УДК 539.3

В. М. Михалевич, д. т. н., проф.; В. О. Краєвський, к. т. н.; Ю. В. Добранюк

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ЗАЛИШКОВОГО РЕСУРСУ ПРИ ДІАГНОСТИЦІ МАТЕРІАЛУ

Проаналізовано та аналітично досліджено модель залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні. Визначено математично допустимі зміни параметрів α_{12}, n, I_{12} моделі, які входять в її критеріальне співвідношення і при яких вона набуває лише дійсних значень.

***Ключові слова**: тензорна модель; накопичення пошкоджень; двохетапне деформування; функція пошкодженості; залишковий ресурс; аналітичне дослідження; нестаціонарне деформування.*

Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень

Двохетапне деформування є важливим класом деформування з двох основних причин. По-перше, цей клас є найпростішим представником нестаціонарного деформування, якому властиві численні яскраво виражені ефекти в залежностях граничних деформацій. По-друге, в ряді випадків напружено-деформований стан в заготовках під час обробки тиском можна розглядати, при певному наближенні, саме як двохетапне деформування. В такому випадку спрощується аналіз придатності заготовки сприймати дану технологічну операцію.

Ціллю даної роботи є повне аналітичне дослідження моделі залишкового ресурсу, що випливає із тензорно-нелінійної теорії із степеневою функцією пошкодженості при двохетапному деформуванні.

Отже, задача дослідження полягає у визначенні математично допустимих меж зміни параметрів α_{12}, I_{12}, *n*, які входять у критеріальне співвідношення (1).

Двохетапне деформування розглядалося в багатьох роботах, зокрема в [1], але до цього часу в літературі відсутні результати повного дослідження критеріального співвідношення, що випливає із тензорно-нелінійної моделі з степеневою функцією пошкодженості.

Стосовно двохетапного деформування із тензорно-нелінійної моделі [1] отримаємо критеріальне співвідношення:

$$\psi_{*2} = \left[\psi_1^n \cdot \left(\alpha_{12}^n - I_{12}\right) + \sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1}\right]^{1/n} - \psi_1 \cdot \alpha_{12}, \tag{1}$$

де $\psi_{*2} = \dfrac{\varepsilon_*^{(2)}}{\varepsilon_{*2}}$ – залишковий ресурс граничних деформацій на другому етапі деформування; $\psi_1 = \dfrac{\varepsilon_u^{(1)}}{\varepsilon_{*1}}$ – використаний ресурс граничних деформацій на першому етапі деформування; $\alpha_{12} = \dfrac{\varepsilon_{*1}}{\varepsilon_{*2}}$ – параметр, що характеризує порядок чергування умов деформації; $I_{12} = k_{12} \cdot a^{(1)} \cdot a^{(2)} + I_1 \cdot a^{(1)} \cdot b^{(2)} + I_2 \cdot a^{(2)} \cdot b^{(1)} + \left(I_3 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot b^{(1)} \cdot b^{(2)}$, $k_{12} = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{ij}^{(2)}$ – косинус кута зламу траєкторії деформації; $a^{(i)}, b^{(i)}$ - значення параметрів a і b на непарних і парних етапах деформування; I_1, I_2, I_3 – інваріанти добутку тензорів, причому $I_1 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(2)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}$, $I_{21} = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}$, $I_1 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{kl}^{(2)} \cdot \beta_{li}^{(2)}$; $\varepsilon_*^{(2)}$ – величина залишкової до руйнування деформації на другому етапі деформування; $\varepsilon_u^{(1)}$ – величина накопиченої деформації на першому етапі деформування;

$\varepsilon_{*1} = \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(1)}, D^{(1)}\right)$, $\varepsilon_{*2} = \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(2)}, D^{(2)}\right)$ – гранична до руйнування деформація при стаціонарному деформуванні (діаграма пластичності); n – параметр, який характеризує властивості матеріалу та режим навантаження.

В роботах [2, 3, 4] аналізуються різні інваріанти для використання в якості аргументів поверхні граничних деформацій.

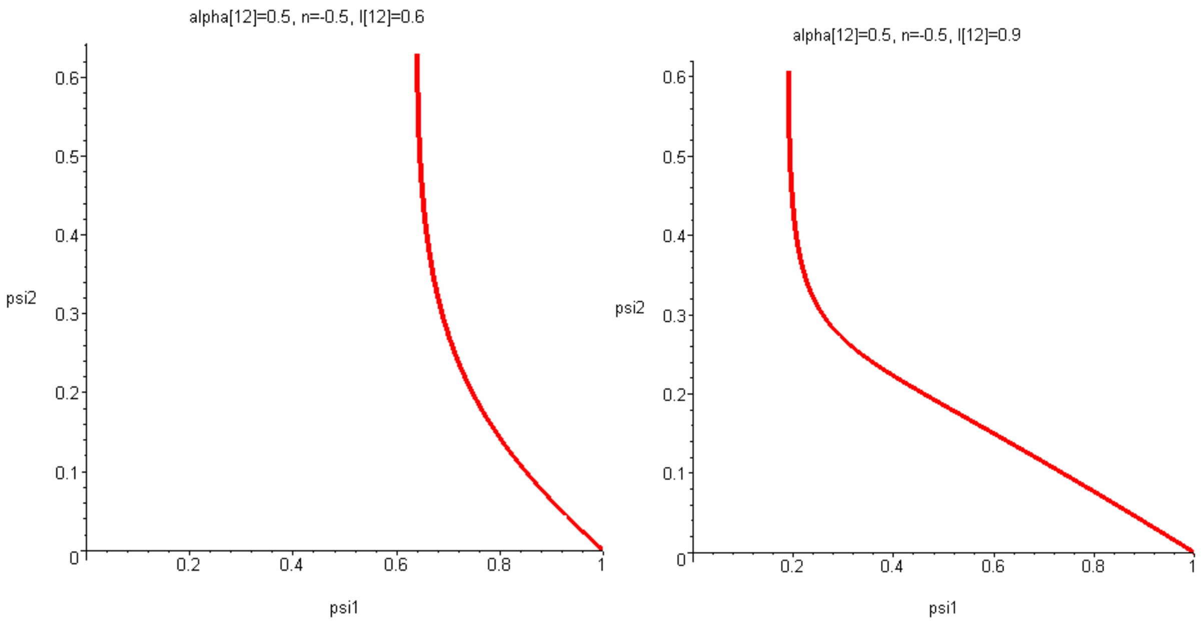
Основна частина

Визначимо математично допустимі межі зміни параметрів α_{12}, I_{12}, n, які входять у критеріальне співвідношення (1).

За означенням $\psi_1 \in [0;1]$, при двохетапному деформуванні: $\psi_1 \in [0;1)$. Враховуючи, що функція визначена в області дійсних чисел, якщо знаменник не перетворюється у нуль і основа степеневої функції більше нуля, робимо висновок, що для критеріального співвідношення (1), параметр n не дорівнює нулю, а також $\alpha_{12} > 0$. Отже, обмеження , які накладаються на змінну ψ_1 та параметри n і α_{12} виражаються за допомогою системи нерівностей:

$$\begin{cases} n \neq 0 \\ 0 \leq \psi_1 \leq 1 . \\ \alpha_{12} \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

При числовому досліджені співвідношення (1) із параметрами, які задовольняють нерівності (2) було виявлено ділянки, коли функція $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$ в області дійсних чисел невизначена. Так для значень параметрів $\alpha_{12} = 0{,}5$; n = -0,5; $I_{12} = 0{,}6$ функція визначена на проміжку $\psi_1 \in [0{,}64;1)$. При збільшенні значення параметра I_{12} до 0,9 область визначення функції збільшується і визначається проміжком $\psi_1 \in [0{,}19;1)$ (див. рис.1).



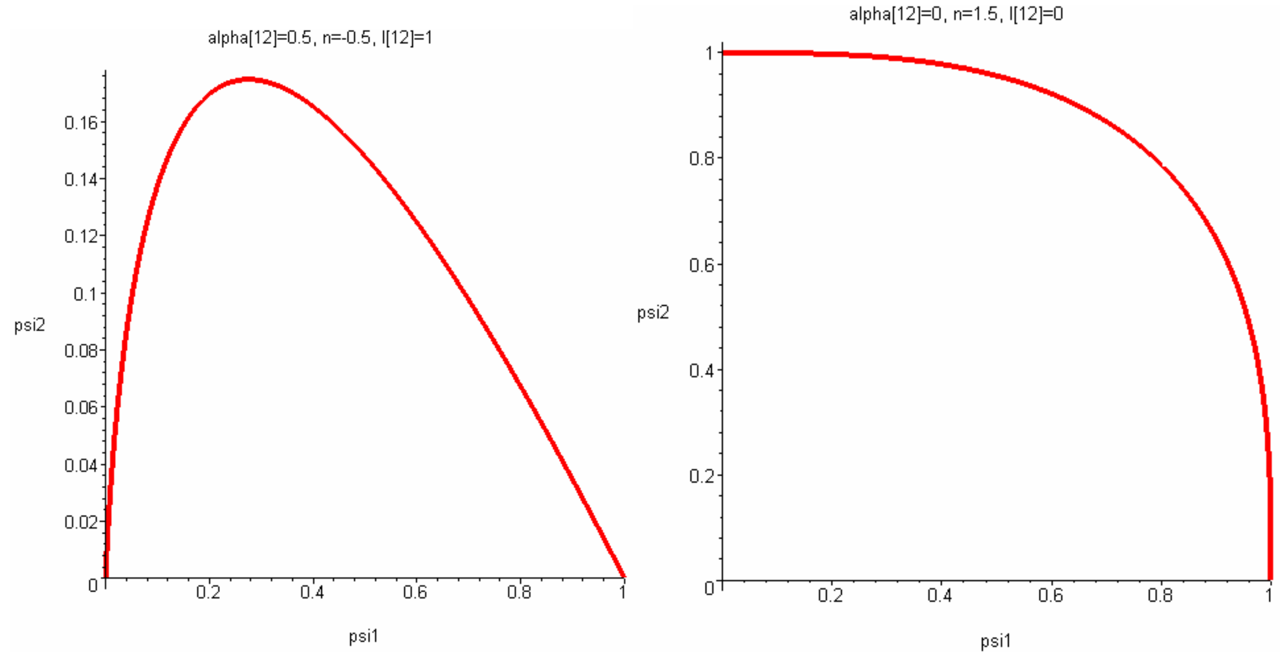


Рис. 1. Графіки залежностей між ресурсами пластичності при двохетапному деформуванні, коли α_{12} = 0,5; n= -0,5; I_{12} = 0,6; I_{12} = 0,9; I_{12} = 1; I_{12} = 0.

Виходячи із отриманих результатів числового дослідження критеріального співвідношення (1), можна зробити висновок, що обмеження параметрів (2) недостатньо. Для знаходження додаткових обмежень параметрів математичної моделі необхідно її аналітично дослідити.

Насамперед необхідно дослідити вираз:

$$\sqrt{\psi_1^{2\cdot n}\cdot\left(I_{12}^2-1\right)+1}\,. \tag{3}$$

За визначенням квадратного кореня, підкореневий вираз повинен бути не менший нуля, щоб значення виразу набувало дійсних значень. Тобто:

$$\psi_1^{2\cdot n}\cdot\left(I_{12}^2-1\right)+1\ge 0\,. \tag{4}$$

Звідки

$$I_{12}^2\ge 1-\frac{1}{\psi_1^{2\cdot n}}\,. \tag{5}$$

Розглянемо випадок, коли $n > 0$. Тоді при $0\le\psi_1\le 1$ права частина нерівності (5) лежить в межах $-\infty<1-\dfrac{1}{\psi_1^{2\cdot n}}\le 0$, тобто є числом не додатнім. I_{12}^2 – число не від'ємне, отже, нерівність (5) при $n>0$ виконується для $\forall I_{12}\in\left(-\infty;\infty\right)$. Тому при $n>0$ жодних додаткових обмежень на параметри не накладається.

Розглянемо нерівність (5) при $n < 0$. Тоді при зміні n від 0 до 1 вираз $1-\dfrac{1}{\psi_1^{2\cdot n}}$ монотонно спадає від 1 до 0. Тобто для виконання нерівності (5) необхідно, щоб $\left|I_{12}\right|\ge 1$. Якщо $\left|I_{12}\right|<1$, то завжди для $\psi_1\in\left[0;1\right)$ на графіку функції $\psi_{*2}=\psi_{*2}(\psi_1)$ буде спостерігатись область, при якій функція невизначена. Згідно із нерівністю (5) область визначення функції $\psi_{*2}=\psi_{*2}(\psi_1)$ визначається нерівністю:

$$\sqrt[2n]{\frac{1}{1-I_{12}^2}} \le \psi_1 \le 1 . \qquad (6)$$

Область, яка визначається нерівністю (6) повністю збігається із значеннями ψ_1 на рис. 1, для яких ψ_{*2}, що обчислюється за критеріальним співвідношенням (1), лежить в області дійсних чисел.

Тепер аналітично дослідимо вираз моделі, який підноситься до степені 1/ n. Цей вираз повинен бути не меншим нуля. Тобто

$$\psi_1^n \cdot \left(\alpha_{12}^n - I_{12}\right) + \sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1} \ge 0 . \qquad (7)$$

Із виразу (7) отримаємо ірраціональну нерівність:

$$\sqrt{\psi_1^{2\cdot n} \cdot \left(I_{12}^2 - 1\right) + 1} \ge \psi_1^n \cdot \left(I_{12} - \alpha_{12}^n\right). \qquad (8)$$

Ірраціональна нерівність (8) розкладається на сукупність систем нерівностей, які мають вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \psi_1^{2\cdot n}\left(I_{12} - 1\right) + 1 \ge 0 \\ I_{12} - \alpha_{12}^n \ge 0 \\ I_{12} \ge \dfrac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^{2n} - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} \end{cases} ;(9) \\ \begin{cases} \psi_1^{2\cdot n}\left(I_{12} - 1\right) + 1 \ge 0 \\ I_{12} - \alpha_{12}^n < 0 \end{cases} .(10) \end{array}\right. \qquad (11)$$

Якщо у системі нерівностей (9) не було б третьої нерівності, то сукупність систем нерівностей (11) мала б розв'язок, що збігається із розв'язком першої нерівності систем (9) і (10). Це пояснюється тим, що друга нерівність системи (9) і друга нерівність системи (10) доповнюють одна одну, тобто в сукупності не створюють обмежень на жоден параметр. Визначимо, чи накладає третя нерівність системи (9) нові обмеження на параметри α_{12}, I_{12}, n, якщо виконуються дві попередні нерівності.

Виходячи із проведених вище досліджень, перша нерівність системи нерівностей (9) виконуватиметься при $n > 0$ або при $n < 0$ і $\left|I_{12}\right| \ge 1$.

Дослідимо спочатку систему нерівностей

$$\begin{cases} I_{12} \ge \alpha_{12}^n \\ I_{12} \ge \dfrac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n}, \end{cases} \qquad (12)$$

при $n > 0$.

Позначимо праву частину другої нерівності системи (12):

$$f(\psi_1) = \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} . \qquad (13)$$

Дослідимо як себе поводить $f(\psi_1)$ при зміні ψ_1 від 0 до 1. Визначимо чи існують на цьому проміжку екстремуми функції:

$$\left(\frac{\psi_1^{2n}+\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^n-1}{2\cdot\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^n}\right)'=\frac{n}{\alpha_{12}^n\cdot\psi_1^{2\cdot n+1}}>0\,. \qquad (14)$$

Отже, екстремумів при $\psi_1\in[0;1)$ немає, функція є монотонною зростаючою, тому максимальне значення досягає при $\psi_1=1$:

$$f_{\max}=f(1)=\frac{\alpha_{12}^n}{2}\,.$$

Враховуючи, що $\alpha_{12}>0$

$$\alpha_{12}^n>\frac{\alpha_{12}^n}{2}\,,$$

а це означає, що за умовою виконання першої нерівності системи (12), автоматично виконується і друга нерівність, тобто при $n>0$ друга нерівність не накладає додаткових обмежень на жоден з параметрів.

Дослідимо систему нерівностей (12) при $n<0$ і $|I_{12}|\ge 1$. Зважаючи на вираз (14) функція $f(\psi_1)$ є монотонно спадною, а, отже, досягає свого максимального значення при $\psi_1=0$:

$$f_{\max}=\lim_{\psi_1\to 0}\frac{\psi_1^{2n}+\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^n-1}{2\cdot\psi_1^{2n}\cdot\alpha_{12}^n}=\frac{\alpha_{12}^n}{2}\,.$$

Зважаючи на попередні дослідження робимо висновок, що і при $n<0$; $|I_{12}|\ge 1$ жодних додаткових обмежень параметрів критеріального співвідношення (1) друга нерівність системи (12) не створює.

Аналіз результатів, що отримані із нерівності (4) і сукупності систем нерівностей (11), дозволяє зробити узагальнення, що математично допустимі значення параметрів критеріального співвідношення (1) визначаються сукупністю:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha_{12}>0;\\ n>0;\\ -\infty<I_{12}<+\infty;\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha_{12}>0;\\ n<0;\\ |I_{12}|>1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (15)$$

Відповідне узагальнення повністю узгоджується із результатами чисельного дослідження відповідного критеріального співвідношення (див. рис. 1).

Висновок

Закономірності в зміні залишкового ресурсу та отриманні обмеження (15) на зміну параметрів критеріального співвідношення (1) дозволить спростити діагностику матеріалу при двохетапному деформуванні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень /Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 - 195 с.

2. Лебедев А.А., Михалевич В.М. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Пробл. прочности. - 2003. - № 3. - С. 101-112.

3. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении. – К.:

УМК ВО, 1989. – 152 с.
4. Сивак И. О. Влияние немонотонности нагружения на пластичность при радиальном выдавливании с контурной осадкой // Науковий вісник Національної гірничої академії України. – 2001. – № 7 – С. 47 – 50.

Михалевич Володимир Маркусович – завідувач кафедри прикладної математики, м. Вінниця, вул. Квятека 15/9, тел. 46-23-50;

Краєвський Володимир Олександрович – старший викладач кафедри прикладної математики, м. Вінниця, вул. Воїнів Інтернаціоналістів 3, кв. 216, тел. 65-58-82;

Добранюк Юрій Володимирович – магістрант гр. ТАМмн-07, м. Вінниця, вул. Воїнів Інтернаціоналістів 5/505.

Вінницький національний технічний університет.