e^{-92.59\alpha_1}(-46.89\sin 79\alpha_1 - 40\cos 79\alpha_1) - 60e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx 100 - 46.89\alpha - 40 - 60\alpha \approx 60 \text{ В},$$

$$u_{C_3}(0_+) = 100 + e^{-92.59\alpha_1}(-46.89\sin 79\alpha_1 - 40\cos 79\alpha_1) + 40e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx 100 - 75.57\alpha - 40 + 40\alpha \approx 60 \text{ В},$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = -1.875e^{-92.59\alpha_1}\sin 79\alpha_1 \approx 0 \text{ А}.$$

Графіки коливального перехідного процесу виглядають так:

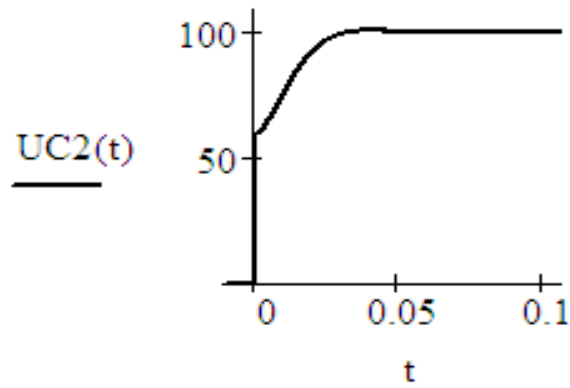


Рисунок 4.16 – Напряга на ємності C_2
(узгоджене увімкнення котушок)

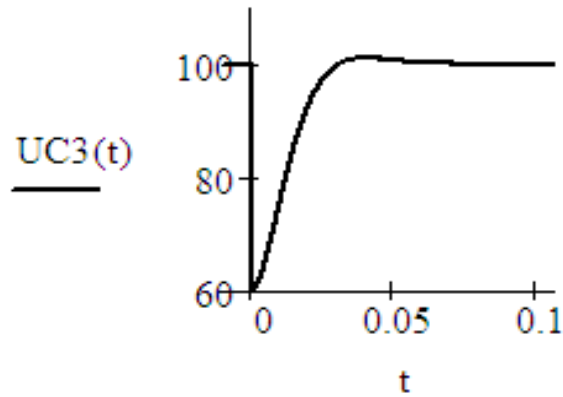


Рисунок 4.17 – Напряга на ємності C_3
(узгоджене увімкнення котушок)

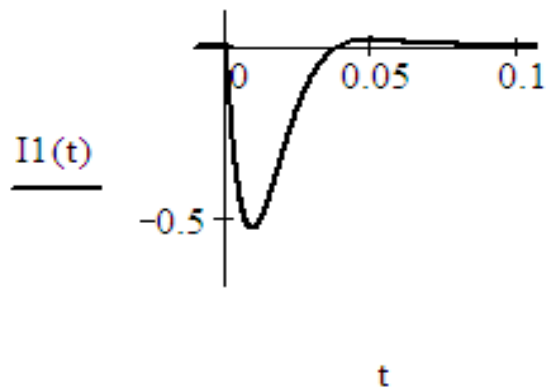


Рисунок 4.18 – Струм в індуктивності
(узгоджене увімкнення котушок)

Нехай увімкнення котушок зустрічне.

Характеристичне рівняння сформуємо за методом вхідного опору.

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{вх}}(p) &= r_1 + p(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{\left(r_2 + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{r_2 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \\
 &= r_1 + p(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{\left(\alpha + \frac{1}{pC_2}\right) \frac{1}{pC_3}}{\alpha + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_3}} = \quad (4.66) \\
 &= \frac{r_1(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) +}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p} + \\
 &+ \frac{p(L_1 + L_2 - 2M)(\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p) + \alpha C_2 p + 1}{\alpha C_2 C_3 p^2 + (C_2 + C_3)p}
 \end{aligned}$$

звідки:

$$\begin{aligned}
 \alpha L_1 C_2 C_3 p^3 + [\alpha r_1 C_2 C_3 + (L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)]p^2 + \\
 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 = 0. \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Це кубічне рівняння має три корені, перші два з яких визначимо, виконавши перетворення

$$\begin{aligned}
 \alpha L_1 C_2 C_3 p^3 + [\alpha r_1 C_2 C_3 + (L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)]p^2 + \\
 + [r_1(C_2 + C_3) + \alpha C_2]p + 1 \approx \quad (4.68) \\
 (L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)p^2 + r_1(C_2 + C_3)p + 1 \approx 0,
 \end{aligned}$$

звідки

$$p_1 = \frac{-r_1(C_2 + C_3) + \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4(L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)}}{2(L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)} = -84.26,$$

$$p_2 = \frac{-r_1(C_2 + C_3) - \sqrt{[r_1(C_2 + C_3)]^2 - 4(L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)}}{2(L_1 + L_2 - 2M)(C_2 + C_3)} = -1582.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто перехідний процес має *aperiodичний* характер.

Третій корінь знайдемо, аналогічно з попереднім випадком

$$p_3 = -\frac{1}{(L_1 + L_2 - 2M)C_2C_3\alpha p_1 p_2} = -\frac{16667}{\alpha}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_{C_2}(t) &= U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} = \\ &= 100 + A_1 e^{-84.26t} + A_2 e^{-1582t} + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

а

$$\begin{aligned} u_{C_3}(t) &= u_{C_2}(t) + \alpha C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \\ &= 100 + A_1 e^{-84.26t} + A_2 e^{-1582t} + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} + \\ &+ 10^{-4} \left(-84.26 A_1 e^{-84.26t} - 1582 A_2 e^{-1582t} - \frac{16667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right) \alpha = \\ &= 100 + A_1 e^{-84.26t} + A_2 e^{-1582t} + A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} - \\ &- 0.008426\alpha A_1 e^{-84.26t} - 0.1582\alpha A_2 e^{-1582t} - \frac{1.6667}{\alpha} \alpha A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \\ &\approx 100 + A_1 e^{-84.26t} + A_2 e^{-1582t} - 0.6667 A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Струм в індуктивності визначимо як

$$\begin{aligned} i_1(t) &= C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} + C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} = \\ &= 10^{-4} \left(-84.26 A_1 e^{-84.26t} - 1582 A_2 e^{-1582t} - \frac{16667}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \right) + \end{aligned}$$

$$+ 1.5 \cdot 10^{-4} \left(-84.26 A_1 e^{-84.26t} - 1582 A_2 e^{-1582t} + \frac{11111}{\alpha} A_3 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \right) = \quad (4.71)$$

$$= -0.021 A_1 e^{-84.26t} - 0.3955 A_2 e^{-1582t}.$$

Знайдемо сталі інтегрування

$$\begin{aligned} u_{C_2}(0+) &= 100 + A_1 + A_2 + A_3 = 0, \\ u_{C_3}(0+) &= 100 + A_1 + A_2 - 0.6667 A_3 = 100, \\ i_1(0+) &= -0.021 A_1 - 0.3955 A_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Визначимо з третього рівняння

$$A_1 = -\frac{0.3955 A_2}{0.021} = -18.83 A_2$$

та підставимо його в перше та друге рівняння

$$\begin{aligned} 100 - 18.83 A_2 + A_2 + A_3 &= 0, \\ 100 - 18.83 A_2 + A_2 - 0.6667 A_3 &= 100. \end{aligned}$$

Тоді

$$A_3 = -100 + 17.83 A_2$$

і

$$100 - 17.83 A_2 - 0.6667(-100 + 17.83 A_2) = 100.$$

Звідси

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{66.67}{29.72} = 2.243, \\ A_3 &= -100 + 17.83 \cdot 2.243 = -60, \\ A_1 &= -18.83 \cdot 2.243 = -42.243. \end{aligned}$$

Таким чином, перехідні напруги на ємностях

$$\begin{aligned} u_{C_2}(t) &= 100 - 42.243 e^{-84.26t} + 2.243 e^{-1582t} - 60 e^{-\frac{16667}{\alpha} t} \approx \\ &\approx 100 - 42.243 e^{-84.26t} + 2.243 e^{-1582t}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$u_{C_3}(t) = 100 - 42.243e^{-84.26t} + 2.243e^{-1582t} + 40e^{-\frac{16667}{\alpha}t} \approx \quad (4.74)$$

$$\approx 100 - 42.243e^{-84.26t} + 2.243e^{-1582t},$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = 0.88e^{-84.26t} - 0.88e^{-1582t}. \quad (4.75)$$

В момент часу $t = 0_+ \approx \alpha_1$ вирази (4.73) та (4.74) приймуть вигляд

$$u_{C_2}(0_+) = 100 - 42.243e^{-84.26\alpha_1} + 2.243e^{-1582\alpha_1} - 60e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx$$

$$\approx 100 - 42.243e^{-84.26\alpha_1} + 2.243e^{-1582\alpha_1} - 60\alpha \approx 60 \text{ В},$$

$$u_{C_3}(0_+) = 100 - 42.243e^{-84.26\alpha_1} + 2.243e^{-1582\alpha_1} + 40e^{-\frac{16667}{0}\alpha_1} \approx$$

$$\approx 100 - 42.243e^{-84.26\alpha_1} + 2.243e^{-1582\alpha_1} + 40\alpha \approx 60 \text{ В},$$

а струм в індуктивності

$$i_1(t) = 0.88e^{-84.26\alpha_1} - 0.88e^{-1582\alpha_1} \approx 0 \text{ А}.$$

Графіки аперіодичного перехідного процесу виглядають так:

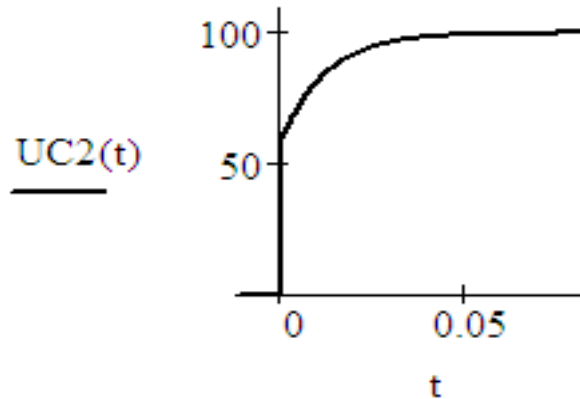


Рисунок 4.19 – Напряга на ємності C_2
(зустрічне увімкнення котушок)

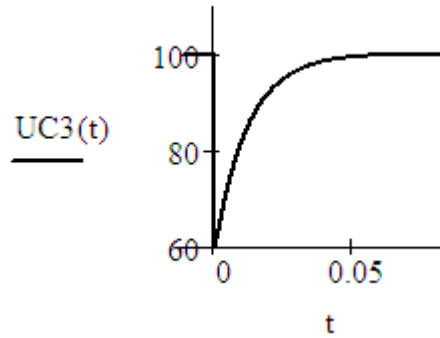


Рисунок 4.20 – Напряга на ємності C_3
(зустрічне увімкнення котушок)

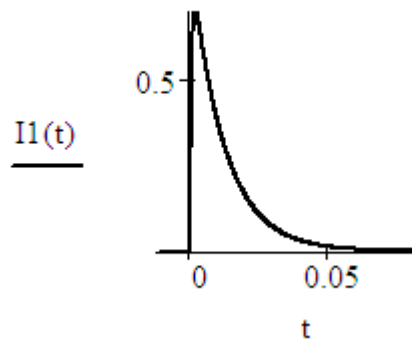


Рисунок 4.21 – Струм в індуктивності
(зустрічне увімкнення котушок)

5 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕТРИВІАЛЬНИХ ЗАДАЧ В КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Окрім задач аналізу кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами та перехідних процесів з порушенням законів комутації існують окремі нетривіальні задачі аналізу кіл синусоїдного струму для яких теж доцільно використовувати методи нестандартного аналізу.

Деякі з таких задач будуть розглянуті далі.

Нагадаємо, що довільний чотиріполюсник (рис. 5.1) характеризується системою основних рівнянь, виражених через так звані *A-параметри*.

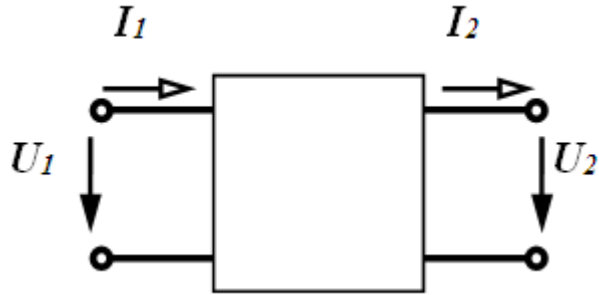


Рисунок 5.1 – Загальна схема чотириполюсника

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Зазвичай, \underline{A} -параметри чотириполюсника визначаються за допомогою дослідів короткого замикання та холостого ходу, а саме

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{2k}(\underline{Z}_{1x} - \underline{Z}_{1k})}}, \quad (5.2)$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}, \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}}, \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{1k}}, \quad (5.3)$$

де \underline{Z}_{1x} – вхідний опір кола в режимі прямого холостого ходу,

\underline{Z}_{1k} – вхідний опір кола в режимі прямого короткого замикання,

\underline{Z}_{2k} – вхідний опір кола в режимі зворотного короткого замикання.

Зазначимо, що в режимі холостого ходу опір навантаження є нескінченно великим

$$\underline{Z}_{nx} = \beta = \frac{1}{\alpha}, \quad (5.4)$$

а в режимі короткого замикання він нескінченно малий

$$\underline{Z}_{nk} = \alpha. \quad (5.5)$$

Розглянемо приклади.

Приклад 5.1. Знайти \underline{A} -параметри найпростішого чотириполюсника з повздовжньою віткою \underline{Z} (рис. 5.2).

Оскільки цей чотириполюсник симетричний, можна записати

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x} = \underline{Z} + \underline{Z}_{hx} = \underline{Z} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha \underline{Z} + 1}{\alpha},$$

$$\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_{2k} = \underline{Z} + \underline{Z}_{hk} = \underline{Z} + \alpha.$$

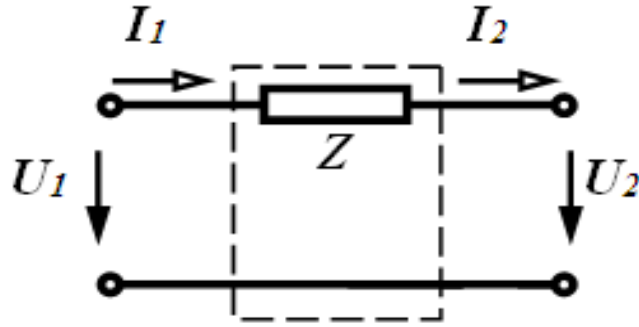


Рисунок 5.2 – Схема найпростішого чотириполюсника з повздовжньою віткою

Знайдемо \underline{A} -параметри:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha \underline{Z} + 1}{\alpha} (\underline{Z} + \alpha)}{(\underline{Z} + \alpha) \left(\frac{\alpha \underline{Z} + 1}{\alpha} - \underline{Z} - \alpha \right)}} = \sqrt{\frac{(\alpha \underline{Z} + 1)}{(\alpha \underline{Z} + 1 - \alpha \underline{Z} - \alpha^2)}} \approx \sqrt{\frac{1}{1}} = 1,$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\frac{\alpha \underline{Z} + 1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha \underline{Z} + 1} \approx \alpha \approx 0,$$

$$\underline{A}_{12} = 1 \cdot (\underline{Z} + \alpha) \approx \underline{Z}, \quad \underline{A}_{22} = 1 \cdot \frac{\underline{Z} + \alpha}{\underline{Z} + \alpha} = 1.$$

Приклад 5.2. Знайти \underline{A} -параметри найпростішого чотириполюсника з поперечною віткою \underline{Z} (рис. 5.3).

Цей чотириполюсник теж симетричний, тому

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Z}_{hx}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{hx}} = \frac{\underline{Z} \cdot \frac{1}{\alpha}}{\underline{Z} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1},$$

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_{2к} = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{HK}} = \frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha}.$$

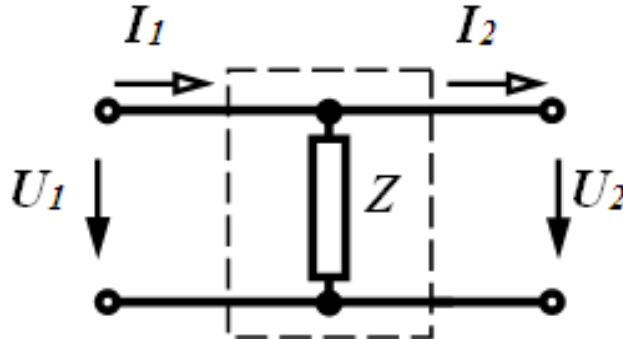


Рисунок 5.3 – Схема найпростішого чотириполюсника з поперечною віткою

Знайдемо \underline{A} -параметри:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1} \cdot \frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha}}{\frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha} \left(\frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1} - \frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha} \right)}} = \sqrt{\frac{\frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1}}{\left(\frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1} - \frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha} \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1}}{\frac{\underline{Z}(\underline{Z} + \alpha) - \alpha \underline{Z}(\alpha \underline{Z} + 1)}{(\underline{Z} + \alpha)(\alpha \underline{Z} + 1)}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}(\underline{Z} + \alpha)}{\underline{Z}(\underline{Z} + \alpha) - \alpha \underline{Z}(\alpha \underline{Z} + 1)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Z}^2 + \alpha \underline{Z}}{\underline{Z}^2 + \alpha \underline{Z} - \alpha \underline{Z}^2 - \alpha \underline{Z}}} \approx \sqrt{\frac{\underline{Z}^2}{\underline{Z}^2}} = 1, \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\frac{\underline{Z}}{\alpha \underline{Z} + 1}} = \frac{\alpha \underline{Z} + 1}{\underline{Z}} \approx \frac{1}{\underline{Z}}, \\ \underline{A}_{12} &= 1 \cdot \frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha} \approx \alpha \approx 0, \quad \underline{A}_{22} = 1 \cdot \frac{\frac{\alpha \underline{Z}}{\underline{Z} + \alpha}}{\frac{\underline{Z} + \alpha}{\alpha \underline{Z}}} = 1. \end{aligned}$$

Приклад 5.3. Знайти \underline{A} -параметри Г-подібного чотириполюсника (рис. 5.4).

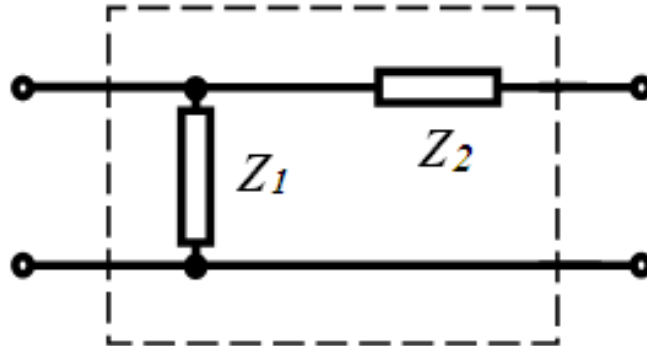


Рисунок 5.4 – Схема Г-подібного чотириполюсника

Цей чотириполюсник не є симетричним, тому

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hx})}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hx}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \left(\underline{Z}_2 + \frac{1}{\alpha} \right)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{1}{\alpha}} = \frac{\underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + 1},$$

$$\underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{hx}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{hx}} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \frac{1}{\alpha}}{\underline{Z}_1 + \frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1}{\alpha \underline{Z}_1 + 1} = \frac{\alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 + 1},$$

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hk})}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hk}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \alpha)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha} = \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha},$$

$$\underline{Z}_{2k} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{hk}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{hk}} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \alpha}{\underline{Z}_1 + \alpha} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \alpha}.$$

Знайдемо \underline{A} -параметри:

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\frac{\underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + 1} \cdot \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \alpha} \left(\frac{\underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + 1} - \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha} \right)}} \approx \\
&\approx \sqrt{\frac{(\underline{Z}_1)(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1)}{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2)[\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2]}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1^3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1^3 \underline{Z}_2}} = 1, \\
\underline{A}_{21} &= \frac{1}{\frac{\underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + 1}} = \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + 1}{\underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \approx \frac{1}{\underline{Z}_1}, \\
\underline{A}_{12} &= 1 \cdot \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \alpha} \approx \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \underline{Z}_2, \\
\underline{A}_{22} &= 1 \cdot \frac{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \alpha}}{\frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha}} = \frac{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha)}{(\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1 + \alpha)} \approx \\
&\approx \frac{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1)} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}.
\end{aligned}$$

Цікавим є випадок, коли Γ -подібний чотиріполюсник є ідеальним реактивним резонансним, тобто коли вітки \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 це ідеальні реактивні елементи і, наприклад, $\underline{Z}_1 = jx$, а $\underline{Z}_2 = -jx$.

Тоді

$$\underline{Z}_{1\kappa} = \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha} = \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{jx - jx + \alpha} = \frac{\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{j\alpha + \alpha},$$

тобто вхідний опір кола в режимі прямого короткого замикання є нескінченно великим числом.

Звідси випливає що

$$\underline{A}_{22} = \frac{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2)(j\alpha + \alpha)}{(\alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1 + \alpha)} \approx \frac{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(j\alpha + \alpha)}{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2)(\underline{Z}_1)} \approx \frac{(j\alpha + \alpha)}{\underline{Z}_1} \approx 0.$$

Цей же результат можна отримати з виразу

$$\underline{A}_{22} = 1 + \frac{-jx}{jx} = 1 - 1 = 0.$$

Приклад 5.4. Знайти A -параметри Т-подібного чотириполюсника (рис. 5.5).

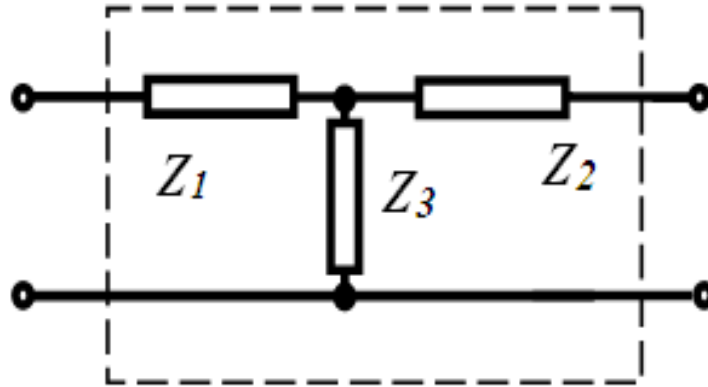


Рисунок 5.5 – Схема Т-подібного чотириполюсника

Цей чотириполюсник теж не є симетричним, тому

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1x} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hx})}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hx}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_2 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \frac{1}{\alpha}} = \\ &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3(\alpha\underline{Z}_2 + 1)}{\alpha\underline{Z}_3 + \alpha\underline{Z}_2 + 1} = \frac{\alpha\underline{Z}_3\underline{Z}_1 + \alpha\underline{Z}_2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 + \alpha\underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3}{\alpha\underline{Z}_3 + \alpha\underline{Z}_2 + 1} \approx \\ &\approx \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{2x} &= \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{hx})}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{hx}} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_3\left(\underline{Z}_1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{1}{\alpha}} = \\ &= \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_3(\alpha\underline{Z}_1 + 1)}{\alpha\underline{Z}_3 + \alpha\underline{Z}_1 + 1} = \frac{\alpha\underline{Z}_3\underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3}{\alpha\underline{Z}_3 + \alpha\underline{Z}_1 + 1} \approx \\ &\approx \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3, \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{1\kappa} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hx})}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{hx}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \alpha)}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \alpha} =$$

$$= \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \alpha} \approx \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{2K} &= \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HK})}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HK}} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \alpha)}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \alpha} = \\ &= \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \alpha} \approx \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}. \end{aligned}$$

Знайдемо \underline{A} -параметри:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}}{\frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1} \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)^2}{\underline{Z}_3^2}} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3}, \end{aligned}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3},$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} \cdot \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3},$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} \cdot \frac{\frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}}{\frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}.$$

Цікавим є випадок, вітки \underline{Z}_3 та \underline{Z}_2 це ідеальні реактивні елементи і, наприклад, $\underline{Z}_3 = jx$, а $\underline{Z}_2 = -jx$.

Тоді

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1к} &= \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \alpha} = \\ &= \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3}{jx - jx + \alpha} = \\ &= \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3}{j\alpha + \alpha}, \end{aligned}$$

тобто вхідний опір кола в режимі прямого короткого замикання є нескінченно великим числом.

Звідси випливає що

$$\begin{aligned} \underline{A}_{22} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \alpha \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \alpha \underline{Z}_3} \approx \\ &\approx \frac{(\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3)(j\alpha + \alpha)}{(\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3)(\underline{Z}_3)} \approx \frac{(j\alpha + \alpha)}{\underline{Z}_3} \approx 0. \end{aligned}$$

Цей же результат можна отримати з виразу

$$\underline{A}_{22} = \frac{jx - jx}{\underline{Z}_3} = 0.$$

Приклад 5.5. Знайти \underline{A} -параметри П-подібного чотириполюсника (рис. 5.6).

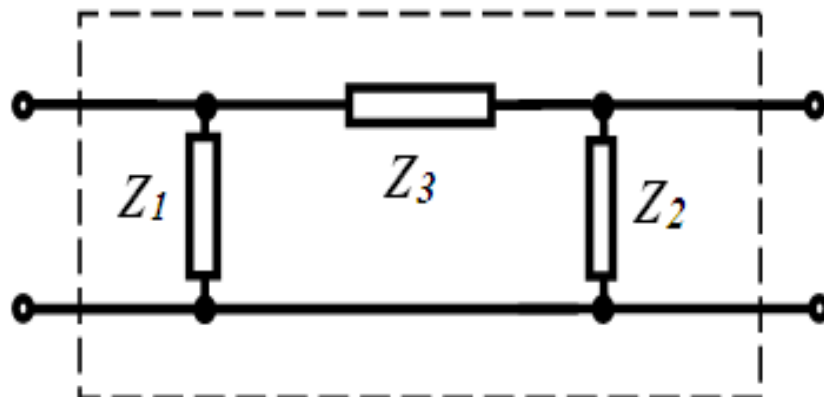


Рисунок 5.6 – Схема П-подібного чотириполюсника

Цей чотириполосник є несиметричним, тому

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{1x} &= \frac{\underline{Z}_1 \left(\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HX}} \right)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HX}}} = \frac{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HX}) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX})}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HX}) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HX} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_{HX} + \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HX} + \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \frac{1}{\alpha} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \frac{1}{\alpha}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \frac{1}{\alpha} + \underline{Z}_3 \frac{1}{\alpha} + \underline{Z}_2 \frac{1}{\alpha}} = \\
&= \frac{\alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} \approx \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}, \\
\underline{Z}_{2x} &= \frac{\underline{Z}_2 \left(\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HX}} \right)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HX}}} = \frac{(\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HX}) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX})}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HX}) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_{HX}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HX} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_{HX} + \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HX} + \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HX}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \frac{1}{\alpha} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \frac{1}{\alpha}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \frac{1}{\alpha} + \underline{Z}_3 \frac{1}{\alpha} + \underline{Z}_2 \frac{1}{\alpha}} = \\
&= \frac{\alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\alpha \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \alpha \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} \approx \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}, \\
\underline{Z}_{1k} &= \frac{\underline{Z}_1 \left(\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HK}} \right)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HK}}} = \frac{(\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HK}) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK})}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{HK}) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HK} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_{HK} + \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HK} + \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \alpha}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \alpha + \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_2 \alpha} \approx \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{2K} &= \frac{\underline{Z}_2 \left(\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HK}} \right)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HK}}} = \frac{(\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HK}) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK})}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{HK}) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_{HK}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HK} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_{HK} + \underline{Z}_3 \underline{Z}_{HK} + \underline{Z}_2 \underline{Z}_{HK}} = \\
&= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \alpha}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \alpha + \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_2 \alpha} \approx \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.
\end{aligned}$$

Знайдемо \underline{A} -параметри:

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}{\frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \left(\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \right)}} = \\
&= \sqrt{\frac{(2\underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2^2 + \underline{Z}_3^2)}{\underline{Z}_2^2}} = \sqrt{\frac{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)^2}{\underline{Z}_2^2}} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}, \\
\underline{A}_{21} &= \frac{\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}, \\
\underline{A}_{12} &= \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \underline{Z}_3, \\
\underline{A}_{22} &= \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{\frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}}{\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}.
\end{aligned}$$

Цікавим є випадок, вітки \underline{Z}_3 та \underline{Z}_2 це ідеальні реактивні елементи і, наприклад, $\underline{Z}_3 = jx$, а $\underline{Z}_2 = -jx$.

Тоді

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{2к} &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \alpha}{\underline{Z}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \underline{Z}_1 \alpha + \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_2 \alpha} = \\ &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \alpha}{\underline{Z}_1 (-jx + jx) + \underline{Z}_1 \alpha + \underline{Z}_3 \alpha + \underline{Z}_2 \alpha} \approx \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{j\alpha}. \end{aligned}$$

тобто вхідний опір кола в режимі зворотного короткого замикання є нескінченно великим числом.

Звідси випливає що

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}{\frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \left(\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \right)}} \approx \sqrt{\frac{(j\alpha)^2}{\underline{Z}_2^2}} \approx \frac{j\alpha}{\underline{Z}_2} \approx 0.$$

Доцільність застосування методів нестандартного аналізу виникає і при аналізі кіл синусоїдного струму з ідеальними резонансними контурами. Розглянемо приклади.

Приклад 5.6. В резонансному колі (рис. 5.7), в якому $x_L = x_C = x$, визначити напругу між точками *a* та *b*.

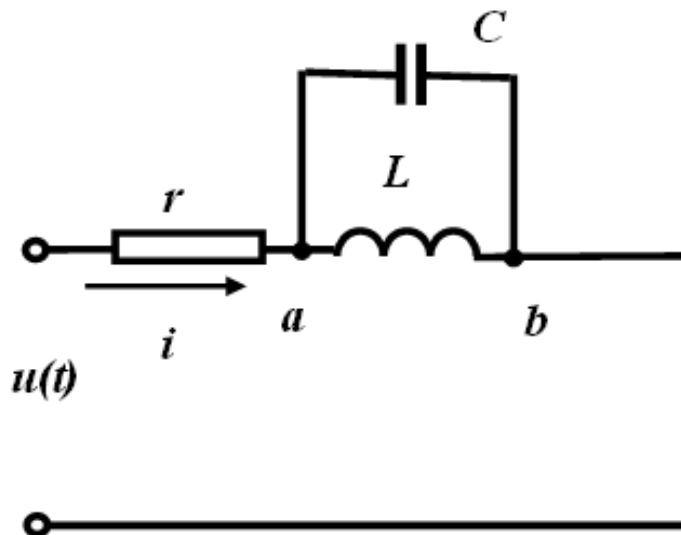


Рисунок 5.7 – Схема з резонансним контуром

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = r + \frac{(jx)(-jx)}{jx - jx} = r + \frac{-j^2 x^2}{j\alpha} = \frac{\alpha r - jx^2}{\alpha},$$

тоді струм в колі

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{ex}}} = \frac{\underline{U}}{\frac{\alpha r - jx^2}{\alpha}} = \frac{\alpha \underline{U}}{\alpha r - jx^2}.$$

Напруга між точками **a** та **b** визначається як

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I} \frac{(jx)(-jx)}{jx - jx} = \frac{\alpha \underline{U}}{\alpha r - jx^2} \cdot \frac{-jx^2}{\alpha} \approx \underline{U}.$$

Приклад 5.7. В резонансному колі (рис. 5.8), в якому $x_{L_1} = x_{C_1} = x$ і $x_{L_2} = x_{C_2} = kx$ визначити напруги між точками **a**, **b** та **c**, **d**.

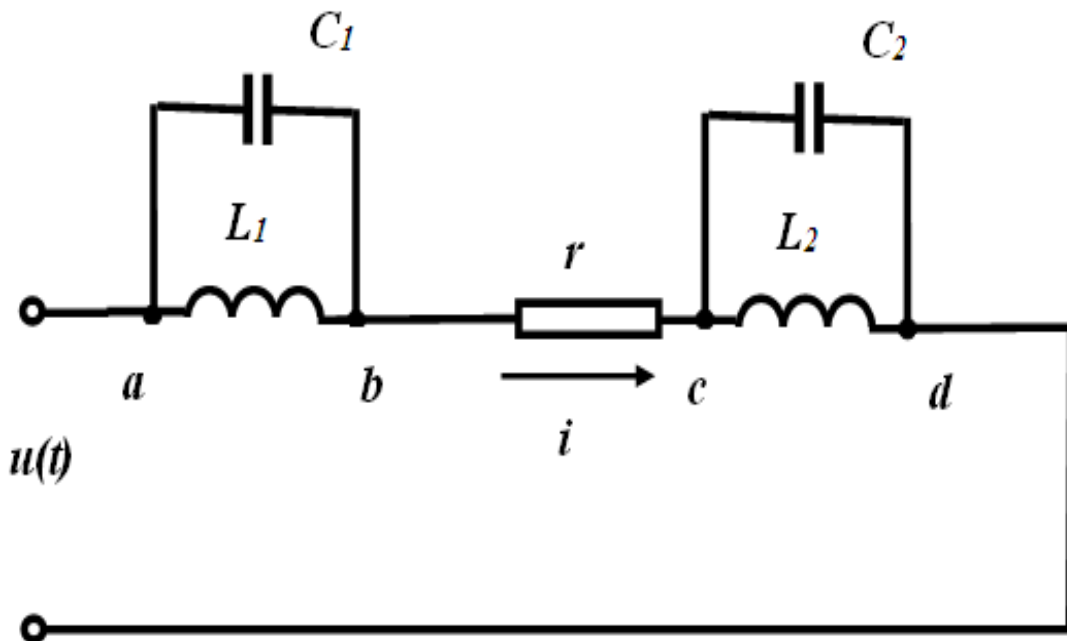


Рисунок 5.8 – Схема з двома резонансними контурами

Повний комплексний опір кола дорівнює

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} &= r + \frac{(jx)(-jx)}{jx - jx} + \frac{(jkx)(-jkx)}{jkx - jkx} = r + \frac{-j^2x^2}{j\alpha} + \frac{-j^2k^2x^2}{jk\alpha} = \\ &= r + \frac{-jx^2}{\alpha} + \frac{-jkx^2}{\alpha} = \frac{\alpha r - j(k+1)x^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Струм в колі

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{\underline{U}}{\frac{\alpha r - j(k+1)x^2}{\alpha}} = \frac{\alpha \underline{U}}{\alpha r - j(k+1)x^2}.$$

Напруги між точками **a**, **b** та **c**, **d** визначається як

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{I} \frac{(jx)(-jx)}{jx - jx} = \frac{\alpha \underline{U}}{\alpha r - j(k+1)x^2} \cdot \frac{-jx^2}{\alpha} \approx \frac{\underline{U}}{k+1}, \\ \underline{U}_{cd} &= \underline{I} \frac{(jkx)(-jkx)}{jkx - jkx} = \frac{\alpha \underline{U}}{\alpha r - j(k+1)x^2} \cdot \frac{-jkx^2}{\alpha} \approx \frac{k\underline{U}}{k+1}. \end{aligned}$$

ВИСНОВКИ

1. В роботі проведений розвиток аксіоматики та методів нестандартного аналізу, який передбачає безпосереднє застосування нескінченно малих та нескінченно великих чисел як елементів множини гіпердійсних чисел. Така ж аксіоматика поширена і на множину комплексних чисел.

2. Показано обчислення похідних найбільш поширених функцій користуючись методами нестандартного аналізу.

3. При розв'язанні різноманітних прикладних задач зазначимо, що не існує загальних правил вибору параметру, який доцільно прирівняти до нескінченно малого (або нескінченно великого) числа. Цей вибір здійснюється дослідником в залежності від контексту конкретної задачі. При цьому слід мати на увазі, що у випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім непростою проблемою і вимагає, іноді, додаткових досліджень.

4. Авторами вперше виділено клас нетривіальних електротехнічних задач, розв'язання яких стандартними методами теоретичної електротехніки є занадто складним або взагалі практично неможливим. Тому запропоновано розв'язувати їх методами нестандартного аналізу.

5. До цього класу відносяться: аналіз усталених режимів електричних кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами; аналіз перехідних режимів електричних кіл в схемах, в яких мають місце порушення законів комутації; визначення узагальнених параметрів чотиріполюсників; аналіз усталених режимів електричних кіл синусоїдного струму з ідеальними резонансними контурами.

6. З метою розширення сфери застосування методів нестандартного аналізу необхідно виділити подібні задачі із різноманітних галузей науки і техніки, в яких використовується диференціальне обчислення і граничні переходи і розв'язання яких стандартними підходами обмежене, або взагалі неможливе.

ЛІТЕРАТУРА

1. Robinson A. Non-Standard Analysis / A. Robinson— Princeton: Princeton University Press. — 1996. — 308 p.
2. Jensen A. A computer oriented approach to “nonstandard analysis” / A. Jensen // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. — 1972. — Vol. 69. — P. 281-289.
3. Bell J. A Primer of Infinitesimal Analysis / J. Bell. — Cambridge University Press. — 1998. — 140 p.
4. Lutz R. Nonstandard Analysis. A Practical Guide with Applications / R. Lutz, M. Goze. — Berlin: Springer-Verlag. — 1981. — 261 p.
5. Robinson A. Introduction to the Theory of Models and to the Metamathematics of Algebra / A. Robinson. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co. — 1963. — 284 pp.
6. Kukharchuk V.V. Transient analysis in 1st order electrical circuits in violation of commutation laws / V.V. Kukharchuk, S.V. Pavlov, S.Sh. Katsyv, A.M. Koval, V.S. Holodiuk, M.V. Lysyi, A. Kotyra, O. Mamyrbaev, A. Kalabayeva // Przegląd Elektrotechniczny. — 2021. — Vol. 9. — P. 26-30.
7. Katsyv S. Non-standard analysis in electrical engineering. Transient analysis in second-order electrical circuits with violation of switching laws / S. Katsyv, V. Kukharchuk, V. Madyarov, V. Holodiuk, V. Kucheruk, P. Kulakov, M. Hribov // Bulletin of the Karaganda University. «Physics» series. — №4 — 2022 — P. 56-64
8. Katsyv S. Nonstandard analysis in electrical engineering. The analysis of the direct current circuits with ideal reactive elements. / S. Katsyv, V. Kukharchuk, V. Kucheruk, P. Kulakov, M. Gribov // Bulletin of the Karaganda University. «Physics» series. — № 1(109) — 2023 — P. 31-39
9. Карпов Ю.О., Кухарчук В.В., ВедміцькийЮ.Г., Кацев С.Ш. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами **Підручник:** — Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. — 325 с.
10. Карпов Ю.О., Кухарчук В.В., ВедміцькийЮ.Г., Кацев С.Ш. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола **Підручник:** — Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. — 456 с.

Наукове видання

**Каців Самоїл Шулімович
Кухарчук Василь Васильович
Мадьяров Вячеслав Губейович**

НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено С. Кацивом

Підписано до друку

Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк.

Наклад прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,

КІВЦ ВНТУ,

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-81-59..

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.