

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. І. Тютюнник**

**МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКО-  
ДЖЕНЬ В ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛАХ  
ПРИ ХОЛОДНОМУ ДВОХЕТАПНОМУ  
ДЕФОРМУВАННІ**

**Монографія**

Вінниця  
ВНТУ  
2024

УДК 539.3

М 45

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 30.04.2024 р.)

Рецензенти:

**С. О. Пискунов**, доктор технічних наук, професор

**Л. К. Поліщук**, доктор технічних наук, професор

**Р. І. Сивак**, доктор технічних наук, професор

**Михалевич, В. М.**

М 45      Моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах при холодному двохетапному деформуванні : монографія / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. І. Тютюнник. – Вінниця : ВНТУ, 2024. – 121 с.

ISBN 978-966-641-....

В монографії проведено аналітичне дослідження моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах при холодному двохетапному деформуванні. Визначено математично допустимі значення параметрів критеріального співвідношення тензорно-нелінійної моделі. Здійснена комп'ютерна реалізація математичної моделі та розрахунків залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні в середовищі математичної системи Maple 9. Розроблена програма для проведення розрахунків ресурсу пластичності.

Здійснено чисельне дослідження закономірності накопичення пошкоджень, використовуючи різні значення параметрів. Виконана перевірка адекватності моделі при зіставленні з наявними експериментальними даними. Розроблено рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів.

**УДК 539.3**

**ISBN 978-966-641-....**

© М. Михалевич, Ю. Добранюк, О. Тютюнник, 2024

## ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ. ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ	8
1.1. Поняття обробки металів тиском	8
1.2. Процеси холодного видавлювання	9
1.3. Оцінка здатності матеріалів до пластичної деформації	14
1.3.1. Оцінка пластичності матеріалів під час стаціонарного деформування.	14
1.3.2. Накопичення пошкоджень при пластичній деформації. Критерії руйнування.	15
1.4. Висновки. Задачі дослідження	23
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛІ ГРАНИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ТА НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ПРИ ХОЛОДНІЙ ПЛАСТИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ	24
2.1. Функції пошкодженості	24
2.2. Двохетапне деформування	28
2.3. Висновки	38
РОЗДІЛ 3 КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ПРИ ДВОХЕТАПНОМУ ДЕФОРМУВАННІ	40
3.1. Аналітичне дослідження моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двоетапного деформування	40
3.2. Комп'ютерна реалізація досліджувальної математичної моделі та розрахунків залишкового ресурсу при двоетапному деформуванні в середовищі математичної системи Maple 9	48
3.3 Чисельне дослідження закономірності накопичення пошкоджень за допомогою математичної моделі при різних значеннях параметрів	60
3.4 Перевірка адекватності моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двоетапного деформування при зіставленні з наявними експериментальними даними	80

3.5. Розробка рекомендацій для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів	81
ВИСНОВКИ	104
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	106

## ВСТУП

В сучасному машинобудівному виробництві високого розвитку та застосування набули процеси обробки металів тиском. Ці процеси, незалежно від їх видів, як правило, не супроводжуються монотонною деформацією. Тобто будь-який процес виготовлення деталей тиском супроводжується декількома видами пластичних деформацій, або змінами їх напрямку. А питання міцності виготовлених деталей залишаються на першому місці.

Питання дослідження накопичення пошкоджень і оцінки ресурса пластичності металів при холодному деформуванні є надзвичайно актуальними, оскільки визначають аналіз можливості інтенсифікації методів обробки металів тиском і забезпечення необхідних службових характеристик виробів. Досить важливим питанням обробки металів тиском є оцінка здатності матеріалів сприймати пластичну деформацію без руйнування.

Двохетапне деформування є важливим класом деформування завдяки декількох важливих причин. По-перше, вказаний клас деформування є одним із найпростіших представників немонотонного пластичного деформування, якому притаманні численні яскраво виражені ефекти в залежностях для граничних деформацій. По-друге, в значній кількості випадків напружено-деформований стан у заготовках під час обробки матеріалів тиском можна взагалі розглядати (при певному наближенні) як двохетапне деформування. По-третє, двохетапне деформування порівняно легко реалізувати експериментально, а моделі, які описують ці процеси, набувають гарного аналітичного вигляду, що полегшує їх дослідження. У такому разі спрощується аналіз придатності заготовки сприймати певну технологічну операцію.

Роботу виконано згідно до плану кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету у рамках держдоговірної теми 1001 – «Розробка рекомендацій по впровадженню процесу ротаційної витяжки циліндричних та конусних оболонок», держреєстрація № 0108U004403.

**Мета та задачі дослідження.** Мета роботи полягає в використанні моделей накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах при холодному двохетапному деформуванні для покращення оцінки технологічних процесів.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані **наступні задачі роботи дослідження:**

- аналітично дослідити модель накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування;
- здійснити комп'ютерну реалізацію досліджувальної математичної моделі в середовищі математичної системи Maple 9;
- чисельно дослідити закономірності накопичення пошкоджень за допомогою математичної моделі;
- перевірити адекватність моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування при зіставленні з наявними експериментальними даними;
- розробити рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів.

**Об'єктом дослідження** є процес холодного двохетапного деформування.

**Предмет дослідження** – модель накопичення пошкоджень при холодному двохетапному деформуванні.

**Методи для проведення дослідження.** Методологічною основою виконання дослідження є положення феноменологічної теорії деформованості металів без руйнування та математичної теорії пластичності. Для досягнення поставленої мети були використані наступні теоретичні методи проведення дослідження: застосування математичного аналізу при створенні та аналізі математичних моделей, аналітичної геометрії, елементів апарату тензорного аналізу.

**Наукова новизна отриманих результатів:**

- вперше створено пакет прикладних програм у середовищі Maple для здійснення теоретичного дослідження математичної моделі накопичення пошкоджень, проведення розрахунків залишкового ресурсу пластичності при двохетапному пластичному деформуванні та побудови графіків залежності ресурсу пластичності на другому етапі від уже використаного ресурсу пластичності на першому етапі двохетапного деформування;
- вперше визначено математично допустимі зміни параметрів моделі, що входять в її критеріальне співвідношення і за яких вона набуває лише дійсних значень.

### **Практичне значення отриманих авторами результатів:**

- створено пакет прикладних програм у середовищі Maple для визначення залишкового ресурсу пластичності при двохетапному пластичному деформуванні з графічною візуалізацією відповідних залежностей;
- визначено аналітично допустимі межі зміни параметрів математичної моделі накопичення пошкоджень при двохетапному деформуванні;
- визначено діапазони зміни параметрів моделі накопичення пошкоджень при описанні поведінки реальних матеріалів за умови окремих класів двохетапного деформування;
- виявлено додаткові закономірності накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах для двохетапного деформування розтяг-стиск;
- розроблено рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів.

# РОЗДІЛ 1

## СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ. ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 1.1. Поняття обробки металів тиском

Розвиток народного господарства країни значною мірою визначається зростанням об'єму виробництва металів, розширенням сортаменту виробів з металів і сплавів та підвищенням їх якісних показників [1], [2], [3], що значною мірою залежить від умов їх виготовлення за допомогою пластичної обробки [1], [4], [5], [6]. Знання основних закономірностей, що використовуються під час обробки металів тиском [7], [8], надає можливість вибирати найбільш оптимальні режими основних технологічних процесів [1], [2], [9], [10], необхідне для процесів як основне, так і допоміжне устаткування, а також технічно грамотно його використовувати під час виробництва [1], [3], [11], [12].

На виробництві широко використовується здатність металів приймати значну пластичну деформацію в гарячому і холодному стані без руйнування [1], [2], [3]. Під час виробничого процесу виготовлення деталей тиском [4], [5], [6], [7], зміна форми виробу виконується в основному за допомогою тиснучого на метал інструменту [8], [9], [10]. Тому отриманий виріб у такий спосіб називають обробкою металів тиском або пластичною обробкою [11], [12].

Обробка металів тиском представляє собою важливий технологічний процес виробництва деталей в машинобудуванні. При цьому забезпечується не тільки задання заготовці необхідних розмірів та форми, але також спільно із іншими основними видами обробки металів тиском значно покращуються як механічні, так і інші основні властивості металів [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12].

Прокатування, осадження, волочіння, вальцювання, пресування, розкочування, кування, витяжка, штампування представляють собою різні види процесів виготовлення деталей за допомогою обробки металів тиском в пластичному стані [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [11], [12].

Для розуміння особливостей та проблем обробки металів тиском та постановки задач дослідження потрібно більш детально розглянути нові різновиди обробки тиском, які постійно вдосконалюються. Це процеси холодного видавлювання [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12].



## 1.2. Процеси холодного видавлювання

Холодна об'ємна штамповка видавлюванням та висадкою являються високопродуктивними способами виготовлення найбільш точних заготовок і напівфабрикатів. Деформаційне зміцнення, яке має місце при холодній пластичній деформації, дозволяє отримувати вироби з покращеними механічними характеристиками, що підвищує їх якість та зменшує затрати на виробництво. Сприятлива макро- і мікроструктура, оптимальний мікрорельєф обробляємих поверхонь, стабільні та мінімальні відхилення розмірів і форм виробів дозволяють звести до мінімуму, а в деяких випадках і повністю виключити послідовуючу обробку деталей різанням [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12].

Незважаючи на очевидні переваги та перспективність процесів обробки металів тиском, зокрема і процесів видавлювання, темпи й об'єми освоєння технологій у промисловості не високі. Це зумовлено в основному тим, що недостатньо вивчено вплив історії навантаження на пластичність, якісні та експлуатаційні характеристики виробів. Тому в наш час малопластичні сплави практично не використовуються для холодного видавлювання [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12].

Для аналізу та побудови моделей процесів видавлювання використовуються різні методи теорії обробки металів тиском: ліній ковзання [1], сумісного розв'язку наближених рівнянь рівноваги й пластичності [4], [5], верхньої оцінки [6], балансу робіт і потужностей [7], [8], кінцевих елементів [12], [13], [14] і інші.

Важливу роль при розв'язку краєвих задач видавлювання відіграють сили тертя. Знання сил тертя необхідно також для визначення навантажень деформування. Існує багато методів дослідження тертя в процесах обробки тиском. Найбільш відомі методи непрямого визначення констант тертя, дослідження сил тертя безпосередньо в самих процесах деформування, моделювання умов тертя на спеціальних установках [1], [2], [3]. Найбільш достовірні дані отримують при дослідженні тертя безпосередньо в технологічних процесах.

Широкі можливості процесів об'ємної штамповки відкривають нові процеси комбінованої дії: штамповка з крученням, осадка із зсувом [5], [15], [16] деякі схеми штамповки з корисним використанням

сил тертя, схеми деформування в рівноканальній матриці (процес простого зсуву). Більшість процесів комбінованої дії можуть бути представлені як комбінації двохетапного деформування.

Особливістю технології радіального видавлювання є можливість регулювання деформаційних та силових параметрів процесу за допомогою вимірювання кінематики руху формоутворюючого інструменту. На рис. 1.1 приведена класифікація кінематичних варіантів радіального видавлювання, розроблена на основі робіт, виконаних в ЕНІКМаші та інших організаціях [15], [16], [17], [18], [19], [20].

Найпростіші кінематичні схеми реалізуються при радіальному видавлюванні з односторонньою подачею металу в робочу порожнину нерухомої матриці. По 1-му варіанту доцільно виготовляти деталі із фланцями, а по 2-му – із стовщеннями різних конфігурацій. Розглянемо особливості формозміни по цим схемам шляхом їх співставлення з варіантом видавлювання з двохстороннім деформуванням заготовки. Поперечне видавлювання з сполученою двохсторонньою подачею металу здійснюється зустрічним рухом пуансонів і примусовим переміщенням матриці із швидкістю  $v_2$  (4-й варіант), меншою приблизно в 2 рази швидкості руху пуансона  $v_1$ . Основна перевага двохстороннього видавлювання полягає в помітному зниженні зусиль деформування та покращення форми виробів. По 5-му варіанту передбачено прискорене по відношенню до пуансона переміщення матриці, яке сприяє зниженню нерівномірності деформації, а по 6-му варіанту матриця на першій стадії процесу нерухома, але уже на другій стадії вона переміщується вниз синхронно з пуансоном із швидкістю  $v_2$ . Таким способом здійснюється видавлювання з послідовною двохсторонньою подачею металу, забезпечуючи краще заповнення поперечної порожнини [20].

Для 1 – 6-го варіантів характерно радіальне видавлювання в порожнину незмінної висоти, в той час як по 7 – 9-му варіантах передбачено зміна висоти приймаючої кругової порожнини. Тим самим забезпечують інтенсивну формозміну в області видавлюваного фланцю (стовщення) із зменшенням осередків накопичення пошкоджень, що доцільно для отримання фланців правильної або складної форми. По 7-му варіанту одночасно з радіальним видавлюванням або з відповідної стадії процесу виконують висадку фланця зустрічним рухом проти пуансона із швидкістю  $v_2$ . Це дозволяє отримати фланці з складним зовнішнім контуром [20].

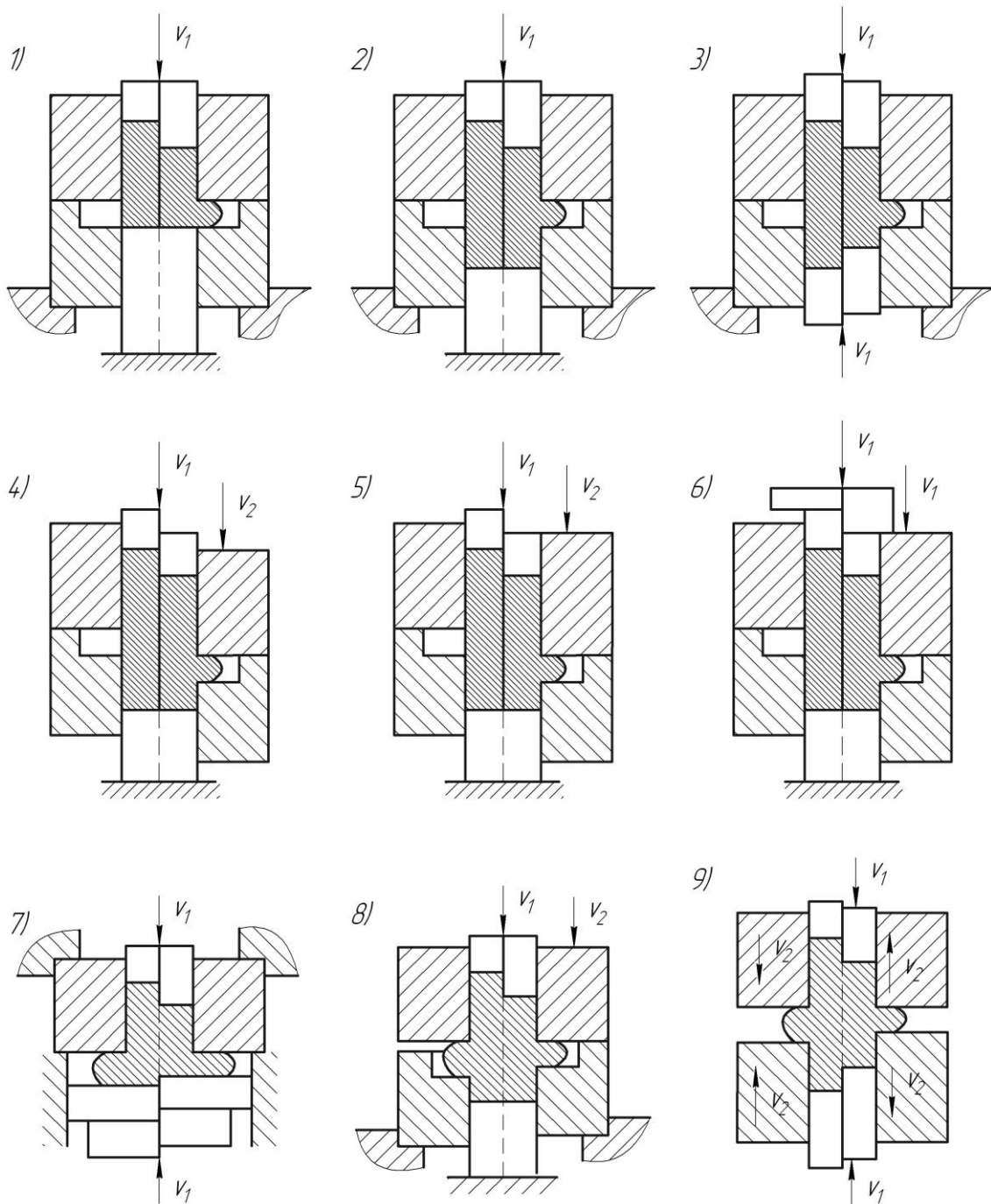


Рисунок 1.1 – Кінематичні варіанти поперечного видавлювання

По кінематичному 8-му варіанту одночасно із зближенням пуансонів зближують напівматриці, що сприяє підвищенню якості видавлюємих фланців. Реверсивне переміщення напівматриць по ходу процесу видавлювання (9-й варіант) дозволяє отримати в матриці з плоскими торцями різні деталі зі ступінчатими фланцями. 9-й варіант являє собою послідовне комбінування радіального видавлювання й висадки. Цей спосіб у наш час застосовується, в основному, для підгото-

вки заготовок під послідує зворотне видавлювання [21], [22]. Цей варіант видавлювання дозволяє нам уникнути викривлення фланців. Даний варіант має значні переваги, порівняно з процесом прямого видавлювання, так як руйнувань у зоні переходу від фланця до стержня не спостерігається, а енергозатрати знижуються [19].

Експериментальні дослідження способів поперечного видавлювання підтверджують їх переваги порівняно з традиційною холодною об'ємною штамповкою (висадкою, прямим видавлюванням) в підвищенні стійкості заготовки, у зменшенні обмежень по якості торців початкової заготовки, а також у зменшенні зусиль деформування.

В початковій стадії видавлювання зона деформації має висоту, не перевищуючу висоти поперечної порожнини. На послідує стадіях ступінь деформації металу, примикаючого до верхньої границі осередку деформації, може навіть знизитися за рахунок надходження на цю ділянку слабо деформованого металу з верхньої напівматриці. Інтенсивних деформацій зазнає шар металу, який примикає до нижньої границі пластичної зони, причому пік інтенсивності деформації  $\epsilon_i$  на епюрах безперервно зміщується вниз (рис. 1.2,а).

Найбільшого зміцнення набувають в шарі металу коло нижньої границі осередку деформації на перехідній (від стовщення до стержню) ділянці. Високий градієнт деформації впродовж указаної границі приводить до передчасного руйнування заготовки [4], [16].

При видавлюванні з двохсторонньою подачею епюри розподілу деформацій в осередку деформацій симетричні на всіх стадіях видавлювання, а пік значень  $\epsilon_i$  приходить на горизонтальну вісь симетрії (рис. 1.2,б). Для одного і того ж значення ходу пуансона  $S$  величина  $\epsilon_i$  для двохстороннього деформування вище, чим при видавлюванні з односторонньою подачею, але зсувна деформація характеризується меншими величинами і градієнтом. В зв'язку з цим до обох границь осередку деформації прилягають менш наклепані шари металу [17].

Процеси обробки металів тиском, незалежно від їх видів, не супроводжуються монотонною деформацією [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34]. Тобто будь-який процес виготовлення деталей тиском [35], [36], [37], [38], [39] супроводжується декількома видами пластичних деформацій [40], [41], [42], [43], або змінами їх напрямку [44], [45], [46]. Наглядним прикладом є процеси холодного деформування [47], [48], [49], [50], особливо процес осаджен-

ня (стиск) стержня, що показано на рис. 1.2, а. Тобто під час осадження стержня [12], метал зазнає мінімум двох видів навантажень [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57] та пластичних деформацій [54], [55], [58]. Це свідчить про те, що процес деформування проходить в два етапи (двохетапне деформування). На першому етапі деформування відбувається стиск металу, а уже коли утворилася бочкоподібність заготовки [59], [60], то тоді проходить уже другий етап деформування, тобто в крайніх точках утвореної бочки буде відбуватися розтяг металу [12], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68].

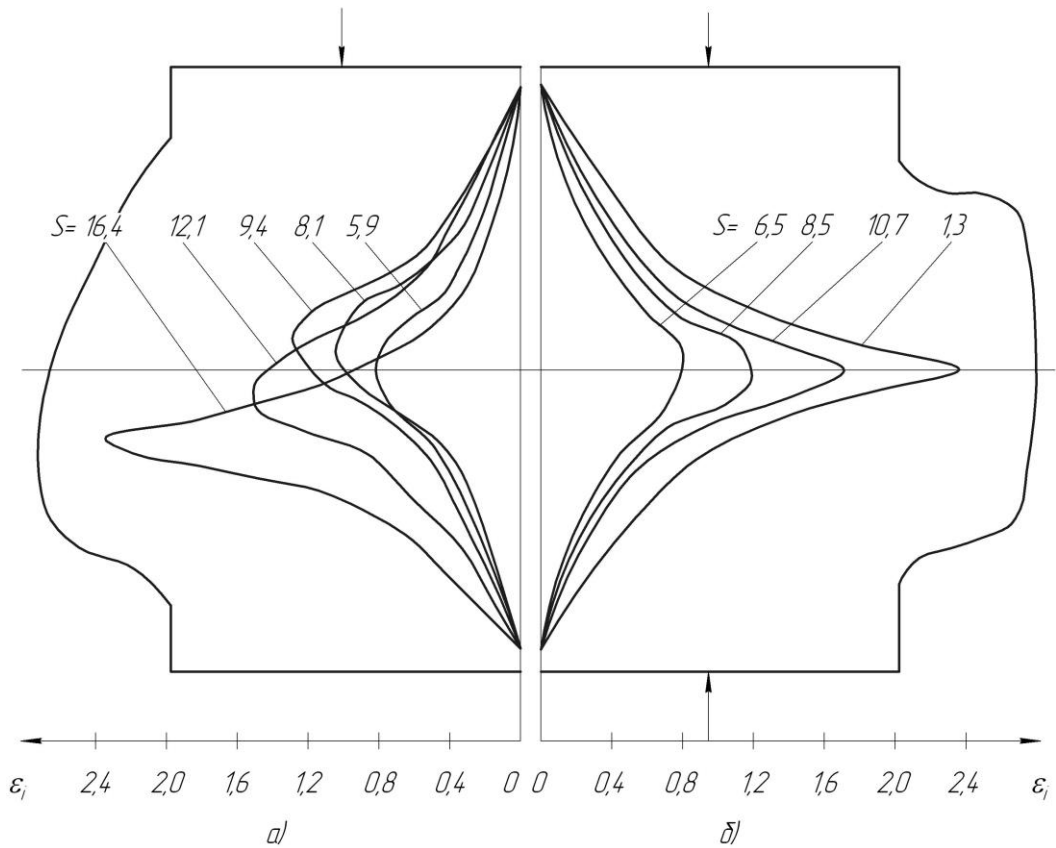


Рисунок 1.2 – Розподіл деформацій по осі симетрії на етапах шляху пуансона  $S$  при видавлюванні з односторонньою (а) і двохсторонньою (б) подачею

В даному випадку відбувається зміна виду деформування, але може змінюватися і напрямок деформування [12], [69], [70], [71], [72], [73], [74]. Різні метали по різному сприймають різні види деформацій. Може бути так, що метал має великий ресурс пластичності на стиск, а на розтяг, чи кручення, або стиск в іншому напрямку — менший [12]. У випадку осадження деталі основним видом деформування є стиск, і

деталь має великий ресурс пластичності на стиск, але під час осадження руйнується, тому що ресурс пластичності на розтяг в перпендикулярному напрямку відносно напрямку головного виду деформування деталі є меншим. А можливо, що напруження та пластичні деформації в процесі деформування розтягу матеріалу деталі були більшими за напруження та пластичні деформації в процесі деформування стиску [75], [76], [77], [78].

Ось тому процесам накопичення пошкоджень при холодному двохетапному деформуванні приділяють дуже велику увагу. Багато вчених працюють над цією проблемою [11], [12], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98]. Розглянемо основні результати їх роботи.

### 1.3. Оцінка здатності матеріалів до пластичної деформації

Можливості пластичної формозміни металів завжди обмежені. В деяких випадках необхідні деформації для реалізації технологічного процесу перевищують пластичність матеріалу. Під пластичність матеріалу будемо розуміти ступінь пластичної деформації, при якій буде утворюється тріщина, що виявляється неозброєним оком [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12]. Розрахункова оцінка деформованості, тобто здатності заготовки витримувати ту чи іншу технологічну операцію не руйнуючись, на стадії проектування технологічного процесу сприяє значній економії (пов'язана із зменшенням обсягу експериментальних досліджень) та його інтенсифікації [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12].

Під час проведення оцінки деформованості необхідне визначення деформацій, при яких утворюється тріщина, в залежності від історії деформування, властивостей матеріалу, температурних умов, напружено-деформованого стану [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12], [99], [100], [101].

#### 1.3.1. Оцінка пластичності матеріалів під час стаціонарного деформування.

Пластичність будемо оцінювати накопиченою до моменту руйнування пластичною деформацією [1], [4], [5], [6]. При певних фіксованих температурно-швидкісних умовах залежність пластичності металу

від виду його напруженого стану характеризується діаграмою пластичності [7], [11], [12], [102], що є механічною характеристикою матеріалу. Діаграму пластичності здебільшого будують у координатах  $\varepsilon^*_c - \eta$  [103], [104], [105], [106]. В даному випадку  $\varepsilon^*_c$  – це накопичена до руйнування деформація [107], [108], [109], [110], [111], [112], [113], а  $\eta$  – коефіцієнт жорсткості напруженого стану [114], [115], [116], [117], [118]. Діаграма пластичності будується за експериментальними даними розтягу, стиску та кручення [119], [120], [121], [122]. Вважається, що діаграма пластичності, побудована у вказаних координатах, є єдиною для різних напружених станів [123], [124], [125], [126].

Отже, деформування проходить без руйнування, якщо накопичена деформація задовільняє нерівність:

$$\varepsilon^* < \varepsilon^*_c(\eta), \quad (1.1)$$

де  $\varepsilon^*_c(\eta)$  – пластичність, що залежить від виду напруженого стану, швидкості деформації, температури.

Досить широкого використання у сучасній обробці металів тиском отримав вираз коефіцієнта жорсткості напруженого стану у вигляді співвідношення [4], [5], [8], [11], [12]:

$$\eta = \frac{3 \cdot \sigma}{\sigma_u} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u}; \quad (1.2)$$

де  $\sigma_u$  – інтенсивність напружень;  $\sigma$  – середнє нормальне напруження.

1.3.2. Накопичення пошкоджень при пластичній деформації. Критерії руйнування.

Значний розвиток та найбільше застосування для аналізу процесу руйнування в процесах обробки металів тиском отримала теорія деформованості. Методи оцінки деформованості отримали свій розвиток в багатьох роботах [1], [4], [5], [6], [7], [8], [11], [12], [17], [30], [36], [58], [59], [60], [62], [67], [71], [72], [73], [79], [80], [81], [82], [83], [89], [98] [106], [107], [108], [113], [117], [119], зокрема в роботах В. А. Огороднікова, І. О. Сивака, І. С. Алієва, В. А. Матвійчука, В. М. Михалевича, О. В. Грушка, Р. І. Сивака.

Першу модель накопичення пошкоджень було запропоновано у вигляді функціонала [1], [7], [11], [12]:

$$\Psi = \int_0^1 B(\tau) \cdot E(t - \tau) \cdot \frac{Hd\tau}{\Lambda^*_c(\eta(\tau))}; \quad (1.3)$$

де  $\Psi$  – ступінь використання запасу пластичності матеріалу, який приймає значення від 0 (у початковому стані) до 1 (за умови використання всього ресурсу пластичності);  $t, \tau$  – час;  $E(t-\tau)$  – коефіцієнт, що враховує самозаліковування дефектів при високій температурі;  $B(\tau)$  – коефіцієнт, що враховує історію деформування;  $\Lambda$  – ступінь деформації зсуву.

В основному вище згадана модель накопичення пошкоджень (1.3) вченими була запропонована для гарячого деформування. При холодному деформуванні параметр моделі  $E(t-\tau) = 1$ . Враховуючи, що співвідношення між ступенем деформації зсуву  $\Lambda$  та накопиченої деформації  $\varepsilon_u$  дорівнює  $\sqrt{3}$ , отримаємо спрощену модель накопичення пошкоджень:

$$\Psi = \int_0^1 B(\tau) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_u(\tau)}{\varepsilon_{*c}(\eta(\tau))} \cdot d\tau. \quad (1.4)$$

Застосування на практиці цього критерію ускладнено, тому що у літературних джерелах відсутні відомості про коефіцієнт  $B$ . У більшості випадків на практиці значення цього коефіцієнта приймають таким, що дорівнює 1. Тоді критерій (1.4) можна записати у вигляді:

$$\Psi = \int_0^1 \frac{\dot{\varepsilon}_u(\tau)}{\varepsilon_{*c}(\eta(\tau))} \cdot d\tau. \quad (1.5)$$

При  $\eta = \text{const}$  умова (1.5) стає еквівалентною (1.1). Експериментальна перевірка умови (1.5) показала, що велика кількість експериментальних даних не підтверджують лінійного принципу. Це викликало появу нелінійної моделі [1], [5], [6], [11], [12], [64], [93], [98].

$$\Psi(\varepsilon_u) = \int_0^1 n \cdot \frac{\varepsilon_u^{n-1}}{\varepsilon_{*c}^n(\eta(\varepsilon_u))} \cdot d\varepsilon_u, \quad (1.6)$$

де  $n$  – деяка функція, яка враховує «напрямок деформування».

Під час складного монотонного деформування, тобто деформування за умов, що показник напруженого стану є змінною функцією, а деформація є активною, тобто здійснюється без розвантаження, у роботах [1], [4], [5], [6], [7] В. А. Огородніков функцію  $n$  рекомендує визначати за співвідношенням:



$$n = 1 + a \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{d\eta}{d\varepsilon_u} \right). \quad (1.7)$$

Співвідношення (1.6) при розгляді процесів немонотонного складного деформування має багато недоліків [1], [4], [5], [6], [7]. Це спричинено тим, що в співвідношенні (1.6) не в достатній мірі враховується направлений характер пошкоджень, які виникають під час пластичного деформування [8], [11], [17], [30]. У протиріччі до описаної вище умови знаходиться здатність заготовок, зруйнованих при одному напружено-деформованому стані, витримувати досить великі деформації під час іншого напружено-деформованого стану [12], [36], [58], [59], [60], [62], [67], [71], [72], [73], [79], [80], [81], [82], [83], [89], [98], [106], [107], [108], [113], [117], [119].

Теорія накопичення пошкоджень при монотонній пластичній деформації досягла досить високого рівня [1], [4], [5], [6], [7], [8], [12], [32]. Однак існують процеси обробки металів тиском, де має місце немонотонне навантаження. Крім того, в більшості випадків, при немонотонній пластичній деформації збільшується пластичність. В даний час причини цього явища повністю не з'ясовані. Тому дослідження особливостей накопичення пошкоджень при немонотонному навантаженні досить актуальні. Крім того, збільшення пластичності, характерне для немонотонного навантаження, дозволяє розширити можливості класичних процесів, а також розробляти нові, більш економічні та ефективні технології.

Критерії деформуємості, оснований на скалярному описанні накопичення пошкоджень [1], [4], [5], [6], [7], [8], не дозволяють із достатньою точністю оцінювати пластичність, тобто накопичену до моменту руйнування пластичну деформацію  $e_p$ , в немонотонних процесах:

$$e_p = \int_0^{t_p} \dot{\varepsilon}_u d\tau \quad (1.8)$$

де  $\dot{\varepsilon}_u$  – інтенсивність швидкостей деформацій,  
 $t_p$  – час деформування до руйнування.

В перших роботах, присвячених оцінці пластичності при немонотонному навантаженні, за основу приймалися відомі критерії руйнування Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова та ін. [1], [4], [5], [6], [7]. Наприклад, в одній із робіт запропоновано узагальнення критерію (1.3)

для процесів немонотонного навантаження. Умова руйнування була записана у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^{a_i} = 1, \quad (1.9)$$

де  $n$  – число етапів деформування, в межах кожного з яких вид напруженого стану не змінюється;  $a_i$  – показники степені, значення яких залежать від виду напруженого стану;  $\psi_i$  – використаний на даному етапі ресурс пластичності.

$$\psi_i = \frac{e_{ui}}{e_{pi}}, \quad (1.10)$$

де  $e_{ui}$  – значення накопиченої деформації на  $i$ -тому етапі;  $e_{pi}$  – гранична до руйнування деформація при простому навантаженні в умовах напруженого стану  $i$ -того етапу деформування.

Приведена умова руйнування має велику кількість недоліків, зумовлених тим, що в цій умові не в повній мірі враховується направлений характер пошкоджень, які виникають під час пластичного деформування. В одній із робіт [11], [97], [98] уперше було висунуто гіпотезу, в якій пошкодження як функціонал трьохмірних тензорів напружень  $\sigma_{ij}(\tau)$ , їх похідних  $\mu_{ijk}(\tau)$  може бути тільки трьохмірним тензором або сукупністю тензорів інших порядків.

Самий простий варіант теорії накопичення пошкоджень макрочастинки побудований на припущенні, що тензор пошкоджень являється симетричним тензором другого рангу. В даному випадку не виключається можливість, що пошкодження можуть також описуватись і скаляром, який, в окремих випадках, може бути побудованим на основі тензора пошкоджень макрочастинки.

В роботі [11] пропонується лінійна теорія накопичення пошкоджень. В даній роботі тензор пошкоджень макрочастинки представляється як симетричний тензор другого рангу. Тензор пошкоджень  $\Pi$  поділяється на девіаторну  $\Pi_{ij}(t)$  та шарову  $\Pi(t)$  частини:

$$\Pi_{ij}(t) = \int_0^t \varphi_1(t-\tau) \cdot S_{ij}(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

$$\Pi(t) = \int_0^t \varphi_2 \cdot (t-\tau) \cdot \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.12)$$

де  $t, \tau$  – час;  $\Pi_{ij}$  – девіатор тензора пошкоджень;  $\sigma = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij}$  – середнє напруження.

Ядра  $\phi_1$ , і  $\phi_2$  визначаються на основі результатів проведених дослідів на повзучість під час зсуву та під час випробування на розтяг.

Узагалі один із класичних критеріїв руйнування має вигляд:

$$M_m(\Pi, \Pi_u, \Pi_\Delta) = C_m, \quad (1.13)$$

де  $m = 1, 2, 3, \dots$  – номери мір та можливих видів руйнування;

$$M_u^2 = (\Pi_{ij} \cdot \Pi_{ij}, \Pi_\Delta^3) = \det |\Pi_{ij}|, \quad (1.14)$$

$C_m$  – такі константи матеріалу, що коли для будь-якого значення  $m$  виконується умова (1.13), то відбувається руйнування типу  $m$  макрочастинки матеріалу.

Умова руйнування (1.13) записана для тривалої міцності та практично, у вигляді (1.13) не використовувалась для оцінки ймовірності руйнування при пластичній деформації. В роботі [11] встановлено взаємозв'язок теорії накопичення пошкоджень з класичними теоріями тривалої міцності. Наприклад, із критерієм Писаренко-Лебедева [80].

Підхід, який використовується в критерії руйнування, що описується співвідношенням (1.13), отримав подальший розвиток, а також використовується для оцінки пластичності матеріалу під час обробки металів тиском. Основні гіпотези вказанного підходу зводяться до наступних.

Постулюється існування тензора пластичності  $P(t, x_i)$ , який має наступні властивості:  $P$  є функцією стану макрочастинки й однозначно визначається процесом деформації:

$$P = P(\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau), T(\tau), \eta(\tau)), \quad (1.15)$$

де  $\varepsilon$  – девіатор швидкостей деформацій;  $T$  – температура;  $\eta$  – показник напруженого стану.

Тензор  $P$  характеризує накопичення деформації у частинці. Вважається, що існують міри накопиченої пластичної деформації  $M_1(P)$ ,  $M_2(P), \dots$ , які є інваріантами відносно групи перетворень симетрії. Якщо по відношенню хоча б до однієї з мір виконується умова:

$$M_1 = 1, \text{ або } M_2 = 1, \dots, \quad (1.16)$$

то має місце руйнування відповідного типу.

Автор однієї із класичних теорій побудови критеріїв руйнування виходить із допущень, що існує не менше двох, а скоріше трьох різних діаграм пластичності  $e_p^k = e_p^k(t, k, \varepsilon^r)$ , які отримують за результатами дослідів на просте навантаження зразка. Такий підхід, в деякій мірі, базується на твердженнях, які згадуються в багатьох роботах [1], [4], [5], [6], [7], [8], [11] та ін. В роботі використовують векторне зображення тензора-девіатора другого рангу  $P \{P_{ij}\}$  у п'ятимірному просторі.

Вектор пластичності  $\vec{P}$  з координатами  $P_i$ , побудований лінійним образом на основі вектора швидкості деформацій  $\vec{\varepsilon}$  має вигляд:

$$P_i(t) = \int_0^t A_{ij} \cdot [T(\tau), \eta(\tau), \vec{\varepsilon}(\tau)] \cdot \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (1.17)$$

Симетричні матриці функцій  $A_{ij}$  знаходяться за результатами експериментів. При умові, що вказані функції не залежать від швидкості деформації, то тоді компоненти вектора пластичності можна буде записати у вигляді:

$$P_i(t) = \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}_i d\tau}{e_{pi}(\eta)}, \quad (1.18)$$

де  $e_{pi}(\eta)$  – діаграма пластичності для виду навантаження  $i$ .

По описаній вище теорії, руйнування відбудеться при умові, що хоча б одна з компонент  $P_i$  дорівнюватиме одиниці. Необхідно відмітити, що, хоча в (1.17) записано 5 співвідношень, фактично вплив на руйнування матимуть тільки 3, так як із трьох компонент  $P_3, P_4, P_5$ , які характеризують деформації зсуву, одна є найбільшою. Отже, саме найбільша із компонент деформацій викликає руйнування, а інші дві не досягають значення одиниці.

До недоліків вказаного вище критерію руйнування можна віднести наступні. Компоненти  $P_i$  не враховують історію навантаження, особливо при зміні напрямку деформування. Якщо виконується одна з умов  $P_i = 1$ , то інші величини  $P_i$  не мають впливу на ймовірність виникнення руйнування, що викликає сумніви, оскільки, у загальному випадку складного навантаження, інтенсивність накопичення пошкоджень залежить від усіх компонент  $P_i$ .

На наш погляд, більш кращою у цьому відношенні є тензорна модель накопичення пошкоджень [11], [98]. В цій моделі компоненти тензора пластичних деформацій зв'язані з тензором пошкоджень, використовуючи одну діаграму пластичності:

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_p} F(e_u, \eta) \cdot \beta_{ij} de_u^*, \quad (1.19)$$

де  $\beta_{ij}$  – компоненти напрямного тензора швидкостей деформацій;

$F(e_u, \eta) = \frac{d\varphi}{de_u}$  – позитивна функція, яка залежить від характеристик пластичності матеріалу.

Функція  $\varphi$  вибрана у вигляді степеневі залежності:

$$\varphi = (1-a) \cdot \frac{e_u}{e_p(\eta)} + a \cdot \left( \frac{e_u}{e_p(\eta)} \right)^2, \quad (1.20)$$

де  $a$  – коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу.

В роботі припускається, що руйнування буде мати місце тоді, коли певна функція інваріантів тензора напружень досягне певного значення. Перший інваріант девіатора  $\psi_{ij}$  дорівнює нулю. Нехтуючи впливом третього інваріанта, умову руйнування записуємо у вигляді:

$$\psi_{ij} \cdot \psi_{ij} = 1, \quad (1.21)$$

У критерії (1.19) використана тензорно-лінійна модель накопичення пошкоджень. Тензорно-нелінійна модель запропонована А. О. Мішуліним і В. М. Михалевичем [11], [98]. Виходячи із загальних уявлень про зв'язок двох тензорів, автори отримали наступний вираз для компонент тензора пошкоджень:

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_p} \left( A \cdot \beta_{ij} + B \cdot \left( \beta_{ik} \cdot \beta_{kj} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \right) \right) de_u, \quad (1.22)$$

де  $A = \frac{da}{de_u}$ ,  $B = \frac{db}{de_u}$ ,  $a = (a_1 - b_1) \cdot \varphi$ ,  $b = b_1 \cdot \varphi$ ;  $a_1$ ,  $b_1$  – коефіцієнти;

$\varphi$  – функція пошкоженості:

$$\varphi = (1-c) \cdot \frac{e_u}{e_p(\eta)} + c \cdot \left( \frac{e_u}{e_p(\eta)} \right)^2, \quad (1.23)$$

де  $e_p(\eta)$  – діаграма пластичності;  $c$  – стала, яка залежить від властивостей матеріалу.

Величина  $b_1$  враховує внесок нелінійного члена правої частини рівності (1.22) у накопичення пошкоджень. Якщо  $b_1 = 0$ , то формула (1.22) співпадає з (1.19). Умова руйнування в критерії А. О. Мішуліна і В. М. Михалевича ідентична (1.21).

Також вченими було розроблено комбінований критерій для оцінки величини використаного ресурсу пластичності при немонотонній пластичній деформації, в основу якого покладена гіпотеза про зв'язок величини використаного ресурсу пластичності з величиною накопиченої деформації й ступінню зміцнення металу в процесі пластичної деформації. Величина використаного ресурсу пластичності виражається сумою:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (1.24)$$

де  $\psi_1$  – складова, яка залежить від величини інтенсивності напружень  $\sigma_u$ , або від накопиченої деформації  $e_u$ . (вважається, що справедлива гіпотеза єдиної кривої течії  $\sigma_u(e_u)$ );  $\psi_2$  – складова, яка залежить від відношення  $e_u/e_p(\eta)$ .

В результаті нескладних перетворень критерій (1.19) приймає вигляд:

$$\psi = \int_0^{e_p} \left[ c \cdot \psi_0 \cdot e^{-c \cdot e_u} + \left( 1 - \psi_0 \cdot \left( 1 - e^{-c \cdot e_p(\eta)} \right) \right) \cdot \frac{1}{e_p(\eta)} \right] de_u < 1, \quad (1.25)$$

де  $c$  і  $n$  – константи, які визначаються із кривих зміцнення.  $\psi_0$  – визначається з досліджень пластичності при складних програмах навантаження. Це можуть бути дослідження з числом етапів не менше двох при сталому значенні  $\eta$ , але відомих діаграмі пластичності та кривій зміцнення.

Ідея покладена в критерій фізично обґрунтована. Однак, якщо врахувати, що при немонотонному навантаженні накопичена до моменту руйнування пластична деформація  $e_p$  часто досягає значень, для яких криву зміцнення побудувати практично неможливо, крім, звичайно, експериментів на стиск у камері високого тиску, або інших спеціальних досліджень.

#### 1.4. Висновки. Задачі дослідження

Проведений вище аналіз дозволяє зробити наступні основні висновки:

- розробка математичних моделей накопичення пошкоджень при обробці металів тиском є надзвичайно необхідною для розв’язку важливих задач сучасного машинобудування;
- із уже розроблених математичних моделей накопичення пошкоджень, тензорні найкраще описують немонотонне деформування;
- існує проблема застосування розроблених тензорних моделей накопичення пошкоджень макрочастинки матеріалу з метою виконання прогнозування залишкового ресурсу пластичності, оскільки вказані моделі містять велику кількість параметрів, для визначення яких необхідно проводити значну частину додаткових експериментів;
- експериментальне дослідження процесів складного немонотонного деформування є надзвичайно трудомістким, що суттєво підвищує практичну цінність адекватних моделей;
- цілий ряд технологічних процесів у першому наближенні можна представити у вигляді двохетапного деформування;
- використання тензорних моделей накопичення пошкоджень для двохетапного деформування дозволяє зробити прогноз експлуатаційних властивостей деталей, виготовлених обробкою металів тиском та охарактеризувати технологічний процес.

На основі проведеного аналізу сформульовані наступні задачі дослідження:

- аналітично дослідити модель накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах при холодному двохетапному деформуванні;
- здійснити комп’ютерну реалізацію досліджувальної математичної моделі в середовищі математичної системи Maple 9;
- чисельно дослідити закономірності накопичення пошкоджень за допомогою математичної моделі;
- перевірити адекватність моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування при зіставленні з наявними експериментальними даними;
- розробити рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів.

## РОЗДІЛ 2

### МОДЕЛІ ГРАНИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ТА НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ПРИ ХОЛОДНІЙ ПЛАСТИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ

#### 2.1. Функції пошкодженості

Стосовно до холодного деформування [97], [98] була запропонована тензорно-лінійна модель. В роботі автора розроблена тензорно-нелінійна модель:

$$\psi_{ij}(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} F(\varepsilon_u^*, \eta, \mu_\sigma) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot \beta_{ij}(\varepsilon_u^*) + \\ + \mathcal{G} \cdot \left[ \beta_{ik}(\varepsilon_u^*) \cdot \beta_{kj}(\varepsilon_u^*) - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \right] \end{array} \right\} \cdot d\varepsilon_u^*, \quad (2.1)$$

де  $\mu_\sigma$  – параметр Лоде;  $\beta_{ij}$  – напрямний тензор приростів деформацій, що визначається рівністю:

$$\beta_{ij} = d\varepsilon_{ij} / \sqrt{d\varepsilon_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}},$$

де  $d\varepsilon_{ij}$  – прирости пластичних деформацій;  $\delta_{ij}$  – одиничний тензор,  $\delta_{ij} = 1$  при умові, що  $i = j$  та  $\delta_{ij} = 0$  при умові, що  $i \neq j$ ;  $\beta_{ik} \cdot \beta_{kj}$  – квадрат тензора  $\beta_{ij}$ ;  $\alpha = \alpha(\eta, D)$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\eta, D)$  – параметри моделі, які повинні бути визначені.

Стосовно до квазіпростого деформування ( $\beta_{ij}(\varepsilon_u^*) = const$ ) обидві моделі  $\psi_{ij}(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} F(\varepsilon_u, \eta, \mu_\sigma) \cdot \beta_{ij} \cdot d\varepsilon_u$  та (2.1) з використанням міри  $M[\psi_{ij}(t)] = \psi_u(t) = \sqrt{\psi_{ij} \cdot \psi_{ij}}$  перетворюється до одної і тої ж самої скалярної моделі:

$$\psi_u(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} F(\varepsilon_u^*, \eta(\varepsilon_u^*), \mu_\sigma(\varepsilon_u^*)) \cdot d\varepsilon_u^*. \quad (2.2)$$

Стосовно до стаціонарного деформування із (2.2) дістанемо:

$$\psi_u(\varepsilon_u) = f\left[\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}(\eta^{(0)}, \mu_\sigma^{(0)})\right] = \int_0^{\varepsilon_u} F(\varepsilon_u^*, \eta^{(0)}, \mu_\sigma^{(0)}) \cdot d\varepsilon_u^*. \quad (2.3)$$

Очевидно, що функція  $f$  повинна задовольняти таким умовам [11]:



$$\begin{aligned} f\left[0, \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(0)}, \mu_{\sigma}^{(0)}\right)\right] &= 0 \\ f\left[\varepsilon_{*c}\left(\eta^{(0)}, \mu_{\sigma}^{(0)}\right), \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(0)}, \mu_{\sigma}^{(0)}\right)\right] &= 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ці умови і функція  $f$ :

$$f = \sum_{k=1}^m b_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c}}\right)^{n_k}, \quad \sum_{k=1}^m b_k = 1, \quad n_k > 0, \quad (2.5)$$

що їм задовольняє, наведено в [98].

Функцію  $f$  будемо називати в подальшому функцією пошкодженості. Лінійній відносно  $\varepsilon_u$  функції пошкоженості  $f$  відповідає принцип лінійного підсумовування. Якщо функція  $f$  нелінійна відносно  $\varepsilon_u$ , то маємо нелінійний принцип накопичення пошкоджень.

В перших публікаціях по тензорним моделям [98] розв'язання задачі визначення критеріальних рівнянь для окремих класів деформування отримано тільки для квадратичної функції пошкоженості:

$$f = (1 - C) \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c}} + C \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c}}\right)^2. \quad (2.6)$$

Використання інших апроксимацій функції  $f$  більш важливо з практичної точки зору, ніж з теоретичної.

Кількісну відповідність розрахункових та експериментальних даних в ряді випадків можна покращити вдалим вибором апроксимації функції  $f$ .

До найпростіших апроксимацій функції пошкоженості, що задовольняють умови (2.4) можна віднести степеневу:

$$f(\psi = \varepsilon_u / \varepsilon_{*c}) = \psi^n, \quad n > 1 \quad (2.7)$$

і експоненціальну:

$$f(\psi) = \frac{e^{s \cdot \psi} - 1}{e^s - 1}, \quad s > 0. \quad (2.8)$$

Під час стаціонарного холодного деформування, з ростом накопиченої пластичної деформації, пошкоженість незмінно збільшується, отже функція  $f$  повинна бути монотонно зростаючою. Для виконання цієї вимоги достатньо буде забезпечити виконання нерівності:

$$f'(\psi) > 0. \quad (2.9)$$

Значна кількість експериментальних досліджень відображають те, що швидкість накопичення пошкоджень макрочастинки збільшується з наближенням до моменту руйнування. Для виконання вказаної вище умови достатньо забезпечити виконання вимоги:

$$f''(\psi) > 0. \quad (2.10)$$

Для степеневі залежності (2.7) із умови (2.9) випливає нерівність  $n > 0$ , а із (2.10) –  $n > 1$ . Для експоненціальної залежності (2.8) умова (2.9) виконується завжди. Отже, описана вище умова не накладає жодних обмежень на межі зміни  $s$ . При цьому, нерівність (2.10) виконується тільки при  $s > 0$ .

Апроксимація:

$$f(\psi) = \frac{e^{s \cdot \psi} - 1}{e^s - 1} \quad (2.11)$$

об'єднує властивості апроксимацій (2.7), (2.8). Умова (2.9) для апроксимації (2.11) виконується, якщо  $n > 0$ , а умова (2.10) справедлива при:

$$s \cdot n + \frac{n-1}{\psi^n} > 0 \quad i \quad n > 0. \quad (2.12)$$

Тут важливо, що знак кривизни може змінюватися з ростом деформації.

По аналогії з апроксимацією (2.5) функцію  $f$  можна представити у вигляді суми експонент:

$$f(\psi) = \sum_{k=1}^m b_k \cdot \frac{e^{s_k \cdot \psi} - 1}{e^{s_k} - 1}, \quad \sum b_k = 1, \quad (2.13)$$

звідки при  $m = 2$  отримаємо:

$$f(\psi) = b_1 \cdot \frac{e^{s_1 \cdot \psi} - 1}{e^{s_1} - 1} + (1 - b_1) \cdot \frac{e^{s_2 \cdot \psi} - 1}{e^{s_2} - 1}. \quad (2.14)$$

В усіх наведених апроксимаціях функція  $f$  є неоднорідною функцією нульового порядку, тобто залежить тільки від відношення  $\varepsilon_u / \varepsilon_{*c} = \psi$ . Для таких апроксимацій підінтегральна функція в (2.2) може бути подана у вигляді:

$$F = \frac{df(\psi)}{d\varepsilon_u} = f'(\psi) \cdot \frac{d\psi}{d\varepsilon_u} = \frac{1}{\varepsilon_{*c}} \cdot f'(\psi) = \frac{1}{\varepsilon_{*c}} \cdot F_1 \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c}} \right). \quad (2.15)$$

З врахуванням (2.15) модель (2.2) можна подати так:

$$\psi_u(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} F_1 \left( \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_{*c} [\eta(\varepsilon_u^*), \mu_\sigma(\varepsilon_u^*)]} \right) \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon_{*c} [\eta(\varepsilon_u^*), \mu_\sigma(\varepsilon_u^*)]} \right] \cdot d\varepsilon_u^*. \quad (2.16)$$

Але не всі апроксимації функції пошкодженості  $f$  можна представити у вигляді функціональної залежності тільки від  $\psi$ . До вказаних апроксимацій можна віднести експоненціальну функцію наступного виду:

$$f(\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}) = \frac{e^{m \cdot \varepsilon_u} - 1}{e^{m \cdot \varepsilon_{*c}} - 1}, \quad m > 0. \quad (2.17)$$

Різних апроксимацій функції  $f$  – безліч. В майбутньому по мірі накопичення експериментальних даних необхідне вивчення властивостей моделей на основі різних апроксимацій функції  $f$ .

В подальшому будемо використовувати степеневу тензорно-лінійну модель:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\varepsilon_u) = & \int_0^{\varepsilon_u} n \cdot \frac{\varepsilon_u^{n-1}}{\varepsilon_{*c}^n [\eta(\varepsilon_u^*), \mu_\sigma(\varepsilon_u^*)]} \times \\ & \times \left\{ \alpha \cdot \beta_{ij}(\varepsilon_u^*) + \mathcal{G} \left[ \beta_{ik}(\varepsilon_u^*) \cdot \beta_{kj}(\varepsilon_u^*) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \right\} d\varepsilon_u^* \end{aligned} \quad (2.18)$$

і експоненціальну тензорно-нелінійну модель [11]:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\varepsilon_u) = & \int_0^{\varepsilon_u} s \cdot \frac{\exp\left(s \cdot \varepsilon_u^* / \varepsilon_{*c} [\eta(\varepsilon_u^*), \mu_\sigma(\varepsilon_u^*)]\right)}{\exp(s) - 1} \times \\ & \times \left\{ \alpha \cdot \beta_{ij}(\varepsilon_u^*) + \mathcal{G} \left[ \beta_{ik}(\varepsilon_u^*) \cdot \beta_{kj}(\varepsilon_u^*) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \right\} \cdot d\varepsilon_u^* \end{aligned} \quad (2.19)$$

де  $n$  і  $m$  – деякі функції  $\eta$ ,  $\mu_\sigma$ ,  $D_\varepsilon$ . В окремому випадку  $n$  і  $m$  – константи.

Параметри моделі  $\alpha$  і  $\mathcal{G}$  пов'язані залежністю  $\alpha = -3 \cdot D \cdot \mathcal{G} + \sqrt{[(3 \cdot D \cdot \mathcal{G})^2 - \mathcal{G}^2 / 6 + 1]}$ . Визначення функцій  $n$  або  $m$  і  $\mathcal{G}$  здійснюється за результатами експериментів в умовах нестационарного деформування.

## 2.2. Двохетапне деформування

В межах кожного етапу двухетапного деформування маємо стаціонарне деформування, причому при  $0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(1)}$ , справедливо  $\beta_{ij}(\varepsilon_u) = \beta_{ij}^{(1)}$ ,  $\eta(\varepsilon_u) = \eta^{(1)}$ ,  $\mu_\sigma(\varepsilon_u) = \mu_\sigma^{(1)}$ , а при  $\varepsilon_u^{(1)} < \varepsilon_u < \varepsilon_u^{(2)}$  –  $\beta_{ij}(\varepsilon_u) = \beta_{ij}^{(2)}$ ,  $\eta(\varepsilon_u) = \eta^{(2)}$ ,  $\mu_\sigma(\varepsilon_u) = \mu_\sigma^{(2)}$ . В цьому випадку із моделі (2.1) з врахуванням міри  $M[\psi_{ij}(t)] = \psi_u(t) = \sqrt{(\psi_{ij} \cdot \psi_{ij})}$  випливає співвідношення:

$$\psi_u(\varepsilon_u) = g_1^2 + 2 \cdot I_{12} \cdot g_1 \cdot g_2 + g_2^2, \quad (2.20)$$

де

$$g_k = f(\varepsilon_u^{(k)}, \varepsilon_{*c}^{(k)}) - f(\varepsilon_u^{(k-1)}, \varepsilon_{*c}^{(k)}), \quad (\varepsilon_u^{(0)} = 0), \quad k = 1, 2; \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_{*c}^{(k)} = \varepsilon_{*c}(\eta^{(k)}, \mu_\sigma^{(k)}); \quad (2.22)$$

$I_{12}$  – параметр, що визначається виразом:

$$\begin{aligned} I_{12} = & k_{12} \cdot \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)} + I_{12} \cdot \alpha^{(1)} \cdot \mathcal{G}^{(2)} + \\ & + I_2 \cdot \alpha^{(2)} \cdot \mathcal{G}^{(1)} + \left( I_3 - \frac{1}{3} \right) \cdot \mathcal{G}^{(1)} \cdot \mathcal{G}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де  $\alpha^{(i)}$ ,  $\mathcal{G}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) – значення параметрів  $\alpha$  та  $\mathcal{G}$  на непарних і парних етапах деформування;  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти добутку тензорів, причому [11]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(2)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}; \\ I_2 &= \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}; \\ I_3 &= \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{kl}^{(2)} \cdot \beta_{li}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Значення параметра  $I_{12}$  для деяких окремих випадків наведені в табл. 2.1.

Якщо в поданні (2.1) покласти  $\mathcal{G} = 0$ , то дістанемо тензорно-лінійну модель, вихідне рівняння якої примітно простіше тензорно-нелінійної моделі. Але із тензорно-лінійної моделі стосовно до двухетапного деформування також випливає співвідношення (2.20), в якому  $I_{12} = k_{12}$ , що випливає із (2.23) при  $\mathcal{G} = 0$ .

Таблиця 2.1

Значення параметра  $I_{12}$  для різних процесів двохетапного деформування

Процес		$I_{12}$	$k_{12}$
1 – ий етап	2 – ий етап		
Розтяг вздовж осі X	Стиск вздовж осі X	-1	-1
—“—	Кручення навколо осі X	$(\sqrt{6/12}) \cdot g^{(2)}$	0
—“—	Стиск вздовж осі Y	0,5	0,5
—“—	Розтяг вздовж осі Y	-0,5	-0,5
—“—	Розтяг вздовж осі X	1	1
Стиск вздовж осі X	—“—	-1	-1
—“—	Кручення навколо осі X	$-(\sqrt{6/12}) \cdot g^{(2)}$	0
—“—	Стиск вздовж осі Y	-0,5	-0,5
—“—	Розтяг вздовж осі Y	0,5	0,5
—“—	Стиск вздовж осі X	1	1
Кручення навколо осі X	Розтяг вздовж осі X	$(\sqrt{6/12}) \cdot g^{(2)}$	0
—“—	Стиск вздовж осі X	$-(\sqrt{6/12}) \cdot g^{(2)}$	0
—“—	Кручення проти годинникової стрілки навколо осі X	$\frac{1}{3} \cdot g^2 - 1$	-1
—“—	Кручення навколо осі X	1	1

Як видно із співвідношення (2.23) параметр  $I_{12}$  залежить не тільки від косинуса кута злому траєкторії деформацій  $k_{12}$ , але і від інших спільних інваріантів  $I_1, I_2, I_3$ , а також від властивостей матеріалу, відображуваних функцією  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\eta, \mu_\sigma)$ .

Із даних, наведених в табл. 2.1, видно, що для деяких процесів значення параметра  $I_{12}$  дорівнюють значенням параметра  $k_{12}$ .

Визначимо вираз для визначення параметра  $I_{12}$  у випадку, коли і на першому і на другому етапах реалізується розтяг, але напрями головних деформацій не співпадають.

Нехай на першому етапі розтягується зразок, вісь якого співпадає з матеріальною віссю OX. Компоненти напрямного тензора дорівнюють:

$$\beta_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2/3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

На другому етапі розтяг здійснюється вздовж осі  $OX'$ , що належить площині  $XOY$  і утворює з віссю  $OX$  кут  $\gamma$ , який відлічується проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця осі  $OZ$ . В координатах  $OX'Y'Z'$  компоненти напрямного тензора  $\beta_{ij}^{(2)}$  мають вигляд (2.25). Використовуючи відомі формули перетворення компонент тензора при повороті осей координат визначаємо компоненти тензора  $\beta_{ij}^{(2)}$  в координатах  $OXYZ$ :

$$\beta_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2/3} \cdot \begin{bmatrix} 1 + 3 \cdot \cos(2 \cdot \gamma) & 3 \cdot \sin(2 \cdot \gamma) & 0 \\ 3 \cdot \sin(2 \cdot \gamma) & 1 - 3 \cdot \cos(2 \cdot \gamma) & 0 \\ 0 & & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

На основі (2.25) і (2.26) отримаємо:

$$\beta_{ik}^{(1)} \cdot \beta_{kf}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

і

$$\beta_{ik}^{(2)} \cdot \beta_{kf}^{(2)} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 5 + 3 \cdot \cos(2 \cdot \gamma) & 3 \cdot \sin(2 \cdot \gamma) & 0 \\ 3 \cdot \sin(2 \cdot \gamma) & 5 - 3 \cdot \cos(2 \cdot \gamma) & 0 \\ 0 & & 2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

відповідно.

За формулами (2.24) обчислюємо спільні інваріанти:

$$I_2 = I_1 = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{2/3} \cdot (1 + 3 \cos(2 \cdot \gamma)), \quad (2.29)$$

$$I_3 = \frac{1}{8} \cdot (3 + \cos(2 \cdot \gamma)). \quad (2.30)$$

Використовуючи дані співвідношення отримаємо:

$$I_{12} = k_{12} = \frac{1}{4} \cdot (1 + 3 \cos(2 \cdot \gamma)). \quad (2.31)$$

Аналогічним чином можна показати: якщо при двохетапному деформуванні  $|D| / \sqrt{54} = |\mu_\sigma| = 1$ , то  $I_{12} = k_{12}$ , тобто для таких процесів тензорно-лінійна і тензорно-нелінійна моделі дають тотожні результати.

Під час деформування до руйнування на другому етапі двохетапного деформування  $\varepsilon_u = \varepsilon_*$ ,  $\psi_u(\varepsilon_*) = 1$ , а співвідношення (2.22) приймають вигляд [11]:

$$g_1^2 + 2 \cdot I_{12} \cdot g_1 \cdot g_2 + g_2^2 = 1. \quad (2.32)$$

Дослідимо типи кривих, що описує рівняння (2.32). При повороті осей координат  $0g_1g_2$  на кут  $\alpha = 45^\circ$  дістанемо [11]:

$$g_1 = g_1' \cdot \cos \alpha - g_2' \cdot \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot (g_1' - g_2') / 2, \quad (2.33)$$

$$g_2 = g_1' \cdot \sin \alpha + g_2' \cdot \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot (g_1' + g_2') / 2, \quad (2.34)$$

або

$$g_1' = \sqrt{2} \cdot (g_1' + g_2') / 2, \quad g_2' = \sqrt{2} \cdot (g_1' - g_2') / 2. \quad (2.35)$$

В нових координатах  $0g_1g_2$  рівняння (2.32) приймає вигляд [11]:

$$\frac{(g_1')^2}{1 + I_{12}} + \frac{(g_2')^2}{1 - I_{12}} = 1, \quad |I_{12}| \neq 1, \quad (2.36)$$

що уявляє собою еліпс з півосями рівними  $(1 \pm I_{12})^{-0.5}$ .

При  $I_{12} = 1$  рівняння (2.32) уявляє пару паралельних прямих  $g_1 + g_2 = 1$  і  $g_1 + g_2 = -1$ , що зображені на рис. 2.1,а. При  $I_{12} = -1$  також маємо пару паралельних прямих  $g_1 - g_2 = \pm 1$ , що зображені на рис. 2.1,б.

Розташування еліпса, що описується рівнянням (2.36) при  $0 \leq I_{12} < 1$  показано на рис. 2.1, в, а при  $-1 < I_{12} \leq 0$  на рис. 2.1, г.

Товстими лініями на рис. 2.1 показано область, що задовольняє умови  $g_1, g_2 \geq 0$ ,  $g_1 \leq 1$ . При  $I_{12} = 0$  еліпс перетворюється в коло з радіусом, що дорівнює одиниці.

Зроблений аналіз дозволяє вибрати корінь рівняння (2.32), що задовольняє фізичному змісту задачі, яка розглядається.

$$g_2 = -I_{12} \cdot g_1 + \sqrt{g_1^2 \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1}. \quad (2.37)$$

Зокрема звідси впливає

$$g_2 = 1 - g_1 \text{ при } I_{12} = 1, \quad (2.38)$$

$$g_2 = 1 + g_1 \text{ при } I_{12} = -1. \quad (2.39)$$

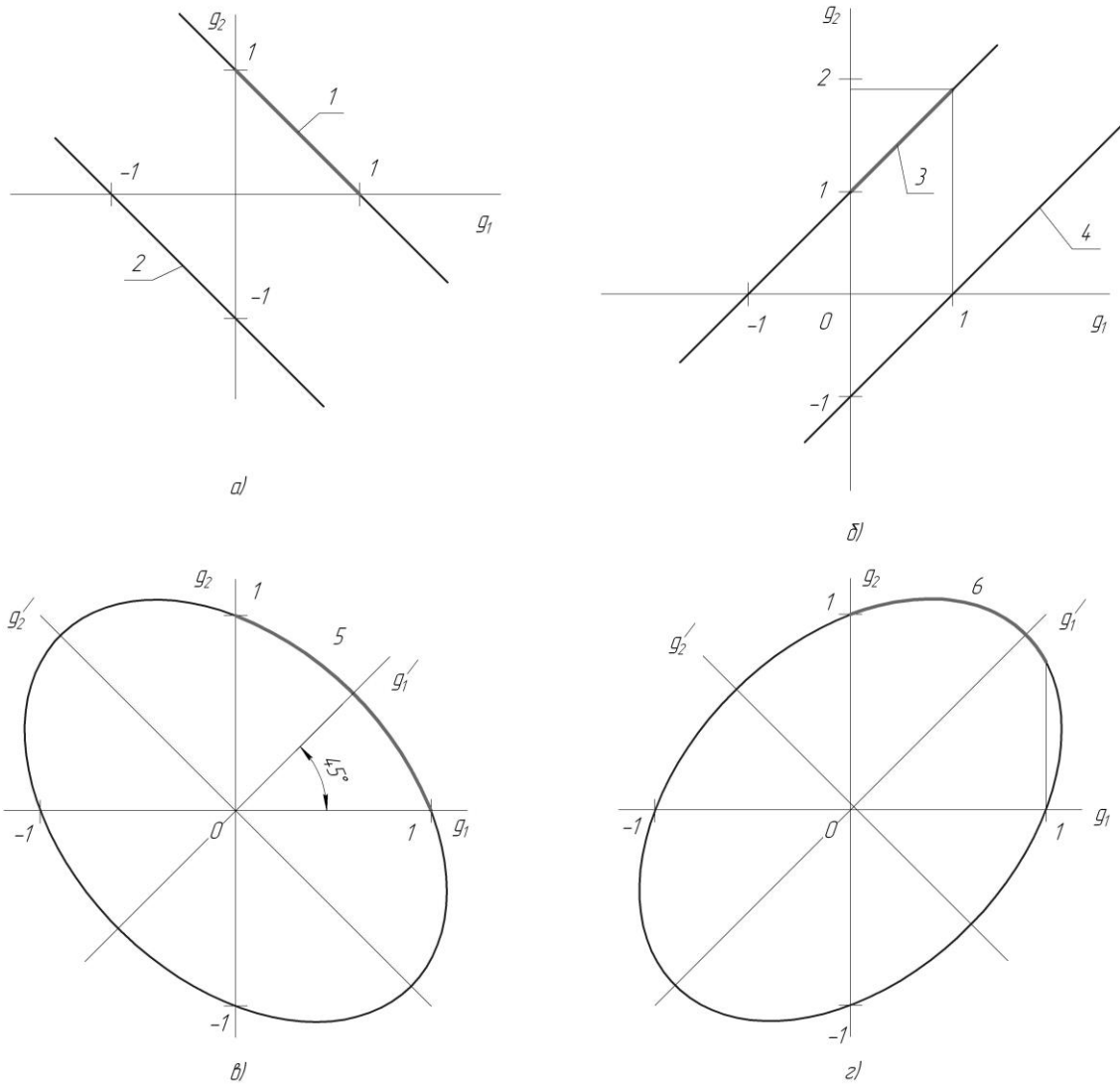


Рисунок 2.1 – Граничні криві при двоетапному деформуванні:

1:  $g_1 + g_2 = 1$ ; 2:  $g_1 + g_2 = -1, -g_1 + g_2 = -1$ ; 3:  $g_1 - g_2 = -1$ ;

4:  $g_1 - g_2 = 1$ ; 5, 6: розрахунок за моделлю (2.37)

Якщо функція пошкодженості  $f$  лінійна:

$$f(\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}) = \varepsilon_u / \varepsilon_{*c}, \quad (2.40)$$

то у відповідності з (2.1) і врахуванням (2.3) отримаємо тензорно-нелінійну модель, що ґрунтується на лінійному принципі накопичення пошкоджень:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\varepsilon_u) = & \\ = \int_0^{\varepsilon_u} \left\{ \alpha \cdot \beta_{ij}(\varepsilon_u^*) + \vartheta \cdot \left[ \beta_{ik}(\varepsilon_u^*) - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \right] \right\} \cdot \frac{d\varepsilon_u^*}{\varepsilon_{*c} \left[ \eta(\varepsilon_u^*), \mu_\sigma(\varepsilon_u^*) \right]}. & (2.41) \end{aligned}$$

В цьому випадку, при  $\varepsilon_u^{(2)} = \varepsilon_*$ , у відповідності з (2.23) маємо:



$$g_1 = \varepsilon_u^{(1)} / \varepsilon_{*c}^{(1)} = \psi_1, \quad (2.42)$$

$$g_2 = \varepsilon_* / \varepsilon_{*c}^{(2)} - \varepsilon_u^{(1)} / \varepsilon_{*c}^{(2)} = \Delta\varepsilon_{*2} / \varepsilon_{*c}^{(2)} = \psi_{*2}, \quad (2.43)$$

де  $\psi_1$  – використаний ресурс пластичності на першому етапі;  $\psi_2$  – залишковий ресурс пластичності на другому етапі.

При цьому співвідношення (2.37) приймає вигляд:

$$\psi_{*2} = -I_{12} \cdot \psi_1 + \sqrt{\left(\psi_1^2 \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1\right)}. \quad (2.44)$$

Із структури співвідношення (2.44), визначено, що залишковий ресурс пластичності матеріалу не залежить від черговості прикладення навантаження на етапах двохетапного деформування. Наприклад двохетапні процеси кручення - розтяг та розтяг - кручення в координатах  $\psi_1 - \psi_{*2}$  представляються однією кривою. Отже, на основі лінійного принципу підсумовування пошкоджень представляється закон комутативності деформування під час двохетапного деформування.

Із (2.37) з використанням квадратичної апроксимації (2.6) впливає вираз [11]:

$$\begin{aligned} \psi_{*2} = & -\alpha_{12} \cdot \psi_1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{c} - 1\right) + \\ & + \sqrt{\left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - 1\right) \cdot (\alpha_{12} - I_{12}) \cdot \psi_1 + (\alpha_{12}^2 - I_{12}) \cdot \psi_1^2 + \right.} \\ & \left. + \sqrt{\left[\frac{1}{c^2} - (1 - I_{12}) \cdot \left[\left(\frac{1}{c} - 1\right) \cdot \psi_1 + \psi_1^2\right]^2\right]} \right]}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

$c \neq 0$

Використовуючи степеневу функцію пошкодженості отримано

$$\psi_{*2} = \left[ \psi_1^n \cdot (\alpha_{12}^n - I_{12}) + \sqrt{\psi_1^{2 \cdot n} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1} \right]^{1/n} - \psi_1 \cdot \alpha_{12}, \quad (2.46)$$

а при використанні експоненціальної функції (2.8):

$$\psi_{*2} = \frac{1}{s} \cdot \ln \left\{ \begin{aligned} & 1 - I_{12} \cdot \frac{e^{s \cdot \psi_1} - 1}{e^{s \cdot \psi_1 \cdot \alpha_{12}}} + \\ & + \sqrt{\left[ \frac{e^{s \cdot \psi_1} - 1}{e^{s \cdot \psi_1 \cdot \alpha_{12}}} \right]^2 \cdot (I_{12}^2 - 1) + (e^s - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

де  $\alpha_{12} = \varepsilon_{*c}^{(1)} / \varepsilon_{*c}^{(2)}$ .

Для відображення накопиченої деформації, використовуючи критеріальне співвідношення (2.47), застосуємо вираз:

$$\varepsilon_{*u} = \varepsilon_{*1} \cdot \psi_1 + \varepsilon_{*2} \cdot \psi_{*2}. \quad (2.48)$$

Якщо в (2.6) прийняти  $c = 0$  або в (2.46)  $n = 1$ , то дістанемо співвідношення (2.44). Це саме співвідношення випливає із (2.47) при  $s \rightarrow 0$ . Принциповою відмінною критеріальних співвідношень (2.45) ÷ (2.47), здобутих на основі використання нелінійного принципу накопичення пошкоджень, від співвідношення (2.44) полягає в тому, що указані співвідношення враховують порядок прикладення навантаження. Це відображується наявністю в співвідношеннях (2.45) ÷ (2.47) параметра  $\alpha_{12}$ .

Покладаючи  $n$  і  $s$  деякими функціями від  $\varepsilon_{*c}$  дістанемо співвідношення [11]:

$$\psi_{*2} = \left[ (\psi_1 \cdot \alpha_{12})^{n_2} - \psi_1^{n_1} \cdot I_{12} + \sqrt{\psi_1^{2 \cdot n_1} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1} \right]^{1/n_2} - \psi_1 \cdot \alpha_{12}, \quad (2.49)$$

а також:

$$\psi_{*2} = \frac{1}{s_2} \times \left\{ 1 + \frac{e^{s_2} - 1}{e^{s_2 \cdot \psi_1 \cdot \alpha_{12}}} \cdot \left[ \frac{1 - e^{s_1 \cdot \psi_1}}{e^{s_1} - 1} \cdot I_{12} + \sqrt{\left[ \frac{e^{s_1 \cdot \psi_1} - 1}{e^{s_1} - 1} \right]^2 \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1} \right] \right\}, \quad (2.50)$$

що узагальнюють вирази (2.46) і (2.47) відповідно.

Презентативні експериментальні дані по двохетапному деформуванню зразків із сталі 25, сплаву Д16 і сплаву Амгб проаналізовано в роботі [11]. Дані по знакозмінному крученні, розтяг-кручення і кручення-розтяг описані рівнянням (2.46). Виділимо загальні для всіх матеріалів закономірності. Величина  $A = \psi_1 + \psi_{*2}$  в усіх випадках, як правило, не менше одиниці. Причому найбільші значення  $A$  відповідають знакозмінному крученню, найменші - крученню з наступним розтягом. При вичерпанні ресурсу пластичності на кручення, матеріал може сприймати значні (для сталі 25  $\psi_{*2} > 1$ ) деформації до руйнування при крученні в напрямі, що протилежний початковому. Попередня деформація розтягу (кручення) зменшує граничну деформацію

кручення (розтягу). В наукових працях наведено також оригінальні дані по зміні однорідних деформацій при двоетапному розтязі. Під однорідною деформацією розуміється найбільша рівномірна деформація, що виникає до втрати стійкості процесу деформування (до початку утворення шийки). При визначенні ресурсів пластичності  $\psi_1$  і  $\psi_{*2}$  в якості  $\varepsilon_{*c}$  приймали однорідну деформацію. Значення параметра  $I_{12}$  в співвідношенні (2.46) визначали за формулою (2.31). Основний висновок, який випливає із теорії і підтверджується експериментальними даними полягає в тому, що при невеликих деформаціях на першому етапі відбувається ізотропне зменшення однорідної деформації розтягу. У випадку  $\psi_1 = 0.8$  виявляється залежність залишкового ресурсу від напряму вирізки зразків. Згідно (2.46) залишковий ресурс збільшується із збільшенням кута  $\gamma$ . Це узгоджується з експериментальними даними для сплаву АмГб. Наведені дослідження цікаві тим, що акцентують увагу на деформаційній анізотропії. В даному випадку – деформаційній анізотропії однорідних деформацій. Про цей ефект часто говорять, але до недавнього часу були практично відсутні роботи, в яких би систематично досліджувалась деформаційна анізотропія граничних або однорідних деформацій.

При вичерпанні ресурсу пластичності на першому етапі  $\psi_1 \rightarrow 1$ , з врахуванням другої рівності (2.42) і співвідношень (2.21), (2.22) маємо  $g_1 \rightarrow 1$  і на основі виразу (2.37) отримаємо:

$$\lim_{g_1 \rightarrow 1} g_2 = -I_{12} + |I_{12}|. \quad (2.51)$$

Згідно даному співвідношенню після вичерпання пластичності на першому етапі, деформування на другому етапі можливе (!) для процесів і матеріалів, які відповідають від'ємним значенням параметра  $I_{12}$ .

На відміну від тензорно-лінійної моделі, співвідношення (2.46), (2.49) відображують властивість матеріалів, що вичерпавши ресурс пластичності на кручення, сприймати пластичну деформацію стиску. На рис. 2.2 – 2.4 наведено зображення результатів розрахунків накопичення пошкоджень за співвідношенням (2.46).

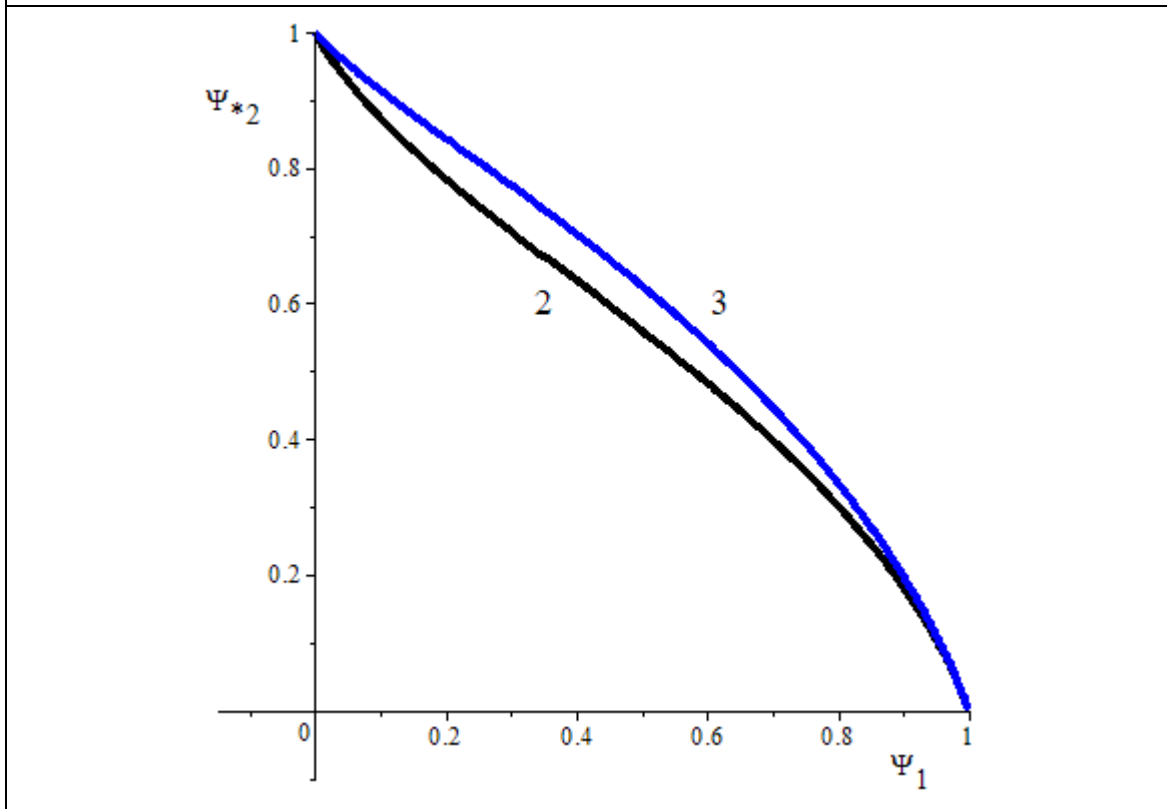
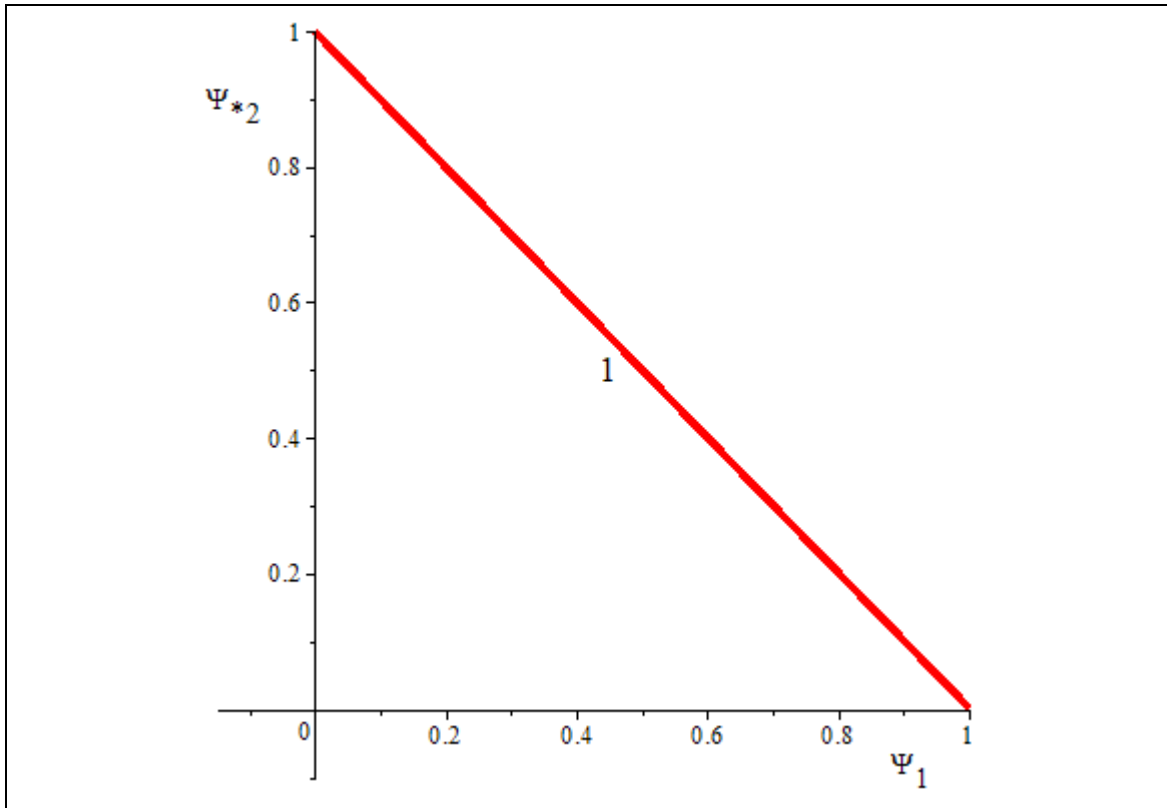


Рисунок 2.2 – Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні:  
 1 – одноетапному рівномірному деформуванні; 2, 3 – кручення-розтягу:  
 2 – EP717 ( $\alpha_{12} = 2,2$ ;  $n = 1,3$ ;  $I_{12} = 0,3$ );  
 3 – BT8 ( $\alpha_{12} = 1,53$ ;  $n = 1,2$ ;  $I_{12} = 0,35$ )

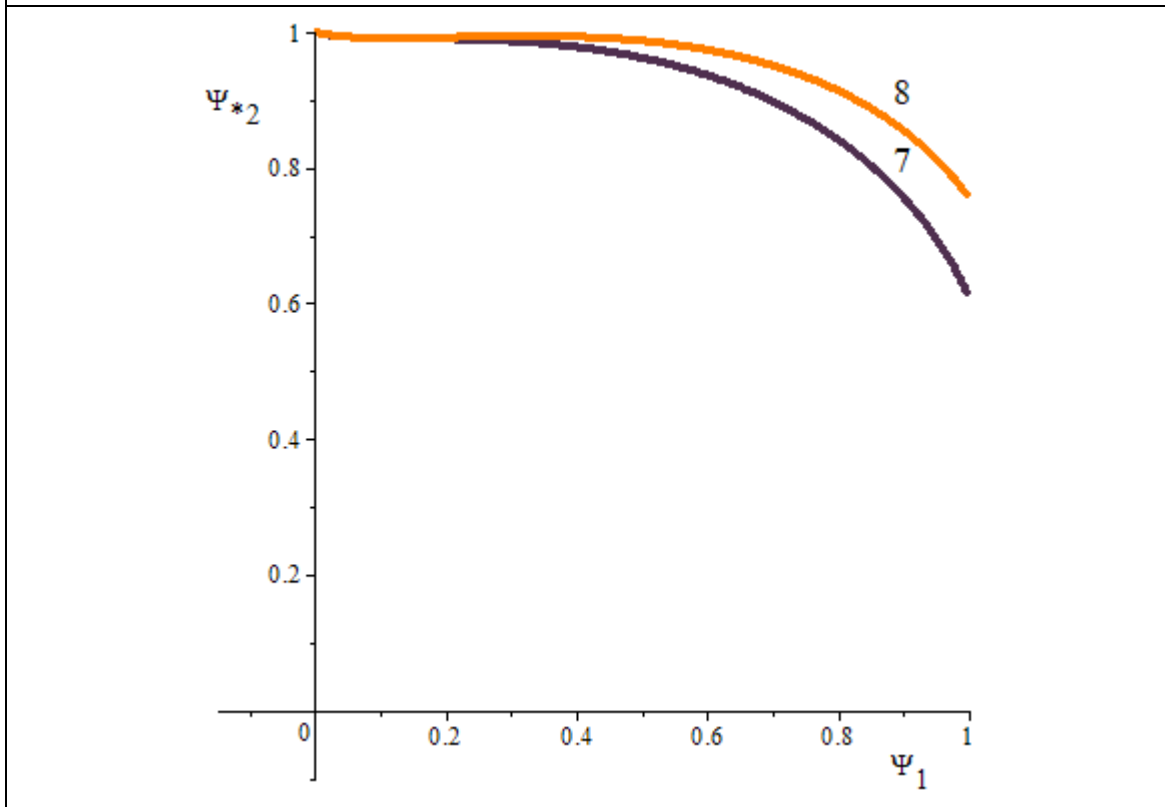
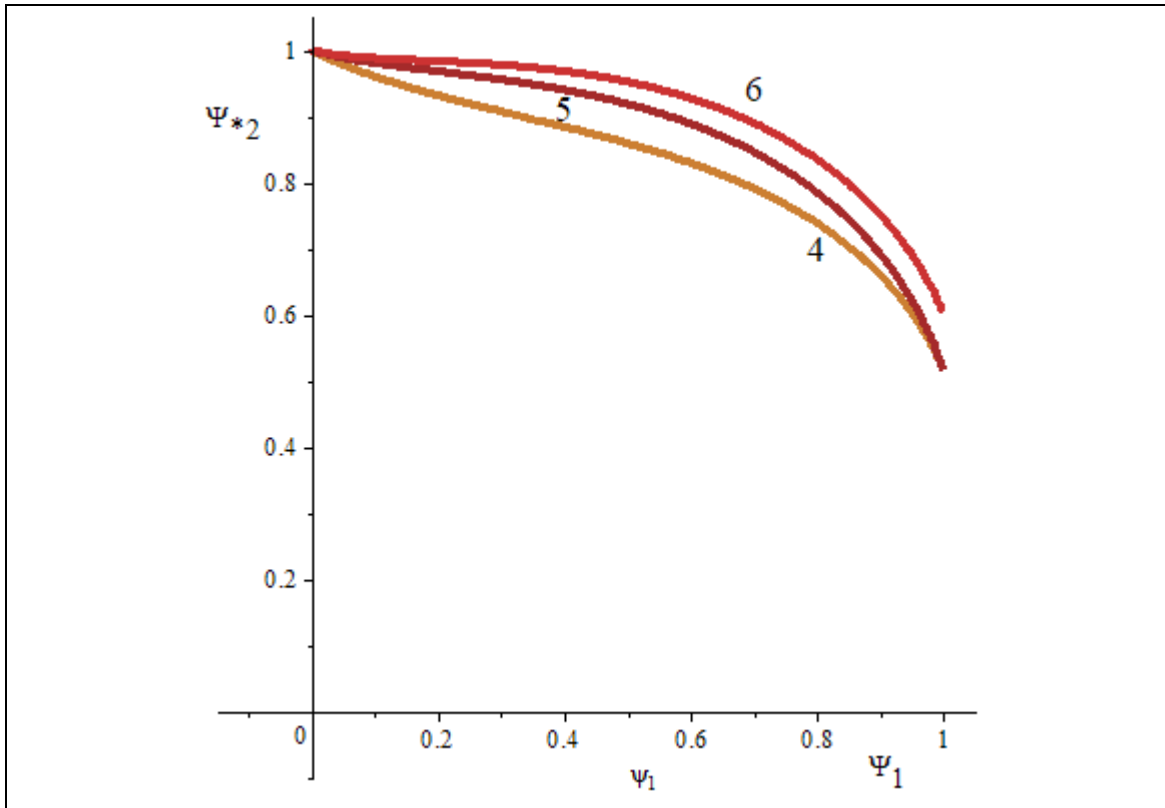


Рисунок 2.3 – Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні кручення-стиску: 4 – ВТ9 ( $\alpha_{12} = 0,56$ ;  $n = 1,5$ ;  $I_{12} = -0,35$ ); 5 – ХН45МВТЮБР ( $\alpha_{12} = 0,44$ ;  $n = 1,3$ ;  $I_{12} = -0,3$ ); 6 – ВТ25 ( $\alpha_{12} = 0,55$ ;  $n = 1,2$ ;  $I_{12} = -0,35$ ); 7 – ВТ4 ( $\alpha_{12} = 1,2$ ;  $n = 1,1$ ;  $I_{12} = -0,35$ ); 8 – 13X11H2B2MФ-Ш ( $\alpha_{12} = 0,6$ ;  $n = 1,2$ ;  $I_{12} = -0,45$ );

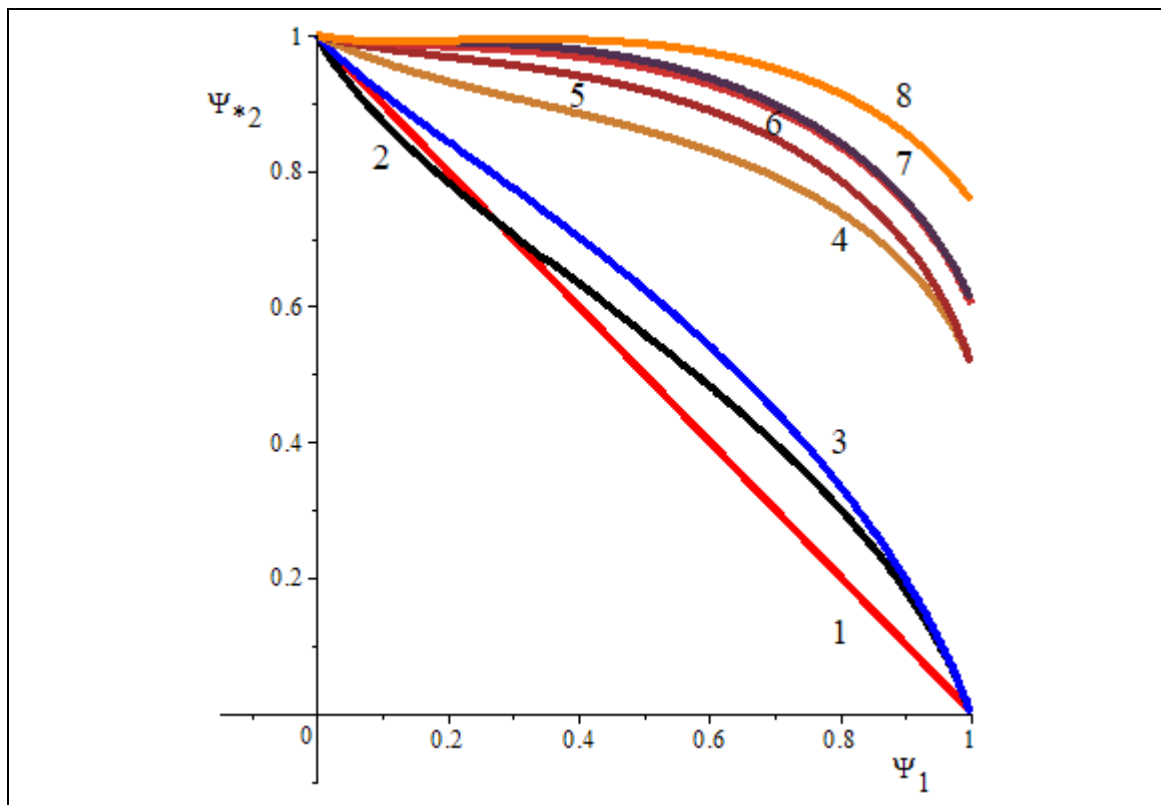


Рисунок 2.4 – Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні:

1 – одноетапному рівномірному деформуванні; 2, 3 – кручення-розтягу:

2 – EP717 ( $\alpha_{12} = 2,2$ ;  $n = 1,3$ ;  $I_{12} = 0,3$ ); 3 – BT8 ( $\alpha_{12} = 1,53$ ;  $n = 1,2$ ;  $I_{12} = 0,35$ );

4 – 8 – кручення-стиску: 4 – BT9 ( $\alpha_{12} = 0,56$ ;  $n = 1,5$ ;  $I_{12} = -0,35$ );

5 – ХН45МВТЮБР ( $\alpha_{12} = 0,44$ ;  $n = 1,3$ ;  $I_{12} = -0,3$ );

6 – BT25 ( $\alpha_{12} = 0,55$ ;  $n = 1,2$ ;  $I_{12} = -0,35$ ); 7 – BT4 ( $\alpha_{12} = 1,2$ ;  $n = 1,1$ ;  $I_{12} = -0,35$ );

8 – 13X11H2B2MФ-Ш ( $\alpha_{12} = 0,6$ ;  $n = 1,2$ ;  $I_{12} = -0,45$ )

### 2.3. Висновки

Із тензорної моделі, що розглядалась, стосовно двохетапного деформування отримали критеріальні співвідношення, які мають наступні властивості:

– залишковий ресурс пластичності на другому етапі є явною функцією використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування;

– критеріальне співвідношення двохетапного деформування має інваріантний параметр  $I_{12}$ , який впливає із даної моделі і чисельні значення якого відображають повну множину нескінченної кількості можливих варіантів двохетапного деформування;

– математична модель накопичення пошкоджень має три параметра, які визначаються умовами експериментів та властивостями матеріалів при стаціонарному деформуванні та один параметр, значення якого залежать від даних по деформуванню при непростих його класах.

### РОЗДІЛ 3

## КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ПРИ ДВОХЕТАПНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

3.1. Аналітичне дослідження моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування

При розгляді деформованого стану при двохетапному пластичному деформуванню особливу увагу приділяють ресурсу пластичності. Під двохетапним деформуванням розуміють пластичне деформування, яке проводиться в два етапи. При такому виді деформування в межах кожного етапу маємо стаціонарне пластичне деформування. Особливістю є те, що на другому етапі змінюється напрямок, або вид деформування.

Двохетапне деформування є одним із важливих класів деформування з двох основних причин. По-перше, вказаний клас є найпростішим представником нестаціонарного деформування. При цьому двохетапному деформуванню притаманні численні яскраво виражені ефекти в залежностях між граничними деформаціями. По-друге, в значній частині випадків напружено-деформований стан у заготовках під час обробки металів тиском можна при певному наближенні розглядати як двохетапне деформування. У такому разі спрощується аналіз придатності заготовки приймати певну технологічну операцію.

При розгляді холодного двохетапного деформування будемо використовувати математичну модель накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах (2.46), виведення якої приведено в розділі 2.

Досліджувальна математична модель відображає залежність ресурсу пластичності на другому етапі двохетапного деформування від уже використаного ресурсу пластичності на першому етапі двохетапного деформування. Математична модель побудована у вигляді степеневої функції, значення якої залежить від чотирьох параметрів. Даними параметрами є  $\alpha_{12}$ ,  $I_{12}$ ,  $n$ ,  $\psi_1$ .

Рекомендації щодо раціонального вибору параметрів моделі приведені тільки для певного діапазону видів двохетапного деформування. Тому стає необхідним виконати повне аналітичне дослідження моделі залишкового ресурсу пластичності матеріалу, побудованої на ос-



нові тензорно-нелінійної теорії зі степеневою функцією пошкоджено-сті під час двохетапного деформування.

Отже, вказана задача даного дослідження базується на визначенні математично допустимих діапазонів зміни параметрів  $\alpha_{12}$ ,  $I_{12}$ ,  $n$ , які входять у критеріальне співвідношення (3.1).

Двохетапне деформування розглядалося в значній частині наукових публікацій, зокрема в [11], але дотепер у літературі відсутні результати повного дослідження вище вказаного критеріального співвідношення, побудованого на основі тензорно-нелінійної моделі зі степеневою функцією пошкоженості.

Із тензорно-нелінійної моделі [11] для двохетапного деформування отримаємо критеріальне співвідношення [12], [94]:

$$\psi_{*2} = \left[ \psi_1^n \cdot (\alpha_{12}^n - I_{12}) + \sqrt{\psi_1^{2 \cdot n} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1} \right]^{1/n} - \psi_1 \cdot \alpha_{12}, \quad (3.1)$$

де  $\psi_{*2} = \frac{\varepsilon_*^{(2)}}{\varepsilon_{*2}}$  – залишковий ресурс граничних пластичних деформацій

на другому етапі двохетапного деформування;  $\psi_1 = \frac{\varepsilon_u^{(1)}}{\varepsilon_{*1}}$  – використа-

ний ресурс граничних деформацій на першому етапі деформування;

$\alpha_{12} = \frac{\varepsilon_{*1}}{\varepsilon_{*2}}$  – параметр, що характеризує порядок чергування умов де-

формації;

$$I_{12} = k_{12} \cdot a^{(1)} \cdot a^{(2)} + I_1 \cdot a^{(1)} \cdot b^{(2)} + I_2 \cdot a^{(2)} \cdot b^{(1)} + \left( I_3 - \frac{1}{3} \right) \cdot b^{(1)} \cdot b^{(2)},$$

$k_{12} = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{ij}^{(2)}$  – косинус кута зламу траєкторії деформації;  $a^{(i)}, b^{(i)}$  – значення параметрів  $a$  і  $b$  на непарних і парних етапах деформування;

$I_1, I_2, I_3$  – інваріанти добутку тензорів, причому  $I_1 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(2)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}$ ,

$I_2 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{ki}^{(2)}$ ,  $I_3 = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \beta_{jk}^{(1)} \cdot \beta_{kl}^{(2)} \cdot \beta_{li}^{(2)}$ ;  $\varepsilon_*^{(2)}$  – значення залишко-

вої деформації до руйнування на другому етапі двохетапного деформування;  $\varepsilon_u^{(1)}$  – значення накопиченої деформації на першому етапі

деформування;  $\varepsilon_{*1} = \varepsilon_{*c}(\eta^{(1)}, D^{(1)})$ ,  $\varepsilon_{*2} = \varepsilon_{*c}(\eta^{(2)}, D^{(2)})$  – гранична де-

формація до руйнування під час стаціонарного деформування, що

представляється діаграмою пластичності;  $n$  – параметр, який характеризує режим навантаження та властивості матеріалу.

У роботах [4], [5], [7], [84], [87], [89], [93] проведено аналіз різних інваріантів деформацій для використання їх в якості аргументів поверхні граничних деформацій.

Визначимо математично допустимі межі зміни параметрів  $\alpha_{12}$ ,  $I_{12}$ ,  $n$ , які входять у критеріальне співвідношення (3.1) [94].

За визначенням  $\psi_1 \in [0;1]$ , при двохетапному деформуванні:  $\psi_1 \in [0;1)$ . Оскільки функція визначена в області дійсних чисел та знаменник не перетворюється на нуль, а основа степеневі функції більше нуля, то можемо зробити висновок, що для критеріального співвідношення (3.1) параметр  $n$  не дорівнює нулю, при цьому виконується також нерівність  $\alpha_{12} > 0$ . Отже, основні обмеження, що накладаються на змінну  $\psi_1$  та параметри моделі  $n$  і  $\alpha_{12}$  представляються за допомогою системи нерівностей:

$$\begin{cases} n \neq 0 \\ 0 \leq \psi_1 \leq 1. \\ \alpha_{12} \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

При числовому дослідженні співвідношення (3.1) із параметрами, які задовольняють нерівності (3.2), було виявлено ділянки, на яких функція  $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$  в області дійсних чисел не визначена. Так при значеннях параметрів  $\alpha_{12} = 0,5$ ;  $n = -0,5$ ;  $I_{12} = 0,6$  функція визначена на проміжку  $\psi_1 \in [0,64;1)$ . При збільшенні значення параметра  $I_{12}$  до 0,9, область визначення функції буде збільшуватися та визначатися на проміжку  $\psi_1 \in [0,19;1)$  (рис. 3.1 – 3.3).

Виходячи із отриманих результатів числового дослідження критеріального співвідношення (3.1), можна зробити висновок, що обмеження параметрів (3.2), наведених вище, для роботи із цією моделлю недостатньо. Для знаходження додаткових обмежень на параметри математичної моделі потрібно виконати її аналітичне дослідження.

Спочатку, необхідно виконати дослідження виразу:

$$\sqrt{\psi_1^{2 \cdot n} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1}. \quad (3.3)$$

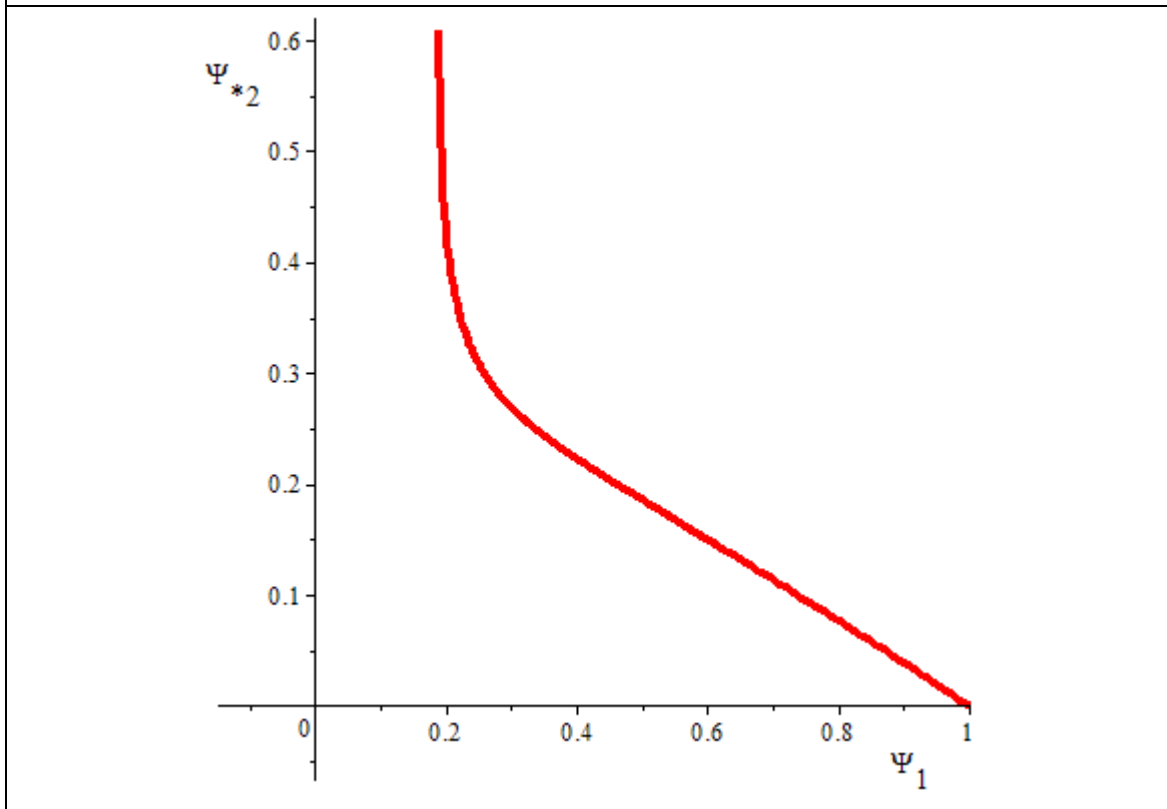
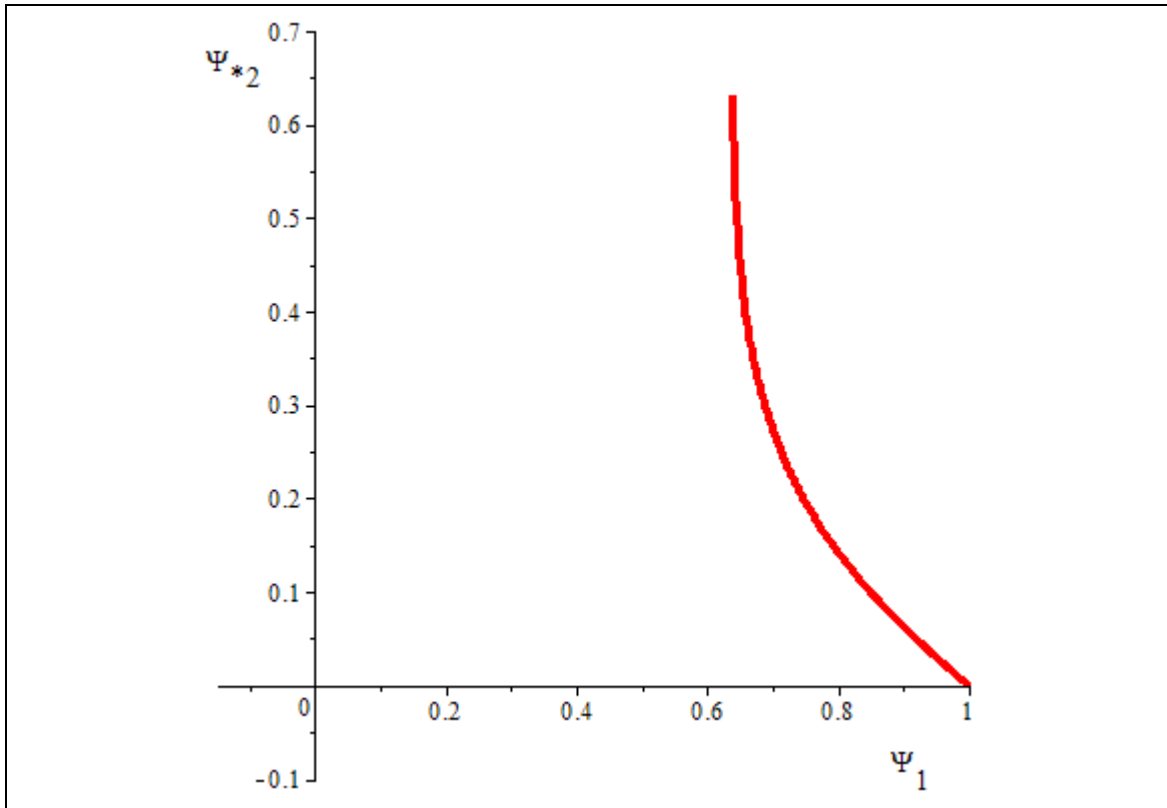


Рисунок 3.1 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності під час двохетапного деформування, коли  $\alpha_{12} = 0,5$ ;  $n = -0,5$ ; а  $I_{12}$ :  $I_{12} = 0,6$  та  $I_{12} = 0,9$  відповідно

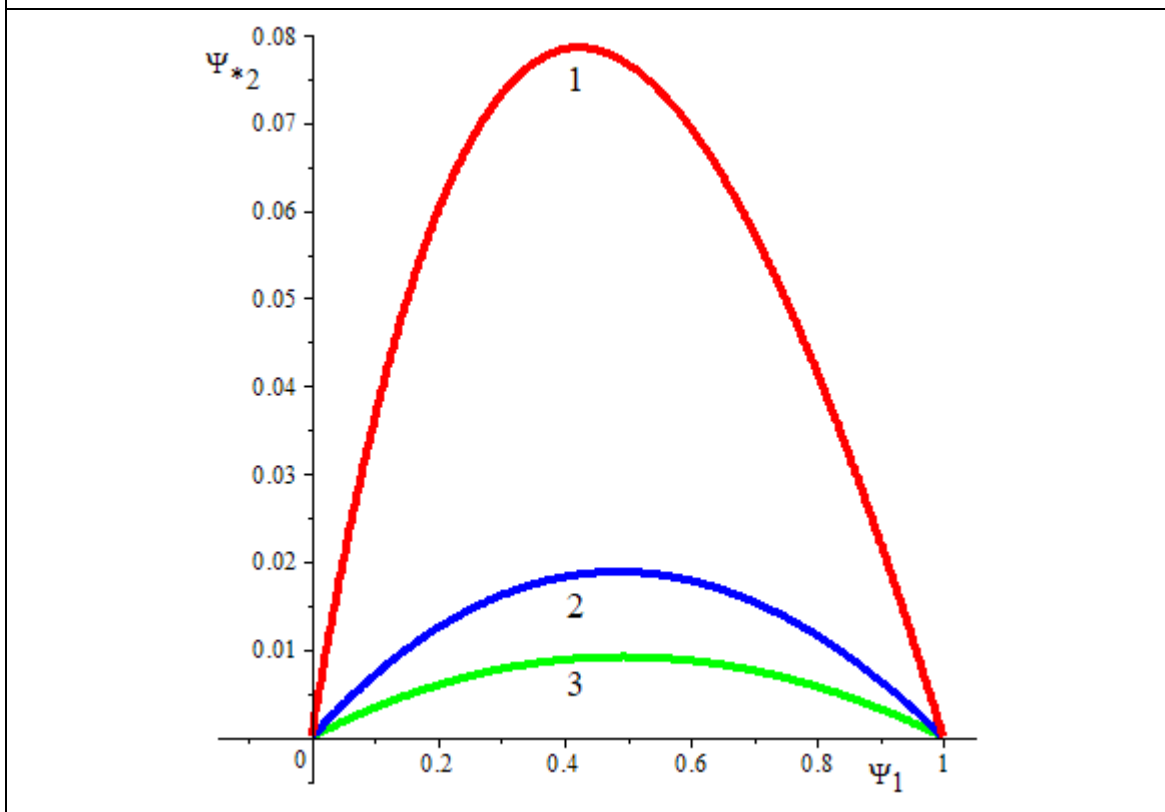
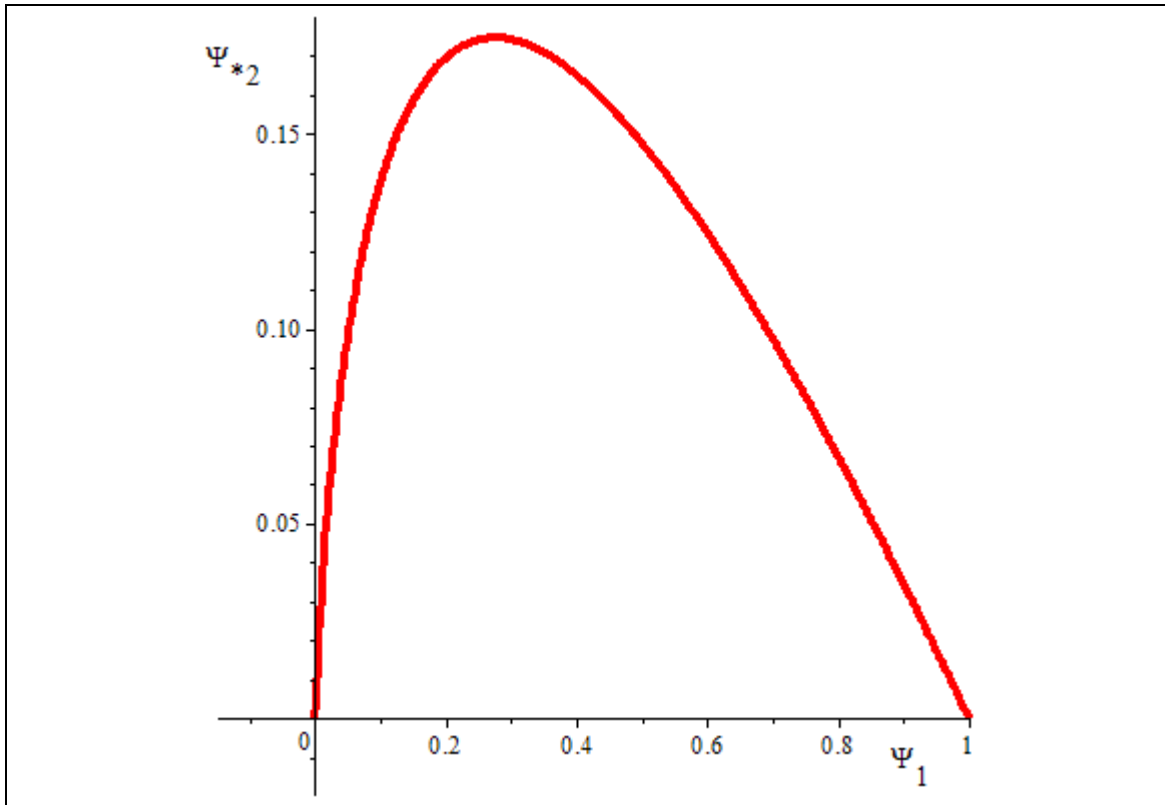
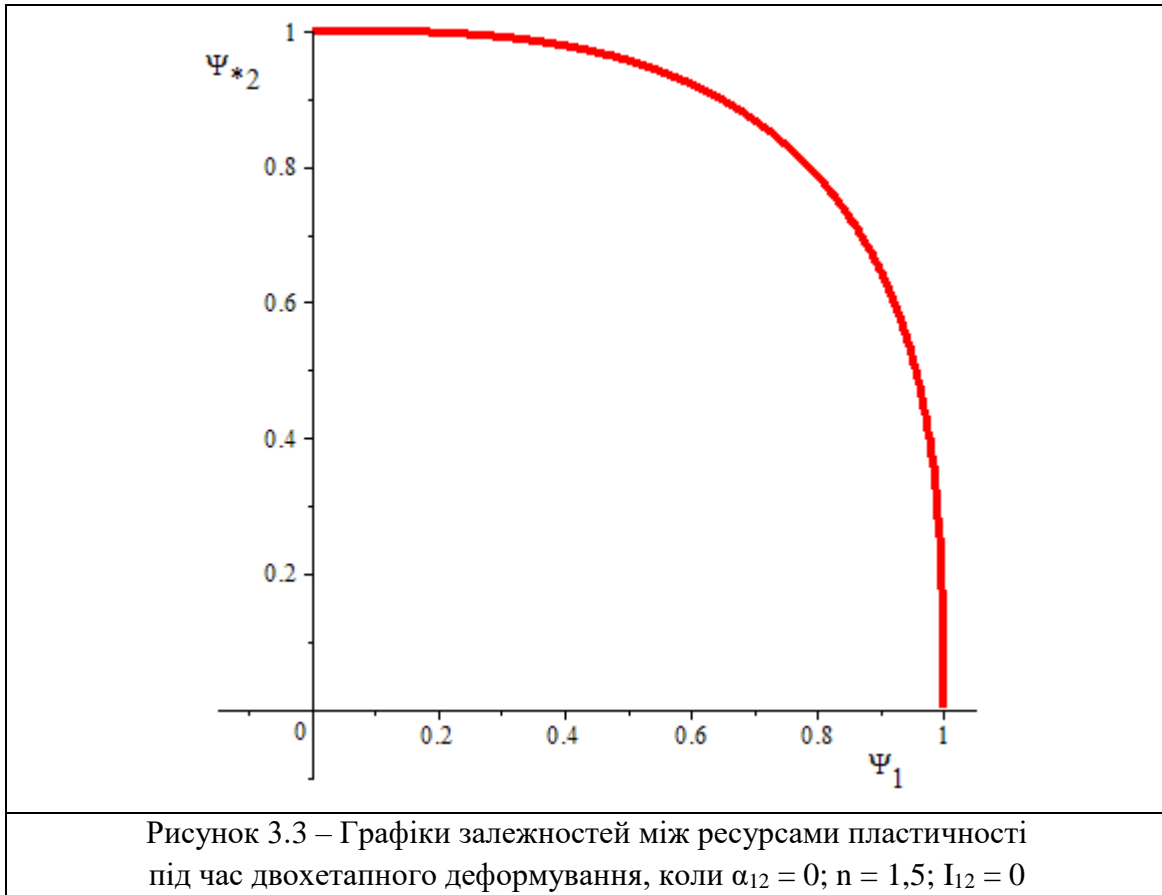


Рисунок 3.2 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності під час двохетапного деформування, коли  $\alpha_{12} = 0,5$ ;  $n = -0,5$ ; а  $I_{12}$ :  
 $I_{12} = 1$  та  $1 - I_{12} = 1,5$ ; 2 –  $I_{12} = 5$ ; 3 –  $I_{12} = 10$  відповідно



На основі означення квадратного кореня встановлено, що підкореневий вираз повинен бути не менший за нуль, щоб значення виразу набувало дійсних значень. Тобто:

$$\psi_1^{2 \cdot n} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1 \geq 0. \quad (3.4)$$

Звідки:

$$I_{12}^2 \geq 1 - \frac{1}{\psi_1^{2 \cdot n}}. \quad (3.5)$$

Розглянемо випадок, коли  $n > 0$ . Тоді при  $0 \leq \psi_1 \leq 1$  права частина нерівності (3.5) лежить у межах  $-\infty < 1 - \frac{1}{\psi_1^{2 \cdot n}} \leq 0$ , тобто є числом не додатнім.  $I_{12}^2$  – число не від’ємне, отже, нерівність (3.5) при  $n > 0$  виконується для  $\forall I_{12} \in (-\infty; \infty)$ . Тому при значеннях параметра  $n > 0$  жодних додаткових обмежень на інші параметри моделі накопичення пошкоджень не накладається.

Розглянемо нерівність (3.5) при значеннях параметра  $n < 0$ . Тоді при зміні  $n$  від 0 до 1 вираз  $1 - \frac{1}{\psi_1^{2 \cdot n}}$  монотонно спадає від 1 до 0. Отже, для виконання нерівності (3.5) необхідно, щоб  $|I_{12}| \geq 1$ . Якщо  $|I_{12}| < 1$ , то завжди для  $\psi_1 \in [0; 1)$  на графіку функції  $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$  буде спостерігатись область, при якій функція не визначена. Відповідно до нерівності (3.5) область визначення функції  $\psi_{*2} = \psi_{*2}(\psi_1)$  визначається нерівністю:

$$\sqrt[2n]{\frac{1}{1 - I_{12}^2}} \leq \psi_1 \leq 1. \quad (3.6)$$

Область, яка визначається нерівністю (3.6), повністю збігається із значеннями  $\psi_1$  на рис. 3.1 – 3.3, для яких  $\psi_{*2}$ , що обчислюється за критеріальним співвідношенням (3.1), буде визначатися в області дійсних чисел.

Тепер аналітично дослідимо вираз моделі, який підноситься до степеня  $1/n$ . Цей вираз повинен бути не меншим за нуль. Тобто:

$$\psi_1^n \cdot (\alpha_{12}^n - I_{12}) + \sqrt{\psi_1^{2 \cdot n} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1} \geq 0. \quad (3.7)$$

Із виразу (3.7) отримаємо ірраціональну нерівність:

$$\sqrt{\psi_1^{2 \cdot n} \cdot (I_{12}^2 - 1) + 1} \geq \psi_1^n \cdot (I_{12} - \alpha_{12}^n). \quad (3.8)$$

Ірраціональна нерівність (3.8) розкладається на сукупність систем нерівностей, що мають вигляд [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1^{2 \cdot n} (I_{12} - 1) + 1 \geq 0 \\ I_{12} - \alpha_{12}^n \geq 0 \end{array} \right. ; \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{12} \geq \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^{2n} - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1^{2 \cdot n} (I_{12} - 1) + 1 \geq 0 \\ I_{12} - \alpha_{12}^n < 0 \end{array} \right. ; \quad (3.11)$$

Якби в системі нерівностей (3.9) була б відсутня третя нерівність, то сукупність систем нерівностей (3.10) мала б розв'язок, що збігався

б із розв'язком першої нерівності систем (3.9) і (3.11). Це пояснюється тим, що друга нерівність системи (3.9) і друга нерівність системи (3.11) доповнюють одна одну, тобто в сукупності не накладають обмежень на жоден із параметрів. Визначимо, чи накладає третя нерівність системи (3.9) нові обмеження на параметри  $\alpha_{12}$ ,  $I_{12}$ ,  $n$ , за умови виконання двох попередніх нерівностей.

На основі проведених вище досліджень встановлено, що перша нерівність системи (3.9) виконуватиметься при  $n > 0$  або при  $n < 0$  і  $|I_{12}| \geq 1$ .

Дослідимо спочатку систему нерівностей:

$$\begin{cases} I_{12} \geq \alpha_{12}^n \\ I_{12} \geq \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} \end{cases} \quad (3.12)$$

при  $n > 0$ .

Позначимо праву частину другої нерівності системи (3.12)

$$f(\psi_1) = \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n}. \quad (3.13)$$

Дослідимо, як змінюється функція  $f(\psi_1)$  при варіюванні  $\psi_1$  від 0 до 1. Визначимо, чи існують на вказаному проміжку екстремуми даної функції:

$$\left( \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} \right)' = \frac{n}{\alpha_{12}^n \cdot \psi_1^{2n+1}} > 0. \quad (3.14)$$

Отже, екстремумів при  $\psi_1 \in [0;1)$  немає, функція є монотонно зростаючою, тому максимальне значення досягає при  $\psi_1 = 1$ :

$$f_{\max} = f(1) = \frac{\alpha_{12}^n}{2}. \quad (3.15)$$

Враховуючи, що  $\alpha_{12} > 0$ :

$$\alpha_{12}^n > \frac{\alpha_{12}^n}{2}, \quad (3.16)$$

а це означає, що за умови виконання першої нерівності системи (3.12) автоматично виконується і друга нерівність, тобто при  $n > 0$  друга нерівність не буде накладати ніяких додаткових обмежень на жоден з параметрів.

Проведемо дослідження системи нерівностей (3.12) при  $n < 0$  і  $|I_{12}| \geq 1$ . Зважаючи на вираз (3.14), функція  $f(\psi_1)$  є монотонно спадною функцією, тому досягає свого максимального значення при  $\psi_1 = 0$ :

$$f_{\max} = \lim_{\psi_1 \rightarrow 0} \frac{\psi_1^{2n} + \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n - 1}{2 \cdot \psi_1^{2n} \cdot \alpha_{12}^n} = \frac{\alpha_{12}^n}{2}. \quad (3.17)$$

На основі попередніх досліджень, робимо висновок, що і при  $n < 0$ ;  $|I_{12}| \geq 1$  жодних додаткових обмежень параметрів критеріального співвідношення (3.1) друга нерівність системи (3.12) не створює.

Аналіз результатів, отриманих із нерівності (3.4) і сукупності систем нерівностей (3.10), надає можливість зробити узагальнення, що математично допустимі значення параметрів критеріального співвідношення (3.1) визначаються сукупністю:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12} > 0 \\ n > 0 \end{array} \right. ; \\ -\infty < I_{12} < +\infty \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12} > 0 \\ n < 0 \end{array} \right. ; \\ |I_{12}| > 1 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Відповідне узагальнення повністю узгоджується із результатами чисельного дослідження вказаного вище критеріального співвідношення (рис. 3.1 – 3.3).

Закономірності в зміні залишкового ресурсу та отриманні обмеження (3.18) на зміну параметрів критеріального співвідношення (3.1) дозволяють спростити діагностику матеріалу при двохетапному деформуванні.

### 3.2. Комп'ютерна реалізація досліджувальної математичної моделі та розрахунків залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні в середовищі математичної системи Maple 9

Для теоретичного дослідження розглядуваної математичної моделі, проведення розрахунків залишкового ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні та побудови графіків залежності ресурсу



пластичності на другому етапі від уже використаного ресурсу пластичності на першому етапі двохетапного деформування найкраще використати середовище математичної системи Maple 9 [12], [78], [118], [122], [123], [124], [125], [126]. Це пояснюється тим, що вище згадане середовище математичної системи містить окрім основних програм математичного спрямування, ще й цикл прикладних математичних програм, що дозволить досить повноцінно реалізувати, відтворити, прослідкувати роботу, дослідити досліджувальну модель на найкращому рівні. А також в Maple 9 відкриваються досить нові можливості дослідження роботи математичної моделі [12], [36], [41], [42], [43], [48], [49], [122], [123], [124], [125], [126], що в певній мірі є недоступними в інших пакетах математичних програм.

Для проведення розрахунків ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні ізотропних матеріалів та наглядної реалізації залежності ресурсу пластичності на другому етапі деформування від уже використаного ресурсу пластичності на першому етапі двохетапного деформування, була розроблена програма в середовищі математичної системи Maple 9, текст якої представлено далі в роботі.

Побудова графіку змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні

```
> restart;
with(plots):
Формула 46, за якою відбувається побудова графіка
psi2:=(psi[1]^n*(alpha[12]^n-
Iota[12])+sqrt(psi[1]^(2*n)*(Iota[12]^2-
1)+1))^(1/n)-psi[1]*alpha[12];
Вирази для різних матеріалів та видів здійснення
двохетапного деформування:
стаціонарне деформування (одноетапне):
u1 := 1-psi[1];
кручення-розтяг:
u2 := eval(psi2, [alpha[12]=2.2, n=1.3,
Iota[12]=0.3]);
u3 := eval(psi2, [alpha[12]=1.53, n=1.2,
Iota[12]=0.35]);
кручення-стиск:
```

```

u4 := eval(psi2, [alpha[12]=0.56, n=1.5,
Iota[12]=-0.35]);
u5 := eval(psi2, [alpha[12]=0.44, n=1.3,
Iota[12]=-0.3]);
u6 := eval(psi2, [alpha[12]=0.55, n=1.2,
Iota[12]=-0.35]);
u7 := eval(psi2, [alpha[12]=1.2, n=1.1, Iota[12]=-
0.35]);
u8 := eval(psi2, [alpha[12]=0.6, n=1.2, Iota[12]=-
0.45]);

```

Побудова графіка змінювання ресурсу пластичності  
при двохетапному деформуванні:  
стаціонарне деформування:

```

g1:=plot([u1],
psi[1]=0..1,style=[ line,line,line,line,line,line,
line,line],color=[RED,BLACK,BLUE,GOLD,brown,orange
,violet,coral], thickness=4,numpoints=500,
title="Змінювання ресурсу пластичності при
двохетапному деформуванні"):

```

```

g2:=PLOT(
TEXT([-0.15,0.9], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),
TEXT([-0.105,0.88], "*2", FONT(TIMES,ROMAN,12)),
TEXT([0.9,-0.08], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),
TEXT([0.93,-0.1], "1", FONT(TIMES,ROMAN,12)),

TEXT([0.45,0.5], "1", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
AXESSTYLE(NORMAL),VIEW(-0.15..1.0,-0.1..1.0)):
display({g1,g2});

```

кручення-розтяг (матеріали: 2 - EP717; 3 - BT8):

```

g3:=plot([u2,u3],
psi[1]=0..1,style=[ line,line],color=[BLACK,BLUE],
thickness=4,numpoints=500, title="Кручення-розтяг
(матеріали:
2 - EP717(alfa[12]=2,2; n=1,3; I[12]=0,3);
3 - BT8(alfa[12]=1,53; n=1,2; I[12]=0,35))"):

```

```

g4:=PLOT(
TEXT([-0.15,0.9], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),

```

```

TEXT([-0.105,0.88], "*2", FONT(TIMES, ROMAN, 12)),
TEXT([0.9, -0.08], 'Y', FONT(SYMBOL, 12)),
TEXT([0.93, -0.1], "1", FONT(TIMES, ROMAN, 12)),
TEXT([0.4, 0.6], "2", FONT(TIMES, ROMAN, 14)),
TEXT([0.6, 0.6], "3", FONT(TIMES, ROMAN, 14)),
AXESSTYLE(NORMAL), VIEW(-0.15..1.0, -0.1..1.0)):
display({g3,g4});
кручення-стик (матеріали: 4 - BT9; 5 - ХН45МВТЮБР;
                6 - BT25):

g5:=plot([u4,u5,u6],
psi[1]=0..1, style=[ line,line,line],
color=[GOLD,brown,orange],
thickness=4,numpoints=500,
title="Кручення-стик (матеріали:
4 - BT9(alfa[12]=0,56; n=1,5; I[12]=-0,35);
5 - ХН45МВТЮБР (alfa[12]=0,44; n=1,3; I[12]=-0,3);
6 - BT25(alfa[12]=0,55; n=1,2; I[12]=-0,35);)"):
g6:=PLOT(
TEXT([-0.15,0.9], 'Y', FONT(SYMBOL, 12)),
TEXT([-0.105,0.88], "*2", FONT(TIMES, ROMAN, 12)),
TEXT([0.9, -0.08], 'Y', FONT(SYMBOL, 12)),
TEXT([0.93, -0.1], "1", FONT(TIMES, ROMAN, 12)),
TEXT([0.8, 0.7], "4", FONT(TIMES, ROMAN, 14)),
TEXT([0.4, 0.92], "5", FONT(TIMES, ROMAN, 14)),
TEXT([0.7, 0.94], "6", FONT(TIMES, ROMAN, 14)),
AXESSTYLE(NORMAL), VIEW(-0.15..1.0, -0.1..1.0)):
display({g5,g6});
                кручення-стик (матеріали: 7 - OT4; 8 -
                13X11H2B2MФ-Ш):

g7:=plot([u7,u8],
psi[1]=0..1, style=[ line,line,line,line,line],
color=[violet,coral],
thickness=4,numpoints=500,
title="Кручення-стик (матеріали:
7 - OT4(alfa[12]=1,2; n=1,1; I[12]=-0,35);
8 - 13X11H2B2MФ-Ш (alfa[12]=0,6; n=1,2; I[12]=-
0,45))"):

```

```

g8:=PLOT(
TEXT([-0.15,0.9], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),
TEXT([-0.105,0.88], "*2", FONT(TIMES,ROMAN,12)),
TEXT([0.9,-0.08], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),
TEXT([0.93,-0.1], "1", FONT(TIMES,ROMAN,12)),
TEXT([0.9,0.81], "7", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
TEXT([0.9,0.91], "8", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
AXESSTYLE(NORMAL),VIEW(-0.15..1.0,-0.1..1.0)):
display({g7,g8});

```

Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному  
деформуванні

```

g9:=plot([u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8],
psi[1]=0..1,style=[line,line,line,line,line,
line,line,line],
color=[RED,BLACK,BLUE,GOLD,brown,orange,
violet,coral], thickness=4,
numpoints=500,
title="Змінювання ресурсу пластичності при
двохетапному деформуванні"):

```

```

g10:=PLOT(
TEXT([-0.15,0.9], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),

TEXT([-0.105,0.88], "*2", FONT(TIMES,ROMAN,12)),
TEXT([0.9,-0.08], 'Y', FONT(SYMBOL,12)),
TEXT([0.93,-0.1], "1", FONT(TIMES,ROMAN,12)),

TEXT([0.8,0.12], "1", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
TEXT([0.1,0.82], "2", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
TEXT([0.8,0.4], "3", FONT(TIMES,ROMAN,14)),

TEXT([0.8,0.7], "4", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
TEXT([0.4,0.92], "5", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
TEXT([0.7,0.88], "6", FONT(TIMES,ROMAN,14)),

TEXT([0.9,0.81], "7", FONT(TIMES,ROMAN,14)),
TEXT([0.9,0.91], "8", FONT(TIMES,ROMAN,14)),

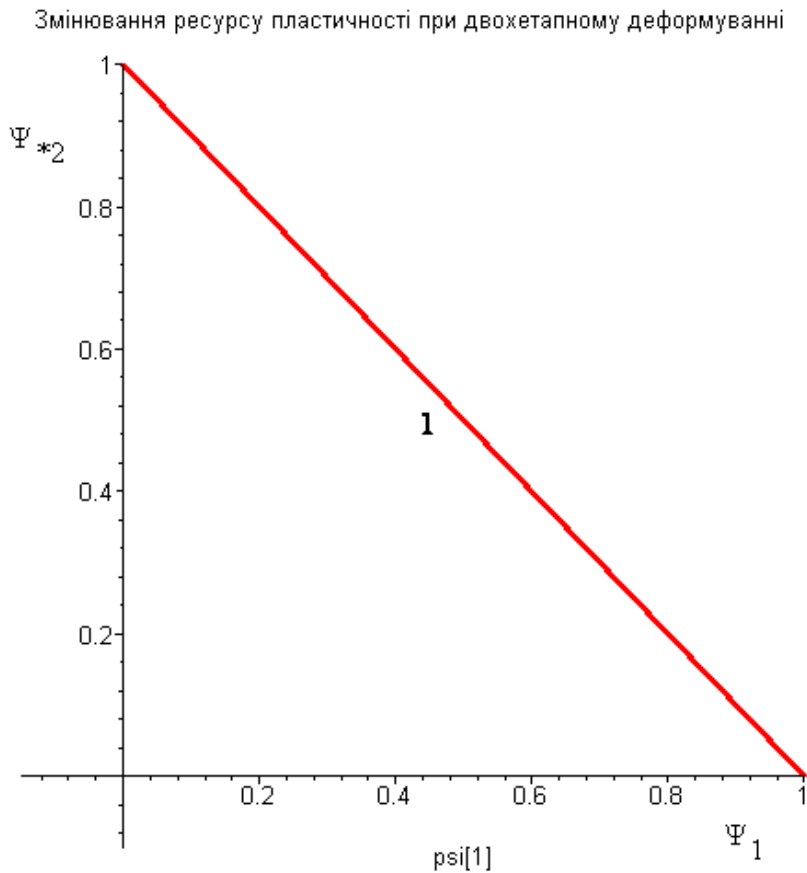
```

```

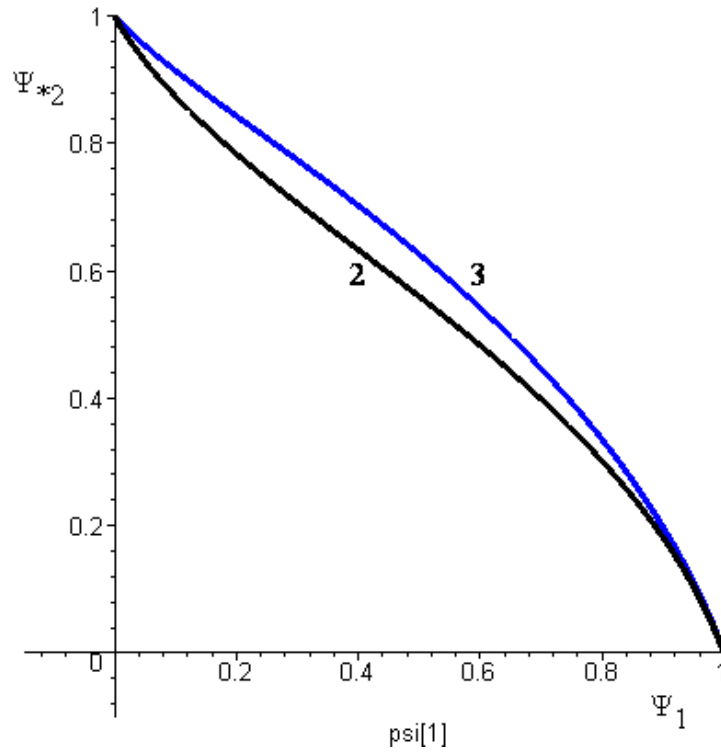
AXESSTYLE(NORMAL),VIEW(-0.15..1.0,-0.1..1.0)):
display({g9,g10});
Warning, the name changecoords has been redefined

```

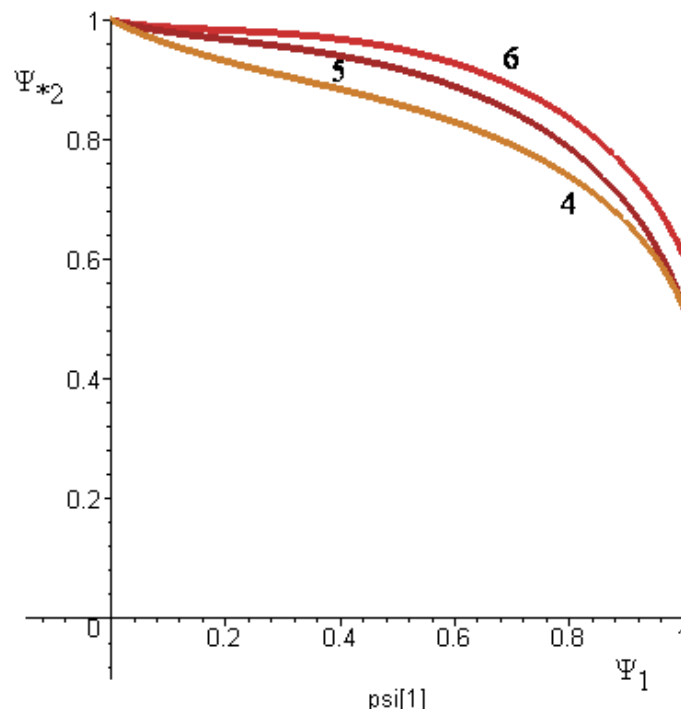
$$\begin{aligned}
\psi_2 &:= (\psi_1^n (\alpha_{12}^n - I_{12}) + \sqrt{\psi_1^{(2n)} (I_{12}^2 - 1) + 1})^{\left(\frac{1}{n}\right)} - \psi_1 \alpha_{12} \\
u1 &:= 1 - \psi_1 \\
u2 &:= (2.487080322 \psi_1^{1.3} + \sqrt{-0.91 \psi_1^{2.6} + 1})^{0.7692307692} - 2.2 \psi_1 \\
u3 &:= (1.315826310 \psi_1^{1.2} + \sqrt{-0.8775 \psi_1^{2.4} + 1})^{0.8333333333} - 1.53 \psi_1 \\
u4 &:= (0.7690656273 \psi_1^{1.5} + \sqrt{-0.8775 \psi_1^{3.0} + 1})^{0.6666666667} - 0.56 \psi_1 \\
u5 &:= (0.6439445874 \psi_1^{1.3} + \sqrt{-0.91 \psi_1^{2.6} + 1})^{0.7692307692} - 0.44 \psi_1 \\
u6 &:= (0.8380173108 \psi_1^{1.2} + \sqrt{-0.8775 \psi_1^{2.4} + 1})^{0.8333333333} - 0.55 \psi_1 \\
u7 &:= (1.572079251 \psi_1^{1.1} + \sqrt{-0.8775 \psi_1^{2.2} + 1})^{0.9090909091} - 1.2 \psi_1 \\
u8 &:= (0.9917282709 \psi_1^{1.2} + \sqrt{-0.7975 \psi_1^{2.4} + 1})^{0.8333333333} - 0.6 \psi_1
\end{aligned}$$



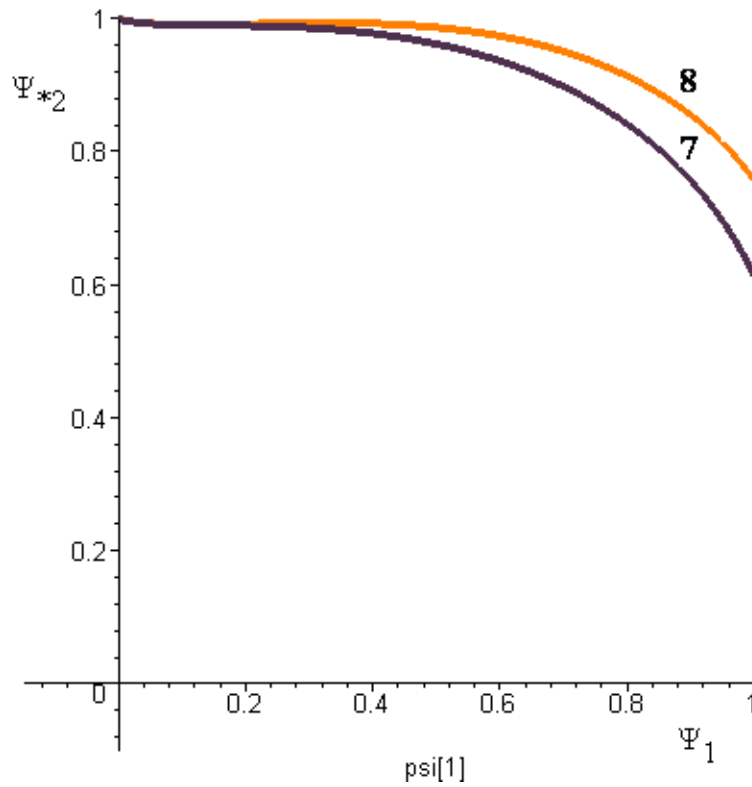
Кручення-розтяг (матеріали:  
 2 - ЭП717( $\alpha_{12}=2,2$ ;  $n=1,3$ ;  $l_{12}=0,3$ );  
 3 - ВТ8( $\alpha_{12}=1,53$ ;  $n=1,2$ ;  $l_{12}=0,35$ ))



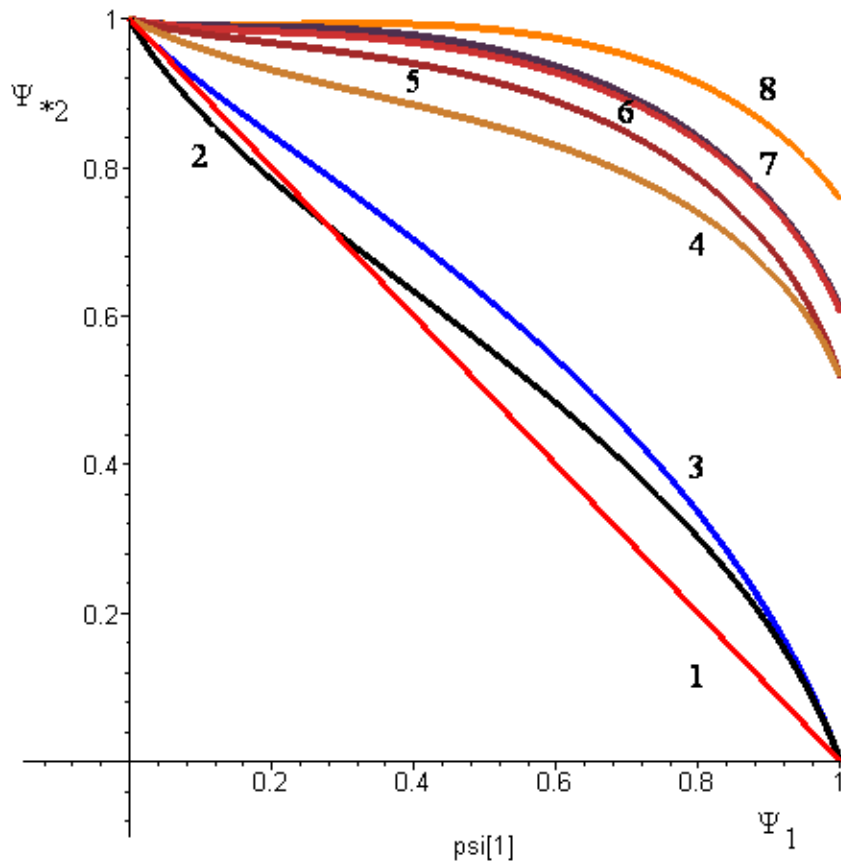
Кручення-стиск (матеріали:  
 4 - ВТ9( $\alpha_{12}=0,56$ ;  $n=1,5$ ;  $l_{12}=-0,35$ );  
 5 - ЭП718( $\alpha_{12}=0,44$ ;  $n=1,3$ ;  $l_{12}=-0,3$ );  
 6 - ВТ25( $\alpha_{12}=0,55$ ;  $n=1,2$ ;  $l_{12}=-0,35$ );)



Кручення-стиск (матеріали:  
 7 - ОТ4( $\alpha_{12}=1,2$ ;  $n=1,1$ ;  $l_{12}=-0,35$ );  
 8 - ЗИ961( $\alpha_{12}=0,6$ ;  $n=1,2$ ;  $l_{12}=-0,45$ ))



Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні



Наглядна реалізація залежності між ресурсами пластичності при двохетапному деформуванні показана у вигляді графіків. В програмі наведено аналітичний вираз математичної моделі, за допомогою якого будуть проводитися розрахунки та будуватися графіки. Далі для конкретних значень характеристичних параметрів моделі визначаємо вигляд математичної моделі. Даний вигляд моделі показано в вигляді функцій  $u_1 - u_8$ , які відображають залежність між ресурсами пластичності на кожному із етапів деформування для певних значень параметрів. Для визначення значення ресурсу на другому етапі від певного значення ресурсу пластичності, що уже використаний на першому етапі двохетапного деформування, необхідно в функції  $u_1 - u_8$  ввести значення використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування в вигляді частинки від цілого числа (наприклад, значення 0,8 означає 80%).

В вигляді функції  $u_1$  показано одноетапне деформування. В функціях  $u_2$  та  $u_3$  реалізовано двохетапне деформування кручення–розтяг для двох видів матеріалу та умов деформування. А у вигляді функцій  $u_4 - u_8$  реалізовано двохетапне деформування кручення–стиску.

Наступним кроком даної програми є побудова графіків функцій  $u_1 - u_8$ . Для наглядного розуміння вище згаданих залежностей, побудова графіків здійснена в наступному вигляді: на окремих рисунках реалізована побудова графіків різних видів двохетапного деформування, а графіки двохетапного деформування кручення–стиску розділено на два рисунки, щоб уникнути накладок графіків. А вже на останньому рисунку побудовано графіки різних видів двохетапного деформування. Це зроблено для того, щоб користувач, чи читач наглядно зміг оцінити та порівняти вигляд залежностей накопичення пошкоджень для різних видів холодного двохетапного деформування.

Для кожного графіка залежності ресурсів пластичності вказано матеріал для якого він будується та характеристичні коефіцієнти моделі.

Для дослідження роботи математичної моделі та її використання для розрахунків ресурсу пластичності на другому етапі двохетапного деформування можна використовувати вище згадану програму. Але для її розуміння та роботи із нею необхідно знати великий перелік відповідних команд, що використовується в Maple. Для того, щоб полегшити роботу із даною програмою, зробити доступним користування



даною програмою без спеціальних знань щодо структури команд Maple 9 та покращити розуміння роботи досліджувальної математичної моделі, автором була розроблена програма для створення зручного віконного інтерфейсу (маплета) в середовищі математичної системи Maple 9. Для роботи із даними маплетами користувачу необхідно знати вид двохетапного деформування, матеріал заготовки, що виражається в параметрах моделі та натисненням на відповідні клавіші здійснити відповідні розрахунки ресурсу пластичності і побудувати відповідні графіки залежностей між ресурсами пластичності. Саме використання маплетів при комп'ютерній реалізації досліджувальної моделі в Maple 9 значно полегшує роботу користувача із цією моделлю.

Використовуючи елементи програмування в Maple 9, було розроблено маплет. Його роботу ми розглянемо далі. Даний маплет називається «Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні». Текст програми для створення цього маплета представлено далі в роботі, а вигляд вікна, що створюється відповідною програмою в середовищі Maple 9 — на рис. 3.4.

```
> restart;
with(Maplets[Elements]):
maplet := Maplet('onstartup' = 'A1',
Window['W1']('title' = "Змінювання ресурсу пластичності при двохетапному деформуванні", 'layout' = 'BL1'),
BoxLayout['BL1'](
BoxColumn(
BoxRow([
[Label("Введіть параметри для розрахунку", 'font' = Font("times", bold, 14))],
"Параметр  $\alpha$ [12]: ", TextField['TF1'](),
"Параметр n: ", TextField['TF2'](),
"Параметр I[12]: ", TextField['TF3'](),
"Ресурс пластичності на першому етапі  $\psi$ [1] (від 0 до 1): ", TextField['TF4']()),
[[Label("Натисніть на відповідні клавіші для проведення розрахунків:", 'font' = Font("times", bold, 14))],
```

```

Button("Загальна розрахункова формула",
Evaluate('TB1' = 'psi[2]=(psi[1]^n*(alpha[12]^n-
Iota[12])+sqrt(psi[1]^(2*n)*(Iota[12]^2-
1)+1))^(1/n)-psi[1]*alpha[12]')),
TextBox['TB1']('editable' = 'false', 2..20 ),
Button("Розрахункова формула для даних значень па-
раметрів: psi[2]:=", Evaluate('TB2' =
'simplify((psi[1]^TF2*(TF1^TF2-
-TF3)+sqrt(psi[1]^(2*TF2)*(TF3^2-1)+1))^(1/TF2)-
psi[1]*TF1)')),
TextBox['TB2']('editable' = 'false', 3..20 ),
Button("Значення залишкового ресурсу пластичності
на другому етапі деформування", Evaluate('TB3' =
'psi[2]=simplify((TF4^TF2*(TF1^TF2-
TF3)+sqrt(TF4^(2*TF2)*(TF3^2-1)+1))^(1/TF2)-
TF4*TF1)')),
TextBox['TB3']('editable' = 'false', 1..20 ]]),
BoxColumn(BoxRow(Plotter['PL1'](),
[Label("Побудова графіка залежності ресурсу плас-
тичності на другому етапі деформування
від уже використаного ресурсу пластичності на пер-
шому етапі деформування:",
'font' = Font("times", bold, 14)),
Label("Натисніть клавішу 'Побудова' для побудови
графіка залежності і клавішу
'Кінець' для завершення роботи та запису резуль-
татів цієї роботи:", 'font' = Font("times", bold,
14)),
[Button("Побудова", Evaluate('PL1' = 'plot(TB2,
psi[1] =
0..1,color=red,thickness=2,numpoints=500)')),
[Button("Кінець",
Shutdown(['TF1','TF2','TF3','TF4',
'TB3'])))]])),
Action['A1'](RunWindow('W1'))):
Maplets[Display](maplet);
["1.2", "0.5", "2.0", "0.6", "psi[2] = .2260574611" ]

```

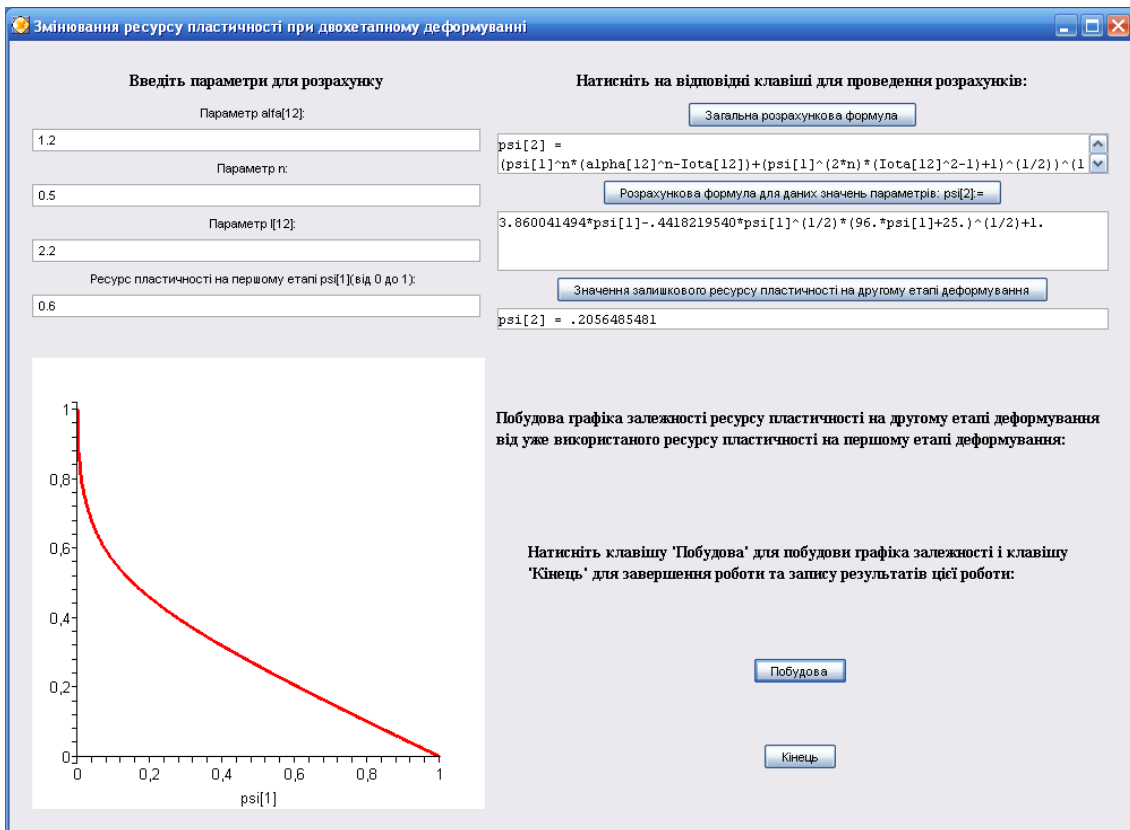


Рисунок 3.4 – Вигляд маплета для дослідження і роботи із математичною моделлю накопичення пошкоджень, створеного в середовищі математичної системи Maple 9

Для роботи даного маплета вводимо у відповідні його поля значення характеристичних параметрів математичної моделі. Потім натиснувши на клавішу «Загальна розрахункова формула», в текстовому полі, що розташований під клавішею, буде зображено аналітичний вираз математичної моделі. Натиснувши на клавішу «Розрахункова формула для заданих значень параметрів:  $\psi[2]=$ », на відповідному полі буде зображено вираз математичної моделі для відповідних значень її параметрів.

Натиснувши на клавішу «Значення залишкового ресурсу пластичності на другому етапі деформування», в відповідному текстовому полі буде зображено результат розрахунку. А при натисненні на клавішу «Побудова», в графічному полі маплета буде зображено залежності ресурсу пластичності на другому етапі від уже використаного ресурсу пластичності на першому етапі двоетапного деформування. В даному маплеті в одному вікні реалізовано розрахунок ресурсу пластичності та побудову залежності між ресурсами пластичності при

двохетапному деформуванні. Для закінчення роботи із даним маплетом необхідно натиснути на клавішу «Кінець», тоді даний маплет закриється, а в тексті програми запишеться результат розрахунку.

За допомогою створеного маплету, дослідження і робота із математичною моделлю в середовищі математичної системи Maple 9 будуть значно спрощені та доступними широкому колу користувачів.

### 3.3 Чисельне дослідження закономірності накопичення пошкоджень за допомогою математичної моделі при різних значеннях параметрів

Теоретичне та числове дослідження математичної моделі будемо проводити при змінні використаного ресурсу пластичності від 0% до 100%. Тобто будемо прослідковувати роботу математичної моделі при різних значеннях характеристичних коефіцієнтів.

Досліджуючи аналітичний вигляд моделі, що розглядається [91], [94], [95], можна відразу сказати, що параметр  $n$  не може дорівнювати нулю. Це пояснюється тим, що в досліджувальній математичній моделі параметр  $n$  знаходиться в знаменнику степеневого виразу. Тобто, якщо  $n$  буде дорівнювати нулю, то степеневий вираз  $1/n$  не буде мати змісту. Також, виходячи із аналітичного виразу досліджувальної моделі, значення параметра  $\alpha_{12}$  має бути більшим нуля, тобто не від'ємним, коли  $n$  має значення, яке є дробовим числом. Це пояснюється тим, що якщо значення  $\alpha_{12}$  буде від'ємним числом і  $n$  буде не цілим числом, то вираз  $\alpha_{12}^n$  буде набувати значень комплексних чисел, що нас не задовольняє.

При числовому дослідженні математичної моделі було виявлено елемент розриву функції, що відображає залежність між ресурсами. Так при значеннях характеристичних параметрів  $\alpha_{12} = 0,5$ ,  $n = -0,5$ ,  $I_{12} = 0,6$ , графік залежності між ресурсами буде мати розрив в точці, що відповідає приблизно 64% використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування (крива 2 на рис. 3.5). Тобто дана модель при цих значеннях параметрів показує, що співвідношення між ресурсами при двохетапному деформуванні буде тільки при змінні використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування від 64% до 100%.

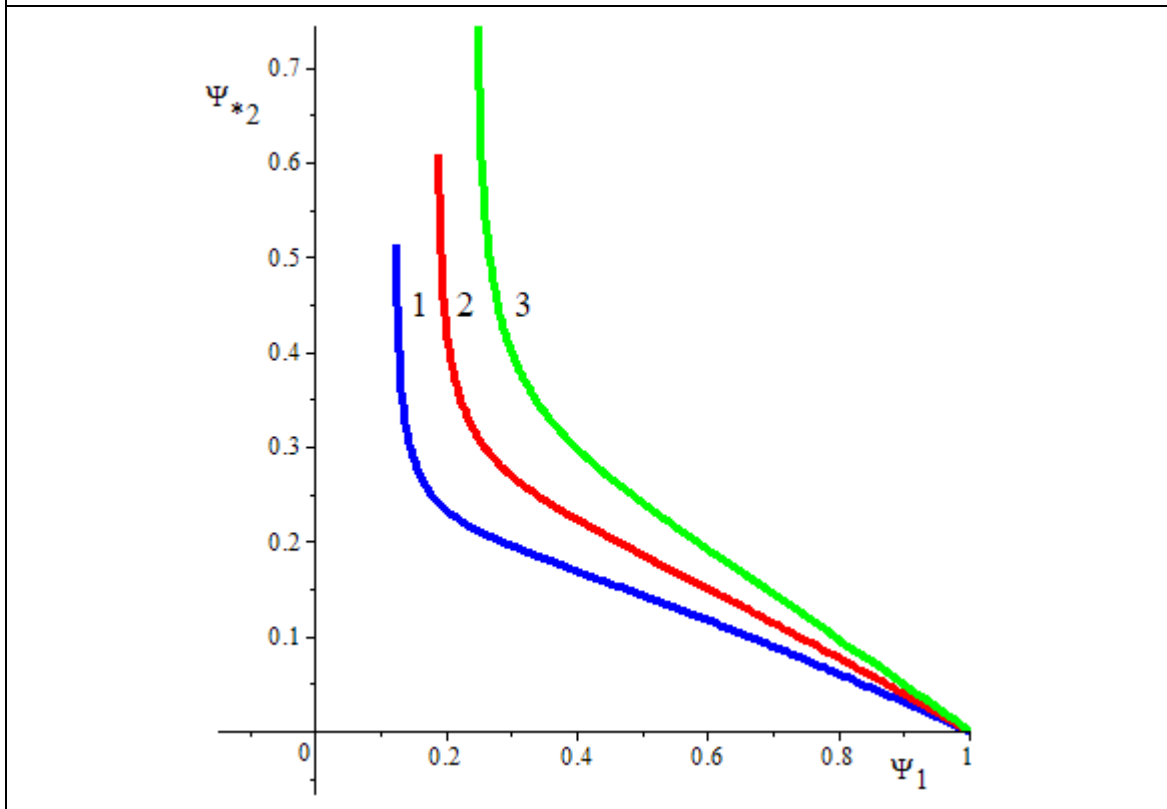
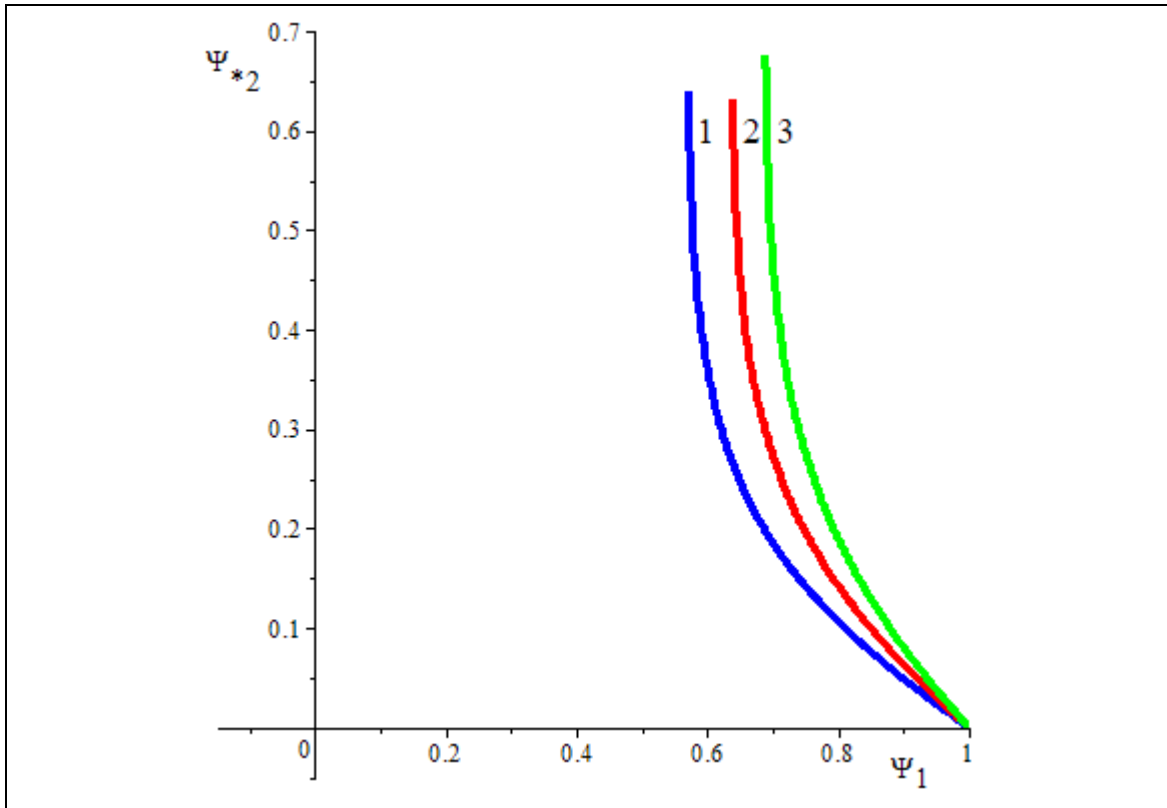


Рисунок 3.5 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $1 - \alpha_{12} = 0,4$ ;  $n = -0,4$ ;  
 $2 - \alpha_{12} = 0,5$ ;  $n = -0,5$ ;  $3 - \alpha_{12} = 0,6$ ;  $n = -0,6$ ;  
а  $I_{12} = 0,6$  та  $I_{12} = 0,9$  відповідно

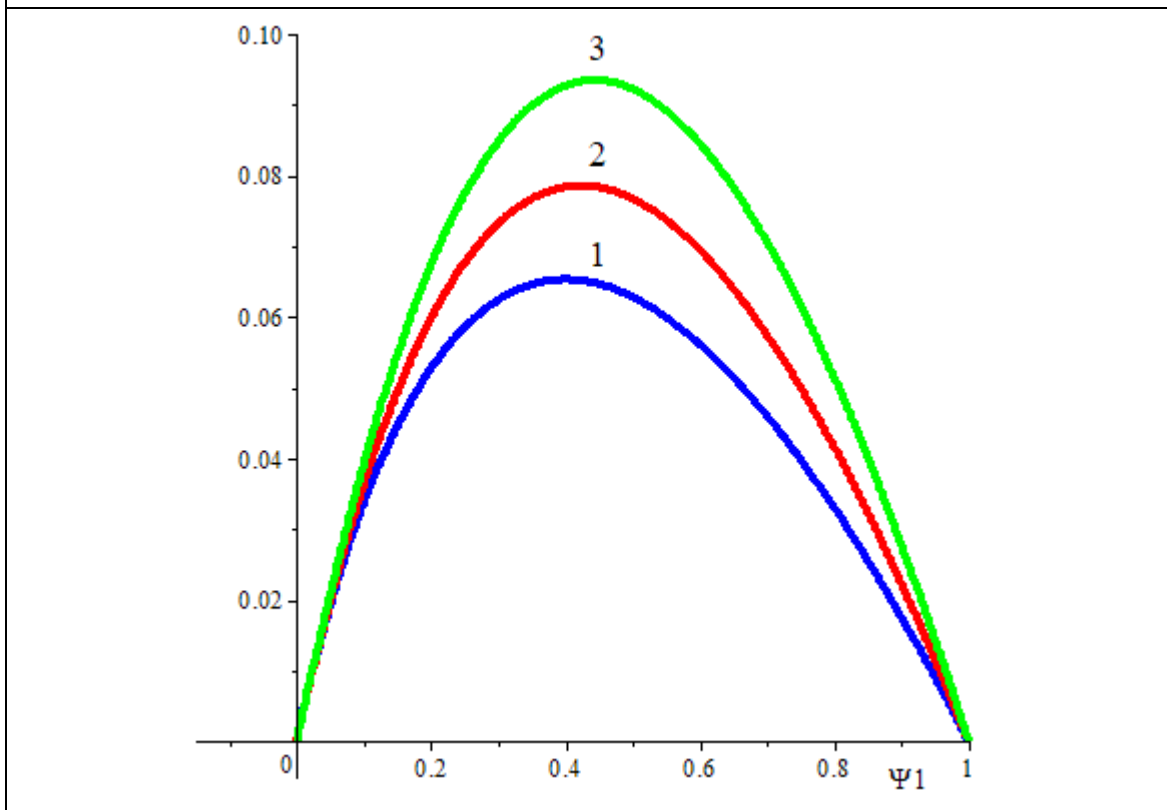
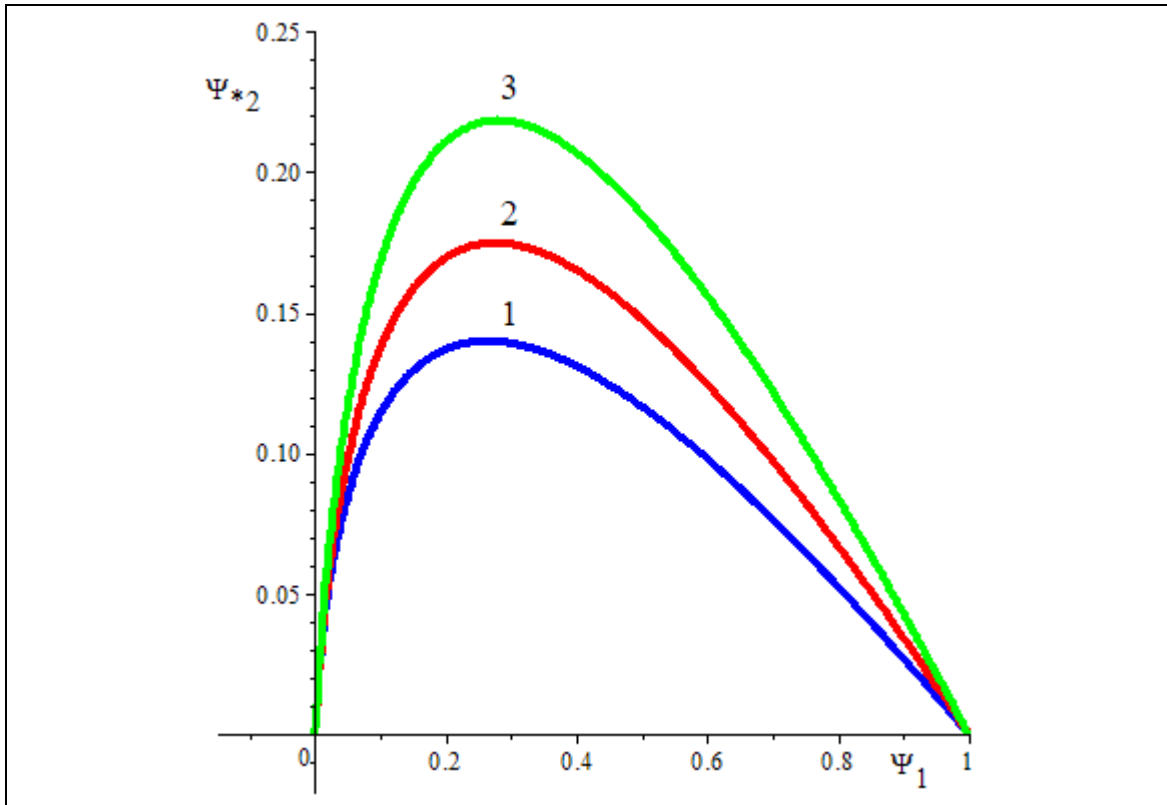


Рисунок 3.6 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності при двохетапному деформуванні, коли 1 –  $\alpha_{12} = 0,4$ ;  $n = -0,4$ ; 2 –  $\alpha_{12} = 0,5$ ;  $n = -0,5$ ; 3 –  $\alpha_{12} = 0,6$ ;  $n = -0,6$ ; а  $I_{12} = 1$  та  $I_{12} = 1,5$  відповідно

При значенні використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування від 0% до 64%, математична модель буде набувати комплексних значень. Зменшення та збільшення параметрів  $\alpha_{12}$  та  $n$  на 0,1 відповідно змінює область визначення моделі (криві 2 та 3 на рис. 3.5)

При збільшенні значення параметра  $I_{12}$  до 0,9, область роботи моделі збільшиться і буде сягати значень від 19% до 100% використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування (крива 2 на рис. 3.5). Коли  $I_{12}$  набуде значення одиниці, то графік математичної моделі не матиме розривів і набуде майже параболічного вигляду, тобто параболи, оберненої вітками вниз, із екстремумом при 28% використаного ресурсу. При цих значеннях параметрів найбільшим значення ресурсу пластичності на другому етапі деформування буде сягати 17,4% і при збільшенні параметра  $I_{12}$  до значення 2,2, ресурс пластичності на другому етапі двохетапного деформування зменшується до 4,73%. Але вигляд графічної залежності між ресурсами уже має більшу схожість до параболи, оберненої вітками вниз (рис. 3.6).

Математична модель також досліджувалась при незмінних значеннях параметрів  $\alpha_{12}$  та  $n$ , які набули таких значень:  $\alpha_{12} = -0,5$ ,  $n = 2$ . Змінні піддавали параметр  $I_{12}$  (рис. 3.7 – 3.9). Так, при  $I_{12} = 2$ , графік залежності між ресурсами пластичності буде мати вигляд схожий до параболи, але значення моделі коливалися в діапазоні від 100% до 107% (рис. 3.7). Тобто ресурс на другому етапі пластичного деформування при таких значеннях параметрів може сягати значення більше 100%. При значенні параметра  $I_{12} = -0,1$ , графік ресурсу пластичності поступово зростає від 100% до 140%, а потім різко спадає і при значенні 115% обривається. В цій точці модель показує, що при використанні ресурсу на першому етапі на 100%, на другому етапі двохетапного деформування можливо використати 115% ресурсу. І при зменшенні значення  $I_{12}$  до -10, стрімкість збільшення ресурсу на другому етапі двохетапного деформування зростає до значення 500% при 100% використаного ресурсу на першому етапі деформування (рис. 3.8).

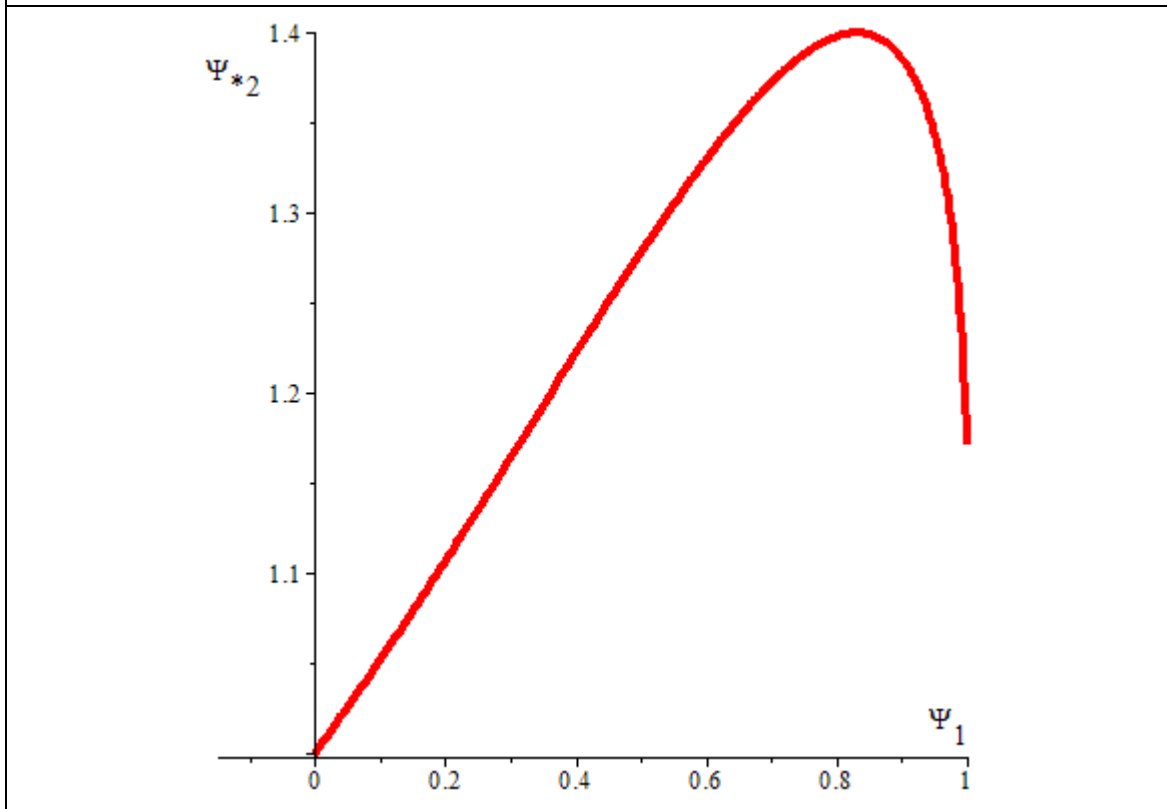
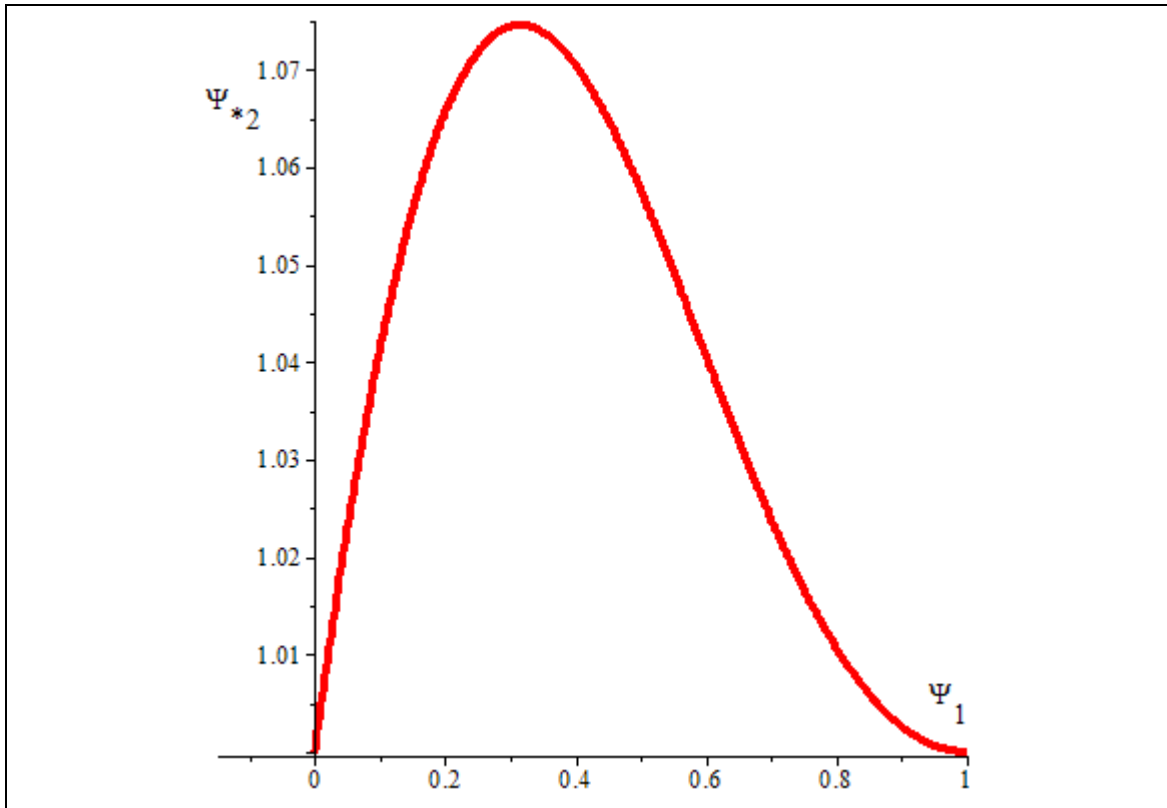


Рисунок 3.7 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності під час двохетапного деформування, коли параметри  $\alpha_{12} = -0,5$ ;  $n = 2$ ; а  $I_{12}$ :  $I_{12} = 2$  та  $I_{12} = -0,1$  відповідно



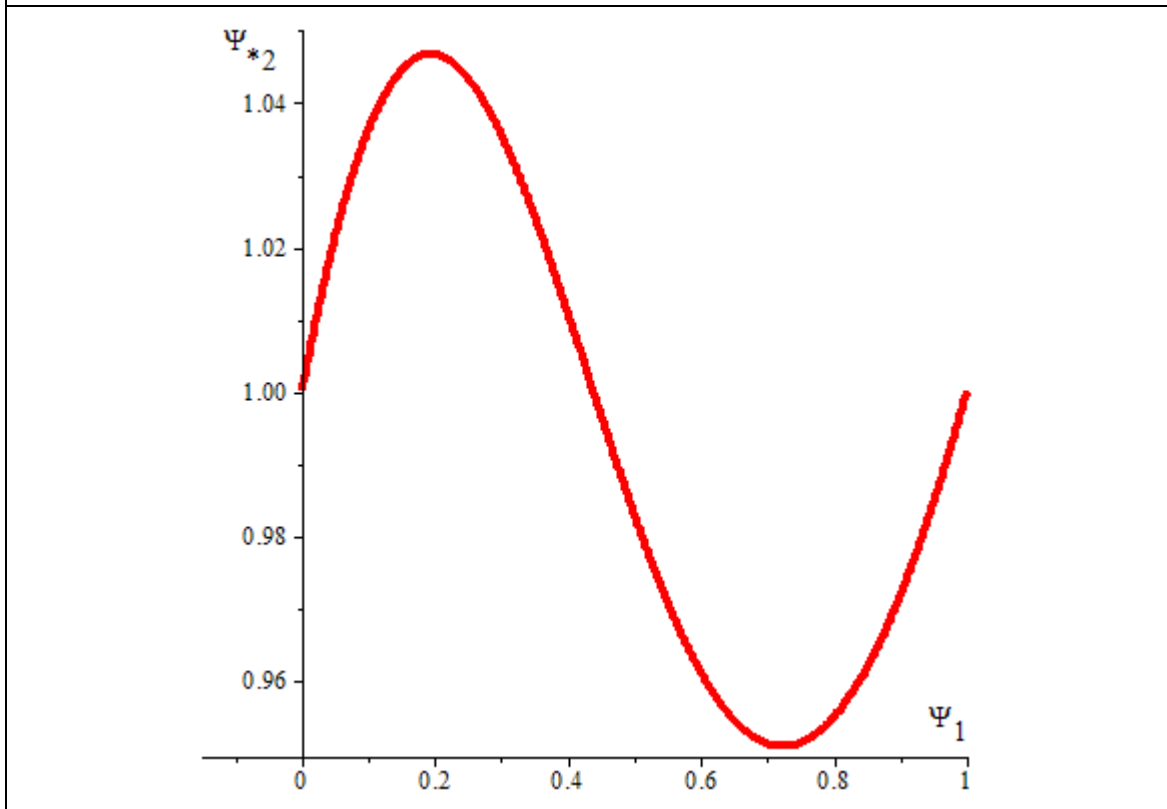
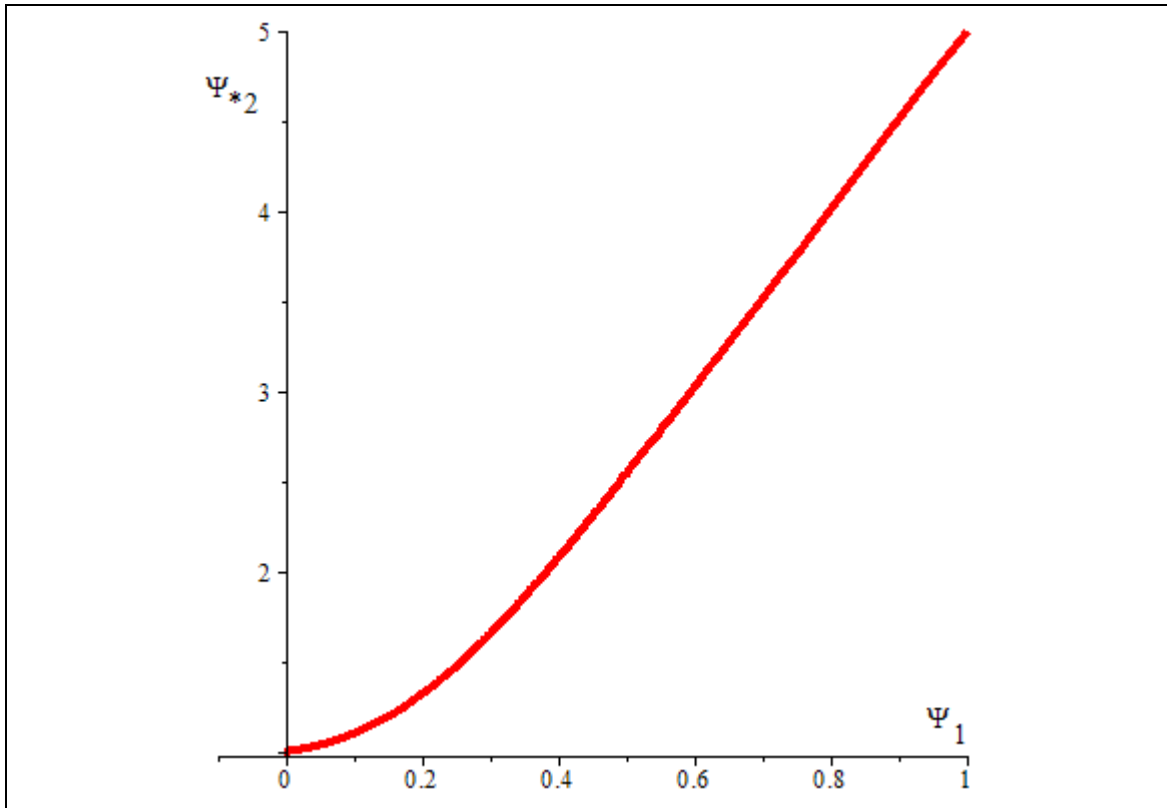


Рисунок 3.8 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності під час двохетапного деформування, коли параметри  $\alpha_{12} = -0,5$ ;  $n = 2$ ; а  $I_{12}$ :  $I_{12} = -10$  та  $I_{12} = 3$  відповідно

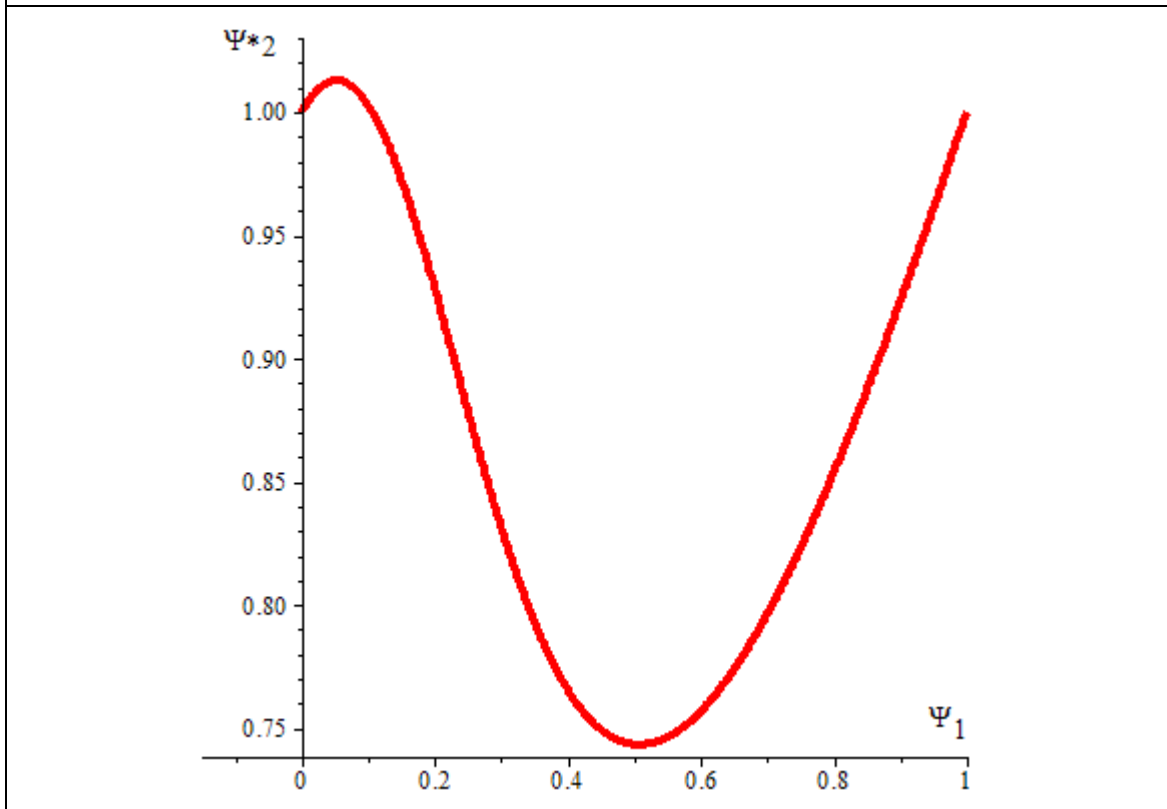
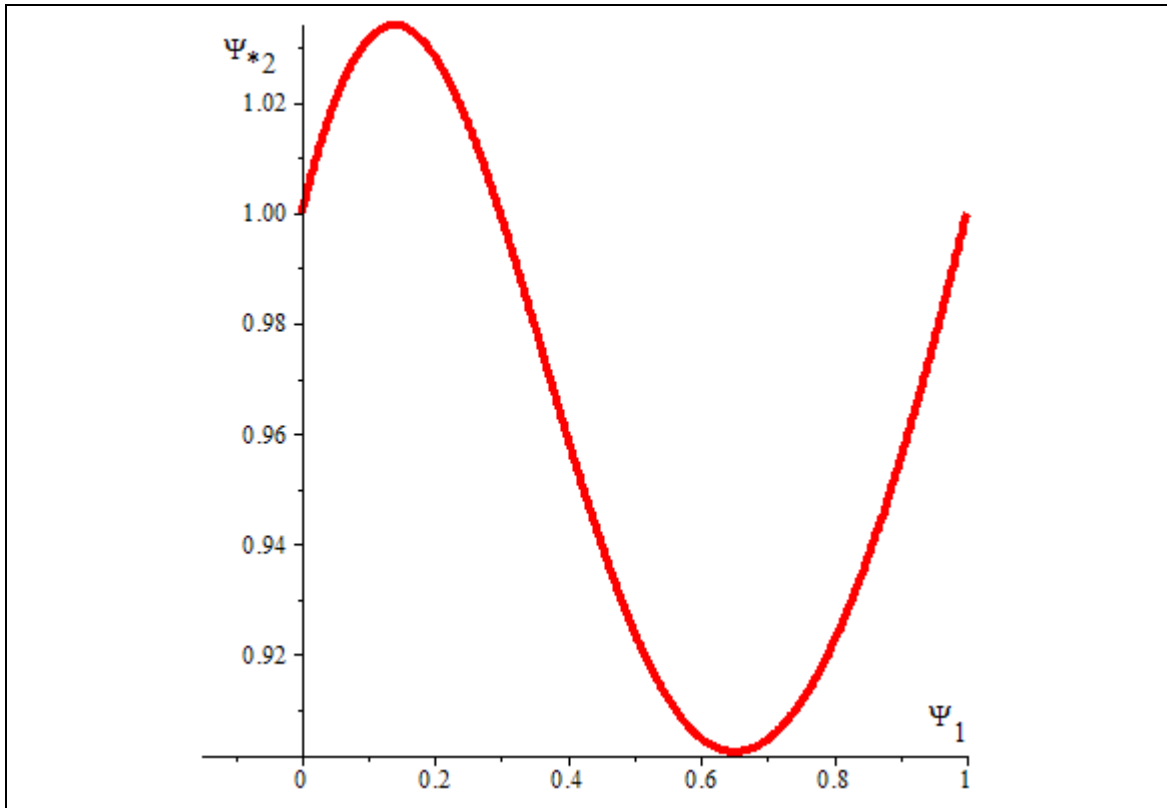


Рисунок 3.9 – Графіки залежностей між ресурсами пластичності під час двохетапного деформування, коли параметри  $\alpha_{12} = -0,5$ ;  $n = 2$ ; а  $I_{12}$ :  $I_{12} = 4$  та  $I_{12} = 10$  відповідно

При  $I_{12} = 3$ , графік залежності між ресурсами набуває вигляду кривої коливання навколо значення 100% (рис. 3.8). Відхилення даної кривої від 100% ресурсу на другому етапі двохетапного деформування майже однакове. А при значенні параметра  $I_{12} = 4$ , крива залежності між ресурсами також має вигляд кривої коливання, але більша її частина розташована в межах значень менших за 100% (рис. 3.9).

Розглянуто також випадок, коли параметр моделі  $\alpha_{12} = 0$  і є постійним (рис. 3.10 – 3.12). Так при значеннях параметрів  $n = 2$  та  $I_{12} = 3$ , залежність між ресурсами є майже прямопропорційною (опуклий вигляд кривої) та не перевищує 100% (рис. 3.10).

Але коли параметри моделі набувають значення  $n = 5$  та  $I_{12} = -0,5$ , то можна прослідкувати, що при змінні використаного ресурсу на першому етапі від 0% до 100%, ресурс на другому етапі двохетапного деформування спочатку плавно збільшується від 100%, далі стрибкоподібно досягає значення 102,5% і потім різко спадає знову до 100% при 100% використаного ресурсу (рис. 3.10). При значенні параметра  $n = 0,5$  графік даної моделі набуває вигляду параболи, що розташована вітками вниз, хоча при цьому значення ресурсу пластичності на другому етапі двохетапного деформування перевищують значення 100% (рис. 3.11).

При  $\alpha_{12} = 0$ ,  $n = 0,5$ ,  $I_{12} = 0$ , залежність між ресурсами прямо пропорційна і спадна. Але при збільшенні параметра  $n$  ця залежність стає випуклою, а при зменшенні параметра  $n$  до нуля, залежність між ресурсами є увігнутою, але при цьому значення моделі не виходить за межі 100% (рис. 3.11 – 3.12).

Математична модель також досліджувалась при постійному значенні параметра  $I_{12} = 0,5$  (рис. 3.13 – 3.16). Так, при  $\alpha_{12} = 0,5$ ,  $n = 0,1$ ,  $\psi_1 = 0$ , ресурс на другому етапі двохетапного деформування стрибкоподібно зростає до 280%, а потім поступово спадає до нуля (рис. 3.13). При збільшенні значення параметра  $I_{12}$  до 5, стрибкоподібність збільшення  $\psi_{*2}$  зростає (рис. 3.13). Якщо при цьому ще збільшити значення параметра  $n$  від 0,1 до 0,6, то стрибкоподібність зростання ресурсу та різкість його зростання зменшиться (рис. 3.14). А от, коли  $n$  досягне значення одиниці, крива залежності між ресурсами буде майже пропорційною і значення математичної моделі не перевищуватимуть значення одиниці (100%) (рис. 3.14).

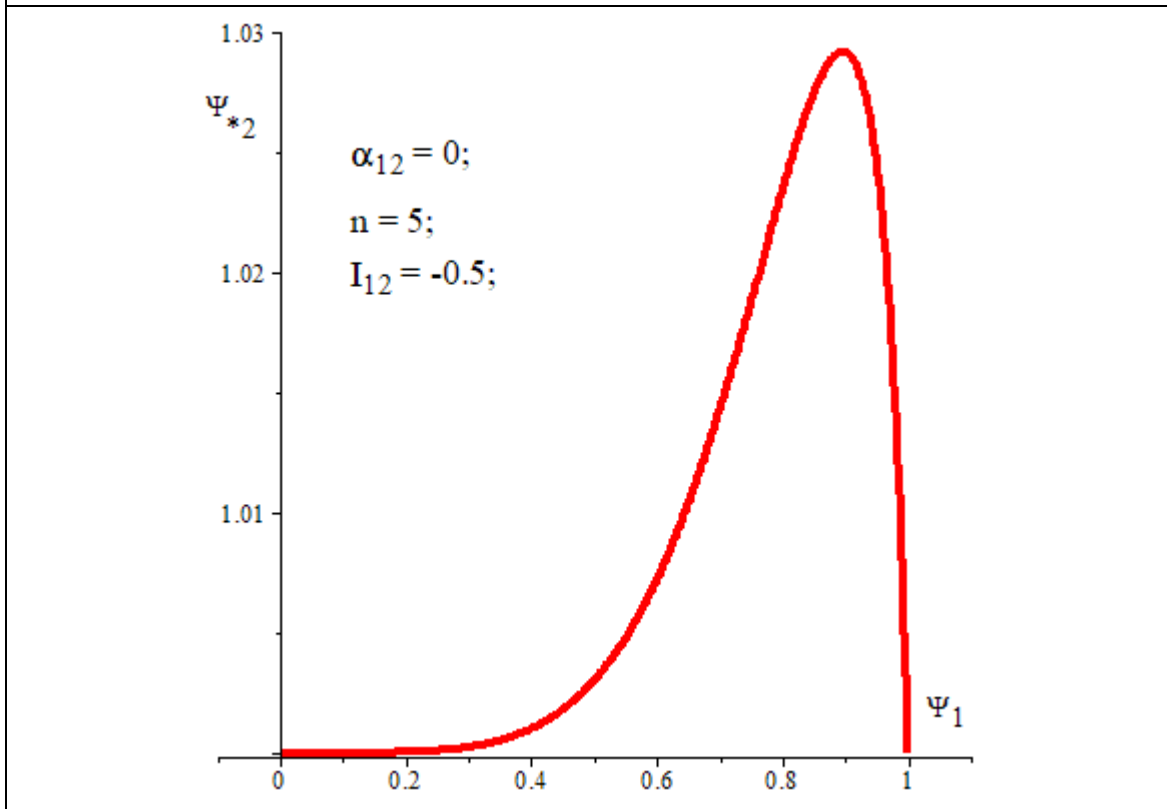
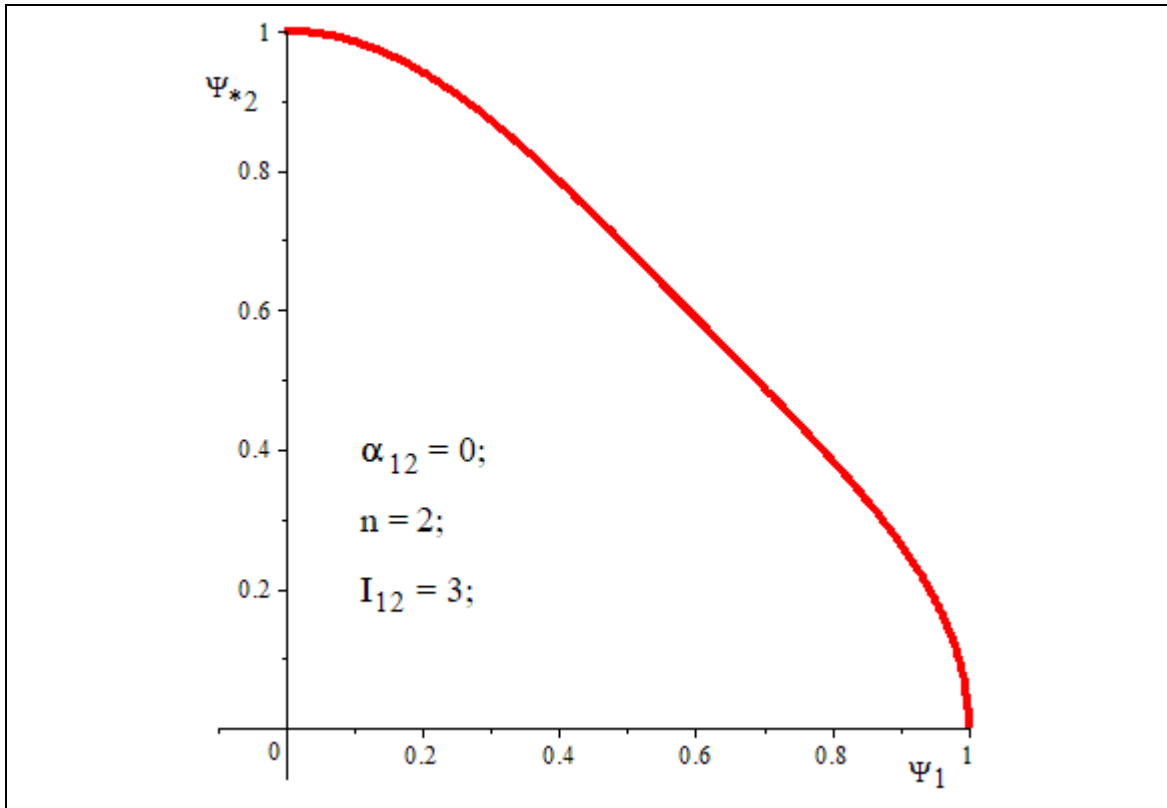


Рисунок 3.10 – Графіки залежностей ресурсів пластичності під час двохетапного деформування, коли  $\alpha_{12} = 0$  та є постійним, а  $I_{12}$  і  $n$ :  $n = 2$ ,  $I_{12} = 3$  та  $n = 5$ ,  $I_{12} = -0,5$  відповідно

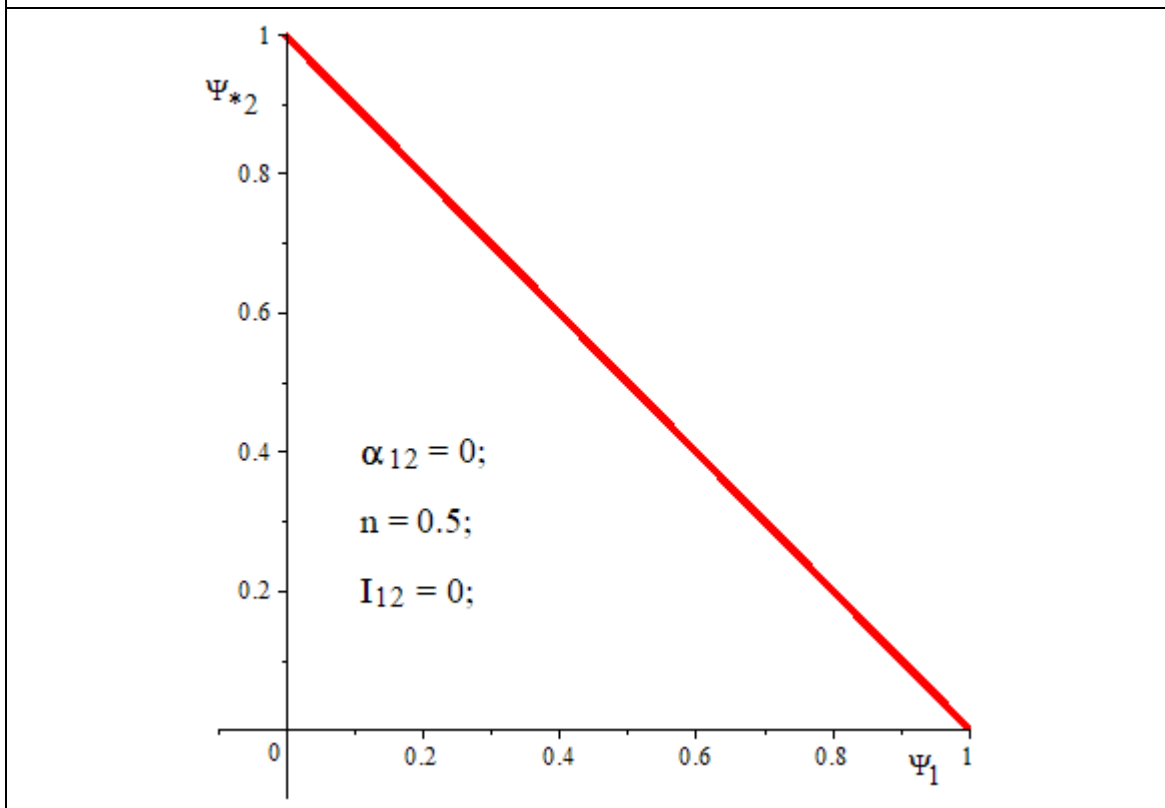
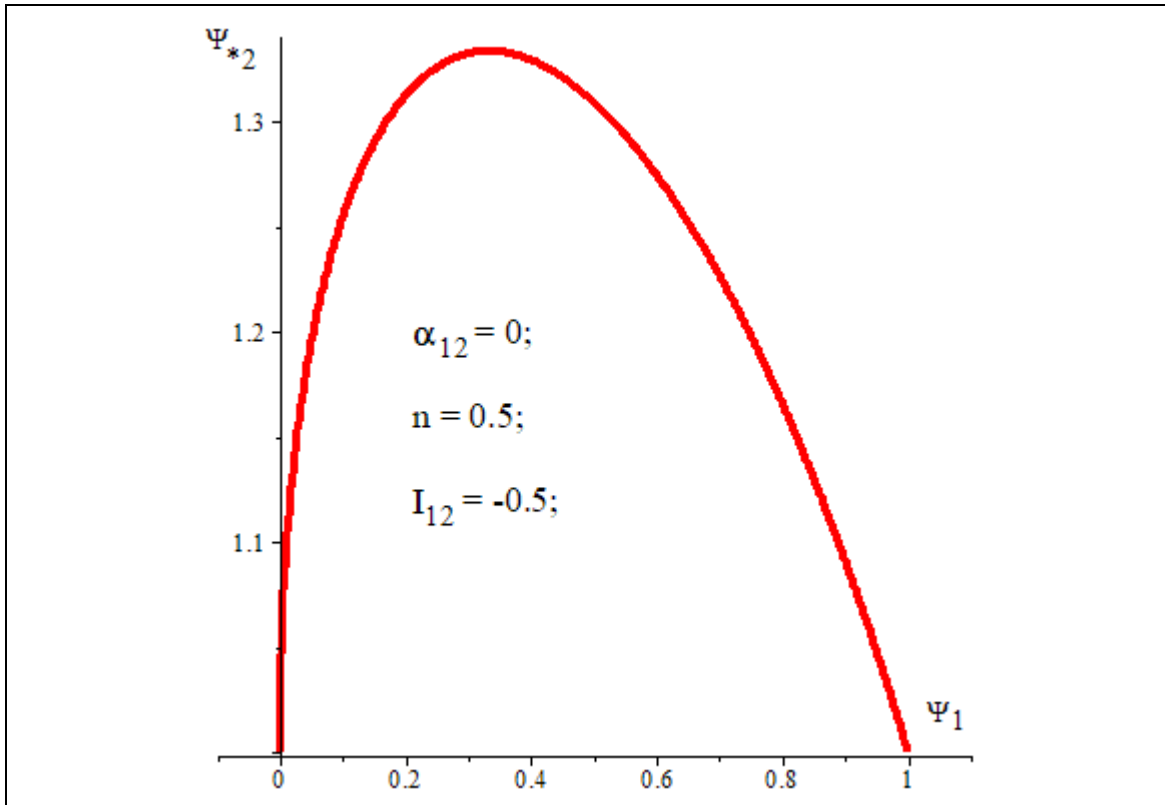


Рисунок 3.11 – Графіки залежностей ресурсів пластичності під час двохетапного деформування, коли  $\alpha_{12} = 0$  та є постійним, а  $I_{12}$  і  $n$ :  $n = 0,5$ ,  $I_{12} = -0,5$  та  $n = 0,5$ ,  $I_{12} = 0$  відповідно

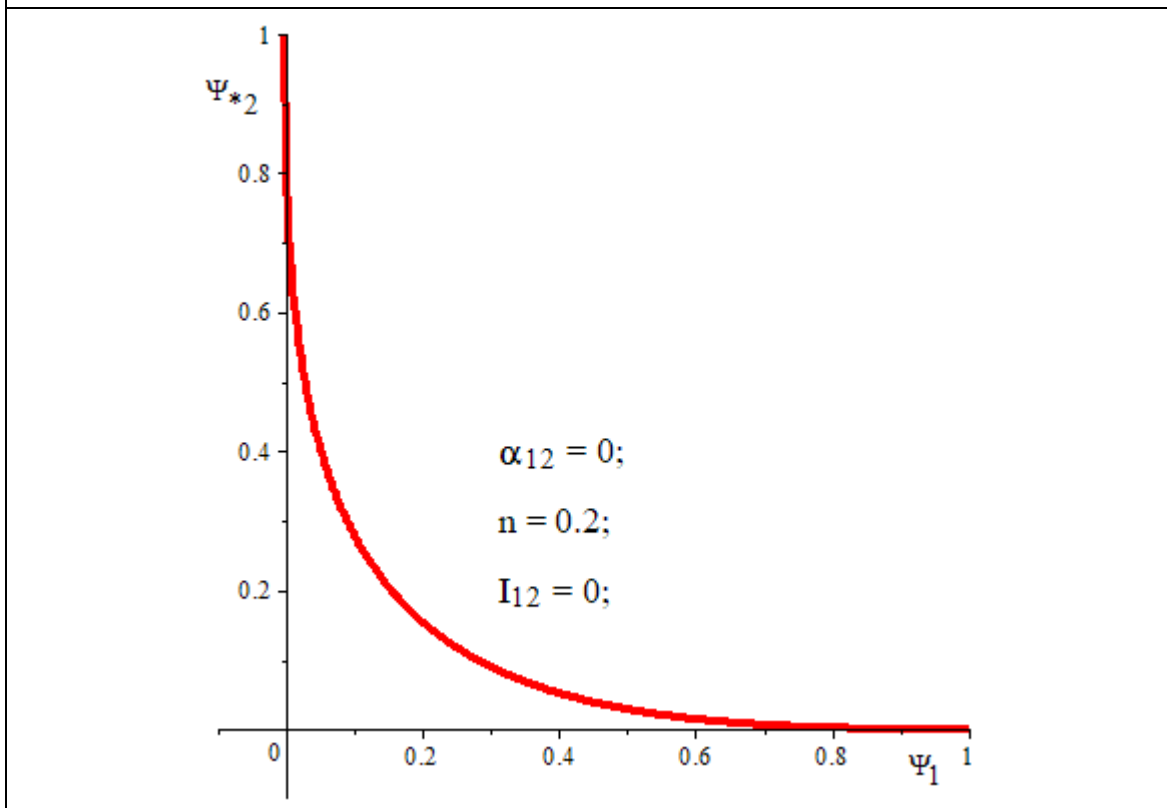
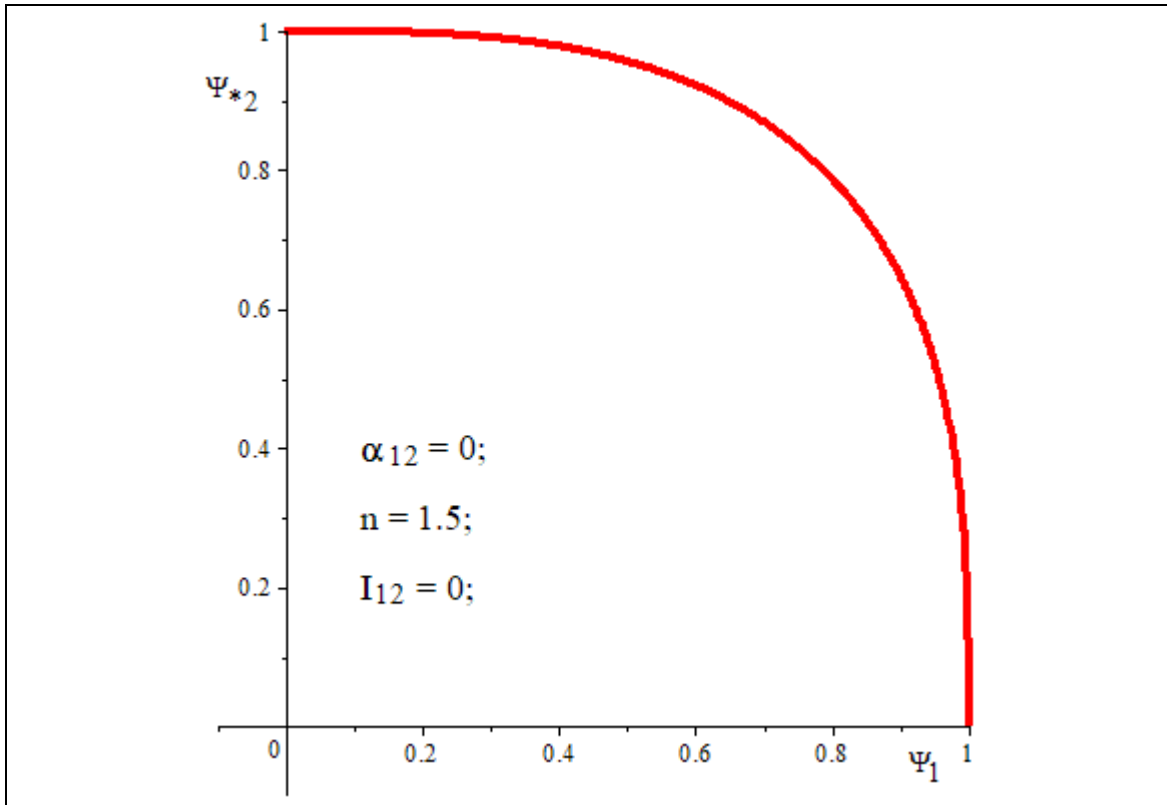


Рисунок 3.12 – Графіки залежностей ресурсів пластичності під час двохетапного деформування, коли  $\alpha_{12} = 0$  та є постійним, а  $I_{12}$  і  $n$ :  $n = 1,5$ ,  $I_{12} = 0$  та  $n = 0,2$ ,  $I_{12} = 0$  відповідно

При значенні параметрів  $\alpha_{12} = 5$ ,  $n = 5$ , крива залежності між ресурсами різко спадає і при 50% використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування, значення моделі прямує до нуля (рис. 3.15). При змінні  $\alpha_{12}$  від 5 до 10, стрімкість спаду графіка зростає (рис. 3.15). Але при значенні  $\alpha_{12} = 1$ , ця залежність стає прямо пропорційною (рис. 3.16).

Математична модель також досліджувалася при сталому значенні параметра  $\alpha_{12}$ , яке дорівнює 5 (рис. 3.17 – 3.20). Так, при  $I_{12} = -5$ ,  $n = 5$ , крива залежності між ресурсами різко спадає і прямує до нуля (рис. 3.17). А при значеннях параметрів  $I_{12} = 5$ ,  $n = 1,2$ , стрімкість спаду зменшується і графік має вигляд увігнутої кривої (рис. 3.17). Якщо при цьому значення  $I_{12}$  змінити від 5 до 0,2, то графік набуде майже прямолінійного вигляду (рис. 3.18).

Але коли параметр  $I_{12} = -0,7$ , то тоді значення моделі різко спадуть від 100% до 84% і потім будуть коливатися навколо значення 85% (рис. 3.18). Коли ж значення  $I_{12}$  зменшити до значення -0,9, то графік спочатку різко буде спадати до значення моделі 87%, а потім різко зростати і досягати значення 105%. При зменшенні  $I_{12}$  до -2, стрімкість зростання графіка зростає (рис. 3.19). Але якщо при цьому значення параметра  $n$  змінити від 1,2 до 1,5, то функція знову буде різко спадати до 68% ресурсу на другому етапі двохетапного деформування, а потім різко зростати і досягати значення 114% (рис. 3.20).

Виходячи із результатів теоретичного дослідження математичної моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах при двохетапному деформуванні для різних значень параметрів моделі, можна зробити висновок, що дана математична модель показує не тільки значення від 0% до 100% ресурсу для другого етапу деформування, але й перевищення ресурсу за межі 100%. Це пояснюється тим, що при перевищенні значень ресурсу за 100% дана математична модель ще працює.

Практично та теоретично, виходячи із особливостей проведення пластичного холодного деформування, при двохетапному деформуванні значення параметра  $\alpha_{12}$  змінюється від нуля до нескінченості. Тобто значення параметра  $\alpha_{12}$  від'ємним не може бути.

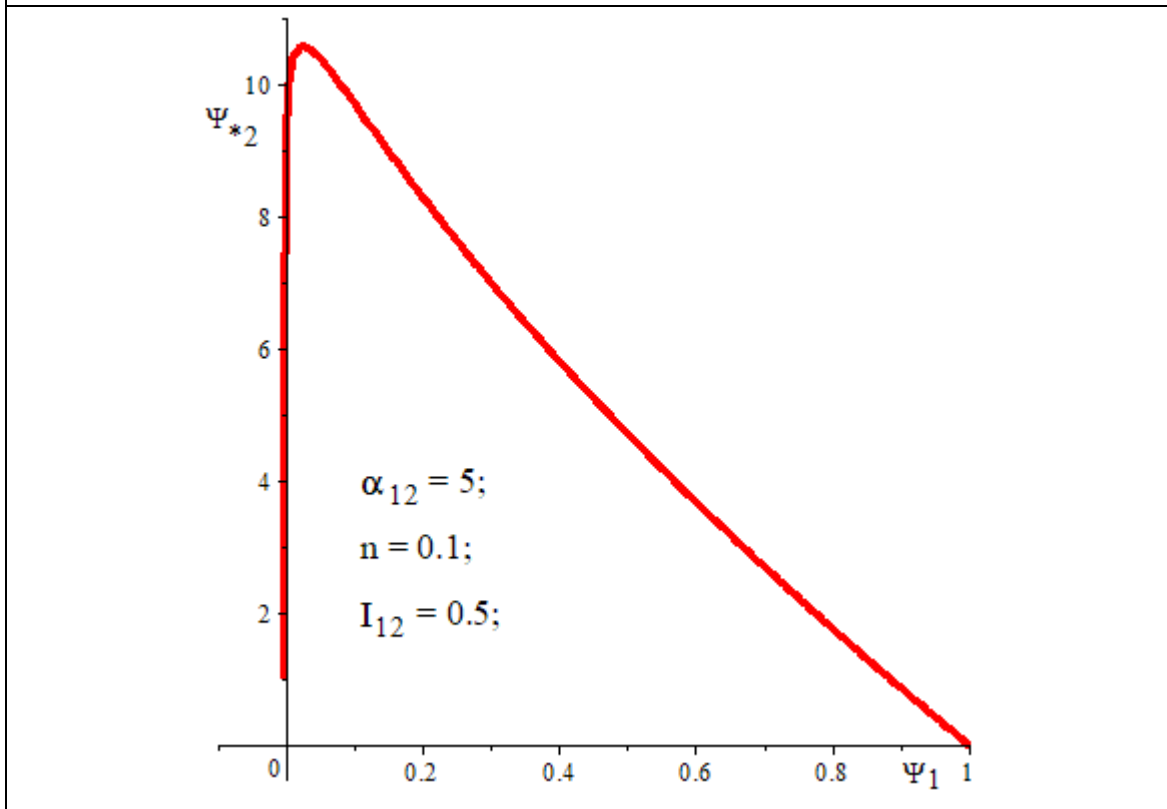
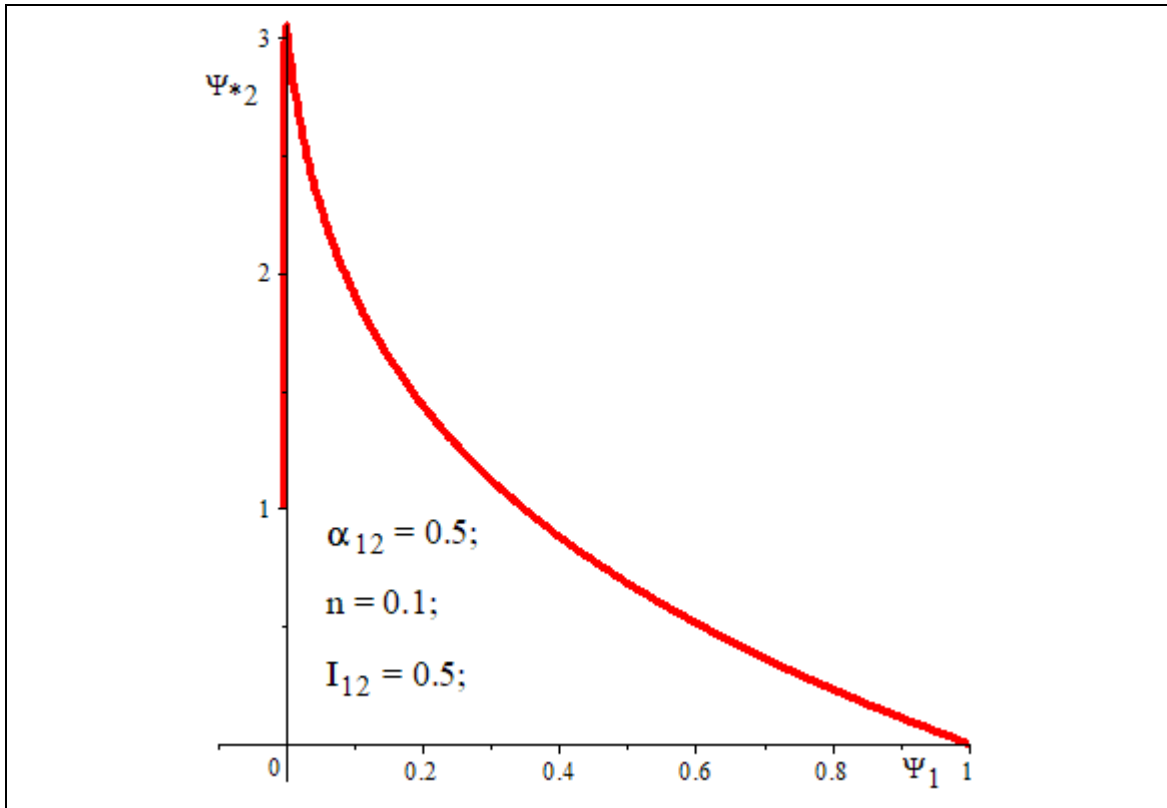


Рисунок 3.13 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $I_{12} = 0,5$  та є постійним, а  $\alpha_{12}$  та  $n$ :  $\alpha_{12} = 0,5$ ,  $n = 0,1$  та  $\alpha_{12} = 5$ ,  $n = 0,1$  відповідно



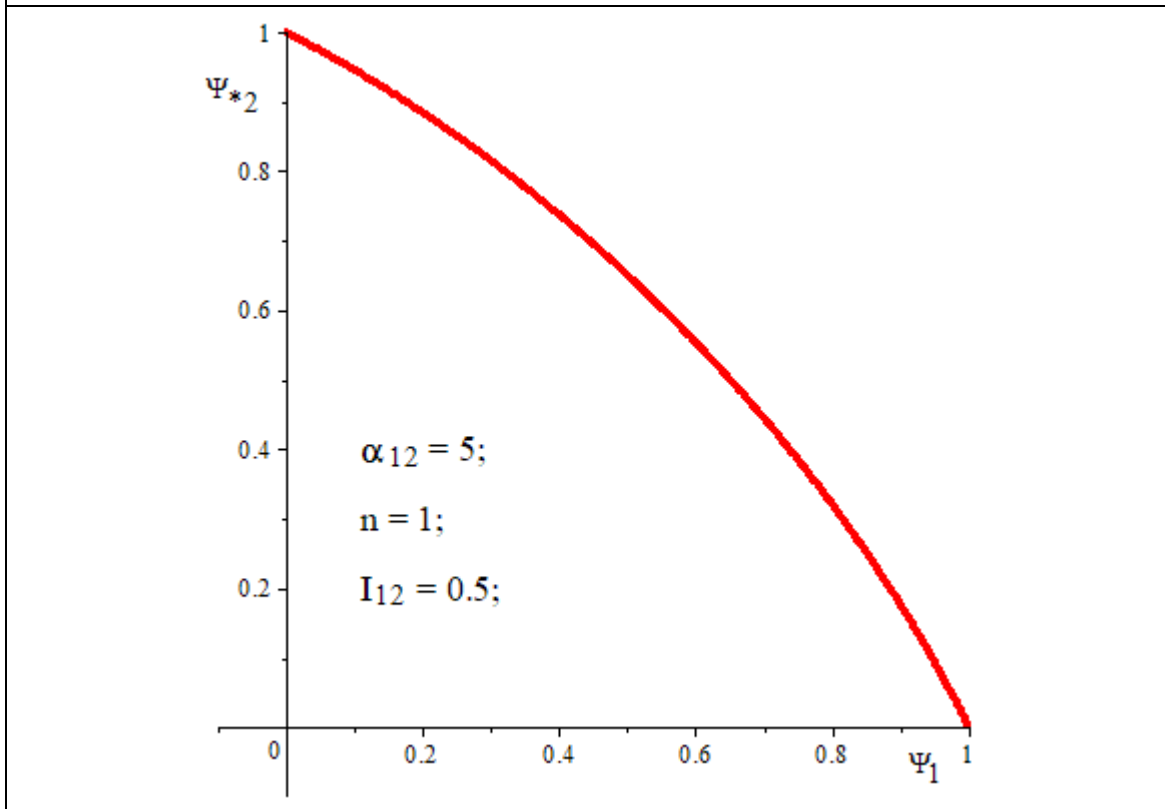
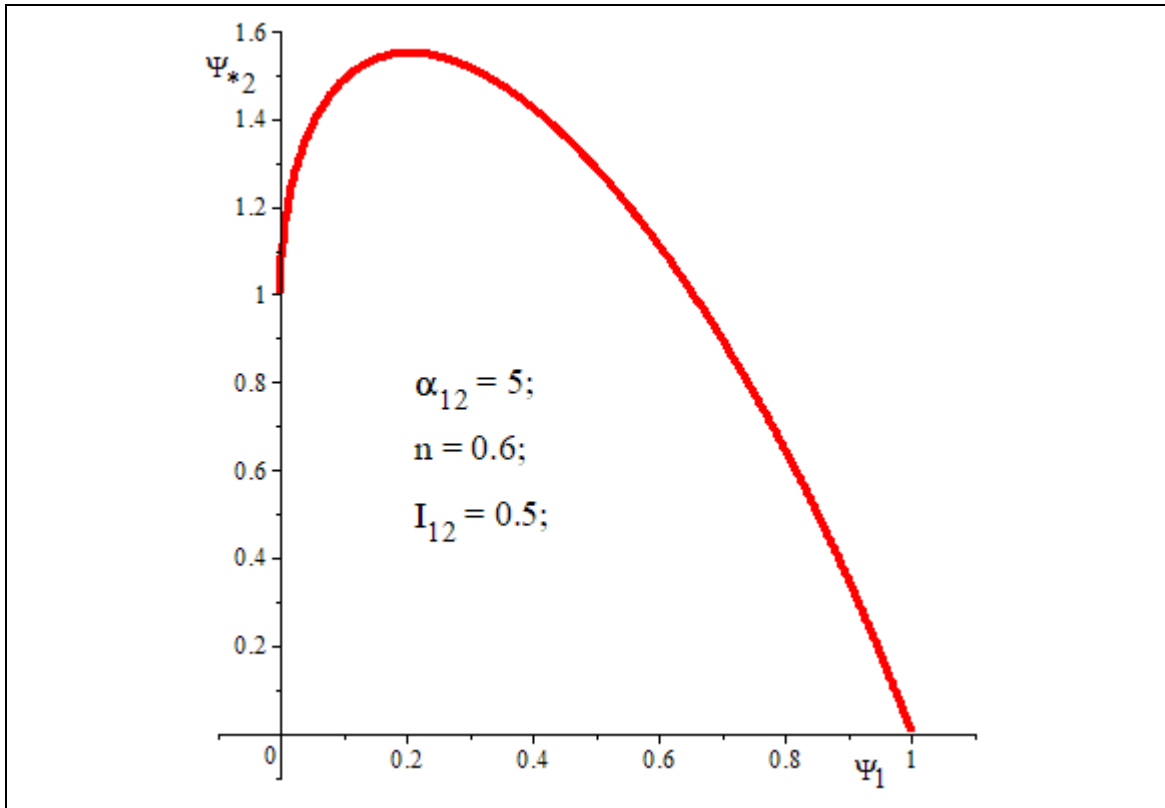


Рисунок 3.14 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $I_{12} = 0,5$  та є постійним, а  $\alpha_{12}$  та  $n$ :  $\alpha_{12} = 5, n = 0,6$  та  $\alpha_{12} = 5, n = 1$  відповідно

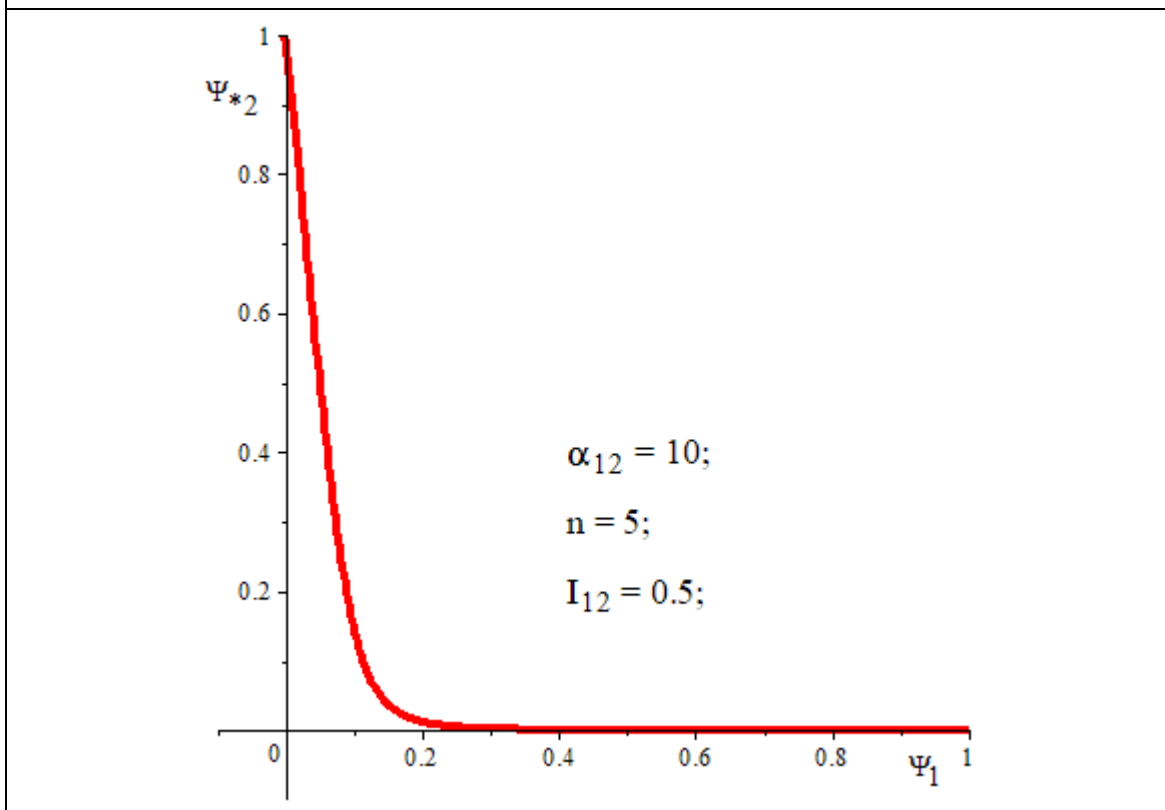
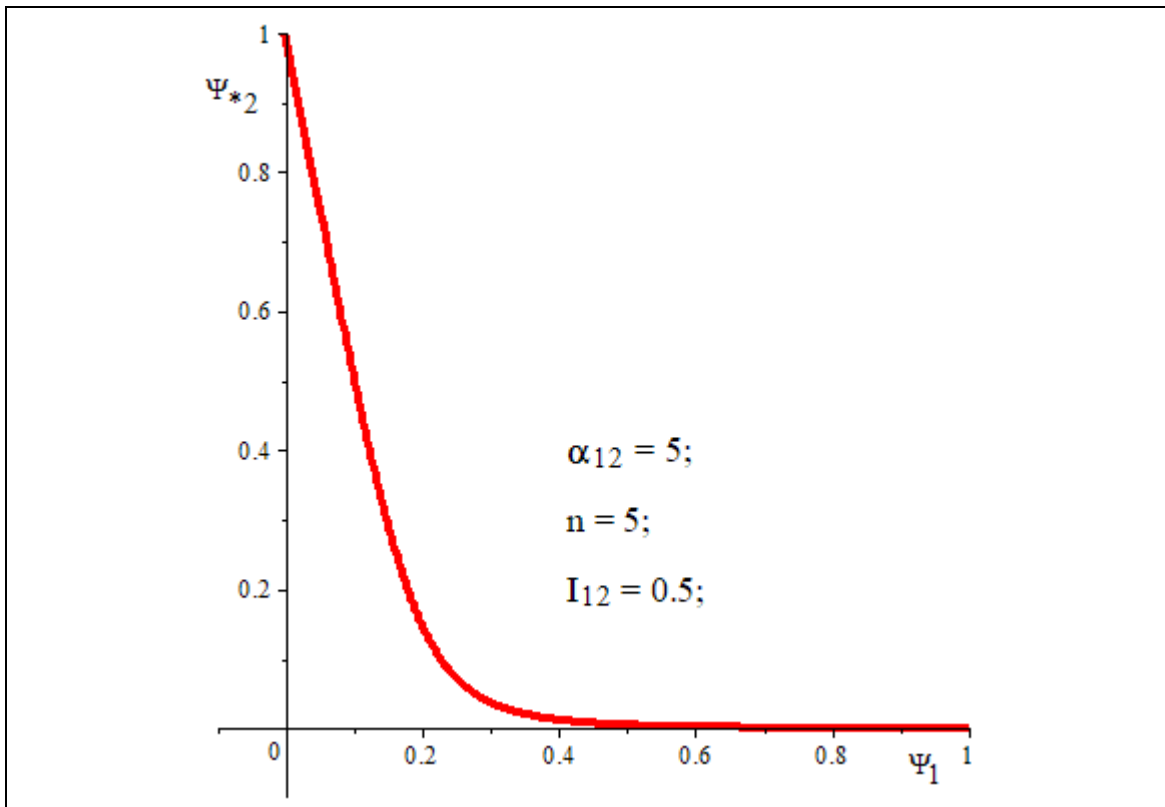


Рисунок 3.15 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $I_{12} = 0,5$  та є постійним, а  $\alpha_{12}$  та  $n$ :  $\alpha_{12} = 5, n = 5$  та  $\alpha_{12} = 10, n = 5$  відповідно

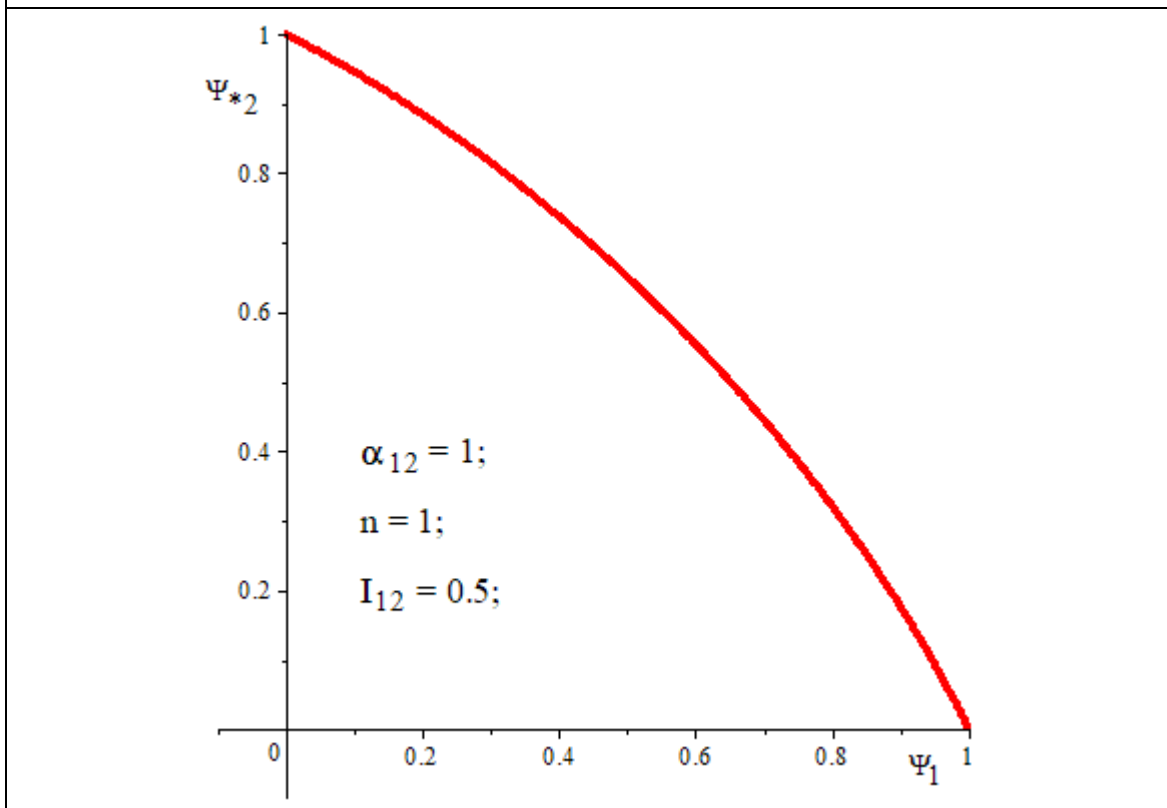
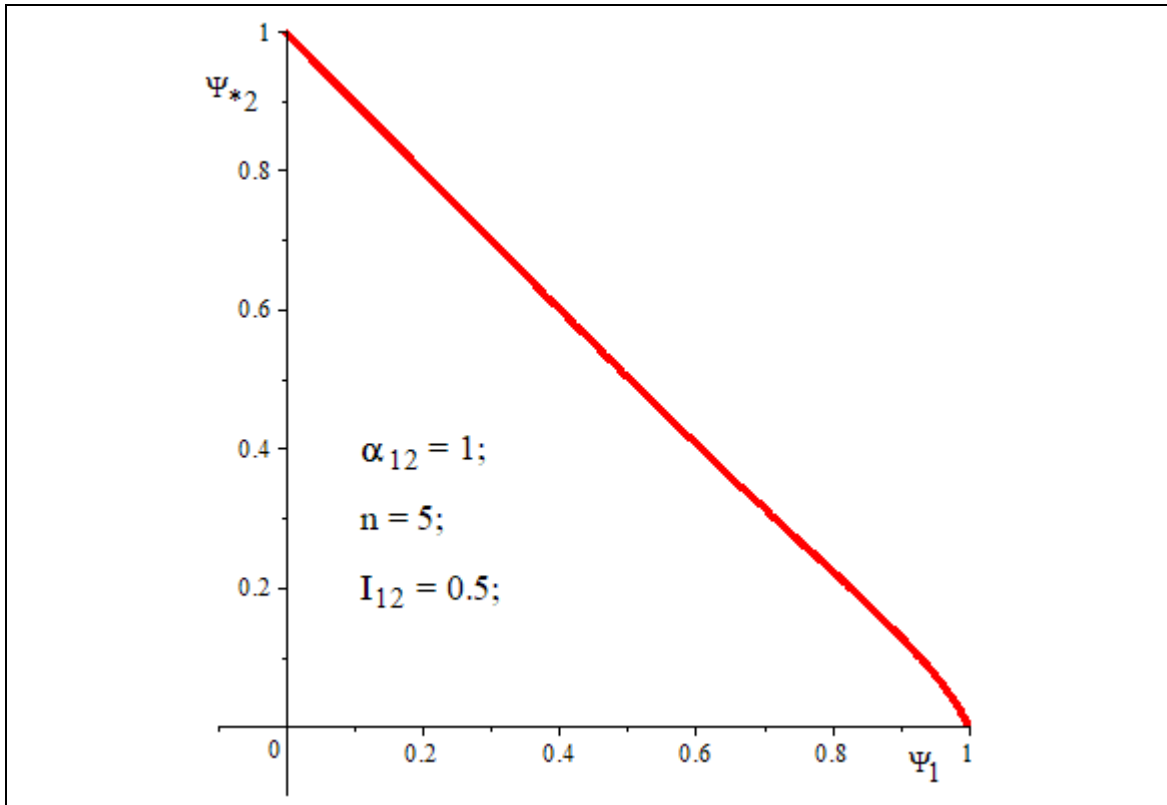


Рисунок 3.16 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двоетапному деформуванні, коли  $I_{12} = 0,5$  та є постійним, а  $\alpha_{12}$  та  $n$ :  $\alpha_{12} = 1, n = 5$  та  $\alpha_{12} = 1, n = 1$  відповідно

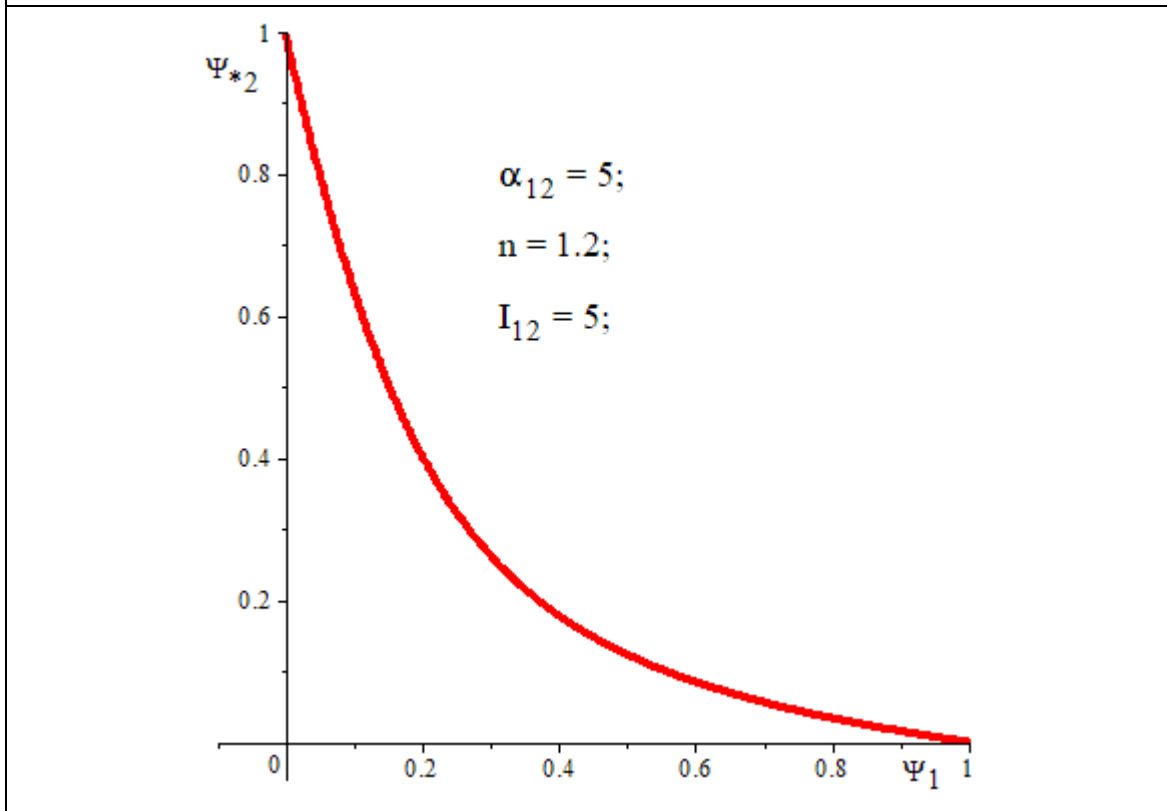
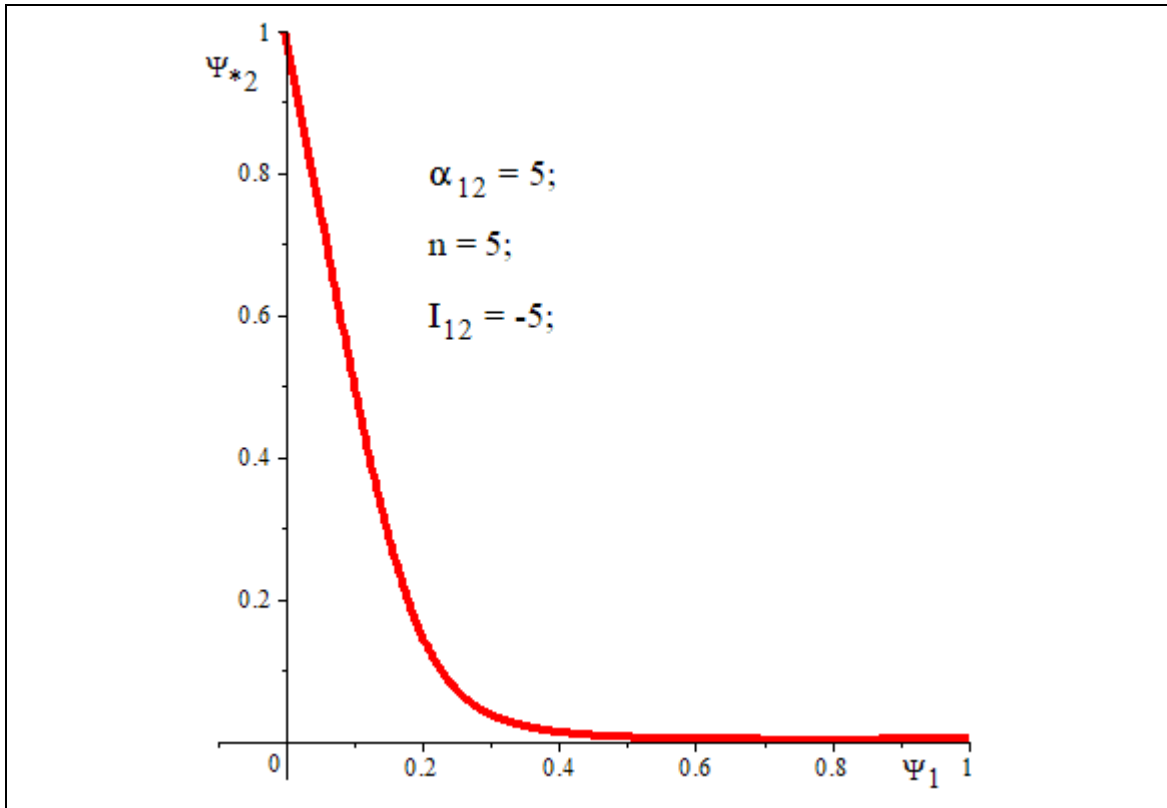


Рисунок 3.17 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $\alpha_{12} = 5$  та є постійним, а  $I_{12}$  та  $n$ :  $n = 5$ ,  $I_{12} = -5$  та  $n = 1,2$ ,  $I_{12} = 5$  відповідно

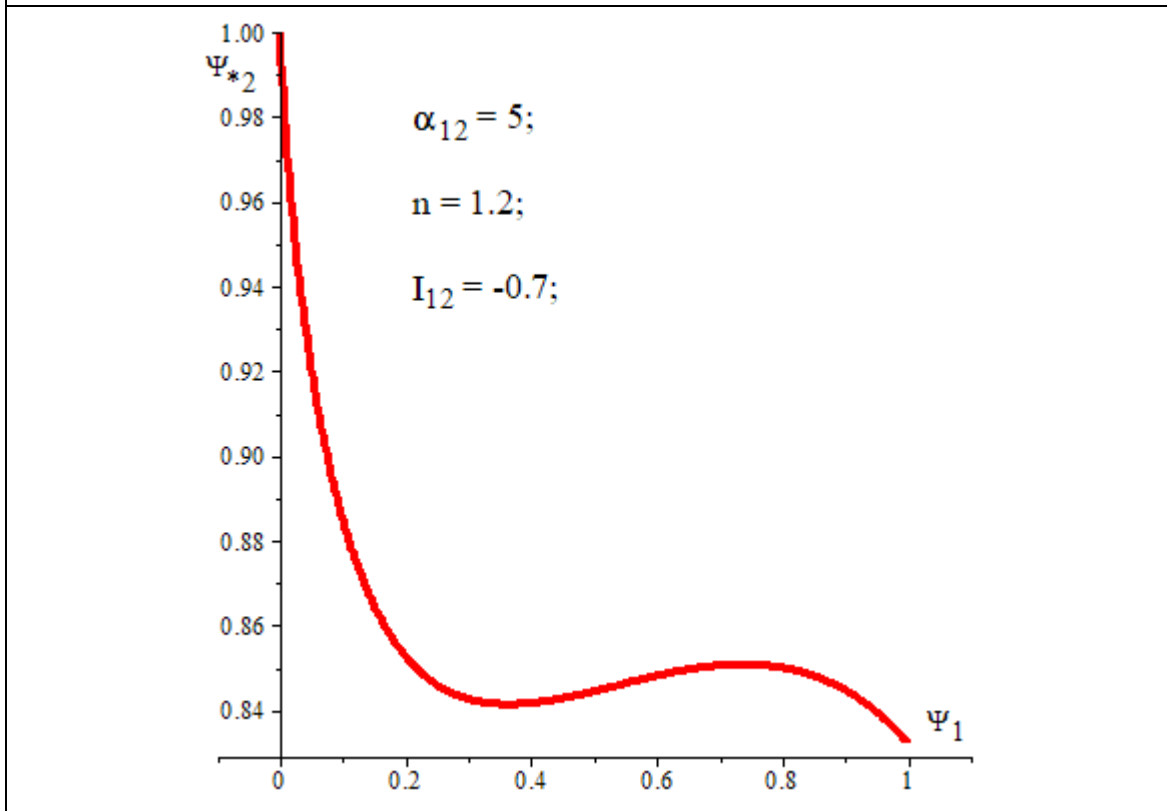
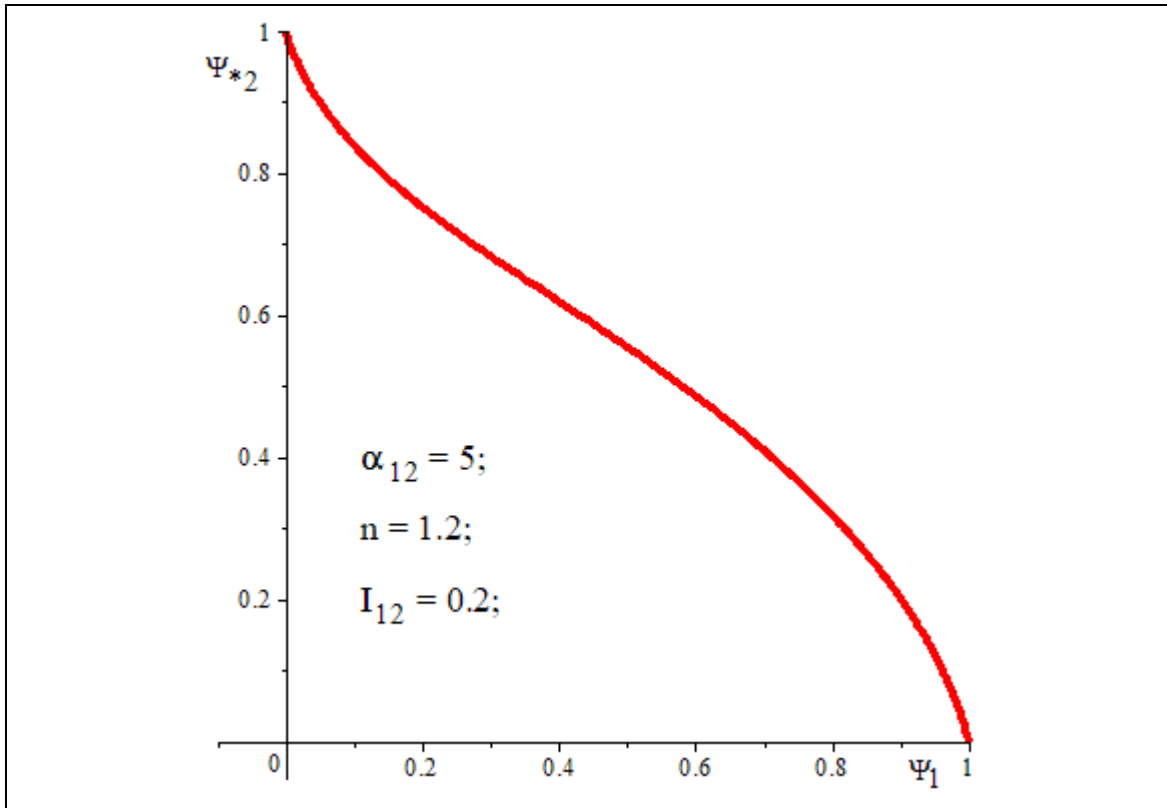


Рисунок 3.18 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $\alpha_{12} = 5$  та є постійним, а  $I_{12}$  та  $n$ :  $n = 1,2$ ,  $I_{12} = 0,2$  та  $n = 1,2$ ,  $I_{12} = -0,7$  відповідно

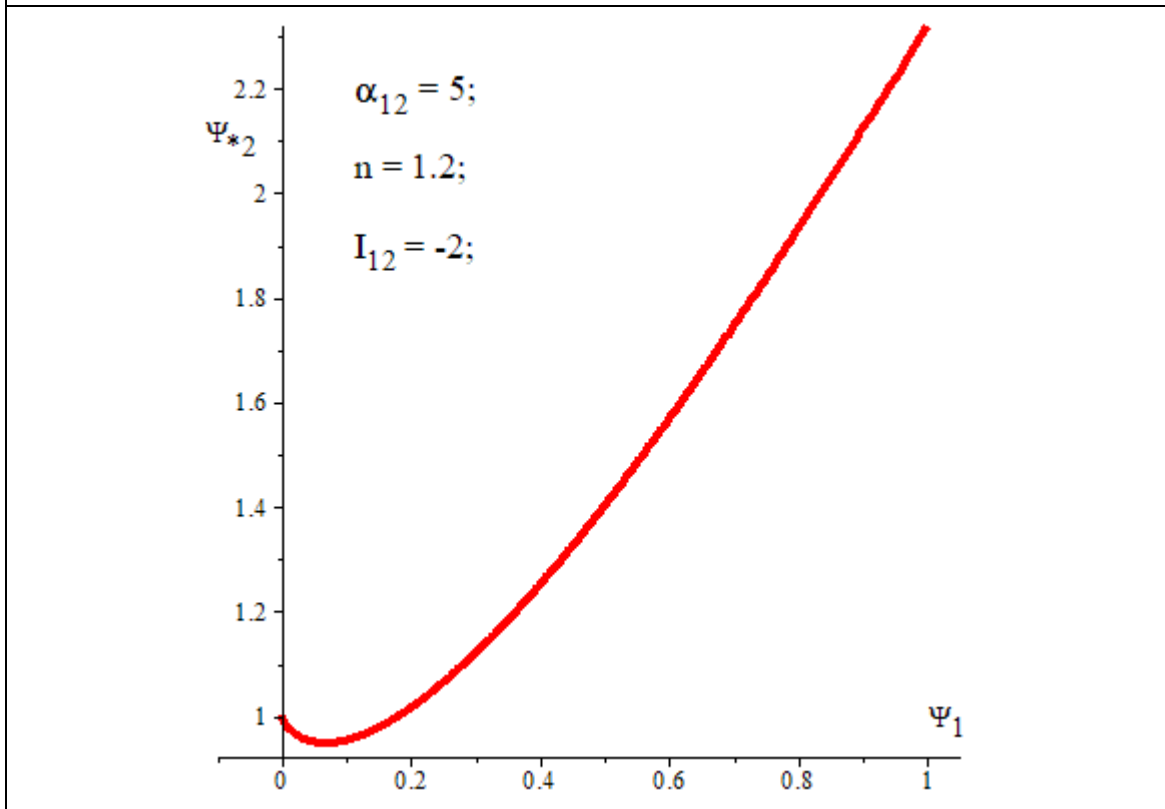
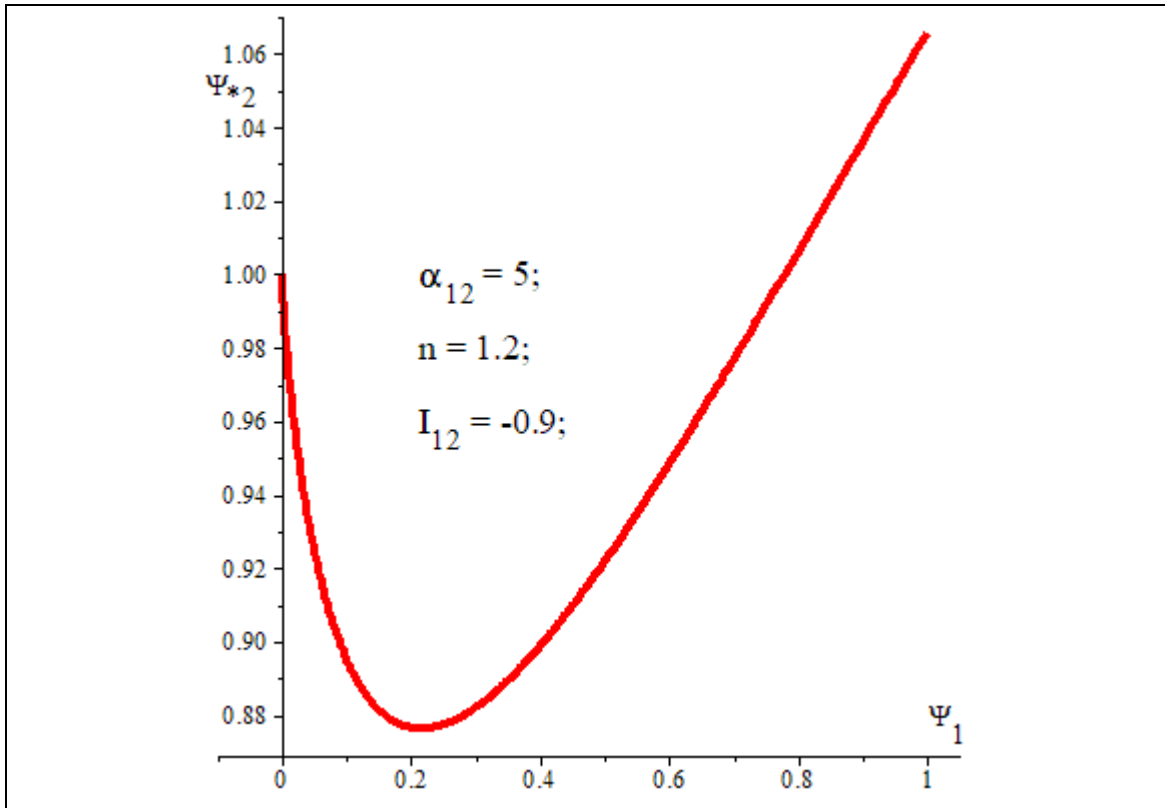


Рисунок 3.19 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $\alpha_{12} = 5$  та є постійним, а  $I_{12}$  та  $n$ :  $n = 1,2, I_{12} = -0,9$  та  $n = 1,2, I_{12} = -2$ ; відповідно

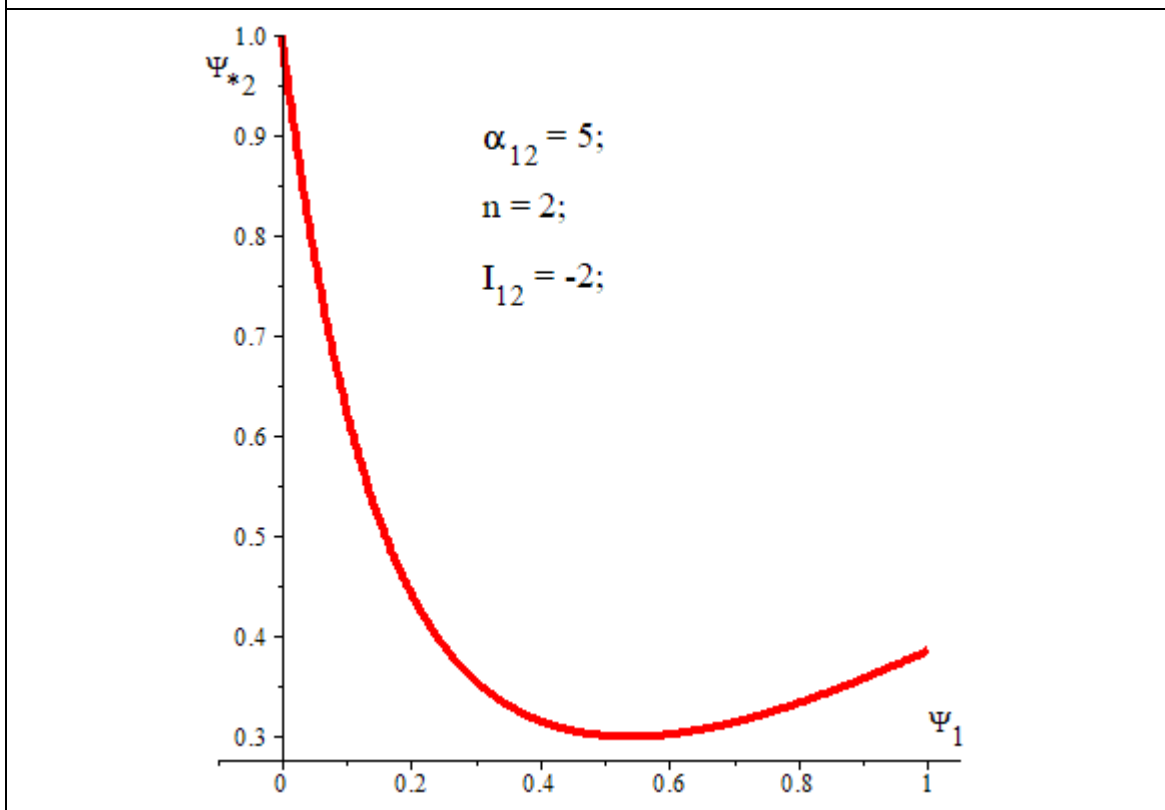
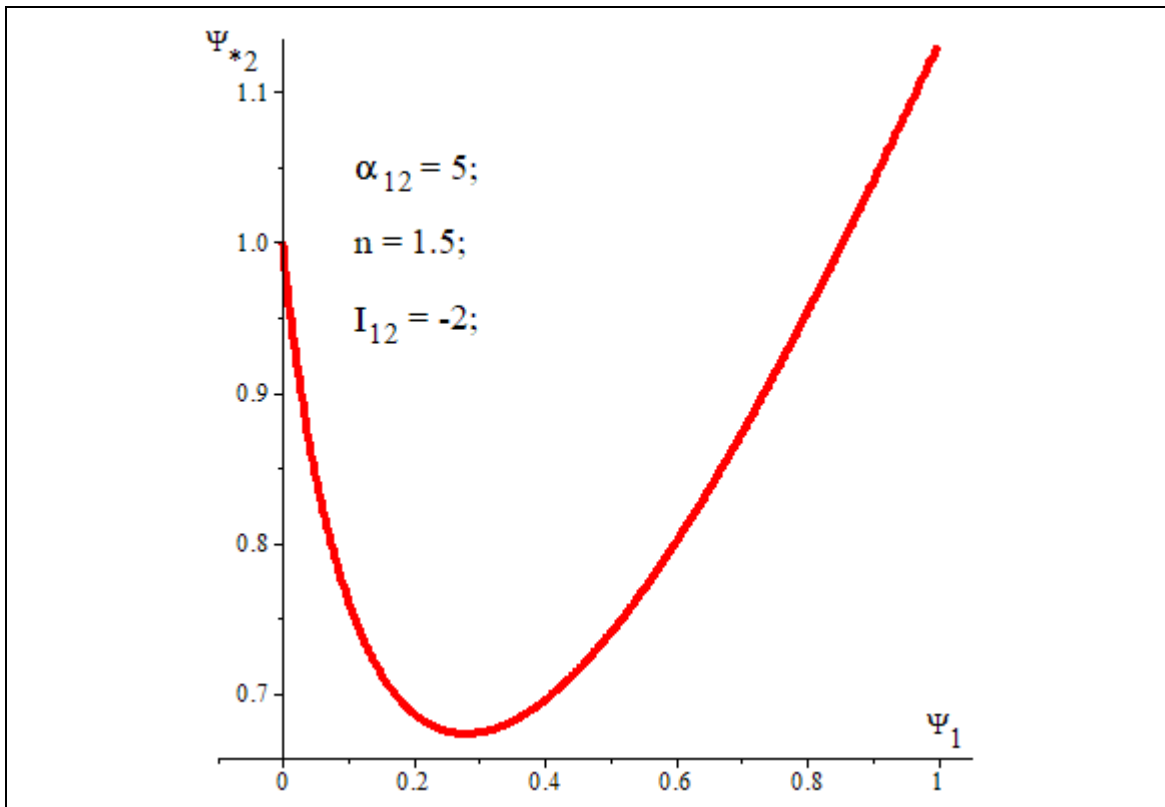


Рисунок 3.20 – Графіки залежностей ресурсів пластичності при двохетапному деформуванні, коли  $\alpha_{12} = 5$  та є постійним, а  $I_{12}$  та  $n$ :  $n = 1,5$ ,  $I_{12} = -2$  та  $n = 2$ ,  $I_{12} = -2$  відповідно

На відмінно від параметра  $\alpha_{12}$ , параметр математичної моделі  $I_{12}$  може набувати як додатних, так і від'ємних значень, але по модулю не перевищують одиницю. Параметр  $n$  при двохетапному пластичному деформуванні може приймати тільки додатні значення і при цьому не дорівнювати нулю. В даній роботі математична модель досліджувалась і при значеннях характеристичних параметрів, які виходять за межі обмеженої вище зони. При цьому досліджувались особливості специфічної поведінки та роботи моделі. Це було зроблено для того, щоб наглядно відобразити особливості поведінки математичної моделі, коли значення її параметрів виходять за межі допустимих [94].

За допомогою розглядуваної математичної моделі можливо прослідкувати найтонші особливості та специфіку проведення двохетапного деформування, повноцінно оцінити при цьому роботу і особливості поведінки матеріалу, а також визначити екстремальні та небезпечні зони двохетапного деформування. Реалізація даної математичної моделі дозволить лаконічно та чітко оцінювати процеси двохетапного деформування, правильно співставляти матеріал заготовки та вид деформування.

#### 3.4 Перевірка адекватності моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування при зіставленні з наявними експериментальними даними

Для перевірки адекватності роботи математичної моделі накопичення пошкоджень при двохетапному деформуванні використаємо уже отримані результати експериментів, що представленні в роботах вчених у галузі обробки металів тиском. Експерименти проводили для таких видів двохетапного деформування, як кручення–розтяг та кручення–стиск, використовуючи при цьому такі метали: жароміцні сталі 13X11H2B2MФ-Ш, EP717 та ХН45МВТЮБР, титанові сплави OT4, VT8, VT9, VT25. Дані результатів експериментів [11] приведені в табл. 3.1, рис. 3.21, 3.22 та рис. 3.23.

На рис. 3.10 та рис. 3.11 наведено зіставлення результатів експериментів двохетапного деформування кручення–розтягу та кручення–стиску [11] з даними, розраховані за співвідношенням (2.46) та (2.48). Експериментальні дані зображено в координатах  $\varepsilon_{*1}(\psi_1)$  та  $\psi_{*2}(\psi_1)$ , що покращує перевірку адекватності моделі, краще ілюструє



процес та схожість результатів розрахунків та експериментів. Як видно із рисунків, має місце добра якісна і кількісна відповідність розрахункових та експериментальних даних.

Таблиця 3.1

Результати експериментів кручення-розтяг та кручення-стиск

	Кручення-розтяг								
	Жароміцні сталі				Титанові сплави				
	EP717				BT8				
$\Psi_1$	0,356	0,765	0,913	0,908	0,956	1			
$\Psi_{*2}$	0,739	0,447	0,126	0,895	0,865	0,695			
	Кручення-стиск								
	Жароміцні сталі								
	XH45MBTЮБР				13X11H2B2MФ-III				
$\Psi_1$	0,478	0,695	0,882	0,943	0,908	0,956	1		
$\Psi_{*2}$	0,947	0,878	0,704	0,708	0,895	0,865	0,695		
$\Psi_1$	1	1	1	1					
$\Psi_{*2}$	0,582	0,56	0,521	0,482					
	Титанові сплави								
	BT9				BT25				
	$\Psi_1$	0,53	0,569	0,626	0,647	0,133	0,56	0,843	0,878
$\Psi_{*2}$	0,8	0,839	0,895	0,834	0,974	0,9	0,843	0,852	
$\Psi_1$	0,665	0,687	0,726	0,774	0,873	0,93	0,843	0,86	
$\Psi_{*2}$	0,782	0,747	0,774	0,752	0,8	0,8	0,782	0,773	
	OT4								
	$\Psi_1$	0,417	0,447	0,569	0,665	0,687	0,93	0,956	1
	$\Psi_{*2}$	0,987	0,969	0,839	0,782	0,752	0,774	0,656	0,608

3.5. Розробка рекомендацій для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів

Для розробки рекомендацій для підвищення деформованості та якості деталей використовуємо критеріальне співвідношення для двохетапного деформування (2.46) та обмеження на вибір параметрів моделі (3.18), які виведені в попередніх пунктах.

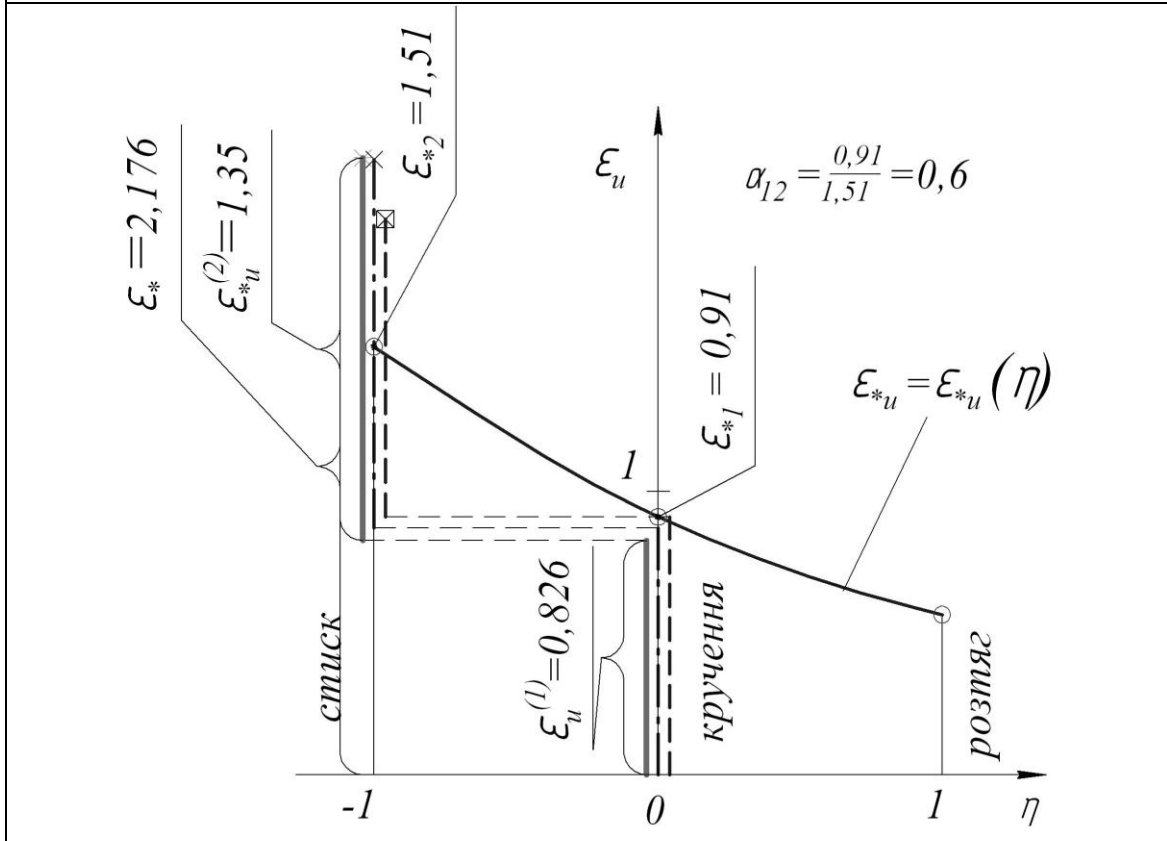
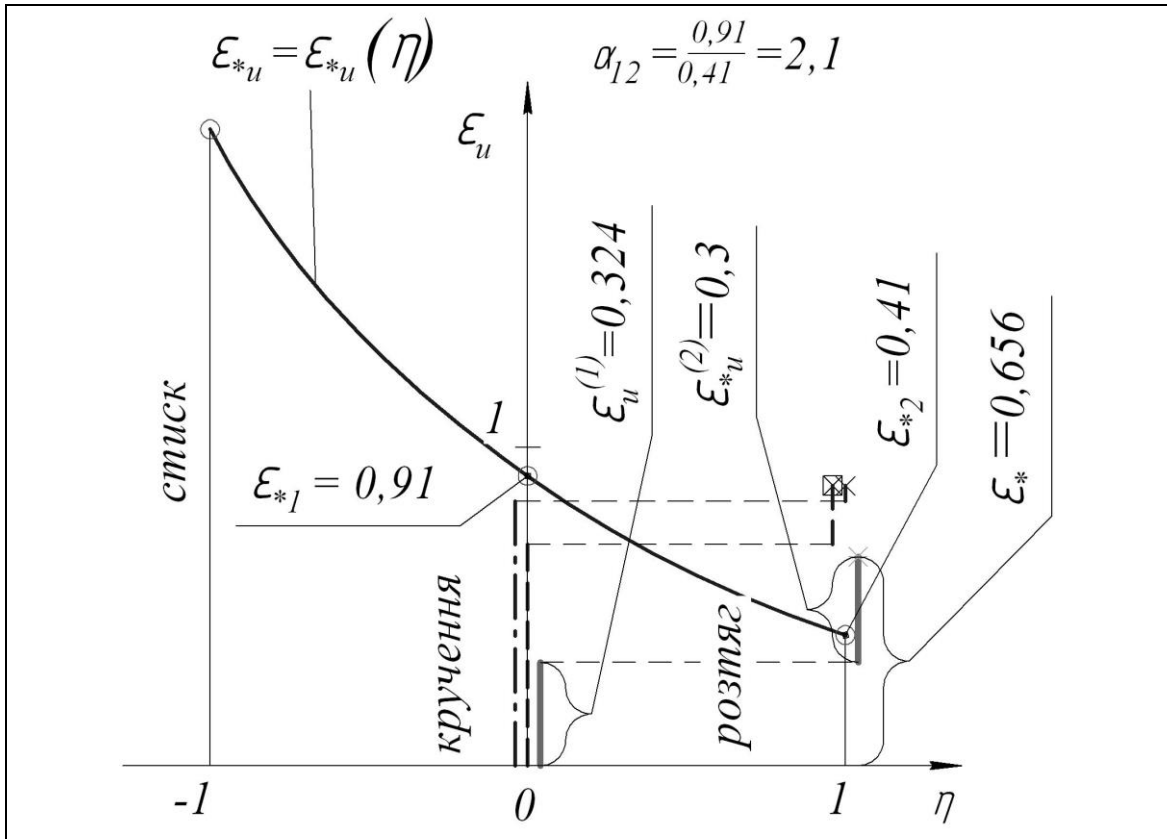


Рисунок 3.21 – Діаграма пластичності із схематичним зображенням двохетапного деформування кручення–розтяг для матеріалу EP717 та кручення–стиск для матеріалу 13X11H2B2MФ-III відповідно

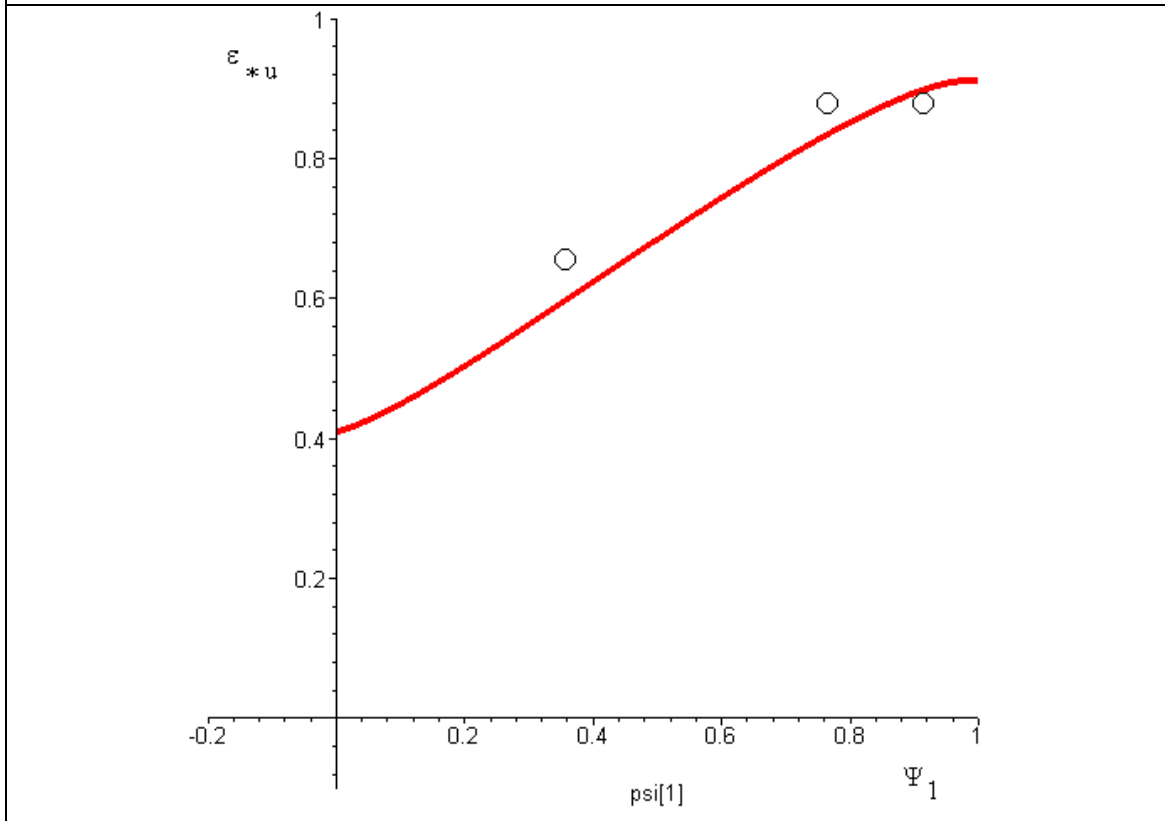
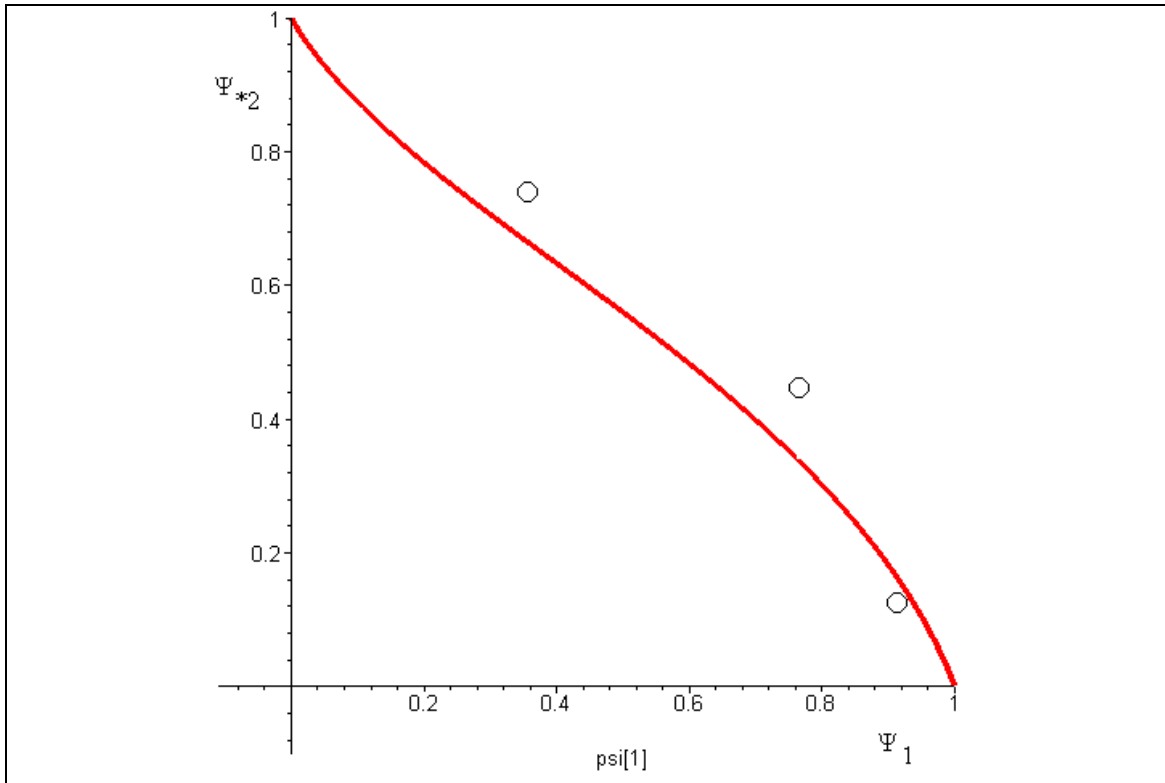


Рисунок 3.22 – Графіки залежностей залишкового ресурсу пластичності на другому етапі та сумарної пластичної деформації від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування кручення–розтягу для матеріалу EP717 ( $\alpha_{12} = 2,2$ ,  $n = 1,3$ ,  $I_{12} = 0,3$ ) відповідно:  
 — розрахунок за (2.46);  $\bigcirc$  – експеримент

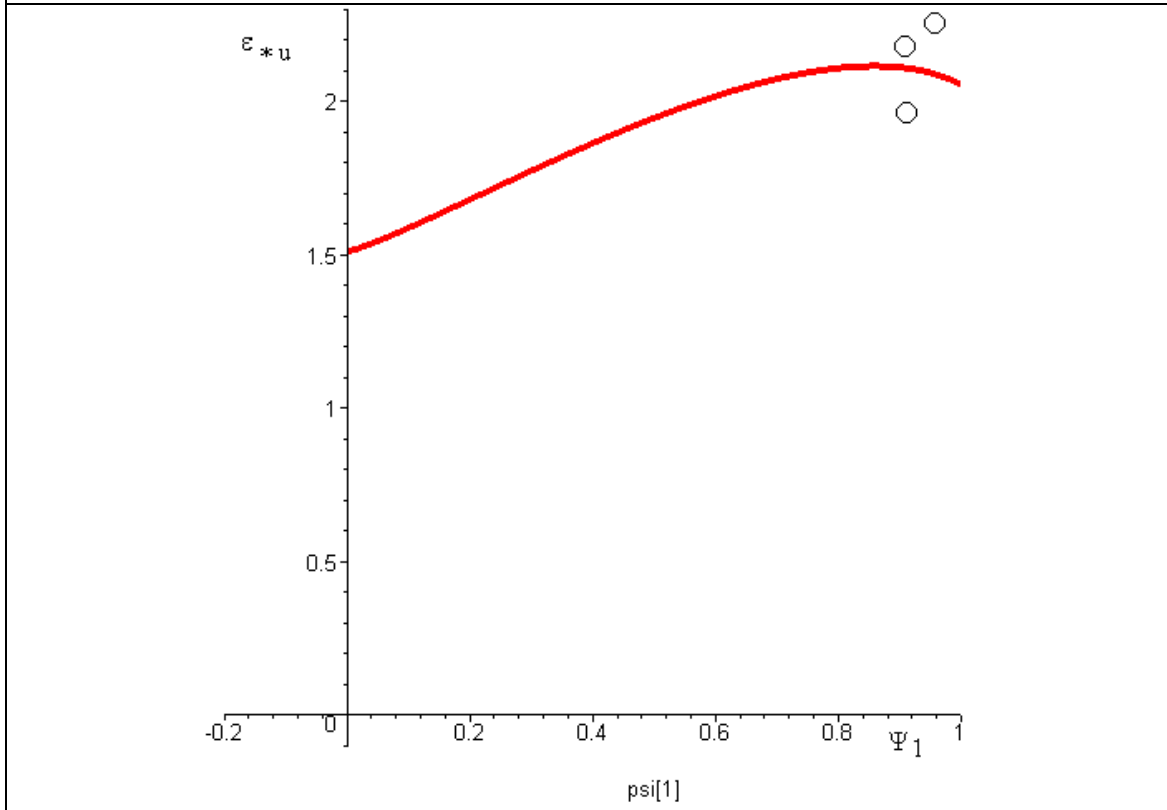
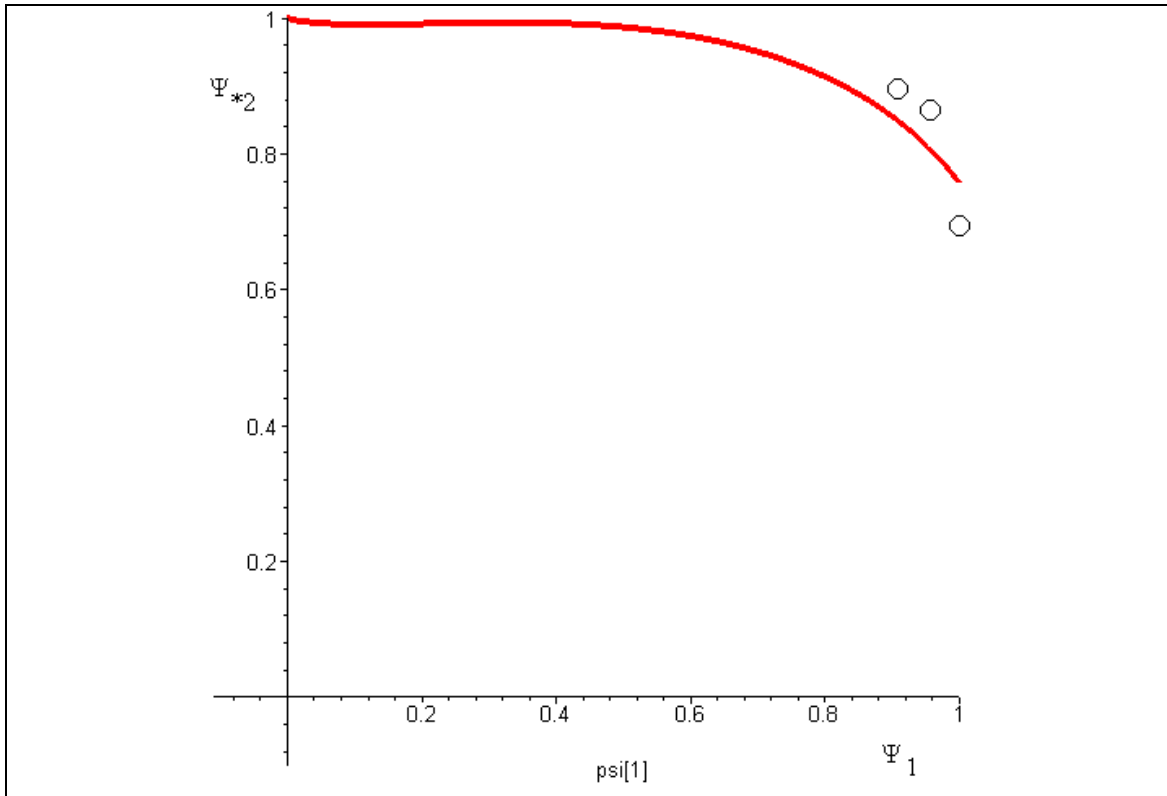


Рисунок 3.23 – Графіки залежностей залишкового ресурсу пластичності на другому етапі та сумарної пластичної деформації від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування кручення–стиск для матеріалу 13X11Н2В2МФ-Ш ( $\alpha_{12} = 0,6$ ,  $n = 1,2$ ,  $I_{12} = -0,45$ ) відповідно:  
 — розрахунок за (2.46);  $\bigcirc$  – експеримент

Разом з тим їх величина для конкретних характерів немонотонності залишається невизначеною. В даній роботі також здійснюється дослідження двох видів двохетапного деформування: стиск–розтяг та розтяг–стиск, для матеріалу 13X11H2B2MФ-Ш (рис. 3.24). Для цього виду двохетапного деформування та матеріалу значення параметра  $I_{12} = -1$  [11], а значення параметра  $\alpha_{12}$  розраховувалось за вище згаданою формулою, використовуючи діаграму пластичності.

Тобто досліджуються залежності зміни залишкового ресурсу на другому етапі та сумарної пластичної деформації (рис. 3.25 – 3.27) від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при різних значеннях параметра  $n$ , які розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (криві 3, 3', 3"). Навідмінно від лінійного закону підсумовування пошкоджень, тезорно-нелінійна модель враховує послідовність чергування деформацій: стиск-розтяг чи розтяг-стиск (параметр моделі  $\alpha_{12}$ ), самий вид двохетапного деформування (параметр  $I_{12}$ ), властивості матеріалу саме при немононому деформуванні (параметр  $n$ ).

Крива 1 відображає процес розтягу-стиску (синій колір), крива 2 відображає процес стиску-розтягу (червоний колір), крива 3 відображає процес стиску-розтягу та розтягу-стиску, який розрахований за лінійним законом підсумовування пошкоджень, криві 3' та 3" відображають процеси розтягу-стиску та стиску-розтягу відповідно, які розраховані за лінійним законом підсумовування пошкоджень. Усі ці залежності показані на відповідних графіках. Розглянемо їх детальніше.

При побудові графіків значення параметра  $n$  змінювали від 1,1 до 12. Усі графіки поділено на три групи, в кожену із яких входять графіки при трьох різних значеннях параметра  $n$ . Дані графіки показані на рисунках (рис. 3.25 – 3.33).

Графіки залежностей залишкового ресурсу пластичності на другому етапі деформування та сумарної пластичної деформації від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування для однакових значень параметра  $n$  показані разом. Це полегшує їх порівняння.

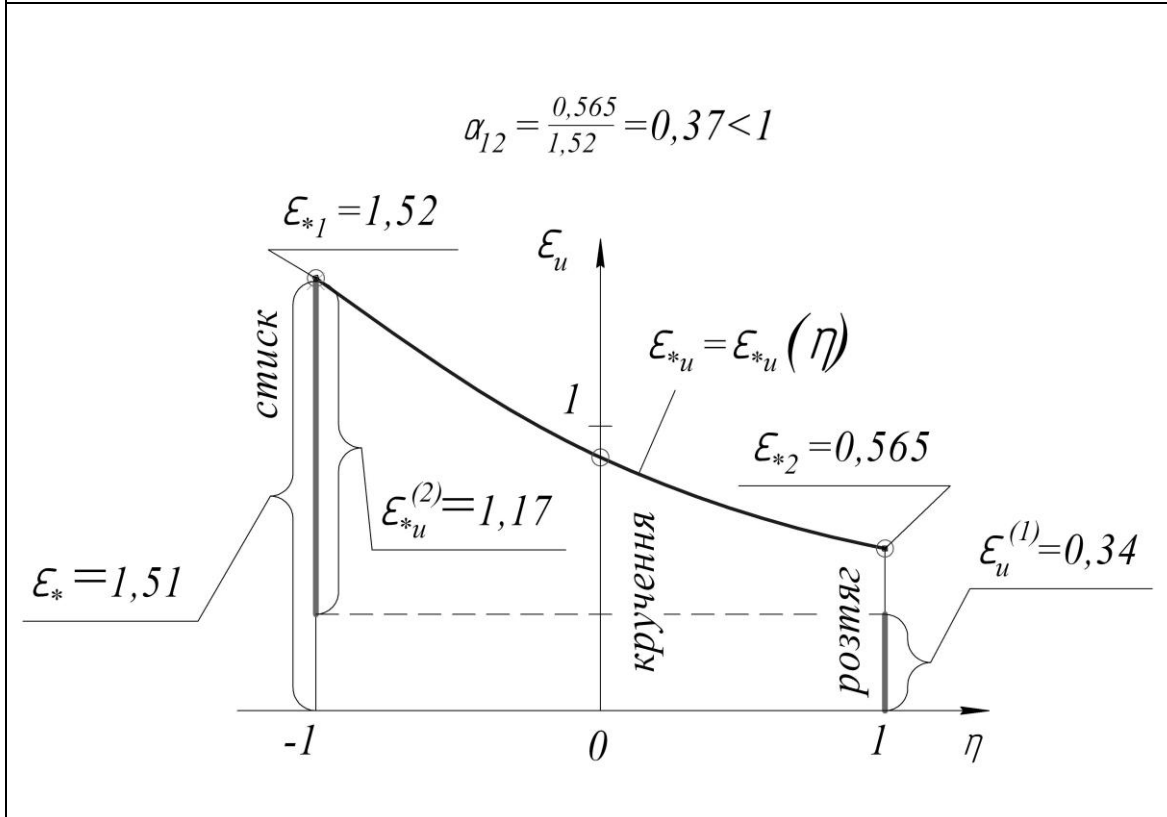
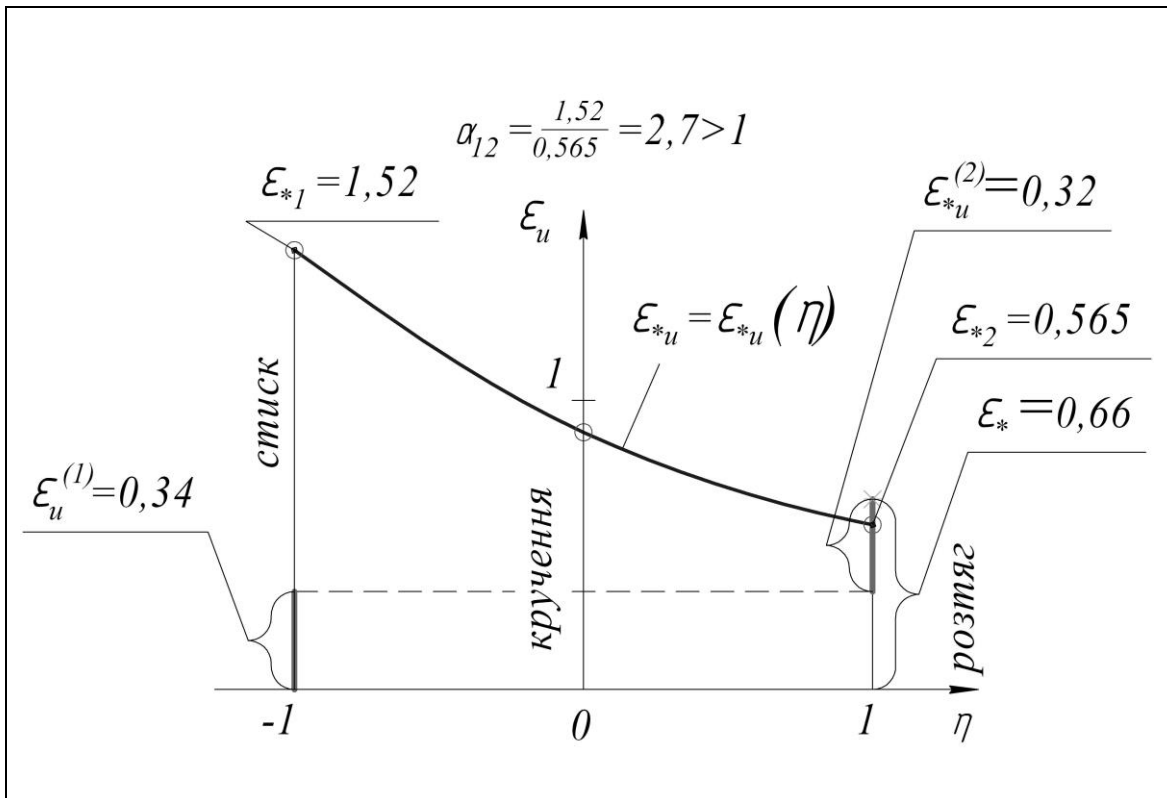


Рисунок 3.24 – Діаграма пластичності із схематичним зображенням двохетапного деформування стиску-розтягу та розтягу-стиску для матеріалу 13X11H2B2MФ-III відповідно

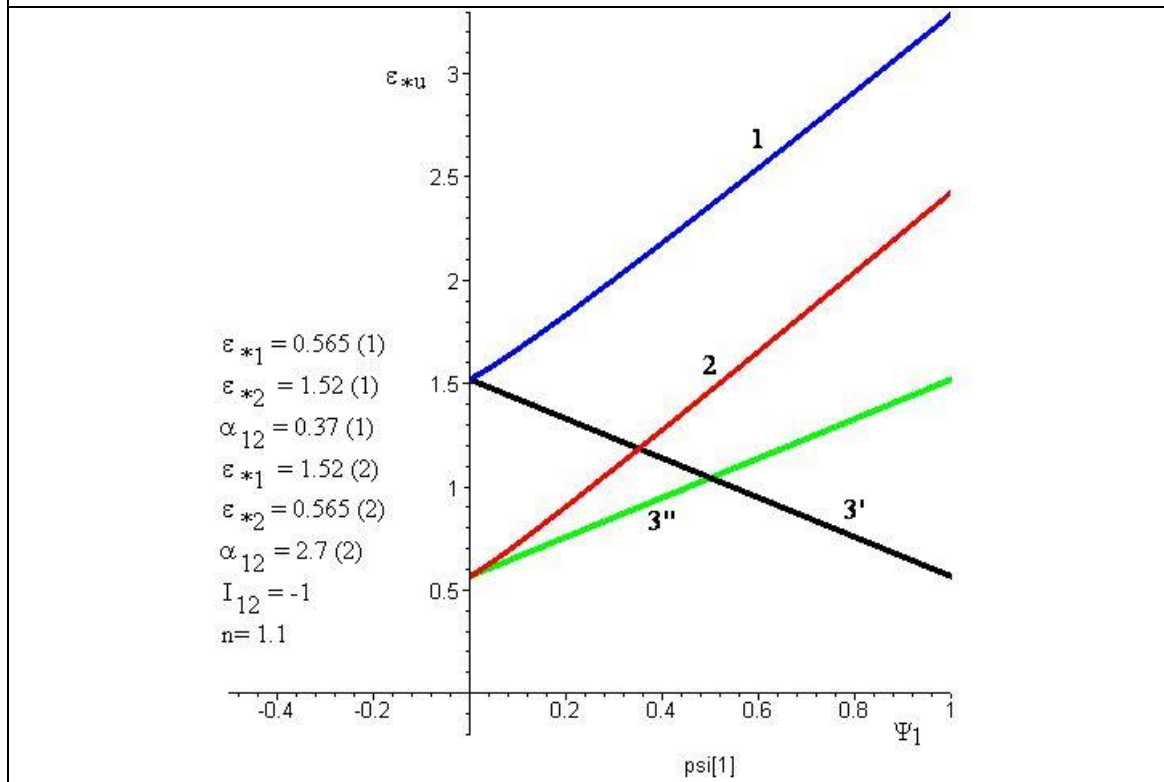
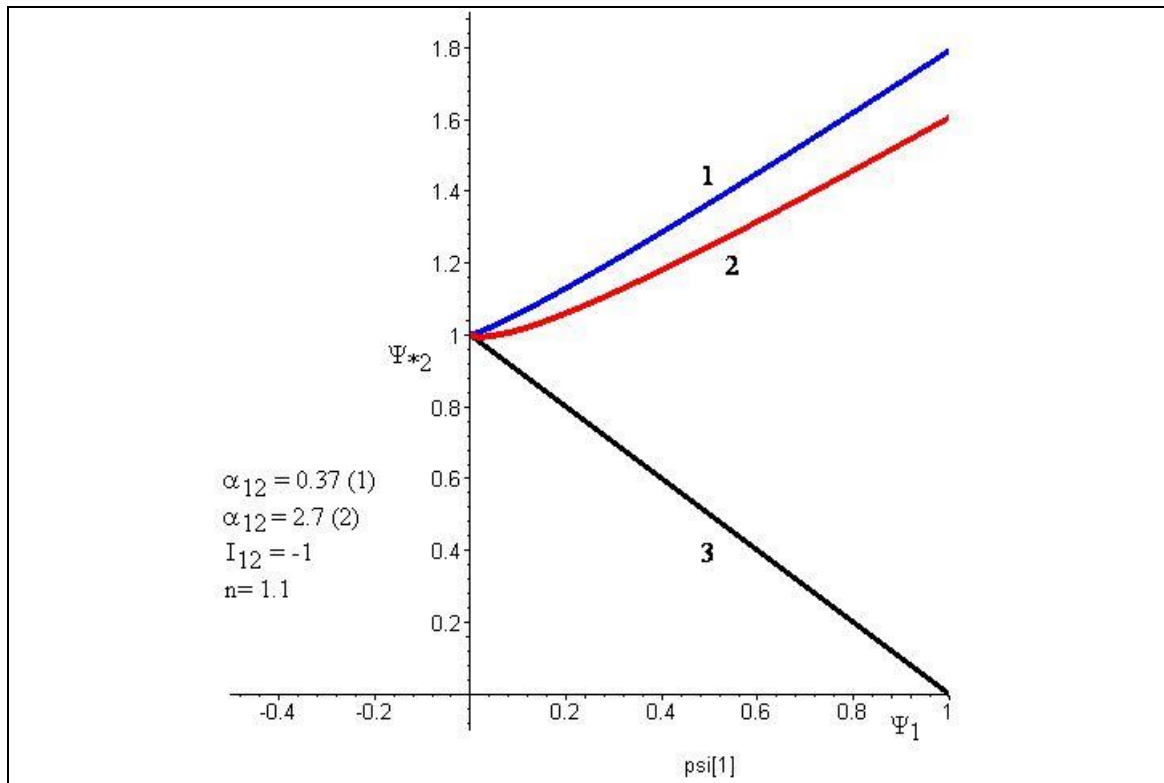


Рисунок 3.25 – Графіки залежностей залишкового ресурсу пластичності на другому етапі та сумарної пластичної деформації відповідно, розраховані за тензорно-нелінійною моделлю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 1.1$

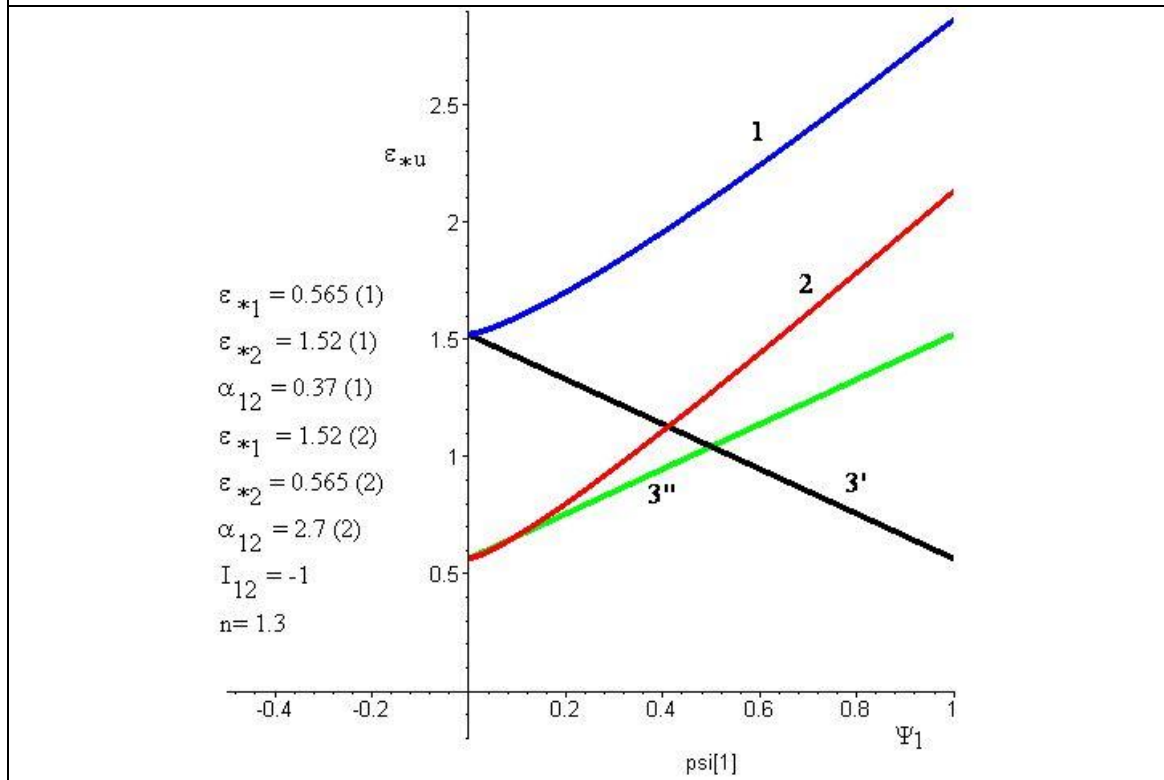
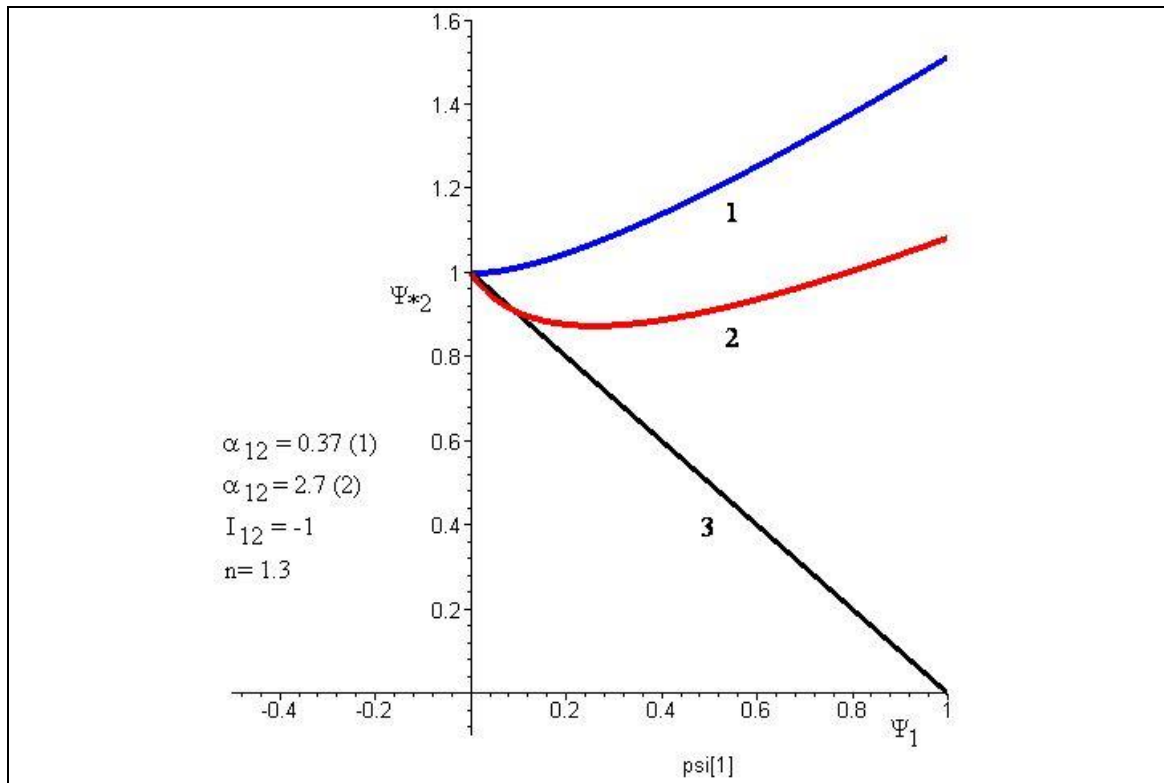


Рисунок 3.26 – Графіки залежностей залишкового ресурсу пластичності на другому етапі та сумарної пластичної деформації відповідно, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 1.3$



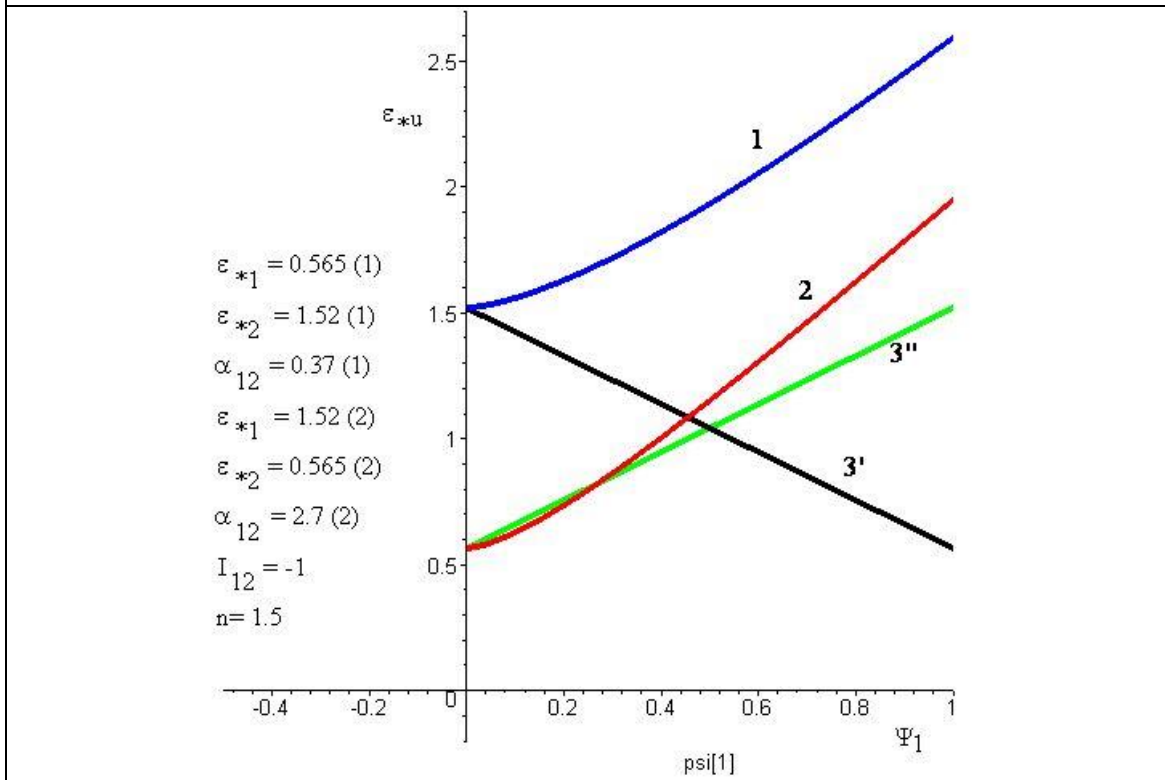
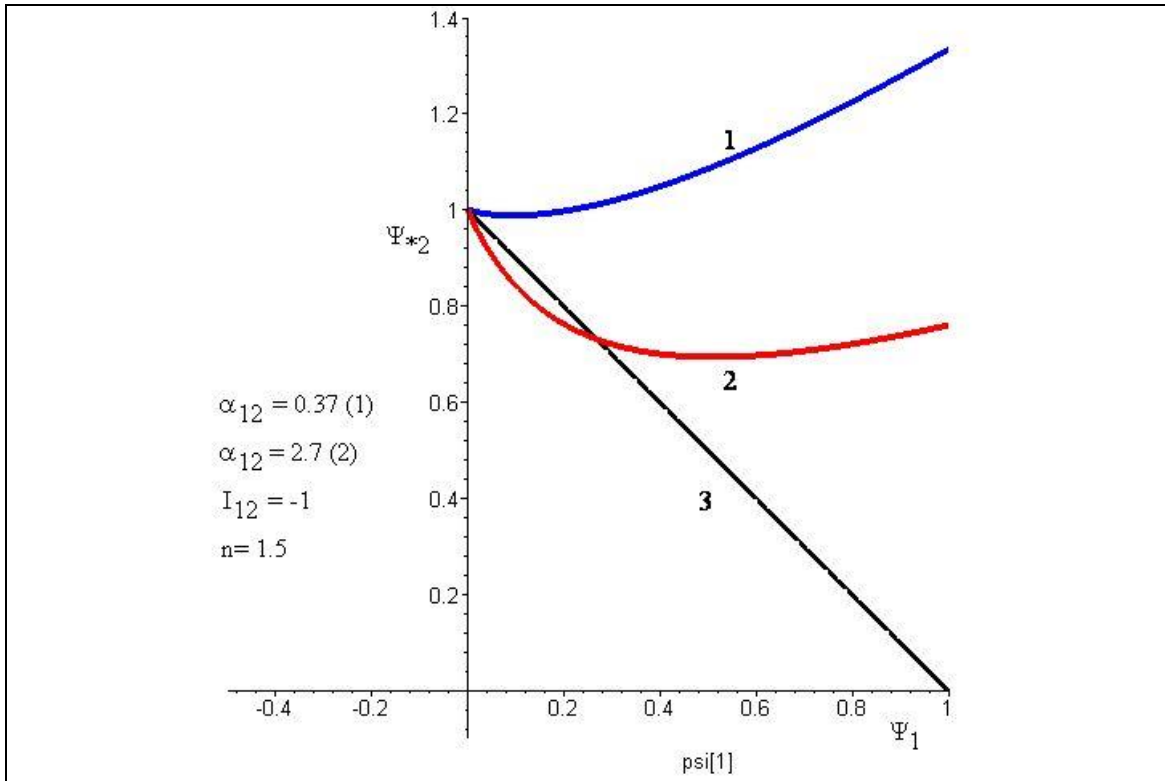


Рисунок 3.27 – Графіки залежностей залишкового ресурсу пластичності на другому етапі та сумарної пластичної деформації відповідно, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 1.5$

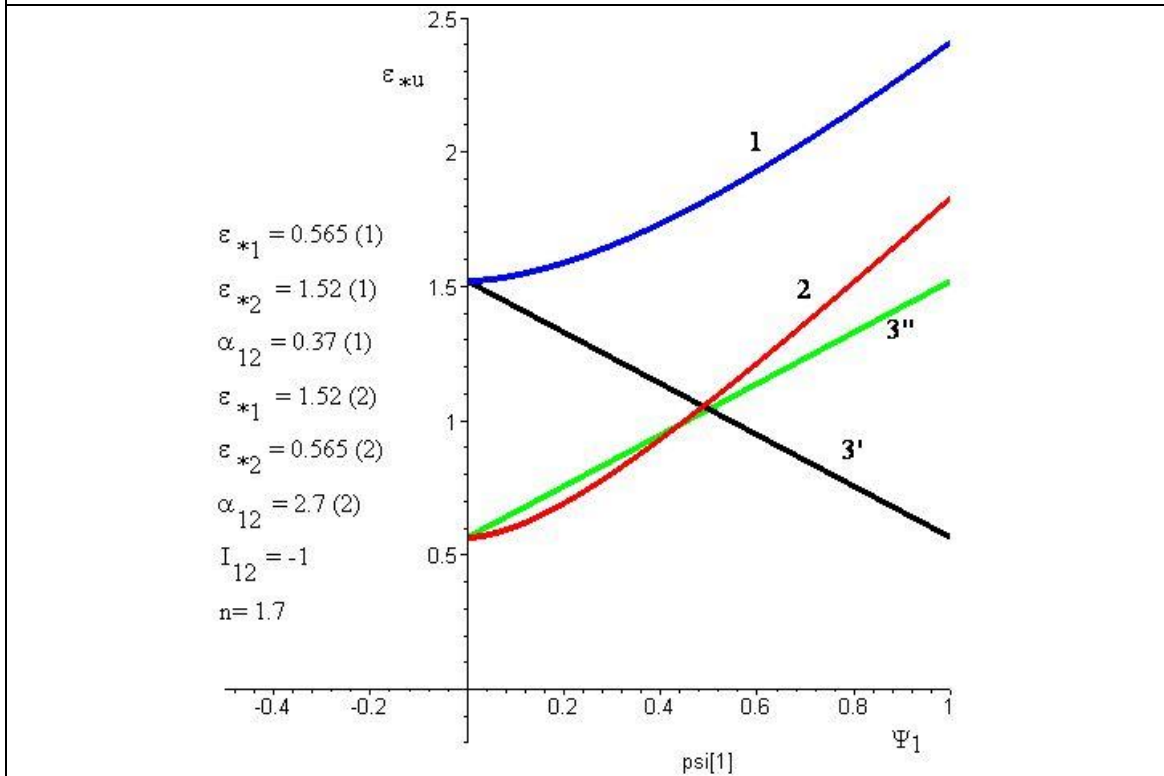
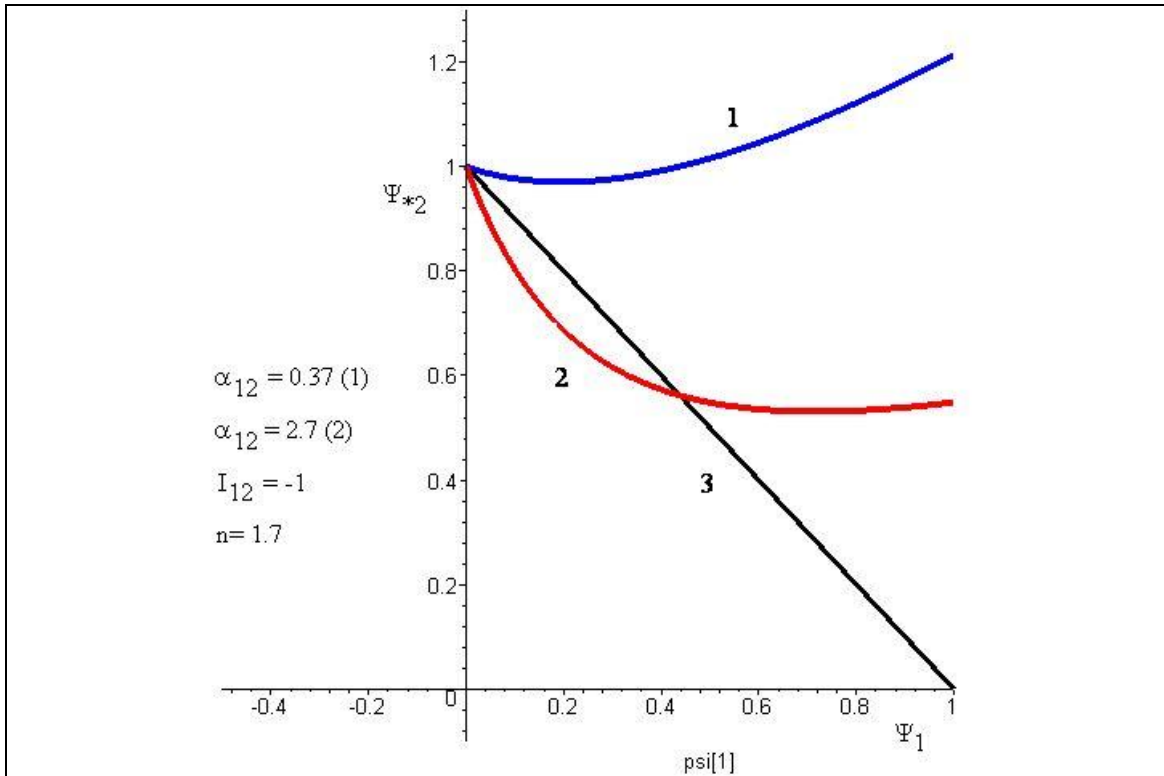


Рисунок 3.28 – Графіки залежностей залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації, відповідно, на другому етапі, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 1,7$

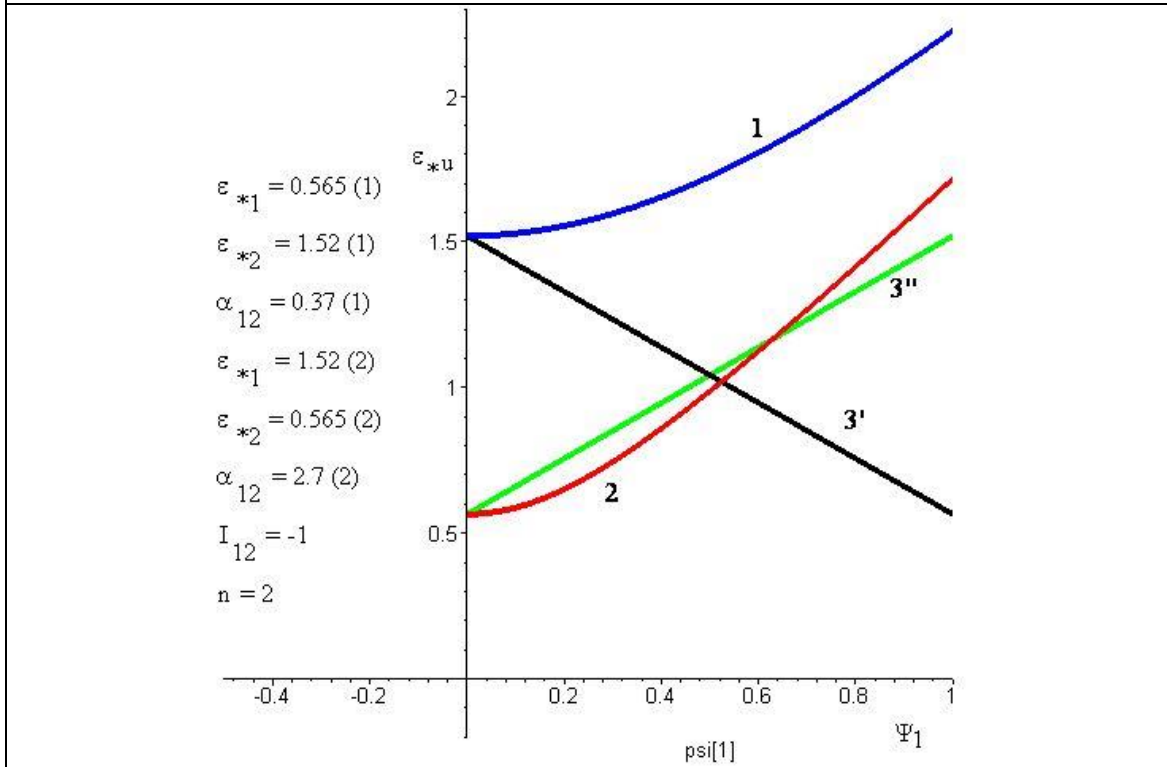
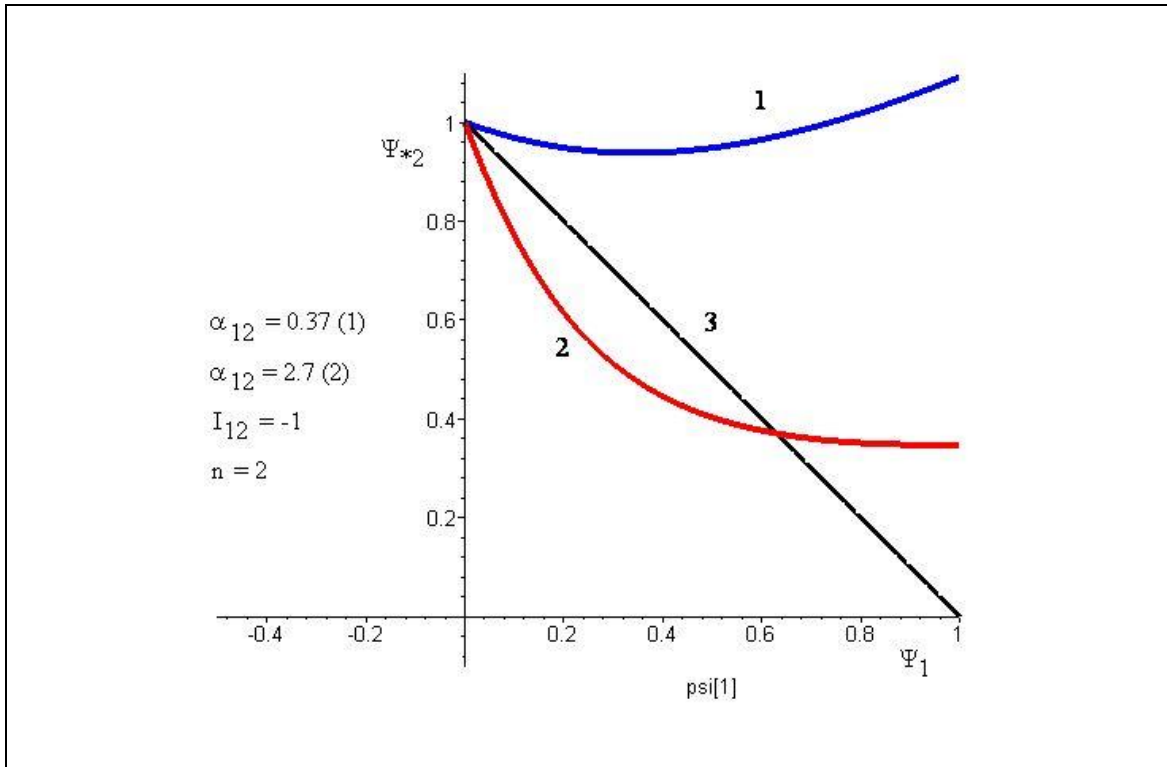


Рисунок 3.29 – Графіки залежностей залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації, відповідно, на другому етапі, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 2$

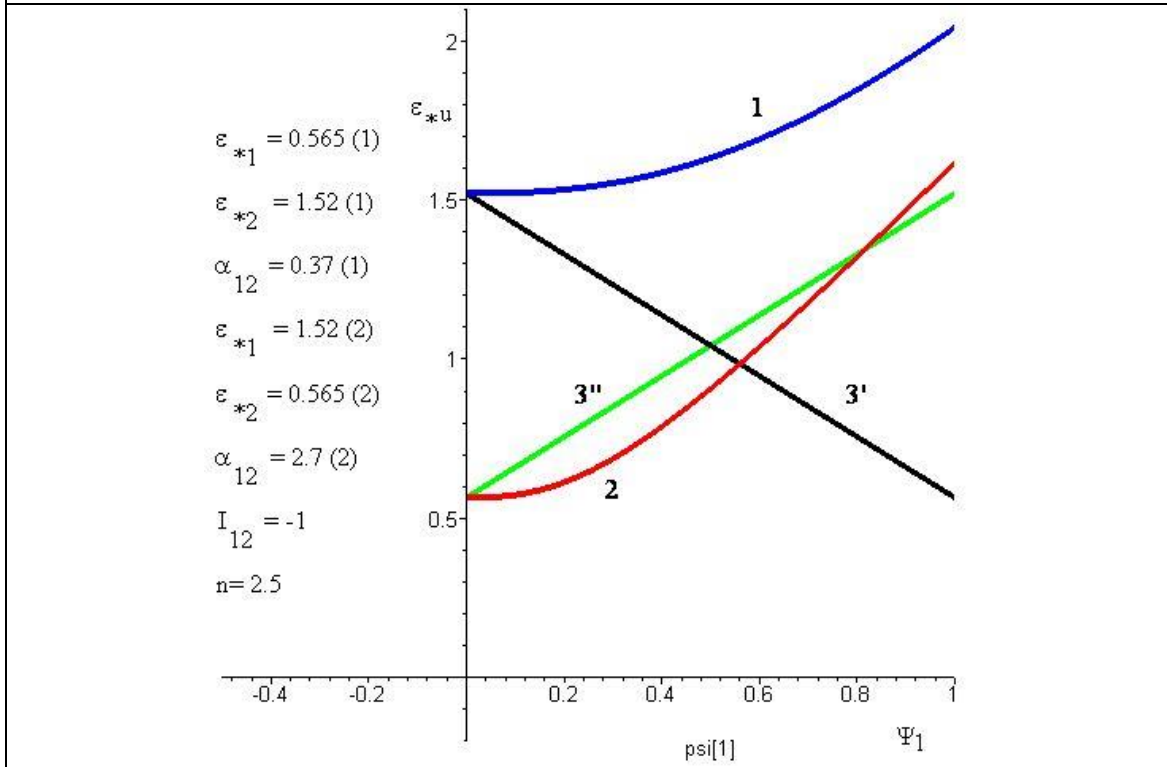
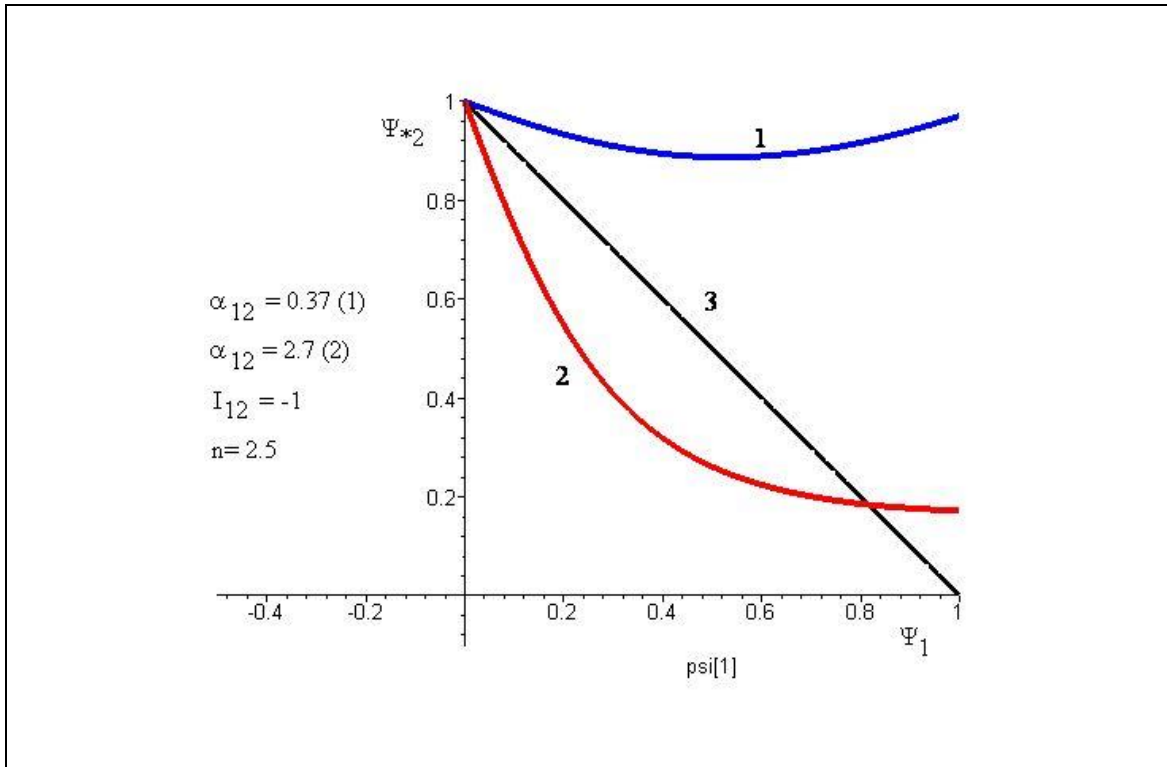


Рисунок 3.30 – Графіки залежностей залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації, відповідно, на другому етапі, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 2,5$

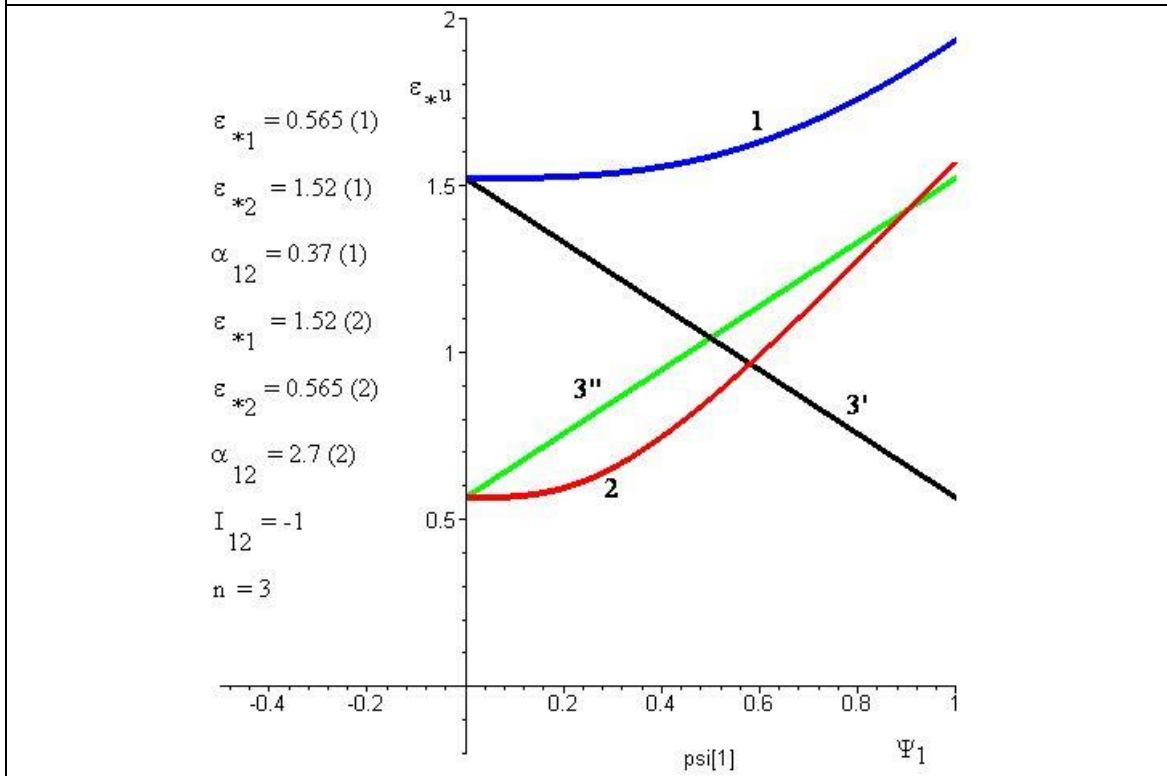
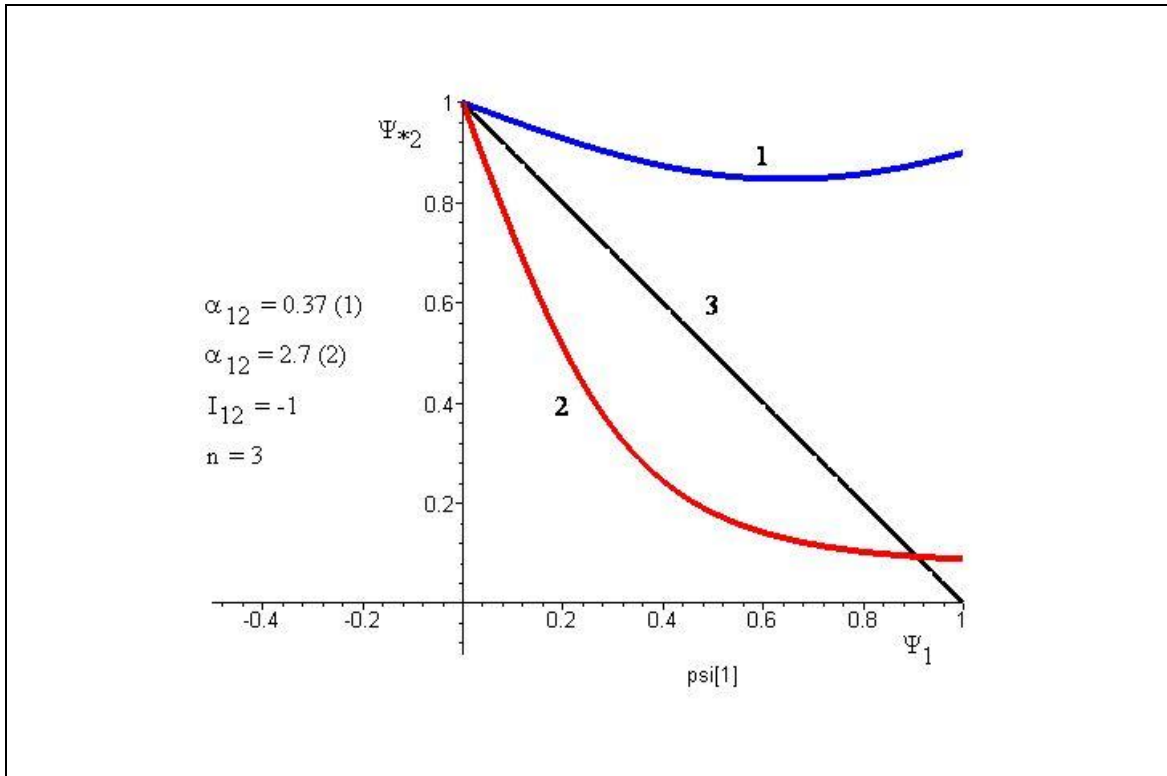


Рисунок 3.31 – Графіки залежностей залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації, відповідно, на другому етапі, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 3$

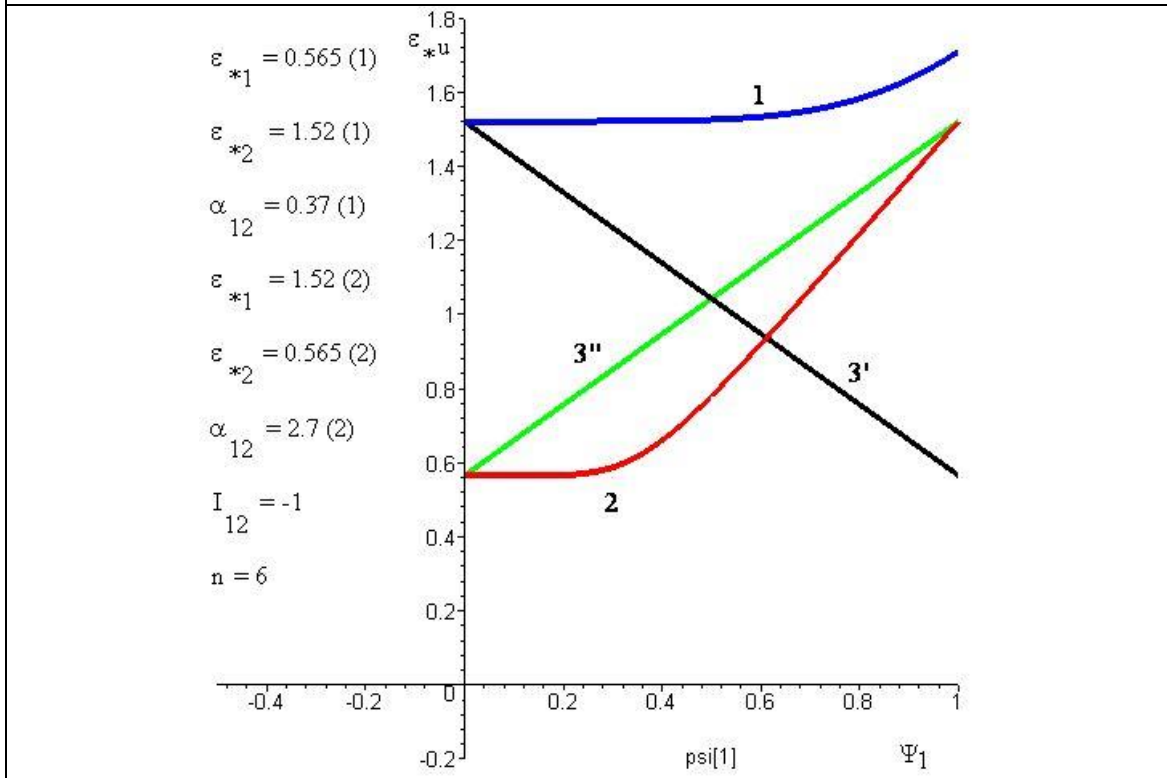
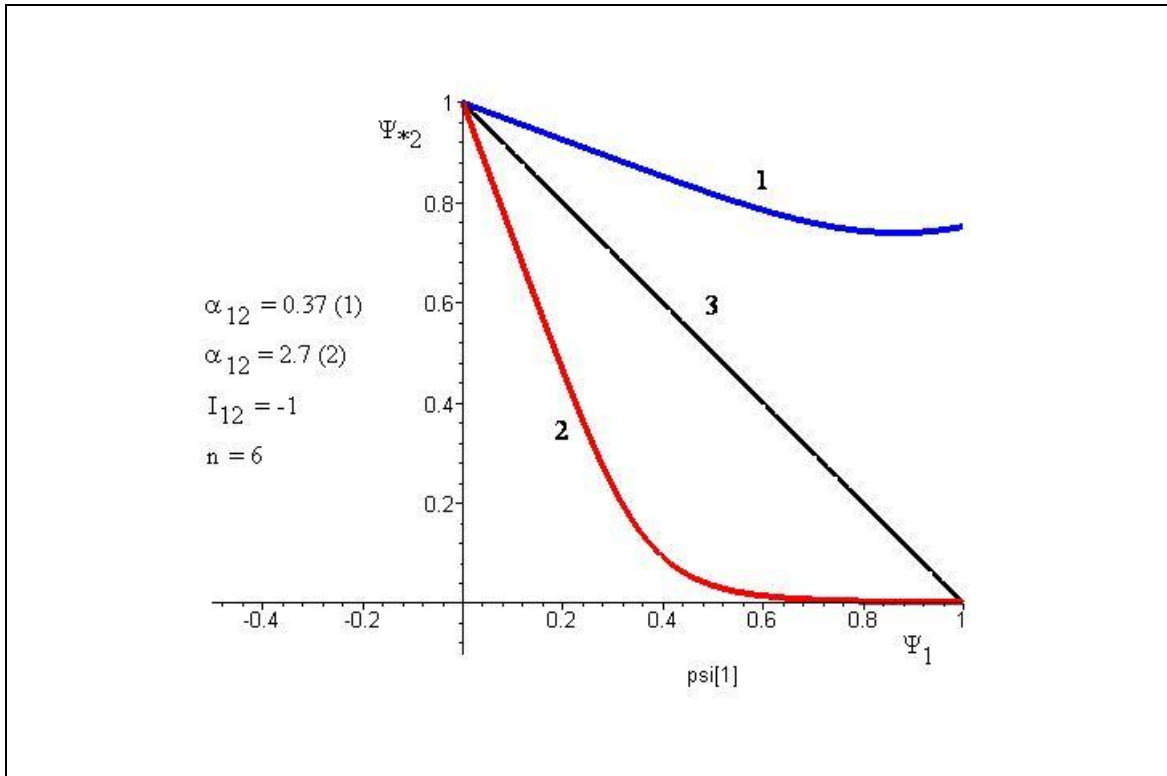


Рисунок 3.32 – Графіки залежностей залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації, відповідно, на другому етапі, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 6$

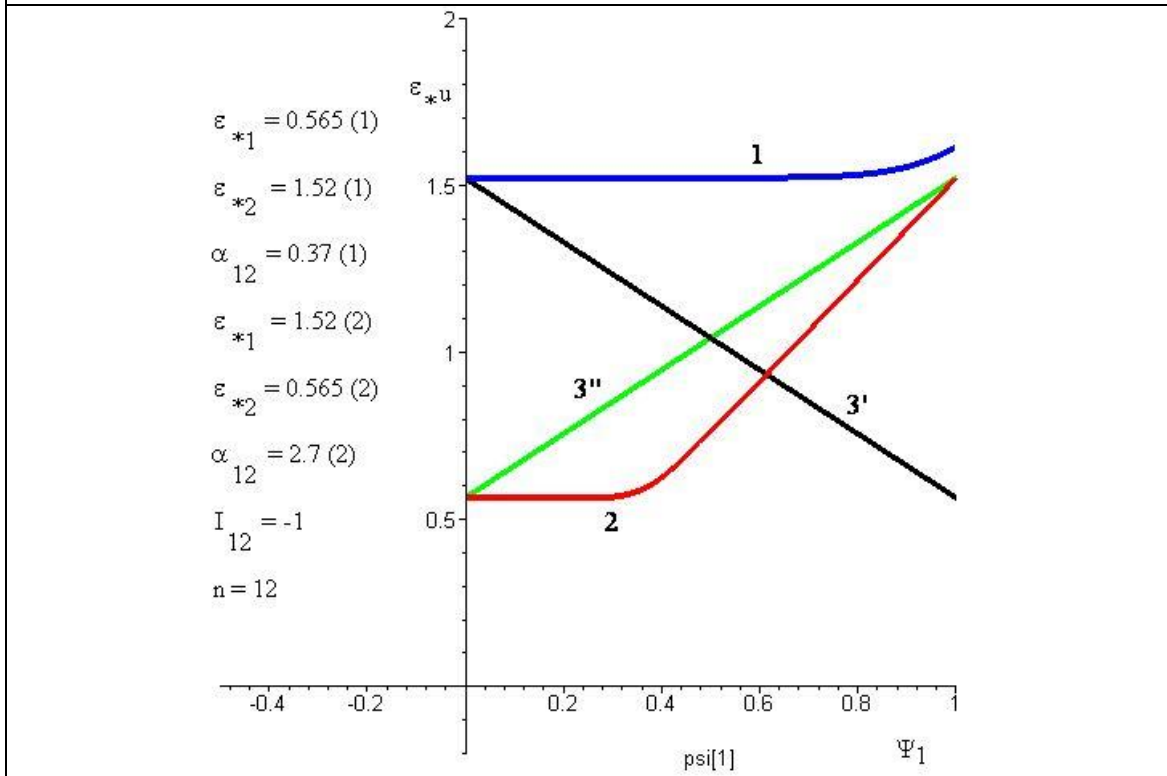
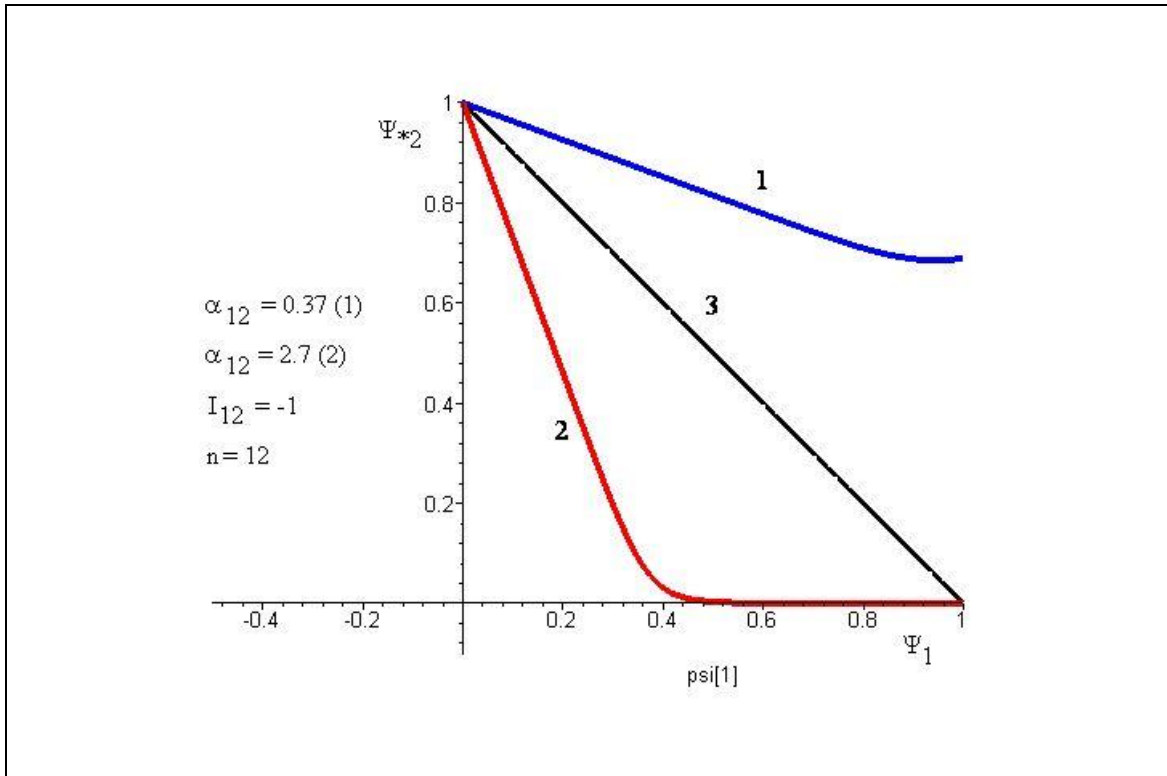


Рисунок 3.33 – Графіки залежностей залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації, відповідно, на другому етапі, розраховані за тензорно-нелінійною моделю (криві 1 та 2) та лінійним законом накопичення пошкоджень (крива 3), від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування при  $n = 12$

Розглянемо першу групу графіків, коли параметр  $n$  приймає значень: 1.1, 1.3, 1.5. Як видно із перших графіків (рис. 3.25 – 3.27):

- залишковий ресурс на другому етапі для двохетапного деформування розтягу-стиску більший ніж для стиску-розтягу;

- при збільшенні використаного ресурсу на першому етапі, різниця між залишковим ресурсом на другому етапі двохетапного деформування для розтягу-стиску та стиску-розтягу збільшується;

- сумарна пластична деформація розтягу-стиску більша ніж стиску-розтягу;

- при збільшенні використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування різниця між сумарною пластичною деформацією для розтягу-стиску та стиску-розтягу зменшується.

Розглянемо другу групу графіків, коли параметр  $n$  приймає значень: 1.7, 2, 2.5. Як видно із перших графіків (рис. 3.28 – 3.30):

- при збільшенні використаного ресурсу на першому етапі, залишковий ресурс на другому етапі двохетапного деформування для стиску-розтягу зменшується більш інтенсивніше ніж для розтягу-стиску;

- інтенсивність зменшення залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні збільшується при збільшенні значення параметра  $n$ ;

- стрімкість зменшення залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні для стиску-розтягу значно збільшується в порівнянні із розтягом-стиском при збільшенні значення параметра  $n$ ;

- стрімкість збільшення сумарної пластичної деформації при збільшенні використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування для стиску-розтягу більша;

- зменшення значення сумарної пластичної деформації відбувається при збільшенні значення параметра  $n$ .

Розглянемо третю групу графіків, коли параметр  $n$  приймає значень: 3, 6, 12. Як видно із перших графіків (рис. 3.31 – 3.33):

- залишковий ресурс на другому етапі двохетапного деформування для розтягу-стиску, розрахованого за тензорно-нелінійною моделлю, більший від розрахованого за лінійним законом підсумування пошкоджень;

- залишковий ресурс на другому етапі двохетапного деформування для стиску-розтягу, розрахованого за тензорно-нелінійною моделлю, у порівнянні із розрахованим за лінійним законом підсумування пошкоджень, при  $n = 1,1$  більший, але при збільшенні значення параметра  $n$  поступово стає меншим;



– при  $n = 12$  та використаним ресурсом на першому етапі 0,45, залишковий ресурс на другому етапі двохетапного деформування стиску-розтягу вичерпаний;

– різниця між сумарною пластичною деформацією розтягу-стиску та стиску-розтягу зменшується при збільшенні значення параметра  $n$  та значення використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування;

– значення сумарної пластичної деформації, розрахованої за тензорно-нелінійною моделлю, у порівнянні із значенням, розрахованим за лінійним законом підсумування пошкоджень, для розтягу-стиску більше при будь-якому значенні параметра  $n$  і різниця між значеннями збільшується при зміні використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування;

– значення сумарної пластичної деформації стиску-розтягу, розрахованої за тензорно-нелінійною моделлю, у порівнянні із значенням, розрахованим за лінійним законом підсумування пошкоджень, при значенні параметра  $n = 1,1$  більше, але при збільшенні значення параметра  $n$  – стає поступово меншим із змінною використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування.

Для більш нагляднішого показу залежностей залишкового ресурсу на другому етапі та сумарної пластичної деформації від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра моделі  $n$  для розтягу-стиску та стиску-розтягу були побудовані 3-d графіки, тобто відповідні поверхні. Ці поверхні зображені на рисунках із різних сторін (рис. 3.34 – 3.37).

На першій групі рисунків зображено поверхню, яка відображає залежність залишкового ресурсу пластичності на другому етапі від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра моделі  $n$  для розтягу-стиску та стиску-розтягу.

На другій групі рисунків зображено поверхню, яка відображає залежність сумарної пластичної деформації від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра моделі  $n$  для розтягу-стиску та стиску-розтягу.

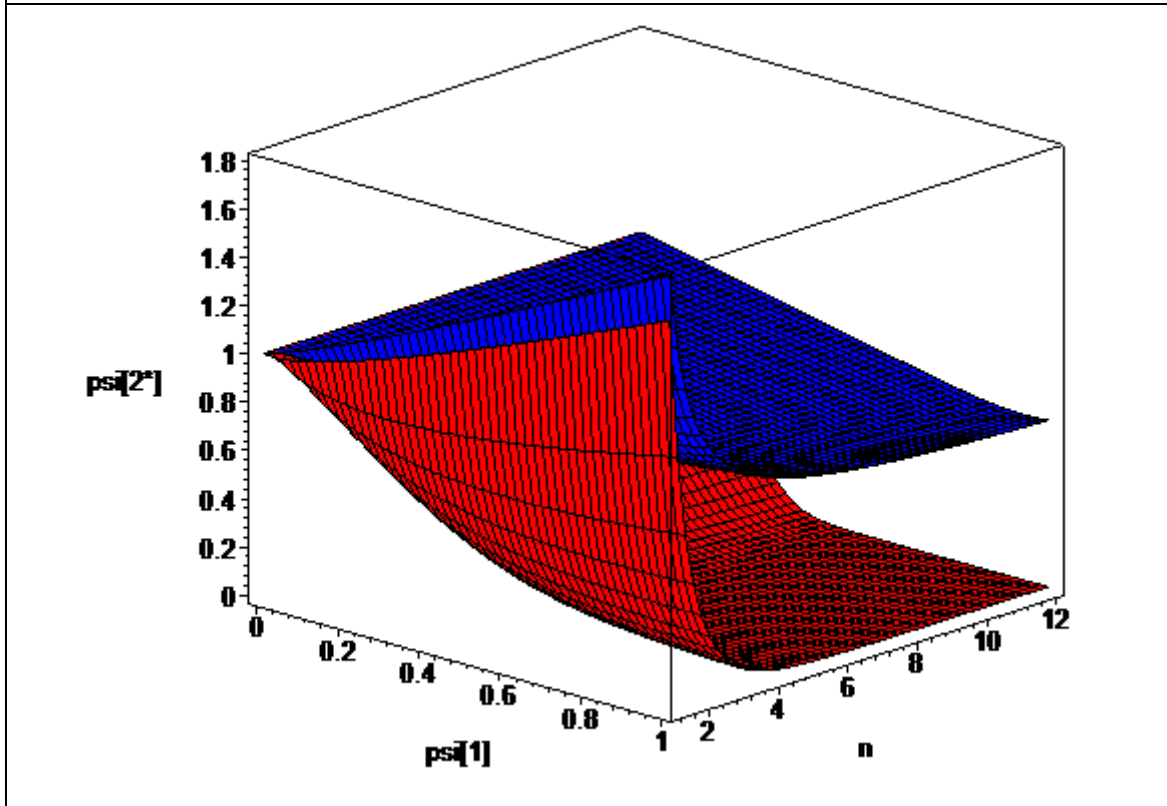
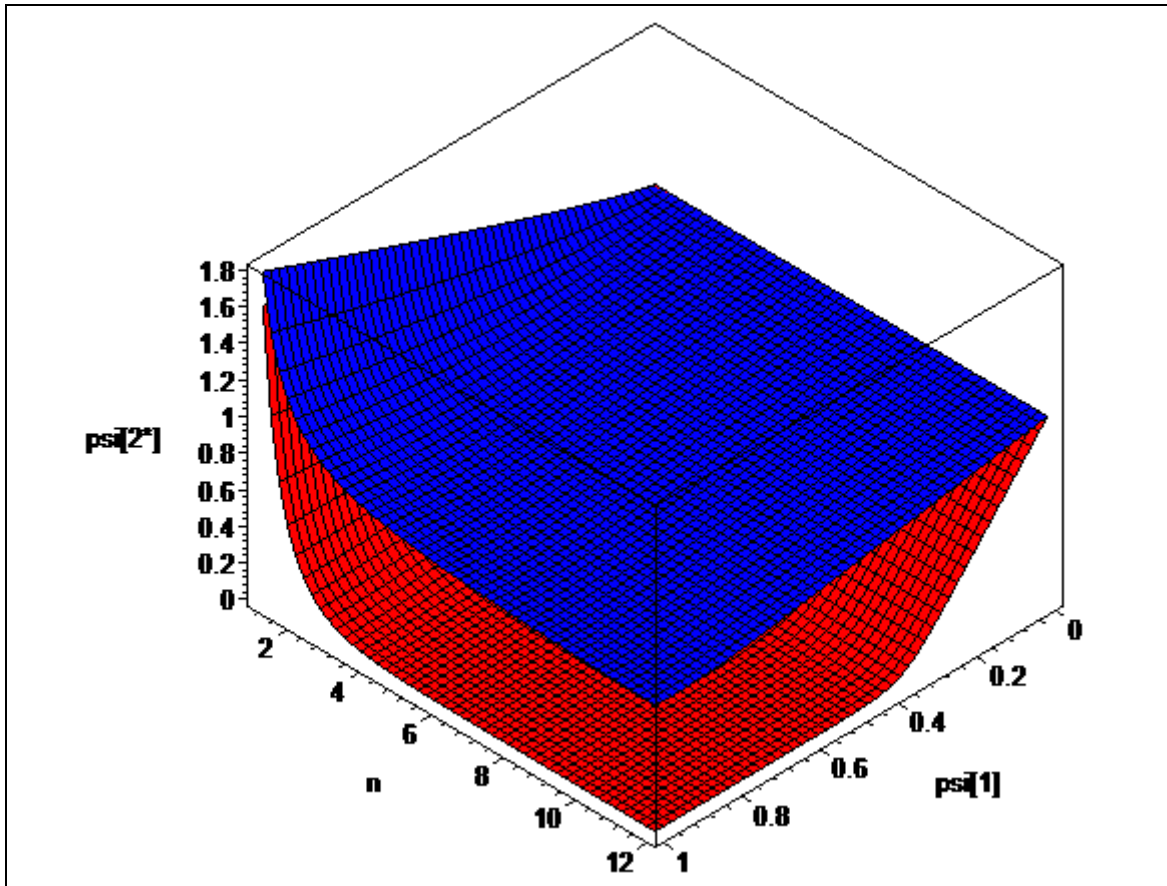


Рисунок 3.34 – Графіки залежностей залишкового ресурсу на другому етапі від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра  $n$

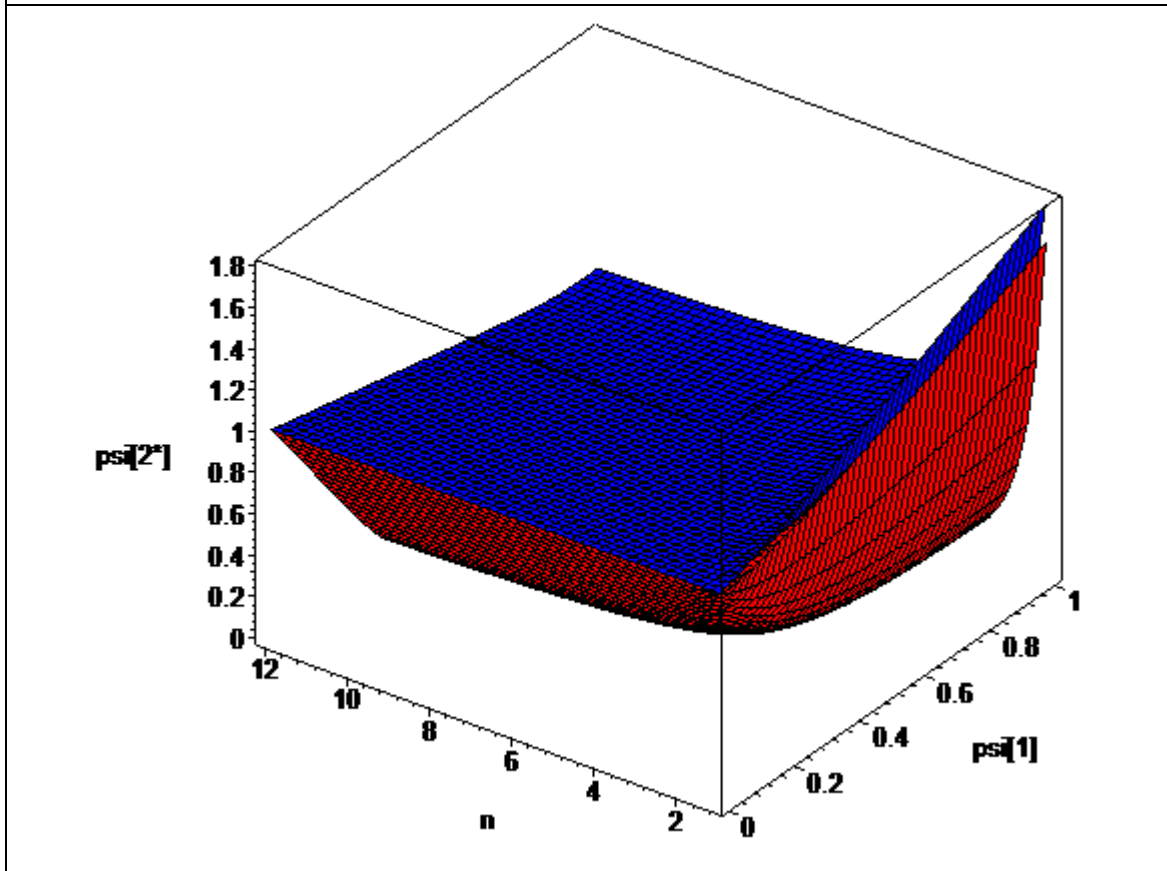
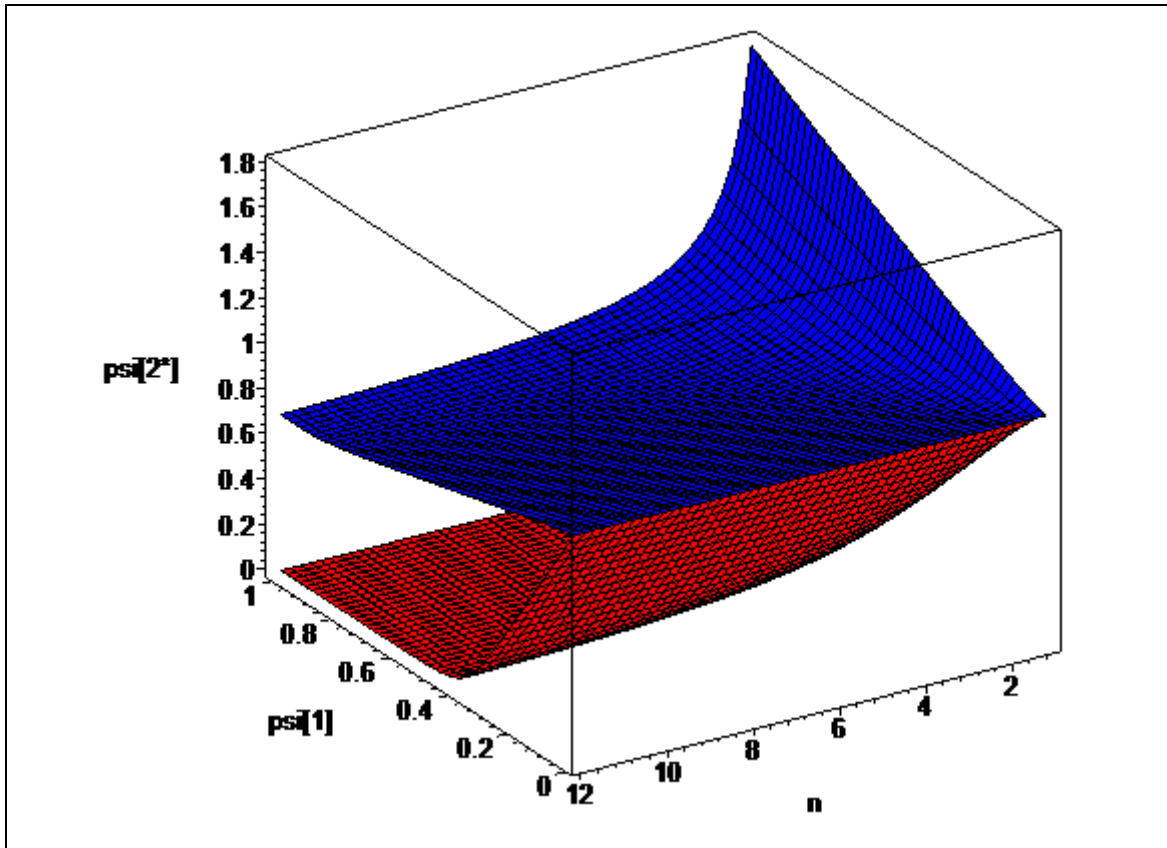


Рисунок 3.35 – Графіки залежностей залишкового ресурсу на другому етапі від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра  $n$

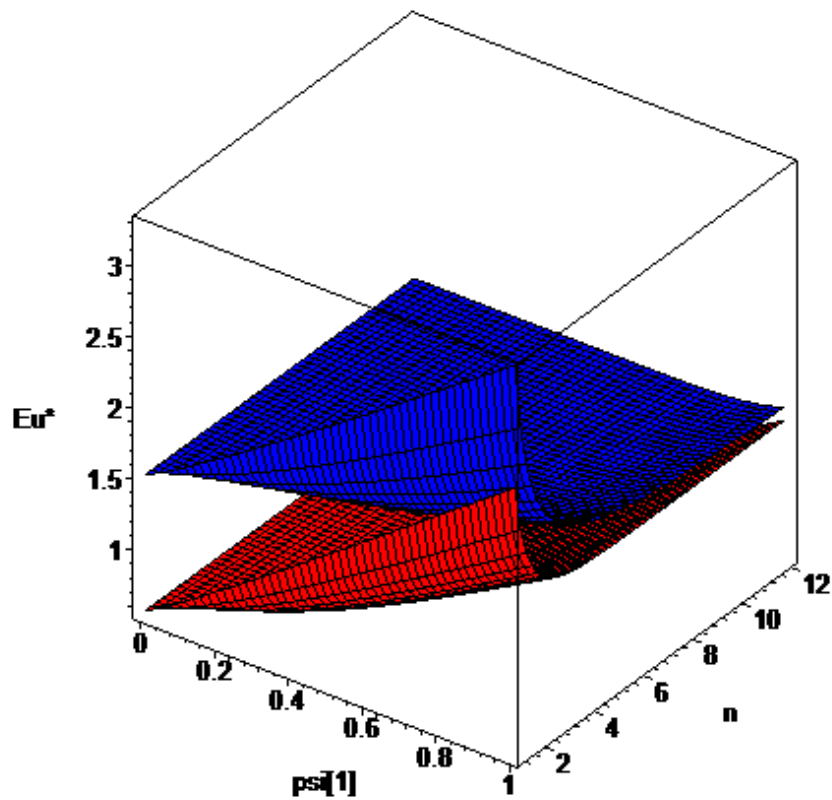
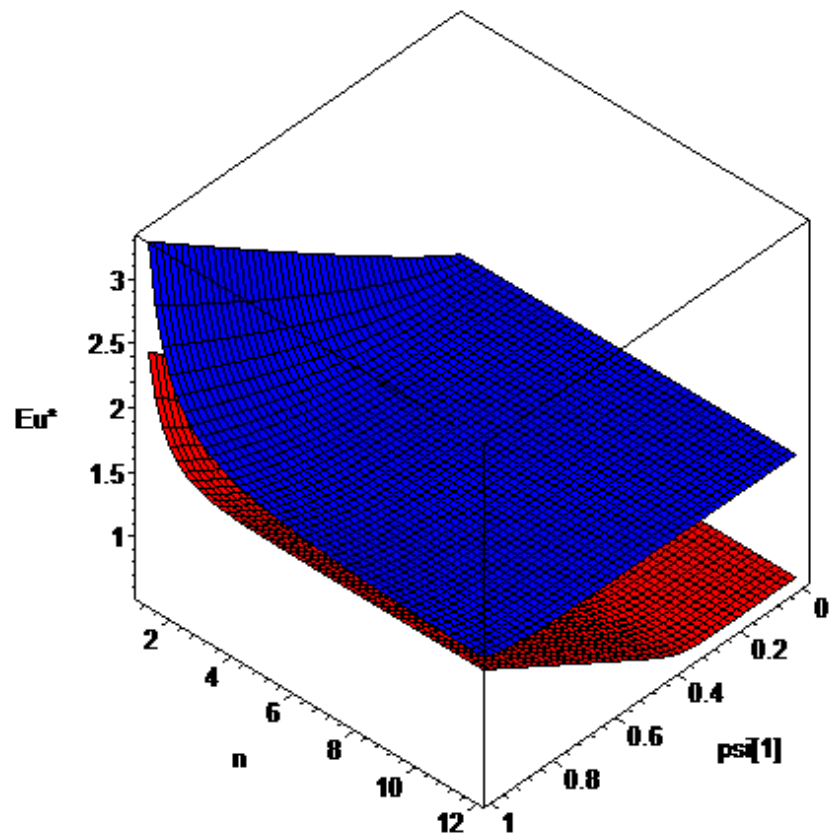


Рисунок 3.36 – Графіки залежностей залишкового ресурсу на другому етапі від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра  $n$

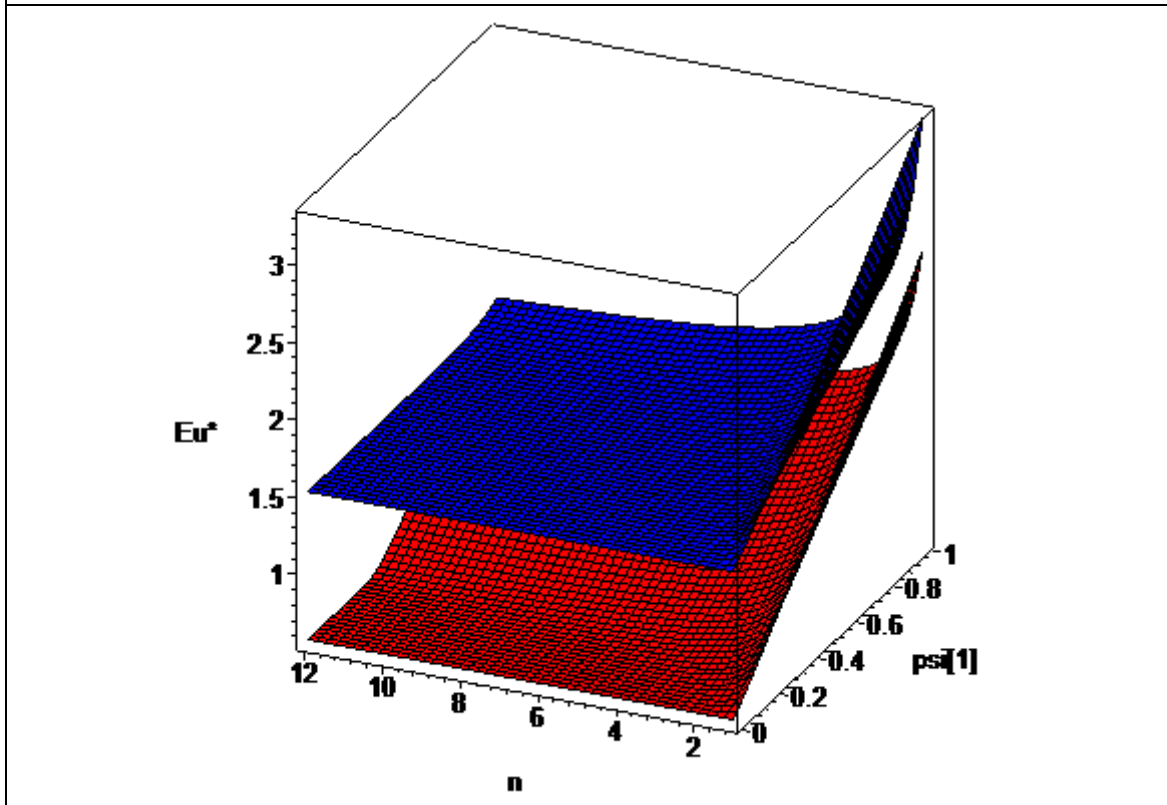
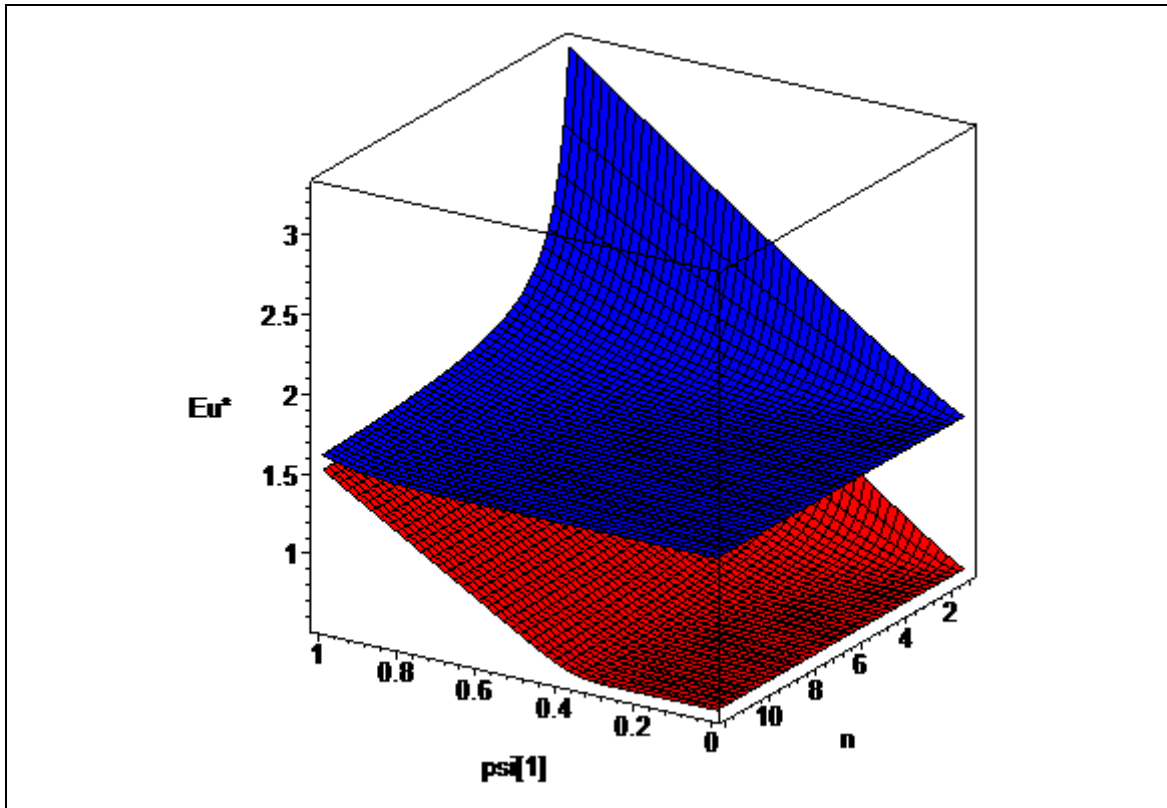


Рисунок 3.37 – Графіки залежностей залишкового ресурсу на другому етапі від використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування та параметра  $n$

Проведене дослідження дозволяє записати такі рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок при деформуванні розтягу-стиску та стиску-розтягу:

- процес двохетапного деформування розтягу-стиску, у порівнянні із стиском-розтягом, набагато кращий;

- для зменшення значень залишкового ресурсу на другому етапі двохетапного деформування та сумарної пластичної деформації необхідно збільшити значення параметра  $n$ ;

- різниця між залишковим ресурсом на другому етапі для розтягу-стиску та стиску-розтягу збільшується при збільшенні значення параметра  $n$  та значення використаного ресурсу на першому етапі двохетапного деформування, а різниця між сумарною пластичною деформацією – зменшується;

- зменшення залишкового ресурсу та сумарної пластичної деформації при холодному двохетапному деформуванні спричинює збільшення значення параметра  $n$ ;

- залишковий ресурс та сумарна пластична деформація для розтягу-стиску, розрахованих за тензорно-нелінійною моделлю, більші від розрахованих за лінійним законом підсумування пошкоджень, а для стиску-розтягу – при  $n = 1,1$  більші, але при збільшенні значення параметра  $n$  поступово стають меншими;

- для опису немонотонного деформування краще застосовувати тензорно-нелінійну модель накопичення пошкоджень, ніж лінійний закон підсумування пошкоджень;

- дослідження математичної моделі накопичення пошкоджень дозволяє нам покращити процес оцінювання придатності подібних матеріалів до відповідних технологічних процесів обробки та властивостей виготовлених деталей.

### 3.6. Висновки

Проведений вище аналіз та дослідження дозволяє зробити наступні основні висновки:

- проведено аналітичне дослідження моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування;

- визначено математично допустимі значення параметрів критеріального співвідношення тензорно-нелінійної моделі;
- здійснена комп'ютерна реалізація досліджувальної математичної моделі та розрахунків залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні в середовищі математичної системи Maple 9;
- розроблена програма в середовищі математичної системи Maple 9 для проведення розрахунків ресурсу пластичності;
- побудоване графічне зображення залежностей між ресурсами;
- використовуючи елементи програмування в Maple 9, було розроблено маплет для полегшення роботи із моделлю в Maple 9;
- здійснено чисельне дослідження закономірності накопичення пошкоджень за допомогою математичної моделі при різних значеннях параметрів;
- виконана перевірка адекватності моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування при зіставленні з наявними експериментальними даними;
- розроблено рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок за умови окремих випадків холодної обробки тиском малопластичних матеріалів;
- процес двохетапного деформування розтягу-стиску, у порівнянні із стиском-розтягом, набагато кращий;
- для опису немонотонного деформування краще застосовувати тензорно-нелінійну модель накопичення пошкоджень, ніж лінійний закон підсумовування пошкоджень;
- дослідження математичної моделі накопичення пошкоджень дозволяє нам покращити процес оцінювання придатності подібних матеріалів до відповідних технологічних процесів обробки та властивостей виготовлених деталей.

## ВИСНОВКИ

Розробка математичних моделей накопичення пошкоджень при обробці металів тиском є надзвичайно необхідною для розв'язку важливих задач сучасного машинобудування. Із уже розроблених математичних моделей накопичення пошкоджень, тензорні найкраще описують немонотонне деформування. В результаті проведення дослідження отримано такі науково-практичні результати:

1. Здійснено аналітичне дослідження моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування, досліджено особливості виведення, будови та складу математичної моделі, визначено математично допустимі значення параметрів критеріального співвідношення тензорно-нелінійної моделі, які зображенні у вигляді системи нерівностей.

2. Для проведення розрахунків залишкового ресурсу при двохетапному деформуванні в середовищі математичної системи Maple 9 здійснена комп'ютерна реалізація математичної моделі, тобто розроблена програма для проведення розрахунків ресурсу пластичності, побудовано графічне зображення залежностей між ресурсами, а також використовуючи елементи програмування в Maple 9, було розроблено маплет для полегшення роботи із моделлю в середовищі Maple 9.

3. За допомогою розробленої програми та маплета виконано чисельне дослідження закономірностей накопичення пошкоджень при різних значеннях параметрів моделі, результати якого зображенні у вигляді графіків залежностей між ресурсами пластичності на певних етапах. Під час дослідження визначено екстремальні і небезпечні зони двохетапного деформування та значення параметрів, при яких математична модель набуває комплексних значень.

4. Здійснена перевірка адекватності моделі накопичення пошкоджень в ізотропних матеріалах під час холодного двохетапного деформування при зіставленні з наявними експериментальними даними. Результати розрахунків та експериментальні дані зобразили в координатах  $\varepsilon_{*u}(\psi_1)$  та  $\psi_{*2}(\psi_1)$ , що дозволило краще оцінити адекватність. Дана перевірка вказала на добру якісну і кількісну відповідність розрахункових та експериментальних даних.



5. За результатами досліджень холодного двохетапного деформування стиску-розтягу та розтягу-стиску малопластичних матеріалів розроблені рекомендації для підвищення деформованості та якості заготовок, отриманих даними видами деформування.

Робота має безперечне прикладне значення, оскільки цілий ряд технологічних процесів можна представити у вигляді набору двух-, трьохетапного деформування зі зміною монотонності. До таких процесів відносяться: методи комбінованого деформування, в т. ч. зі зміною напрямку течії металу і схеми напружено-деформованого стану на наступному етапі деформування заготовок, отриманих пластичним розділом; деформування заготовок сформованих методами ОМТ і т. п.

Основна із цінностей досліджувальної моделі полягає в тому, що за її допомогою можна значно вдосконалити процес пластичної обробки деталей, збільшити якість і точність виготовлення, надійність і довговічність роботи деталей.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] О. В. Нахайчук, О. О. Розенберг, В. А. Огородніков, А. Д. Крицький, В. В. Мельниченко, та С. Ф. Студенець, *Нові технологічні процеси з використанням прогресивних методів пластичного деформування: монографія*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008, 158 с.
- [2] В. О. Краєвський, «Удосконалення процесів холодного торцевого розкочування та ротаційної витяжки на основі математичного моделювання механіки формоутворення.» дис. канд. техн. наук, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, 2005.
- [3] В. М. Михалевич, та В. О. Краєвський, *Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні та ротаційній витяжці [Текст] : монографія*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008, 188 с.
- [4] В. А. Огородніков, В. І. Музичук, та О. В. Нахайчук, *Механіка процесів холодного формозмінювання з однотипними схемами механізму деформації: монографія*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007, 179 с.
- [5] Р. І. Сивак, та В. А. Огородніков, *Холодне комбіноване видавлювання: монографія*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2011, 180 с.
- [6] В. А. Огородніков, О. Ю. Співак, та О. В. Грушко, *Деформація волочинням і фізико-механічні властивості тонких термомічних дротів: монографія*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2014, 112 с.
- [7] В. А. Огородніков, І. Ю. Кириця, та В. Є. Перлов, *Механіка процесів холодного пластичного деформування вісесиметричних заготовок з глухим отвором: монографія*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2015, 164 с.
- [8] В. В. Савуляк, І. О. Сивак, та В. І. Савуляк, *Пластичне деформування тонколистового матеріалу в умовах значних локалізацій деформацій та напружень: монографія*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008, 150 с.
- [9] Л. К. Поліщук, *Динаміка вмонтованого гідроприводу конвеєрів мобільних машин [Текст]: монографія*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2018, 240 с.
- [10] Л. К. Поліщук, та О. О. Адлер, *Вмонтовані гідравлічні приводи конвеєрів з гнучким тяговим органом, чутливі до зміни наван-*

таження [Текст]: монографія. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2010, 184 с.

[11] В. М. Михалевич, *Тензорні моделі накопичення пошкоджень*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998, 195 с.

[12] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, *Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні: монографія*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2013, 180 с.

[13] Y. Bao, and T. Wierzbicki, «On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 46, № 1, pp. 81-98, 2004.

[14] M. G. Cocroft, and D. J. Latham, «Ductility and the workability of metals,» *Journal of the Institute of metals*, vol. 96, pp. 33-39, 1968.

[15] I. Aliiev, Y. Zhbakov, and S. Martynov, «Forging of shafts, discs and rings from blanks with inhomogeneous temperature field,» *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*, 51 (4), pp. 393-400, 2016.

[16] I. Aliiev, L. Aliieva, N. Grudkina, and I. Zhbakov, «Prediction of the variation of the form in the processes of extrusion,» *Metallurgical and Mining Industry*, 3 (7), pp. 17-22, 2011.

[17] I. S. Aliiev, R. I. Sivak, O. E. Markov, and V. N. Levchenko, «The evaluation of workpiece deformability for the process of two-stage extrusion of hollow hull,» *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 129 (3-4), pp. 1345-1353, 2023.

[18] L. I. Aliieva, O. E. Markov, I. S. Aliiev, N. S. Hrudkina, V. N. Levchenko, and K. V. Malii, «Analysis of Power Parameters of Combined Three-Direction Deformation of Parts with Flange,» *FME Transactions*, 49 (2), pp. 344-355, 2021.

[19] L. I. Aliieva, O. E. Markov, I. S. Aliiev, N. S. Hrudkina, V. N. Levchenko, and K. V. Malii, «Analysis of Power Parameters of Combined Three-Direction Deformation of Parts with Flange,» *FME Transactions*, 49 (2), pp. 344-355, 2021.

[20] L. Aliieva, N. Hrudkina, I. Aliiev, I. Zhbakov, and O. Markov, «Effect of the tool geometry on the force mode of the combined radial-direct extrusion with compression,» *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (1-104), pp. 15-22, 2020.

[21] М. М. Вірник, Р. Д. Іскович-Лотоцький, та Ю. В. Добранюк, «Формувальна машина,» № 31169 Україна, МПК В 22 С 15/00, Березень 25, 2008.

[22] С. Гожій, та Л. Кривда, «Штапування обкочуванням як засіб ресурсозбереження,» *Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*, Т. 46, № 2, с. 55-60, 2006.

[23] V. Matvijchuk, A. Shtuts, M. Kolisnyk, I. Kupchuk, and I. Derevenko «Investigation of the Tubular and Cylindrical Billets Stamping by Rolling Process with the Use of Computer Simulation,» *Key Engineering Materials. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, № 66 (1), pp. 51-58, 2022.

[24] V. A. Ogorodnikov, and T. F. Arkhipova, «Prediction of the Mechanical Properties of Metals After Cold Pressing,» *Materials Science*, 55 (1), pp. 63-68, 2019.

[25] V. A. Ogorodnikov, N. S. Grechanyuk, and A. V. Gubanov, «Energy Criterion of the Reliability of Structural Elements in Vehicles,» *Materials Science*, 53 (5), pp. 645-65, 2018.

[26] O. Rubanenko, O. Kazmiruk, V. Bandura, V. Matvijchuk, and O. Rubanenko, «Determination of optimal transformation ratios of power system transformers in conditions of incomplete information regarding the values of diagnostic parameters,» *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (3-88), pp. 66-79, 2017.

[27] A. Shtuts, M. Kolisnyk, A. Vydmysh, O. Voznyak, S. Baraban, and P. Kulakov, «Improvement of Stamping by Rolling Processes of Pipe and Cylindrical Blades on Experimental Research,» *Key Engineering Materials*, Vol. 844. pp. 168-181, 2020.

[28] S. Y. Sheykin, O. V. Grushko, V. V. Melnichenko, S. F. Studenets, I. Y. Rostotskyi, D. V. Iefrosinin et al., «On the Contact Interaction between Hard-Alloy Deforming Broaches and a Workpiece during the Shaping of Grooves in the Holes of Tubular Products,» *Journal of Superhard Materials*, 43 (3), pp. 222-230, 2021.

[29] A. Shtuts, M. Kolisnyk, and V. Yavdyk, «Improvement of processes of rolling stamping on the basis of investigation of technological parameters on the mechanics of workpieces formation,» *Motrol*, Vol. 20, №1, pp. 19-25, 2018.

[30] R. Sivak, «Evaluation of metal plasticity and research on the mechanics of pressure treatment processes under complex loading,» *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (7-90), pp. 34-41, 2017.

[31] О. В. Грушко, та О. В. Гуцалюк, «Моделювання процесу редукування циліндричних заготовок з визначенням основних параметрів деформованого стану,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 1, с. 57-62, 2016.

[32] О. В. Грушко, В. А. Огородніков, та Ю. О. Слободянюк «Деформовності маловуглецевого дроту в процесі його багатоступінчастого холодного волочіння,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 3, с. 103-110, 2019.

[33] О. В. Грушко, та Ю. О. Слободянюк, «Особливості формування показників якості обмідненого зварювального маловуглецевого дроту,» *Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії*, № 47, с. 25-28, 2015.

[34] В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, та Краєвський В. О., «Пристрій для давильних робіт,» № 20031213282, Жовтень 15, 2004.

[35] V. A. Matviychuk, and L. I. Aliyeva, «Development of technological process of flanges upsetting on tubular billets by face rolling,» in *Produkcy a Zarzadzanie w Hutnictwie. XIV Miedzynarodowa Konferency a Naukowo-Techniczna : Politechnika Czestochowska, Szczyrk*, 28 czerwca. - 1 lipca, 2006, pp. 132-136.

[36] В. О. Краєвський, В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Математична модель згинання смуги змінної товщини та ширини,» у зб.: «Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні». *Тематичний збірник наукових праць*, Краматорськ, Україна: ДДМА, 2008, с. 171-176.

[37] А. А. Штуць, «Комп'ютерне моделювання процесу штампування обкочуванням циліндричних та трубчастих заготовок з використанням програмного комплексу Deform-3d,» *Вібрації в техніці та технологіях*, № 4 (99), с. 101-113, 2020.

[38] А. А. Штуць, та В. А. Матвійчук, «Комп'ютерне моделювання процесу штампування обкочуванням трубчастих заготовок,» *Збірник наукових праць ВНАУ. Технічні науки*, № 1 (95), с. 178-184, 2016.

[39] І. В. Гунько, «Оцінка деформівності матеріалу заготовок при холодному вальцюванні,» *Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія машинобудування*, № 64, с. 196-200, 2012.

[40] В. А. Матвійчук, та І. А. Бубновська, «Аналіз схем технологічного процесу виготовлення компресорних лопаток із застосуванням операції гарячого вальцювання,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК*, № 3 (95), с. 160-165, 2016.

[41] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Вісесиметрична осадка циліндричних заготовок,» *Наукові нотатки: міжвузівський збірник за напрямом інженерна механіка*, № 5, с. 241-249, 2009.

[42] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Удосконалення методу розв'язування двовимірної задачі пресування штаби,» *Вісник НТУУ «КПІ»*, № 2, с. 79-88, 2016.

[43] І. В. Севостьянов, Ю. В. Добранюк, та І. А. Бубновська, «Розвиток процесів вальцювання криволінійних заготовок із алюмінієвих сплавів,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 2, с. 150-157, 2017.

[44] О. В. Сердюк, С. І. Сухоруков, В. В. Сердюк, та О. А. Корчинський, «Дослідження процесу обкочування роликком із гвинтовою робочою поверхнею,» *Вісник Хмельницького національного університету. Серія «Технічні науки»*, № 5, с. 66-68, 2021.

[45] А. А. Штуць, та М. О. Служалюк, «Дослідження процесів штампування обкочуванням з використанням поверхневого нагріву заготовок,» *Вібрації в техніці та технологіях*, № 2 (97), с. 138-148, 2020.

[46] А. А. Штуць, «Дослідження процесів штампування обкочуванням плоских кільцевих і фланцевих заготовок із листа,» *Технічні науки: Збірник наукових праць. Хмельницького національного університету*, №2 (235), с. 167-171, 2016.

[47] В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, та В. О. Краєвський, «Розробка маловідходних процесів формування тонкостінних циліндричних деталей,» у зб.: «Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні». Тематичний збірник наукових праць, Краматорськ, Україна: ДДМА, 2004, с. 281-286.

[48] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Удосконалення методу розв'язування двовимірної задачі пресування штаби,» *Вісник НТУУ «КПІ». Серія "Машинобудування"*, № 2 (77), с. 79-88, 2016.

[49] В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Дослідження пластичності металів способами осаджування та вальцювання,» у *Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і фахової освіти: Тези доповідей XV Міжнародної науково-технічної конференції*, Київ, Україна: НТУУ «КПІ», 2014, с. 58-59.

[50] О. В. Грушко, О. В. Гуцалюк, та Ю. О. Слободянюк, «Спосіб відбору партій сталевий маловуглецевої катанки для волочіння дроту з прогнозованими механічними характеристиками,» №123757. *G01N 3/08 (2006/01). G01N 3/28 (2006/01)*, Березень 12, 2018.

[51] В. А. Матвійчук, О. О. Рубаненко, та І. А. Бубновська, «Спосіб виготовлення криволінійних заготовок вальцюванням,» *МПК G01N 3/08 (2006/01). № 120472*, Листопад 10, 2017.

[52] В. А. Матвійчук, В. В. Явдик, та А. А. Штуць, «Патент на винахід. Спосіб виготовлення вісесиметричних виробів з днищами і горловинами штампуванням обкочуванням,» № 116672 *Україна. МПК((2006.01). B21D 37/12 (2018.01)*, Квітень 25, 2018.

[53] Р. Д. Іскович-Лотоцький, Ю. В. Добранюк, та Н. Р. Веселовська, «Вібраційна установка для обробки деталей,» № 40983 *Україна, МПК В 24 В 31/00*, Квітень 27, 2009.

[54] В. А. Матвійчук, А. А. Штуць, та В. В. Явдик, «Розвиток технологічних можливостей процесів штампування обкочуванням,» *Технічні науки: Збірник наукових праць. ВНАУ*, № 1 (89), с. 27-32, 2015.

[55] Ю. В. Добранюк, Л. І. Алієва, та В. М. Михалевич, «Моделювання за допомогою програмного комплексу DEFORM-3D напружено-деформованого стану на бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць* : Краматорськ : ДГМА. № 4, с. 3-10, 2010.

[56] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Аналітичне представлення максимального радіуса циліндричних заготовок під час вісесиметричного осадження із бочкоутворенням,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 1, с. 59-66, 2015.

[57] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Аналітичний опис динаміки формозміни циліндричних заготовок під час торцевого стищення,» *Вісник Національного технічного університету "ХПІ"*, № 47, с. 53-56, 2015.

[58] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Модель пластичного деформування матеріалу на вільній поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження. Частина 1. Апроксимація деформацій,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 2, с. 97-102, 2010.

[59] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Модель пластичного деформування матеріалу на вільній поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження. Частина 2. Визначення накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій на основі різних апроксимацій,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 3, с. 99-102, 2010.

[60] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Моделювання циклічної вісесиметричної осідання циліндричних зразків,» *Збірник наукових праць Вінницького державного аграрного університету. Серія: Технічні науки*, № 2, с. 26-31, 2009.

[61] V. M. Mikhalevich, Yu. V. Dobranuk, V. A. Kraevsky, and O. V. Mikhalevich, «Dependence of plastic ultimate strain from a friction at end faces at axisymmetric compression,» *Bulet. Inst. Politehnic Din Iasi, Tomul LIV(LVIII), Fasc. 3-4*, pp. 49-53, 2008.

[62] V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, and Yu. V. Dobranuk, «Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression,» *Strength of Materials*, 43 (6). pp. 591-603, 2011. DOI: 10.1007/s11223-011-9332-7.

[63] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Удосконалення експериментальної частини експериментально-аналітичної методики дослідження напружено-деформованого стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричної осадки,» *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, № 4, 2011, 8 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/304>. Дата звернення: Березень 01, 2024.



[64] A. A. Lebedev, V. M. Mykhalevych, and Yu. V. Dodranuk, «Model of material plastic deformation in axisymmetric compression of cylindrical specimens,» *Metalurgija*, vol. 49, br. 3, pp. 228, 2010.

[65] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Визначення граничних деформацій бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження за допомогою імітаційного моделювання,» *Вісник Національного технічного університету "ХПІ": збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних технологіях*, № 45, с. 104-107, 2011.

[66] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Визначення за початковою ділянкою траєкторії деформацій граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 2, с. 163-167, 2012.

[67] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Накопичена деформація та інтенсивність логарифмічних деформацій при осадці циліндричних зразків з бочкоутворенням,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 1 (20), с. 129-134, 2009.

[68] В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Прогнозування граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 1 (30), с. 24-30, 2012.

[69] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Аналітичне представлення радіуса торців циліндричних заготовок під час вісесиметричного осадження,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 2 (41), с. 56-62, 2015.

[70] Ю. В. Добранюк, «Аналітичне представлення максимально-го радіуса циліндричних заготовок під час вісесиметричного осадження із бочкоутворенням,» *Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів*, Житомир, Україна: ЖДУ ім. І. Я. Франка, Вип. 10, с. 12-17, 2017.

[71] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Моделювання граничних деформацій на вільній бічній поверхні під час високотемпературного торцевого осадження,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 2, с. 54-60, 2015.

[72] Ю. В. Добранюк, та І. А. Кохан, «Побудова узагальненої математичної моделі деформованого стану циліндричного зразка під

час торцевого стиснення на основі математичного аналізу,» у *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності: зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-практ. конф., 15-16 травня 2019 р.*, Вінниця, Україна: ВДПУ ім. Михайла Коцюбинського, 2019, с. 45-50.

[73] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Моделювання граничних деформацій на вільній поверхні при осесиметричній осідання,» у *Прогресивні методи та технологічне оснащення процесів обробки металів тиском: мат. міжнарод. наук.-техн. конф.*, 2009, с. 108-112.

[74] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «НДС бічної поверхні циліндричної заготовки при вісесиметричному осадженні,» у *Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і фахової освіти: V Міжнародної науково-технічної конференції*, Київ, Україна: НТУУ «КПІ», 2014, с. 17-18.

[75] Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Моделювання за допомогою програмного комплексу Deform-3D напружено-деформованого стану циліндричних зразків під час торцевого стиснення,» у *Теоретичні і прикладні задачі обробки металів тиском та автотехнічних експертиз: Тези доповідей міжнародної науково-технічної конференції "ВНТУ-2011"*, Вінниця, Україна: ВНТУ, 2011, с. 222-224.

[76] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Залежність максимального діаметру заготовки від ступеня деформування під час вісесиметричного осадження,» у *Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта: Тези доповідей XVI Міжнародної науково-технічної конференції*, Одеса, Україна: НТУУ «КПІ», 2015, с. 83-84.

[77] Ю. В. Добранюк, та Я. Д. Лебідь, «Побудова математичної моделі максимального діаметру циліндричного зразка під час торцевого стиснення на основі математичного аналізу,» у *Матеріалах XLVII науково-технічної конференції підрозділів ВНТУ*, Вінниця, Україна: ВНТУ, 2018, 5 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2018/paper/view/4918>. Дата звернення: Березень 01, 2024.

[78] Ю. В. Добранюк, та А. Р. Козуб, «Порівняльний аналіз накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій бічної поверхні циліндричних зразків під час торцевого стиснення із використанням СКМ Maple,» у *Матеріали XLIX науково-технічної кон-*

ференції підрозділів ВНТУ, Вінниця, Україна: ВНТУ, 2020, 5 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2020/paper/view/9464>. Дата звернення: Березень 01, 2024. р.

[79] A. V. Titov, V. M. Mykhalevych, P. Popiel, and K. Mussabekov, «Statement and solution of new problems of deformability theory,» *Proc. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, 108085E, October, 2018.

[80] A. A. Lebedev, and V. M. Mikhalevich, «On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics,» *Strength of Materials*, № 35, pp. 217-224, May-June, 2003.

[81] A. A. Lebedev, and V. M. Mikhalevich, «Criteria relationships for residual life assessment of materials,» *Strength of Materials*, 38 (4), pp. 348-353, 2006.

[82] V. Matviychuk, V. Mikhalevich, and A. Shtuts, «Analysis of stress-strain state (sss) of billet material in the course of setting by resource-saving method of roll stamping,» *Вібрації в техніці та технологіях*, № 1 (108), с. 63-72, 2023.

[83] V. M. Mikhalevich, «Plasticity at cyclic hot straining,» *Problemy Prochnosti*, (6), pp. 10-17, 1994.

[84] О. В. Грушко, та І. Ю. Кириця, «Критерії деформівності з врахуванням властивостей матеріалу в параметрі напруженого,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 1. с. 30-37, 2022.

[85] V. M. Mikhalevich, and I. V. Abramchuk «Maximum Accumulated Strain for Linear Two-Link Triangle-Like Deformation Trajectories,» *International Applied Mechanics*, 57 (6). pp. 720-736, 2021.

[86] О. В. Грушко, та Ю. О. Слободянюк, «Механічні характеристики сталей G3Si1 та СВ-08Г2,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 4, с. 103-109, 2018.

[87] О. В. Грушко, Ю. О. Слободянюк, та Р. С. Ткаченко, «Криві течії катанки марок G3Si1 та СВ-08Г2С,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 1, с. 207-213, 2016.

[88] V. Mykhalevych, Yu. Dobraniuk, V. Matviichuk, V. Kraievskiyi, O. Tiutiunnyk, S. Smailova et al., «A comparative study of various models of equivalent plastic strain to fracture,» *Informatyka, Automatyka, Pomiarы W Gospodarce I Ochronie Środowiska*, № 13, pp. 64-70, 2023. <https://doi.org/10.35784/iapgos.3496>

[89] В. А. Матвійчук, М. А. Колісник, та А. А. Штуць, «Побудова кривих граничних деформацій матеріалів,» *Вібрації в техніці та технологіях*, № 2 (105), с. 84-90, 2022.

[90] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та О. В. Михалевич, «Необхідні та достатні умови опуклості функції пошкоджень під час нестационарних процесів,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 5, с. 113-117, 2010.

[91] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та В. О. Краєвський, «Порівняльне дослідження моделей граничних пластичних деформацій,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 2, с. 56-64, 2018.

[92] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Моделювання граничних пластичних деформацій при нестационарних процесах та задачі оптимізації,» *Вісник Національного технічного університету "ХПІ": збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних технологіях*, № 31, с. 64-70, 2009.

[93] В. А. Огородніков, О. В. Грушко, та О. В. Гуцалюк, «Історія деформування, що визначає застосування феноменологічних критеріїв руйнування у процесах обробки тиском,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 1, с. 67-77, 2015.

[94] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Аналітичне дослідження моделі залишкового ресурсу при діагностиці матеріалу,» *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, № 1, 2008, 6 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/46>. Дата звернення: Березень 01, 2024.

[95] В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, Ю. В. Добранюк, та Є. А. Трач, «Моделі підсумовування розсіяних пошкоджень в процесах пластичного деформування,» *Вісник Національного технічного університету "ХПІ": збірник наукових праць. Тематичний випуск: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії*, № 43 (1086), с. 98-103, 2014.

[96] В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, та Ю. В. Добранюк, «Постановка та розв'язання оптимізаційних задач при визначенні граничного стану циліндричної заготовки під час нестационарного деформування,» у *Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і фахової освіти: Тези доповідей VI Міжнародної нау-*

ково-технічної конференції, Київ, Україна: НТУУ «КПІ», 2015, с. 25-31.

[97] V. Matviichuk, I. Bubnovska, V. Mykhalevych, M. Kovalchuk, W. Wójcik, A. Tuleshov et al., «Tensor models of accumulation of damage in material billets during roll forging process in several stages,» *Mechatronics, Vol. II, London: Taylor Francis Group, CRC Press, Balkema book*, pp. 111-120, 2021.

[98] В. М. Михалевич, «Історія та сучасний стан тензорної теорії накопичення пошкоджень,» *Надійність і довговічність машин і споруд: Міжнар. наук.-техн. зб., Київ: ІПМіцн. ім. Г. С. Писаренка НАНУ, Вип. 37, с. 132-140, 2013.*

[99] С. О. Пискунов, О. І. Гуляр, та С. В. Мицюк, «Огляд співвідношень континуальної механіки руйнування для опису процесів повзучості і втоми,» *Опір матеріалів і теорія споруд, № 91, с. 29-38, 2013.*

[100] С. О. Пискунов, та Р. М. Остапенко, «Моделювання повзучості та розвитку зони континуального руйнування ротора парової турбіни за наявності початкової неоднорідності матеріалу,» *Моделювання процесів в металургії та машинобудуванні, № 2, с. 140-149, 2009.*

[101] С. О. Пискунов, Т. А. Бахтатаршоев, та К. І. Самофал, «Про використання критеріїв міцності анізотропних матеріалів,» *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн., Вип. 110, с. 496-506, 2023.*

[102] V. A. Ogorodnikov, I. A. Dereven'ko, and R. I. Sivak, «On the Influence of Curvature of the Trajectories of Deformation of a Volume of the Material by Pressing on Its Plasticity Under the Conditions of Complex Loading,» *Materials Science, 54 (3), pp. 326-332, 2018.*

[103] V. A. Ogorodnikov, T. Zyska, and S. Sundetov, «The physical model of motor vehicle destruction under shock loading for analysis of road traffic accident,» *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 10808, 2018.*

[104] І. А. Бубновська, «Аналіз напруженого стану заготовок при вальцюванні,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК, № 2. с. 80-85, 2019.*

[105] І. А. Бубновська, «Дослідження напружено-деформованого стану заготовок при вальцюванні,» *The scientific heritage*, Budapest, № 47. с. 31-37, 2020.

[106] В. А. Матвійчук, та І. А. Бубновська, «Оцінка деформованості матеріалу криволінійних заготовок при холодному вальцюванні,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК*, № 4, с. 92-96, 2017.

[107] В. А. Матвійчук, М. А. Колісник, та А. А. Штуць, «Дослідження напружено-деформованого стану матеріалу заготовок при прямому витискуванні методом штампування обкочуванням,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК*, № 3 (102), с. 77-84, 2018.

[108] В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, та М. А. Колісник, «Оцінка деформованості матеріалу заготовок при прямому і зворотному витискуванні методом штампування обкочуванням,» *Вібрації в техніці та технологіях*: Вінниця, № 1, с. 81-91, 2022.

[109] В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, та А. А. Штуць, «Аналіз напружено-деформованого стану матеріалу заготовок при висаджуванні ресурсощадним методом штампування,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК*, № 1 (120), с. 76-85, 2023.

[110] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Напружений стан товстостінної труби під рівномірним тиском,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 1, с. 67-72, 2016.

[111] В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, та І. А. Бубновська, «Оцінка деформованості матеріалу заготовок при вальцюванні,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК*, № 2, с. 56-64, 2021.

[112] В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, та М. А. Колісник, «Оцінка деформованості матеріалу при висаджуванні елементів заготовок методом штампування обкочуванням,» *Техніка, енергетика, транспорт АПК*, Т. 2, № 117, с. 104-114, 2022.

[113] В. А. Огородніков, О. В. Грушко, та О. В. Гуцалюк, «Вибір критеріїв деформованості при оцінці використаного ресурсу пластичності у процесах обробки металів тиском,» *Вісник Національного технічного університету ХП. Серія Інноваційні технології та устаткування обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії*, № 43, с. 127-136, 2014.

[114] І. В. Гунько, та Ю. В. Добранюк, «Оцінка напружено-деформованого стану заготовок при холодному вальцюванні,» *Між-*

народний науковий журнал «Acta universitatis Pontica Euxinus». Спеціальний випуск, Т. 3, Варна, с. 459-462, 2013.

[115] V. O. Kraievskiy, V. M. Mykhalevych, Yu. V. Dobranyuk, D. Sawicki, and K. Mussabekov, «Selection of optimal path of strain rate change in the process of multistage hot deformation under the condition of the equal duration of stages,» *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, 108084T (1 October 2018), 8 p., 2018.

[116] V. Matviychuk, and A. Shtuts, «Construction of curve boundary deformations of metals,» In: *Traditional and innovative approaches to scientific research: theory, methodology, practice: Scientific monograph*, Riga, Latvia : Baltija Publishing, 2022, pp. 90-113.

[117] В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, та І. А. Бубновська, «Оцінка деформованості матеріалу заготовок при вальцюванні за схемами в два і більше переходів,» у *Міжнародній науково-методичній Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності»*, Вінниця, Україна: ВНТУ, 2018, с. 246-249. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc/paper/viewFile/5663/4808>. Дата звернення: Березень 01, 2024.

[118] Yu. Dobranyuk, and A. Kozub, «Comparative analysis of the stress-strain state of the free surface of cylindrical samples during rolling using SCM Maple,» in *III International Scientific and Practical Internet Conference "Mathematics and Informatics in Higher Education: Challenges of Modernity", dedicated to the memory of Professors O. A. Pankov and V. S. Trokhymenko*, Vinnytsia, 2021, pp. 67-74.

[119] В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та І. А. Бубновська «Спосіб визначення пластичності металів вальцюванням циліндричних зразків на клин,» *МПК G01N 3/08 (2006/01). № 109984*, Вересень 26, 2016.

[120] В. А. Матвійчук, та І. А. Бубновська, «Моделювання температурних і деформаційних полів заготовки в процесі гарячого вальцювання за схемою круговал,» *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*, № 1, с. 35-39, 2015.

[121] A. Kolomiets, O. Tiutiunyk, O. Stakhova, and O. Fonariuk, Yu. Dobraniuk, N. Hensitska-Antoniuk, «Professional orientation of fundamentalization of mathematical training of future technical

specialists,» *AD ALTA : Journal of Interdisciplinary Research open journal*, 11/02-XXII, pp. 39-46, 2021.

[122] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та О. В. Михалевич, «Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування,» *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, № 2, 7 с, 2009. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/138/137>. Дата звернення: Березень 01, 2024.

[123] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, та Я. В. Крупський, «Фрагменти електронних освітніх ресурсів з функції двох змінних в середовищі СКМ Maple,» у *Математика у технічному університеті XXI сторіччя: зб. наук. праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції, 15-16 травня 2017 р.*, Краматорськ, Україна: ДДМА, 2017, с. 20-22.

[124] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Апроксимація залежностей між компонентами деформацій на бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення,» *Свідомство про реєстрацію авторського права на твір № 38309*, Травень 11, 2011.

[125] В. М. Михалевич, та Ю. В. Добранюк, «Розрахунок граничного стану та побудова кривих граничних деформацій бічної поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення,» *Свідомство про реєстрацію авторського права на твір № 38308*, Травень 11, 2011.

[126] Ю. В. Добранюк, В. М. Михалевич, А. А. Коломієць, та О. М. Козак, «Застосування СКМ Maple для побудови 3D графіків в задачах обчислення об'єму фігур,» *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*, № 2, с. 115-123, 2022.



*Наукове видання*

**Михалевич Володимир Маркусович  
Добранюк Юрій Володимирович  
Тютюнник Оксана Іванівна**

**МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ  
В ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛАХ ПРИ ХОЛОДНОМУ  
ДВОХЕТАПНОМУ ДЕФОРМУВАННІ**

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено Ю. Добранюком

Підписано до друку  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. др. арк. ....  
Наклад 100 прим. Зам № .....

Вінницький національний технічний університет,  
ІРВЦ ВНТУ,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-81-59  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.