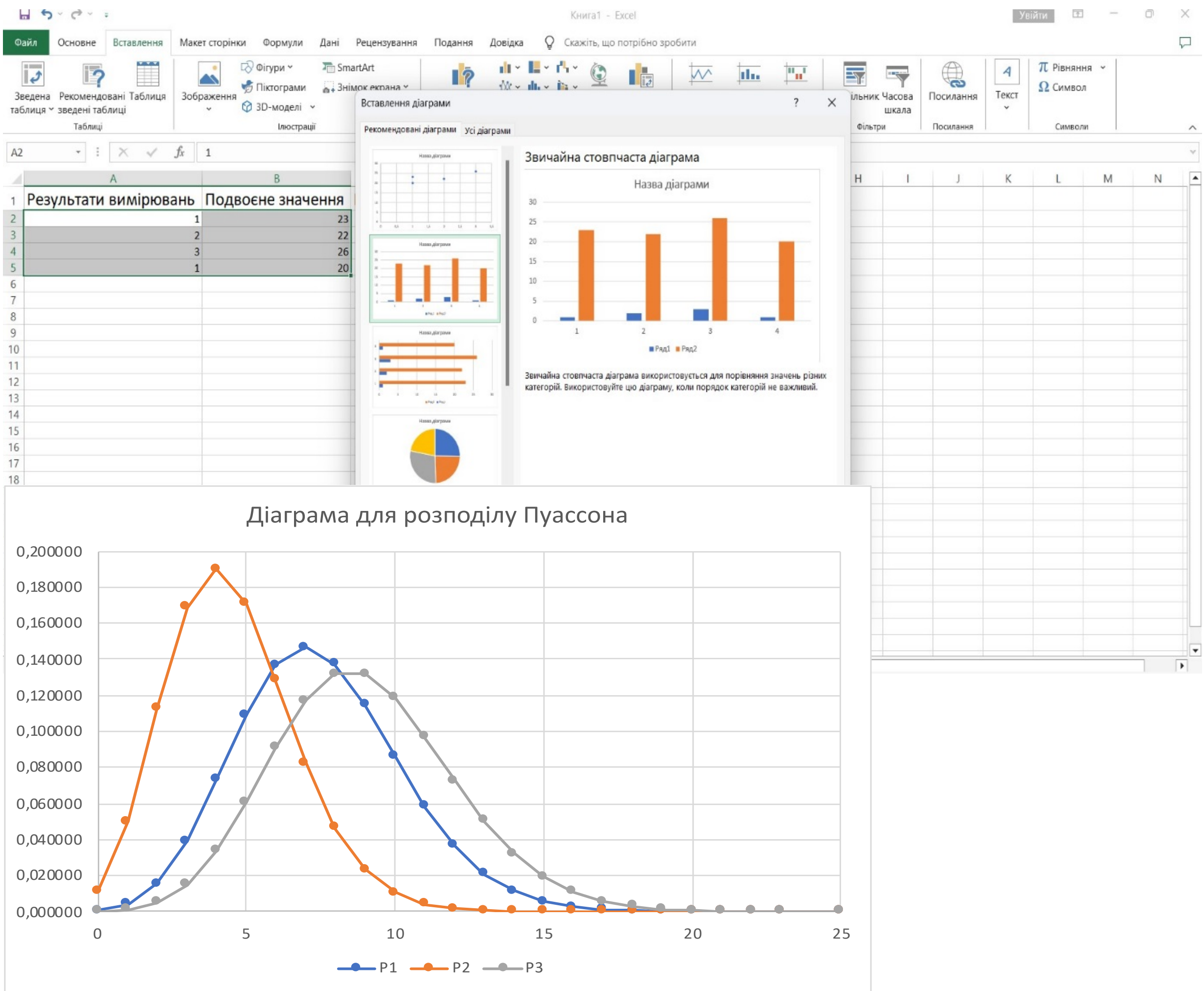
В. С. ОЗЕРАНСЬКИЙ, Л. В. КРИЛИК, О. Ф. ШЕВЧУК

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

для здобувачів спеціальності
122 «Комп'ютерні науки»



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. С. ОЗЕРАНСЬКИЙ, Л. В. КРИЛИК, О. Ф. ШЕВЧУК

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА для здобувачів спеціальності 122 «Комп’ютерні науки»

Електронний лабораторний практикум

Вінниця
ВНТУ
2025

УДК 519.21(076)
К85

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 28.11.2024 р.)

Рецензенти:
Н. І. Заболотна, доктор технічних наук, професор
Т. Б. Мартинюк, доктор технічних наук, професор
О. В. Зелінська, кандидат технічних наук, доцент

Крилик, Л. В.
К85 Теорія ймовірності та математична статистика для здобувачів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» : лабораторний практикум [Електронний ресурс] / Озеранський В. С., Крилик Л. В., Шевчук О. Ф. − Вінниця : ВНТУ, 2025.− 113 с.

У лабораторному практикумі наведено основні теоретичні відомості, вимоги до структури та захисту лабораторних робіт з дисципліни «Теорія ймовірності та математична статистика», подано довідниковий матеріал та рекомендовану літературу. Лабораторний практикум розроблено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Теорія ймовірності та математична статистика».

УДК 519.21(076)

ЗМІСТ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ СУЧАСНИХ ТАБЛИЧНИХ ПРОЦЕСОРІВ

Мета роботи: набути навичок створення файлів даних, побудови різноманітних графічних залежностей та обчислення описувальних статистик.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Для зручного подання числових та символьних даних використовують таблиці. Завдяки сучасним можливостям комп'ютерної техніки їх можна подати в електронній формі, що дозволяє не тільки відображати, але й обробляти дані. Програми, які використовуються для цієї мети, називаються *електронними таблицями*.

Особливість електронних таблиць полягає в можливості використання формул для опису взаємозв'язку між значеннями різних комірок. Розрахунки за заданими формулами виконуються автоматично. Зміна вмісту будь-якої комірки приводить до перерахунку значень всіх комірок, пов'язаних із нею формулами, і таким чином відбувається оновлення всієї таблиці відповідно до змінених даних.

Основні поняття електронних таблиць

Програма *Microsoft Excel* призначена для роботи з таблицями даних, здебільшого числових. Це потужне програмне рішення від компанії *Microsoft*, що відноситься до групи *Microsoft Office*. Під час створення таблиці здійснюється введення, редагування та форматування текстових і числових даних, а також формул. Завдяки засобам автоматизації ці процеси стають простішими. Створену таблицю можна обробляти, будувати на основі її даних графіки та діаграми й друкувати результати.

Робоча книга і робочий аркуш. Рядки, стовпці, комірки

Документ *Excel* називається робочою книгою. Вона складається з декількох робочих аркушів, кожен із яких має табличну структуру і може містити одну або кілька таблиць. У вікні документа програми *Excel* відображається лише поточний робочий аркуш, з яким ведеться робота (рис. 1.1). Кожен робочий аркуш має *назву*, що відображається на ярличку в нижній частині аркуша. За допомогою цих ярличків можна переключатися між іншими робочими аркушами в тій самій робочій книзі. Для перейменування робочого аркуша достатньо двічі клацнути на його ярличку.

Робочий аркуш складається з *рядків* і *стовпців*. *Стовпці* позначені великими літерами латинського алфавіту, а далі – двобуквеними комбінаціями. Всього робочий аркуш може містити до 256 *стовпців*, які нумеруються від А до IV. Рядки нумеруються послідовно цифрами від 1 до 65 536, що є максимальним допустимим номером рядка.

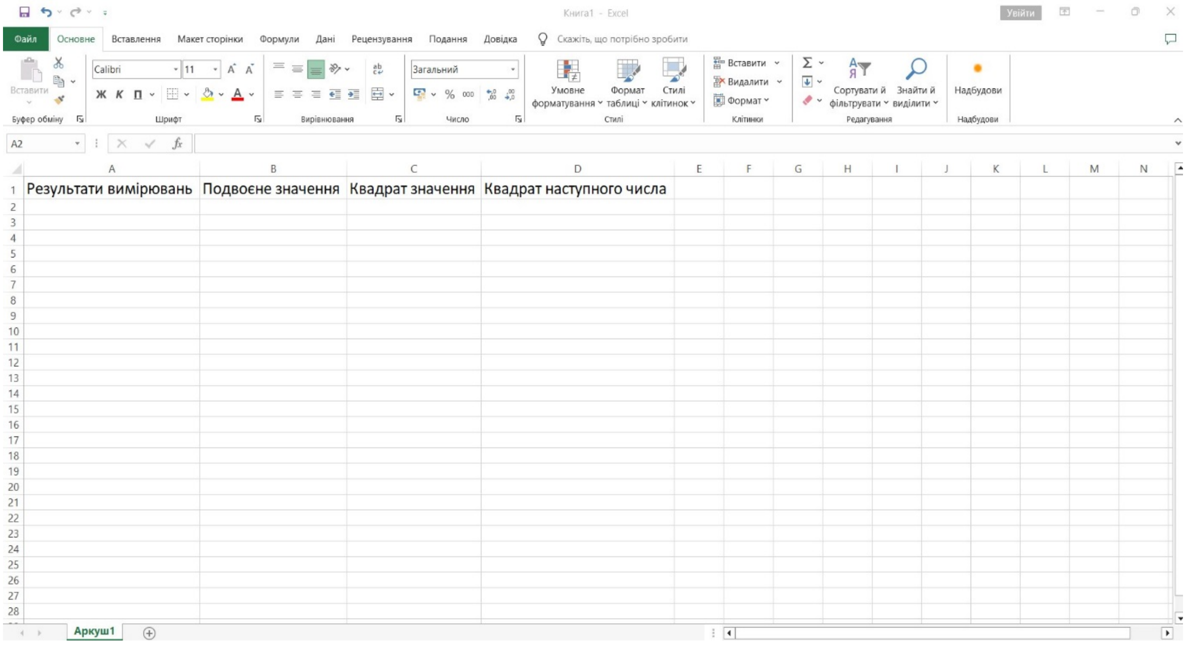


Рисунок 1.1 − Робочий аркуш електронної таблиці Excel

Комірки і їхня адресація

На перетині стовпців і рядків утворюються комірки таблиці, які є найменшими елементами для збереження даних. Позначення окремої комірки поєднує в собі номер стовпця та рядка (у цьому порядку), на перетині яких вона розташована, наприклад: A1 або DE234. Це позначення виконує роль адреси комірки. Адреси комірок використовуються під час записування формул, що визначають взаємозв'язок між значеннями, розташованими в різних комірках.

Одна з комірок завжди є активною і виділяється рамкою, яка в програмі Excel виконує функцію курсора і називається *рамкою активної комірки*. Всі операції введення та редагування даних відбуваються саме в активній комірці. Переміщати рамку активної комірки можна за допомогою клавіш-стрілок або миші.

Діапазон комірок

На дані, розташовані в сусідніх комірках, можна посилатися у формулах як на єдине ціле. Таку групу комірок називають *діапазоном*. Найчастіше використовують прямокутні діапазони, що утворюються на перетині групи рядків, що йдуть послідовно, і групи стовпців, що йдуть послідовно. Діапазон комірок позначають, указуючи через двокрапку номери комірок, розташованих у протилежних кутах прямокутника, наприклад: A1:C15.

Якщо потрібно виділити прямокутний діапазон комірок, це можна зробити протяганням покажчика від одної кутової комірки до протилежної по діагоналі. Рамка поточної комірки у цьому випадку розширюється, охоплюючи весь обраний діапазон. Щоб вибрати стовпець чи рядок цілком, потрібно клацнути на заголовку стовпця (рядка). Протяганням покажчика по заголовках можна вибрати кілька стовпців чи рядків, що йдуть підряд.

Уведення, редагування і форматування даних

Окрема комірка може містити дані, що відносяться до одного з трьох типів: текст, число чи формула, а також залишатися порожньою. Програма *Excel* під час збереження робочої книги записує у файл тільки прямокутну область робочих аркушів, що примикає до лівого верхнього кута (комірка A1) і утримує всі заповнені комірки.

Тип даних, розташовуваних в комірці, визначається автоматично під час введення. Якщо ці дані можна інтерпретувати як число, програма *Excel* так і робить. У іншому випадку дані розглядаються як текст. Уведення формули завжди починається із символу «=» (знака дорівнює).

Уведення тексту і чисел. Уведення даних здійснюють безпосередньо в поточну комірку чи у рядок формул, що розташовується у верхній частині вікна програми під панелями інструментів (див. рис. 1.1). Місце уведення відзначається текстовим курсором. Якщо почати введення натисканням алфавітно-цифрових клавіш, дані з поточної комірки заміняються текстом, що вводиться. Якщо клацнути на рядку формул чи двічі на поточній комірці, старий вміст комірки не видаляється і з'являється можливість його редагування. Дані, що вводяться, у будь-якому випадку відображаються як в комірці, так і в рядку формул.

Щоб завершити введення, зберігши введені дані, використовують кнопку **Введення** в рядку формул чи клавішу **ENTER**. Щоб скасувати внесені зміни і відновити колишнє значення комірки, використовують кнопку **Скасування** в рядку формул чи клавішу **ESC**. Для очищення поточної комірки чи виділеного діапазону найпростіше використовувати клавішу **DELETE**.

Форматування вмісту комірок. Текстові дані за замовчуванням вирівнюються по лівому краю комірки, а числа – по правому. Щоб змінити формат відображення даних у поточній комірці чи обраному діапазоні, використовують команду **Формат>Комірки**. Вкладки цього діалогового вікна дозволяють вибирати формат запису даних (кількість знаків після коми, вказання грошової одиниці, спосіб запису дати та інше), задавати напрямок тексту і метод його вирівнювання, визначати шрифт і накреслення символів, керувати відображенням і видом рамок, задавати фоновий колір.

Зміст електронної таблиці

Формули

Обчислення в таблицях програми *Excel* здійснюються за допомогою формул. Формула може містити числові константи, посилання на комірки і *функції Excel*, з'єднані знаками математичних операцій. Дужки дозволяють змінювати стандартний порядок виконання дій. Якщо комірка містить формулу, то в робочому аркуші відображається поточний результат обчислення цієї формули. Якщо зробити комірку поточною, то сама формула відображається в рядку формул.

Правило використання формул у програмі *Excel* полягає в тому, що, якщо значення комірки *дійсно* залежить від інших комірок таблиці, *завжди* потрібно використовувати формулу, навіть якщо операцію легко можна виконати в «пам’яті». Це гарантує, що наступне редагування таблиці не порушить її цілісності і правильності проведених у ній обчислень.

Посилання на комірки

Формула може містити посилання, тобто адреси комірок, уміст яких використовується в обчисленнях. Це означає, що результат обчислення формули залежить від числа, яке знаходиться в іншій комірці. Комірка, що містить формулу, таким чином, є *залежною*. Значення, відображуване в комірці з формулою, перераховується у разі змінення значення комірки, на яку вказує посилання.

Посилання на комірку можна задати різними способами. По-перше, адресу комірки можна увести вручну. Інший спосіб полягає в натисканні на потрібну комірку чи виборі діапазону, адресу якого потрібно ввести. Комірка чи діапазон у цьому випадку виділяються пунктирною рамкою.

Усі діалогові вікна програми *Excel*, що потребують вказання номерів чи діапазонів комірок, містять кнопки, приєднані до відповідних полів. За натискання на таку кнопку діалогове вікно згортається до мінімально можливого розміру, що полегшує вибір потрібної комірки (діапазону) за допомогою натискання чи протягання (рис. 1.2).

Для редагування формули потрібно двічі клацнути на відповідну комірку. У цьому разі комірки (діапазони), від яких залежить значення формули, виділяються на робочому аркуші кольоровими рамками, а самі посилання відображаються в комірці й у рядку формул тим самим кольором. Це полегшує редагування і перевірку правильності формул.

Застосування електронних таблиць для розрахунків

У науково-технічній діяльності програму *Excel* важко розглядати як основний обчислювальний інструмент. Однак її зручно застосовувати в тих випадках, коли необхідна швидка обробка великих обсягів даних. Вона корисна для виконання таких операцій, як статистична обробка й аналіз даних, обчислення задач оптимізації, побудова діаграм і графіків. Для такого роду задач застосовують як основні засоби програми *Excel*, так і додаткові (надбудови).

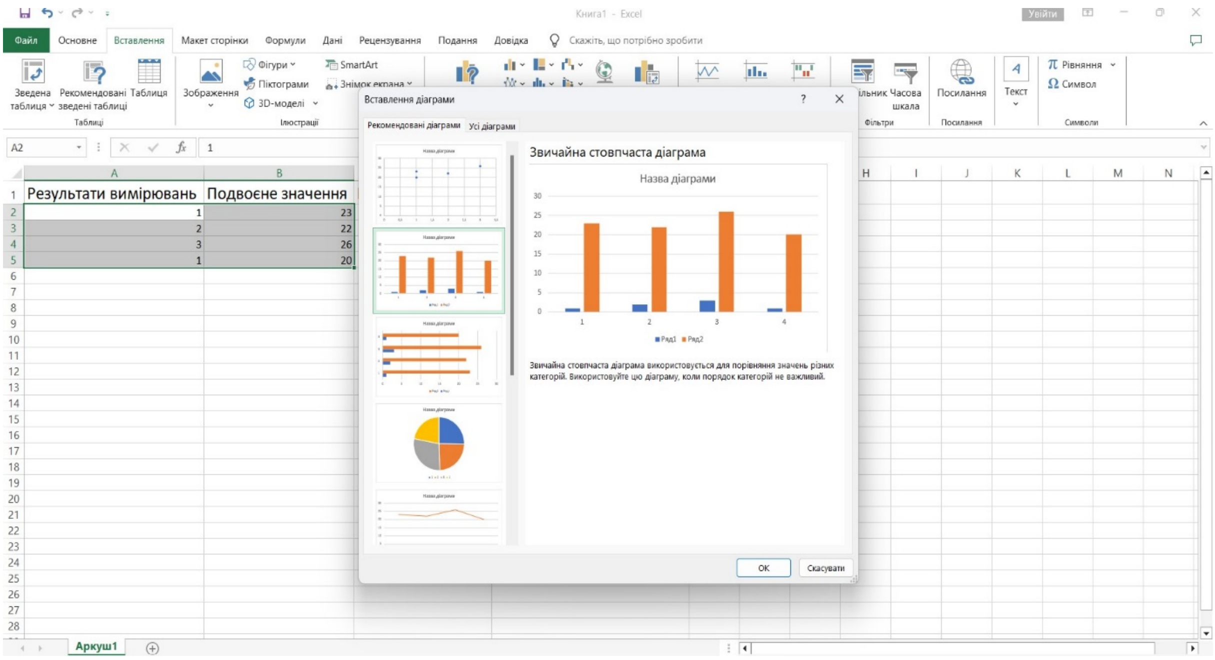


Рисунок 1.2 – Діалогове вікно в розгорнутому і згорнутому вигляді

Підсумкові обчислення

Підсумкові обчислення припускають одержання числових характеристик, що описують певний набір даних загалом. Наприклад, можливе обчислення суми значень, що входять у набір, середнього значення й інших статистичних характеристик, чи кількості частки елементів набору, що задовольняють певні умови. Проведення підсумкових обчислень у програмі *Excel* виконується за допомогою вбудованих функцій. Особливість використання таких підсумкових функцій полягає в тому, що під час їх введення програма намагається «вгадати», у яких комірках укладений оброблюваний набір даних, і задати параметри функції автоматично.

Як параметр підсумкової функції звичайно задається деякий діапазон комірок, розмір якого визначається автоматично. Вибраний діапазон розглядається як окремий параметр («масив»), і в обчисленнях використовуються всі комірки, що входять до його складу.

Підсумовування. Для підсумкових обчислень застосовують обмежений набір функцій, найбільш типовою з яких є функція підсумовування (**СУМ**). Це єдина функція, для застосування якої є окрема кнопка на стандартній панелі інструментів (кнопка Автосума). Діапазон підсумовування, вибраний автоматично, містить комірки з даними, розташованими над поточною коміркою (переважніше) чи ліворуч від неї, утворюючи суцільний блок. За неоднозначності вибору використовується діапазон, що безпосередньо примикає до поточної комірки.

Автоматичний підбор діапазону не виключає можливості редагування формули. Можна перевизначити діапазон, що був вибраний автоматично, а також задати додаткові параметри функції.

Функції для підсумкових обчислень. Інші функції для підсумкових обчислень вибираються звичайним чином, за допомогою списку, що розкривається, у рядку формул чи з використанням майстра функцій. Усі ці функції відносяться до категорії **Статистичні**. До них входять функції **ДИСП** (обчислює дисперсію), **МАКС** (максимальне число в діапазоні), **СРЗНАЧ** (середнє арифметичне значення чисел діапазону), **РАХУНОК** (підрахунок комірок з числами в діапазоні) та інші. Функції, призначені для виконання підсумкових обчислень, часто застосовують за використання таблиці *Excel* як бази даних, а саме на фоні фільтрації записів чи під час створення зведених таблиць.

Використання надбудови

Надбудова – це спеціальні засоби, що розширюють можливості програми *Excel*. На практиці саме надбудови роблять програму *Excel* зручною для використання в науково-технічній роботі. Хоча ці засоби вважаються зовнішніми, додатковими, доступ до них здійснюється за допомогою звичайних команд рядка меню (звичайно через меню Дані – Data Analysis).

Команда використання надбудов звичайно відкриває спеціальне діалогове вікно, оформлення якого не відрізняється від стандартних діалогових вікон програми *Excel*. Підключити чи відключити встановлені надбудови можна за допомогою команди Файл>Параметри (рис. 1.3). Підключення надбудов збільшує навантаження на обчислювальну систему, тому звичайно рекомендують підключати тільки ті надбудови, що реально використовуються.

Розглянемо основні надбудови, що постачаються разом із програмою Excel. Пакет аналізу (*Analysis ToolPak*). Забезпечує додаткові можливості аналізу наборів даних. Вибір конкретного методу аналізу здійснюється в діалоговому вікні *Data Analysis* (Аналіз даних), що відкривається командою Дані>Data Analysis (Аналіз даних).

Майстер підсумовування (*Conditional Sum Wizard*). Дозволяє автоматизувати створення формул для підсумовування даних у стовпці таблиці. Водночас комірки можуть вноситися в суму тільки за виконання певних умов. Запуск майстра здійснюється за допомогою команди Сервіс>Conditional Sum (Часткова сума).

Майстер підстановок (*Lookup Wizard*). Автоматизує створення формули для пошуку даних у таблиці за назвою стовпця і рядка. Майстер дозволяє зробити однократний пошук чи надає можливість ручного задання параметрів, використовуваних для пошуку. Викликається командою Сервіс>Lookup (Пошук).

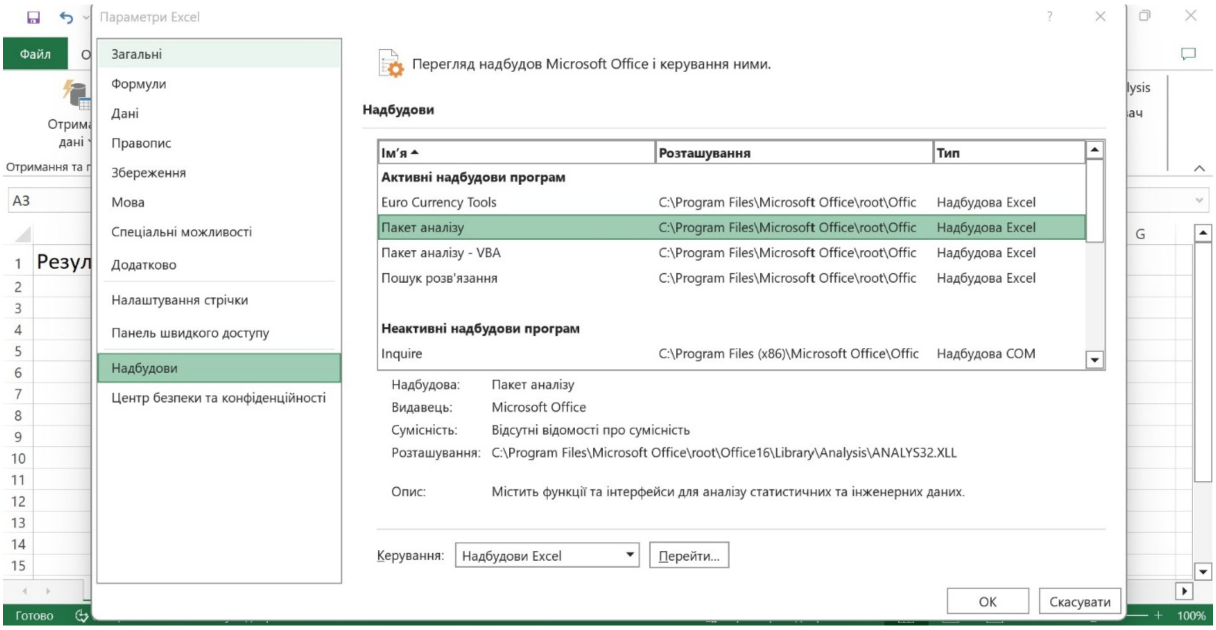


Рисунок 1.3 – Діалогове вікно для підключення і відключення надбудов

Пошук рішення (*Solver Add-in*). Така надбудова використовується для вирішення задач оптимізації. Комірки, для яких підбираються оптимальні значення і задаються обмеження, вибираються в діалоговому вікні Solver Parameters (Пошук рішення), що відкривають за допомогою команди Сервіс>Solver (Пошук рішення).

Побудова діаграм і графіків

У програмі *Excel* термін «діаграма» використовується для позначення усіх видів графічного подання числових даних. Побудова графічного зображення проводиться на основі *ряду даних*. Так називають групу комірок з даними в межах окремого рядка чи стовпця. На одній діаграмі можна відображати кілька рядів даних.

Діаграма являє собою вставний об'єкт, упроваджений на один з аркушів робочої книги. Вона може розташовуватися на тому самому же аркуші, на якому знаходяться дані, чи на будь-якому іншому аркуші (часто для відображення діаграми відводять окремий аркуш). Діаграма зберігає зв'язок з даними, на основі яких вона побудована, і під час відновлення цих даних негайно змінює свій вигляд.

Для побудови діаграми звичайно використовують **Майстер діаграм**, що запускається натисканням кнопки **Майстер діаграм** на стандартній панелі інструментів. Часто зручно заздалегідь виділити область, яка містить дані, що будуть відображатися на діаграмі, але задати цю інформацію можна під час роботи **Майстра**.

Вибір типу діаграми

На першому етапі роботи **Майстра** вибирають форму діаграми. Доступні форми перераховані в списку **Тип** на вкладці **Стандартні**. Для вибраного типу діаграми праворуч указується кілька варіантів подання даних (палітра Вид), з яких потрібно вибрати найбільш придатний. На вкладці **Нестандартні** відображається набір цілком сформованих типів діаграм з готовим форматуванням. Після задання форми діаграми варто клацнути на кнопці **Далі**.

Вибір даних

Другий етап роботи майстра слугує для вибору даних, за якими буде будуватися діаграма (рис. 1.4). Якщо діапазон даних був вибраний заздалегідь, то в області попереднього перегляду у верхній частині вікна **Майстра** з'явиться приблизне відображення майбутньої діаграми. Якщо дані утворять єдиний прямокутний діапазон, то їх зручно вибирати за допомогою вкладки **Діапазон даних**. Якщо дані не утворять єдиної групи, то інформацію для рисування окремих рядів даних задають на вкладці **Ряд**. Попереднє подання діаграми автоматично оновлюється у разі зміни набору відображуваних даних.

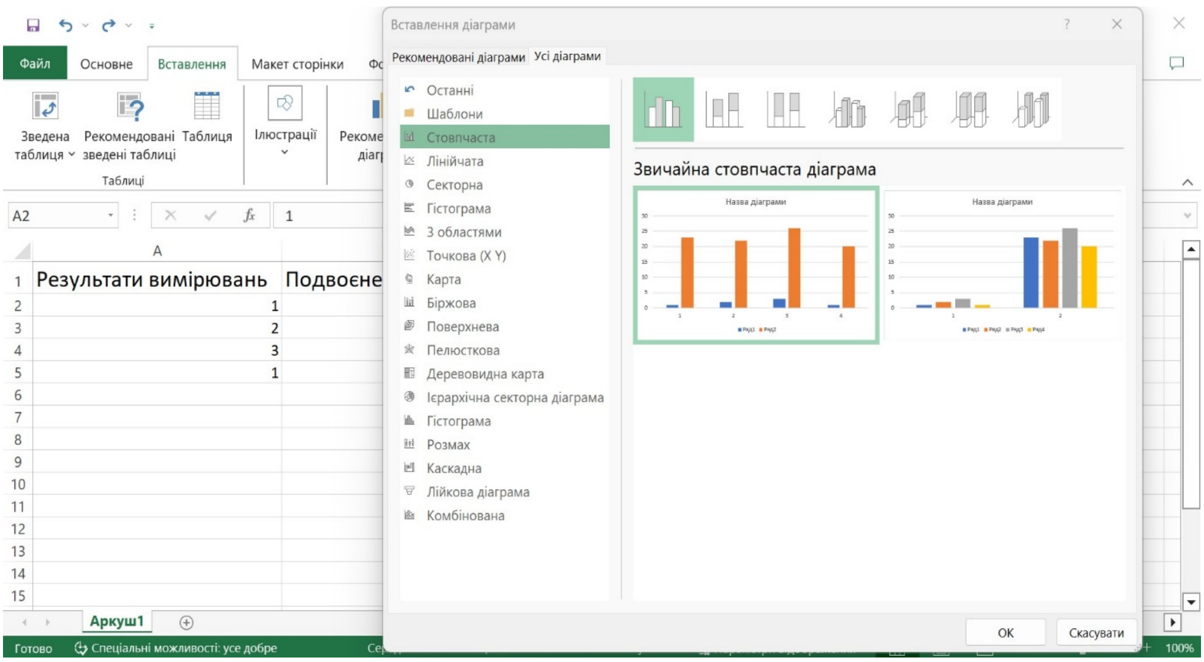


Рисунок 1.4 – Вибір даних, відображуваних на діаграмі

Оформлення діаграми

Третій етап роботи **Майстра** (після натискання на кнопці Далі) полягає у виборі оформлення діаграми.

На вкладках вікна **Майстра** задаються:

- назва діаграми, підписи осей (вкладка Заголовки);
- відображення і маркування осей координат (вкладка Осі);
- відображення сітки ліній, рівнобіжних осям координат (вкладка Лінії сітки);
- опис побудованих графіків (вкладка Легенда);
- відображення написів, що відповідають окремим елементам даних на графіку (вкладка Підписи даних);
- подання даних, використаних під час побудови графіка, у вигляді таблиці (вкладка Таблиця даних).

Залежно від типу діаграми деякі з перерахованих вкладок можуть бути відсутніми.

Розміщення діаграми

На останньому етапі роботи майстра (після натискання на кнопці Далі) указується чи потрібно використовувати для розміщення діаграми новий робочий аркуш, чи один з наявних. Звичайно цей вибір важливий тільки для наступного друку документа, що містить діаграму. Після натискання кнопки **Готово** діаграма будується автоматично і вставляється на зазначений робочий лист (рис. 1.5).

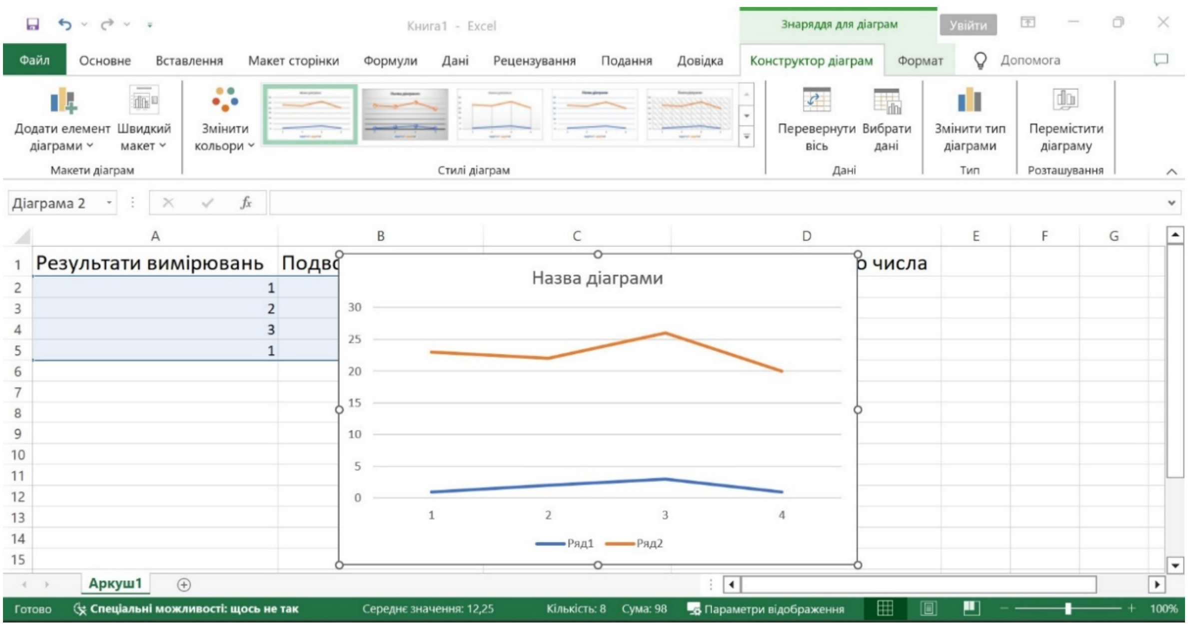


Рисунок 1.5 – Готова діаграма Excel

Редагування діаграми

Готову діаграму можна змінити. Вона складається з набору окремих елементів, таких як самі графіки (ряди даних), осі координат, заголовок діаграми, область побудови та інше. У разі натискання на елемент діаграми він виділяється маркерами, а у випадку наведення на нього покажчика миші – описується висхідною підказкою. Відкрити діалогове вікно для форматування елемента діаграми можна через меню **Формат** (для виділеного елемента) чи через контекстне меню (команда **Формат**). Різні вкладки діалогового вікна, що відкрилося, дозволяють змінювати параметри відображення вибраного елемента даних.

Якщо потрібно внести в діаграму істотні зміни, варто знову скористатися **Майстром діаграм**. Для цього варто відкрити робочий аркуш із діа-грамою чи вибрати діаграму, впроваджену в робочий аркуш із даними. Запустивши **Майстер діаграм**, можна змінити поточні параметри, що роз-глядаються у вікнах Майстра як задані за замовчуванням.

Щоб видалити діаграму, можна видалити робочий аркуш, на якому вона розташована (Виправлення>Видалити аркуш), чи вибрати діаграму, впроваджену в робочий аркуш із даними, і натиснути клавішу **DELETE**.

Порядок виконання роботи

1. Створити файл даних із заданою кількістю змінних та кількістю випадків. Кількість змінних і кількість випадків $\neq 10$:

- використати різноманітні категорії змінних;
- дати назву створеному файлу даних і всім змінним;
- реалізувати різноманітні операції над змінними числової категорії (довільно).

2. Побудувати різноманітні графічні залежності для створеного файлу даних. Використати декілька графічних подань Excel. Кількість графіків не менше трьох.

3. Обчислити основні пункти статистики для створеного файлу даних.

4. Оформити звіт по роботі, зробити висновки.

Методика виконання

1. Створюємо файл в Excel: Створити → Пуста книга (рис. 1.6).

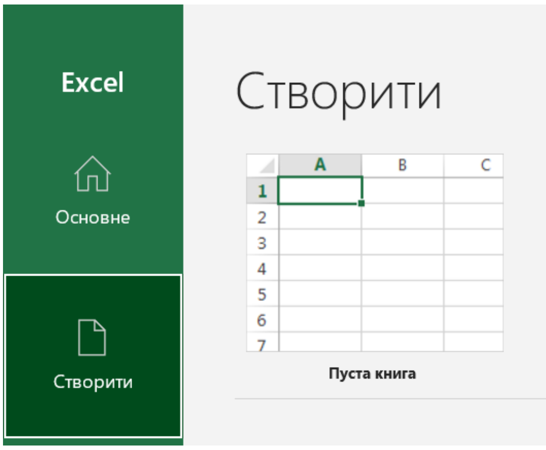


Рисунок 1.6 – Створення робочого вікна

2. Даємо назву всім змінним (рис. 1.7). Кількість змінних та випадків задано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Варіант завдання

Кількість змінних	Кількість випадків
8	18

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ім'я	Вік	Стаж	Погодинна оплата	Відпрацьовано годин на день	Дні	Відпрацьовано годин на рік	Заробітна плата за рік
2								
3								

Рисунок 1.7 – Приклад занесення даних у таблицю

3. Спочатку заповнимо перших 6 стовпців таблиці даними, оскільки дані в 7 і 8 стовпцях обчислюються пізніше. Згідно із завданням кількість випадків дорівнює 18, тому заповнюємо лише 18 рядків в таблиці (рис. 1.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ім'я	Вік	Стаж	Погодинна оплата	Відпрацьовано годин на день	Дні	Відпрацьовано годин на рік	Заробітна плата за рік
2	Віктор	45	1	2	3	135		
3	Катерина	31	3	5	5	247		
4	Григорій	40	7	7	2	162		
5	Наталія	29	9	8	8	256		
6	Валентин	42	8	9	2	98		
7	Анатолій	29	7	11	6	213		
8	Юлія	26	10	13	4	235		
9	Ігор	45	25	15	8	256		
10	Ганна	35	14	16	6	249		
11	Андрій	38	14	17	2	176		
12	Тетяна	24	20	20	8	243		
13	Світлана	28	15	22	8	193		
14	Марина	29	22	23	8	253		
15	Ніна	28	10	24	7	259		
16	Олег	33	10	25	8	260		
17	Лариса	37	17	27	8	251		
18	Олександра	33	13	31	5	197		
19	Артем	30	12	36	5	221		

Рисунок 1.8 – Приклад занесення даних у таблицю

4. Обчислимо дані, розташовані у сьомому стовпці, який має назву «Відпрацьовано годин на рік». Для цього нам потрібно помножити значення «Відпрацьовано годин на день» на «Дні».

Вписуємо в клітинку G2: знак дорівнює «=», після цього натискаємо на клітинку E2, ставимо знак множення «*», потім натискаємо на клітинку F2 і далі Enter. Отримуємо число 405, щоб не обчислювати для кожного значення окремо, можемо скористатися автозаповненням. Для цього потрібно навести курсором на правий нижній кут клітинки, затиснути та потягнути донизу (рис. 1.9).

G2 | =E2*F2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ім'я	Вік	Стаж	Погодинна оплата	Відпрацьовано годин на день	Дні	Відпрацьовано годин на рік	Заробітна плата за рік
2	Віктор	45	1	2	3	135	405	
3	Катерина	31	3	5	5	247	1235	
4	Григорій	40	7	7	2	162	324	
5	Наталія	29	9	8	8	256	2048	
6	Валентин	42	8	9	2	98	196	
7	Анатолій	29	7	11	6	213	1278	
8	Юлія	26	10	13	4	235	940	
9	Ігор	45	25	15	8	256	2048	
10	Ганна	35	14	16	6	249	1494	
11	Андрій	38	14	17	2	176	352	
12	Тетяна	24	20	20	8	243	1944	
13	Світлана	28	15	22	8	193	1544	
14	Марина	29	22	23	8	253	2024	
15	Ніна	28	10	24	7	259	1813	
16	Олег	33	10	25	8	260	2080	
17	Лариса	37	17	27	8	251	2008	

Рисунок 1.9 – Обчислення значення сьомого стовпця

5. Обчислимо дані, що знаходяться у восьмому стовпці, який має назву «Заробітна плата за рік». Для цього потрібно помножити значення «Відпрацьовано годин на рік» на «Погодинна оплата».

Вписуємо в клітинку H2 формулу « =G2*D2» та натискаємо Enter. Знову використовуємо автозаповнення – затискаємо правий нижній кут клі-тинки та тягнемо донизу (рис. 1.10).

H2 | =G2*D2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ім'я	Вік	Стаж	Погодинна оплата	Відпрацьовано годин на день	Дні	Відпрацьовано годин на рік	Заробітна плата за рік
2	Віктор	45	1	2	3	135	405	810
3	Катерина	31	3	5	5	247	1235	6175
4	Григорій	40	7	7	2	162	324	2268
5	Наталія	29	9	8	8	256	2048	16384
6	Валентин	42	8	9	2	98	196	1764
7	Анатолій	29	7	11	6	213	1278	14058
8	Юлія	26	10	13	4	235	940	12220
9	Ігор	45	25	15	8	256	2048	30720
10	Ганна	35	14	16	6	249	1494	23904
11	Андрій	38	14	17	2	176	352	5984
12	Тетяна	24	20	20	8	243	1944	38880
13	Світлана	28	15	22	8	193	1544	33968
14	Марина	29	22	23	8	253	2024	46552
15	Ніна	28	10	24	7	259	1813	43512
16	Олег	33	10	25	8	260	2080	52000
17	Лариса	37	17	27	8	251	2008	54216
18	Олександра	33	13	31	5	197	985	30535

Рисунок 1.10 – Обчислення значення восьмого стовпця

6. Створимо діаграму. Для цього потрібно: виділити всю таблицю → вставлення → рекомендовані діаграми → усі діаграми → вибрати об’ємну звичайну стовпчасту діаграму.

Також діаграму можна редагувати (рис. 1.11).

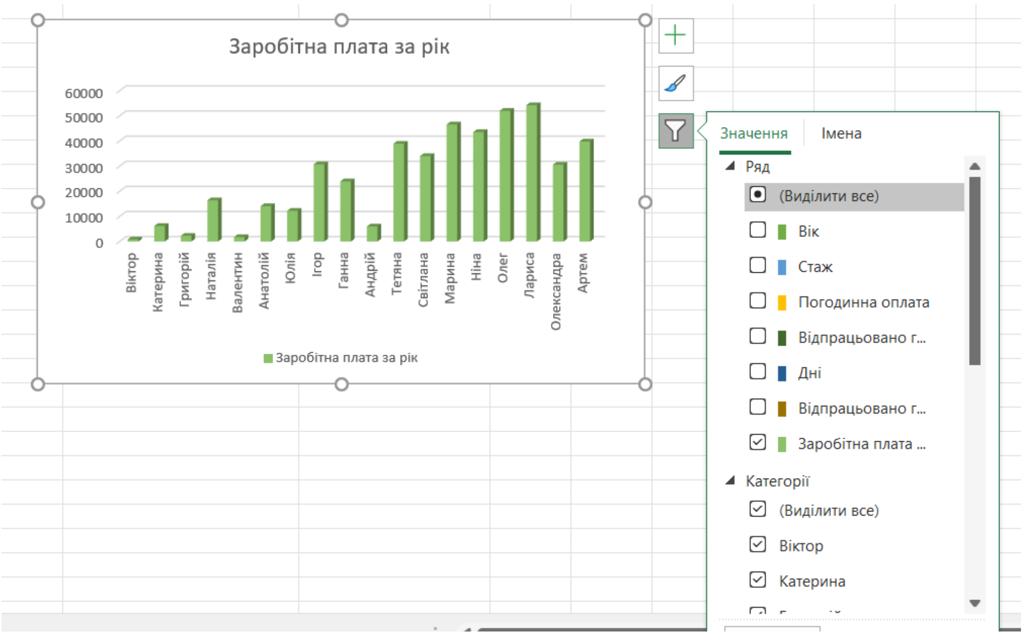


Рисунок 1.11 – Об’ємна стовпчаста діаграма та її редагування

7. Тепер створимо секторну діаграму. Для цього потрібно: виділити перший стовпець, затиснути Ctrl та виділити останній стовпець → вставлення → рекомендовані діаграми → усі діаграми → секторна → об’ємна секторна діаграма → конструктор діаграм. Крім того, можна вибрати будь-який стиль діаграми (рис. 1.12).

Рисунок 1.12 – Секторна діаграма

8. Створимо звичайну стовпчасту діаграму. Для цього потрібно: виділити перших 3 стовпця → вставлення → рекомендовані діаграми → усі діаграми → вибрати звичайну стовпчасту діаграму (рис. 1.13).

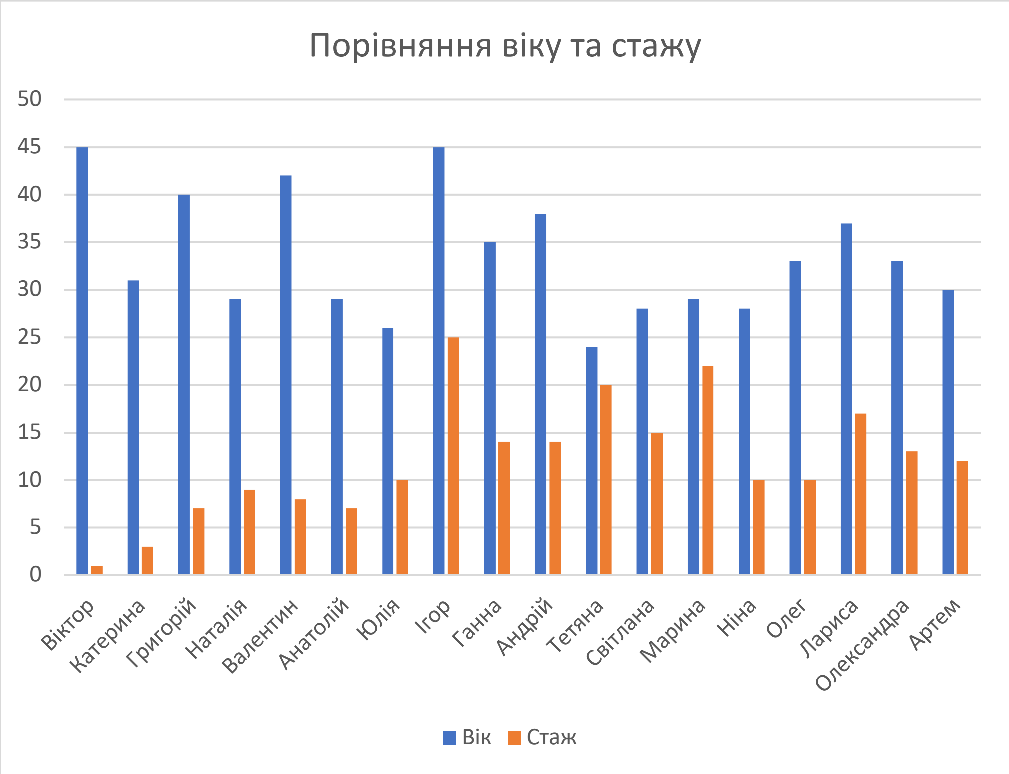


Рисунок 1.13 – Стовпчаста діаграма

Варіанти завдань

Таблиця 1.2

№	Кількість змінних	Кількість випадків
1.1	5	15
1.2	4	17
1.3	7	14
1.4	4	21
1.5	8	16
1.6	4	25
1.7	5	19
1.8	6	18
1.9	5	20
1.10	5	23
1.11	5	16
1.12	4	16
1.13	7	15

Продовження таблиці 1.2

№	Кількість змінних	Кількість випадків
1.14	4	22
1.15	8	17
1.16	4	26
1.17	5	13
1.18	6	19
1.19	5	21
1.20	5	24
1.21	5	17
1.22	4	19
1.23	7	16
1.24	4	23
1.25	8	18
1.26	4	27
1.27	5	21
1.28	6	20
1.29	5	22
1.30	6	17

Контрольні питання

1. Призначення програми Microsoft Excel.
2. Суть понять робоча книга та робочий аркуш.
3. Введення, редагування і форматування даних програмою Excel.
4. В чому полягає зміст електронної таблиці: формули та посилання на комірки.
5. Поясніть застосування електронних таблиць для обчислень.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мета: набути практичних навичок обчислення основних числових характеристик дискретних випадкових величин та побудови многокутника розподілу.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Означення дискретної випадкової величини

Змінна величина X, яка внаслідок випробування набуває одного зі значень x_1, x_2, …, x_k скінченної числової послідовності або одного зі значень x_1, x_2, …, x_k, … нескінченної числової послідовності, називається *дискретною* (*розривною*) *випадковою величиною*, якщо кожному значенню x_i ви-падкової величини X поставлено у відповідність певну ймовірність p_i події ($X = x_i$), $i = 1, 2, ..., k$. Тобто, $p_i = P(X = x_i)$. Таблиця 2.1 вигляду:

Таблиця 2.1 – Закон розподілу

Можливі значення випадкової величини X	x_1	x_2	…	x_k	…
Ймовірності цих значень P	p_1	p_2	…	p_k	…

називається *законом розподілу* або *рядом розподілу* дискретної випадкової величини X.

Закон розподілу може бути заданий *аналітично* (за допомогою формули) $p_i = f(x_i)$ або *графічно* у вигляді *многокутника розподілу* ймовірностей (рис. 2.1):

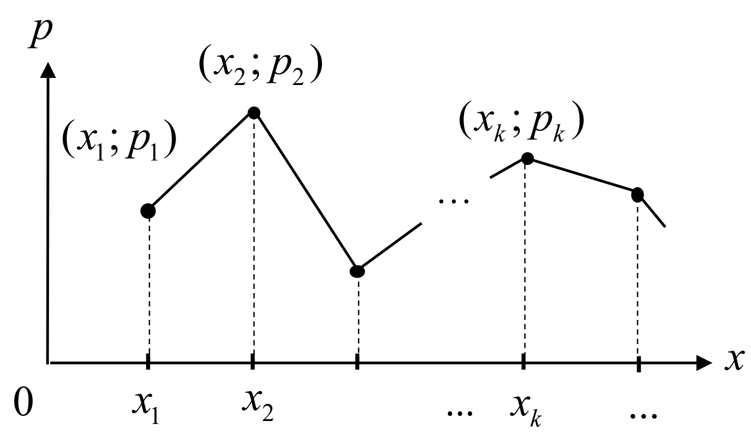


Рисунок 2.1 – Многокутник розподілу ймовірностей

Те, що випадкова величина X внаслідок випробування набуде одного із своїх можливих значень $x_1, x_2, ..., x_k$ є вірогідною подією, а тому $p_1 + p_2 + \ ... + p_k = 1$.

Значення x_i випадкової величини X, яке має найбільшу ймовірність, називається *модою* випадкової величини X.

Математичне сподівання випадкової величини

Нехай випадкову величину X задано законом розподілу (табл. 2.2):

Таблиця 2.2 – Закон розподілу випадкової величини X

X	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
$p = P(X = x_k)$	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

Математичним сподіванням випадкової величини X, яке позначається через $M(X)$ або m_X, називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i \ . \qquad (2.1)$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює сталій величині C

$$M(C) = C \,.$$

2. Якщо X, Y – випадкові величини, то для випадкової величини $Z = X + Y$

$$M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

3. Якщо a – стала, X – випадкова величина, то

$$M(aX) = aM(X).$$

4. Якщо X – випадкова величина, a, b – сталі, то з властивостей 2 і 3 маємо

$$M(aX + b) = aM(X) + b \,.$$

5. Випадкова величина $X - m_X$ називається *відхиленням.* Очевидно, що її математичне сподівання дорівнює нулю

$$M(X - m_X) = 0.$$

6. Якщо *X, Y незалежні* випадкові величини, то для випадкової величини $X \cdot Y$ виконується рівність:

$$M\left(X \cdot Y\right) = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right).$$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання випадкової величини є її «*середнім значенням*», а така числова характеристика, як дисперсія, вводиться як «*показник ступеня розсіювання*» випадкової величини навколо її «*середнього значення*». Термін «*дисперсія»* означає «*розсіювання».*

Дисперсією випадкової величини *X* називається число

$$D(X) = M\left[(X - m_X)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (2.2)$$

Окрім дисперсії розглядають також і таку числову характеристику випадкової величини, як *середнє квадратичне відхилення.*

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = \sigma_X$ випадкової величини X називається корінь квадратний з дисперсії $D(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i}. \quad (2.3)$$

Величина σ вимірюється в тих самих одиницях, що й величина *X,* тоді як дисперсія $D(X)$ вимірюється у квадратних одиницях.

Для обчислення дисперсії використовується також і така *розрахункова формула*:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2. \quad (2.4)$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю. Тобто,

$$D\left(C\right) = M\left[\left(C - C\right)^2\right] = M\left(0\right) = 0.$$

2. Дисперсія суми двох *незалежних* випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

3. Якщо C – стала величина, X – випадкова величина, то

$$D(X+C)=D(X).$$

Це випливає з властивостей 1 та 3.

4. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрата:

$$D(CX)=C^2 D(X).$$

5. Дисперсія різниці двох *незалежних* випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Порядок виконання роботи

1. Задати ряд розподілу дискретної випадкової величини X згідно з вибраним варіантом.

2. Побудувати многокутних розподілу ДВВ X.

3. Розрахувати основні числові характеристики ДВВ X:
- математичне сподівання $M(X)$;
- дисперсію $D(X)$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

4. Показати на многокутнику розподілу ДВВ X математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

5. Проаналізувати отримані результати.

6. Оформити звіт і зробити висновки за результатами роботи.

Методика виконання лабораторної роботи в середовищі Excel

1. Створюємо файл в середовищі Excel: Створити → Пуста книга (рис. 2.2).

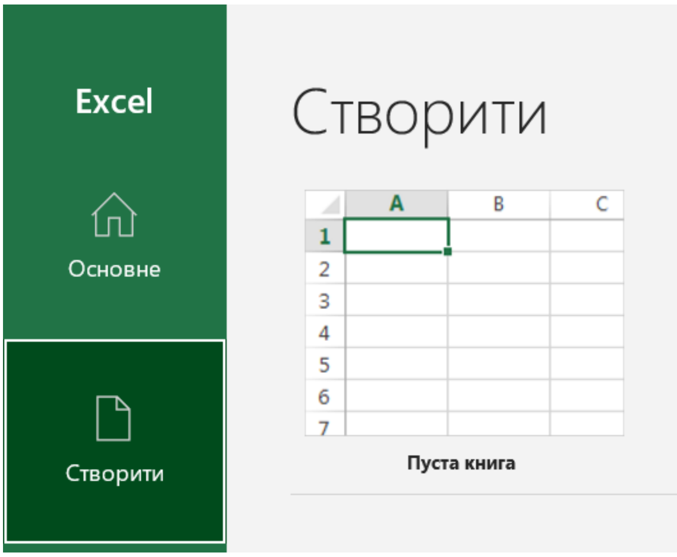
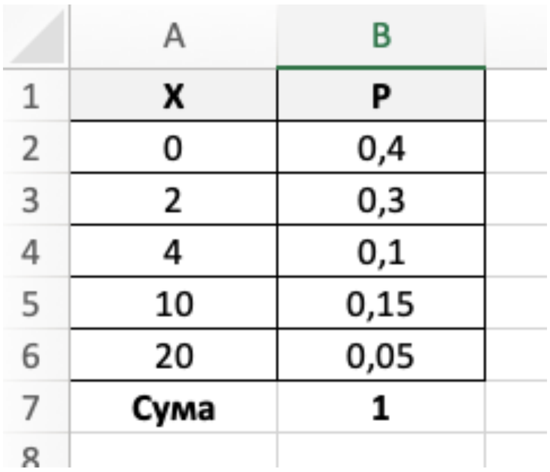


Рисунок 2.2 – Створення робочого вікна

2. Створюємо таблицю з вхідними даними (табл. 2.3). Задаємо назву змінних та розташовуємо відповідний масив значень X та P у вертикальному положенні. Перевіряємо виконання рівності $\sum p_i = 1$. На рис. 2.3 подано приклад занесення даних у таблицю.

Таблиця 2.3 – Варіант завдання для виконання лабораторної роботи №2

X	0	2	4	10	20
P	0,4	0,3	0,1	0,15	0,05



	A	B
1	**X**	**P**
2	0	0,4
3	2	0,3
4	4	0,1
5	10	0,15
6	20	0,05
7	**Сума**	**1**
8		

Рисунок 2.3 – Приклад занесення даних у таблицю

3. Для побудови многокутника розподілу ДВВ X вибираємо точкову діаграму з прямими лініями та маркерами. Виконуємо форматування осей та назви діаграми (рис. 2.4).

Рисунок 2.4 – Многокутник розподілу ДВВ Х

4. Розраховуємо числові характеристики ДВВ *X*:

- для знаходження математичного сподівання *M*(*X*) створюємо додатковий стовпець X*P (рис. 2.5) та використовуємо формулу (2.1);

C2 fx =A2*B2

	A	B	C
1	**X**	**P**	X*P
2	0	0,4	0
3	2	0,3	0,6
4	4	0,1	0,4
5	10	0,15	1,5
6	20	0,05	1
7	**Сума**	**1**	**3,5**
8		**∑p**	**M(X)**
9			

Рисунок 2.5 – Приклад розрахунку математичного сподівання M(X)

- для знаходження дисперсії D(X) створюємо два додаткових стовпця: $[X - M(X)]^2$ та $[X - M(X)]^2 * P$ (рис. 2.6), а також використовуємо формулу (2.2);

D2 =(A2-C7)^2

	A	B	C	D	E
1	**X**	**P**	X*P	[X – M(X)]^2	[X – M(X)]^2 * P
2	0	0,4	0	12,25	4,9
3	2	0,3	0,6	2,25	0,675
4	4	0,1	0,4	0,25	0,025
5	10	0,15	1,5	42,25	6,3375
6	20	0,05	1	272,25	13,6125
7	**Сума**	**1**	**3,5**		**25,55**
8		**∑p**	**M(X)**		**D(X)**
9					

Рисунок 2.6 – Приклад розрахунку дисперсії D(X)

- для знаходження середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$ (рис. 2.7) використовуємо формулу (2.3)

C13 =C12^0,5

	B	C
10		
11	**M(X) =**	**3,5**
12	**D(X) =**	**25,55**
13	**σ(X) =**	**5,055**
14		

Рисунок 2.7 – Приклад розрахунку
середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$

Зауважимо, що обчислити дисперсію можна й за альтернативною формулою (2.4). Виконайте такий розрахунок самостійно з використанням вбудованої функції Excel «**=SUMPRODUCT(масив1;[масив2];[масив3];...)**»

5. Нанесемо на многокутник розподілу ДВВ X отримане значення математичного сподівання у вигляді вертикальної прямої. Середнє квадратичне відхилення використаємо для побудови границь інтервалу (рис. 2.8):

$$(M(X) - \sigma(X) \; ; M(X) + \sigma(X)).$$

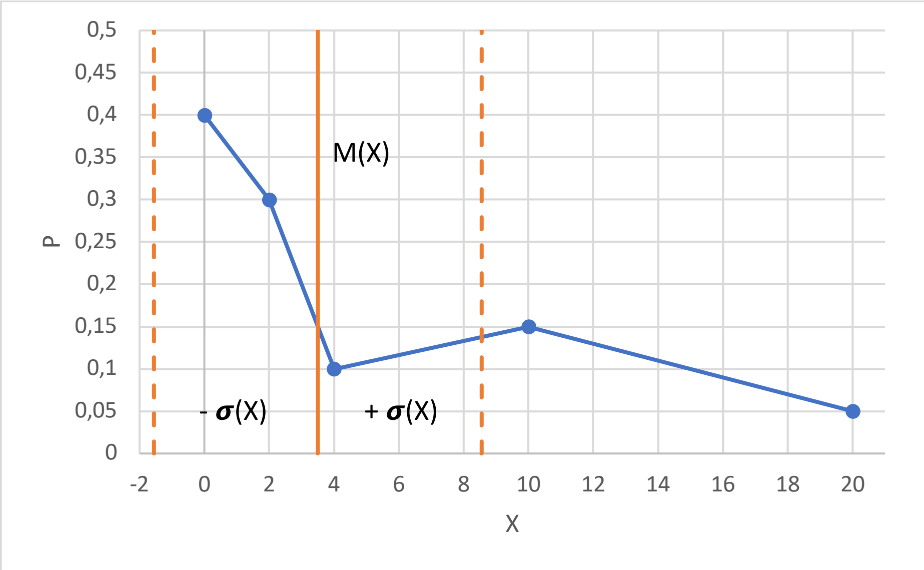


Рисунок 2.8 – Многокутник розподілу з відзначеними $M(X)$ та $\sigma(X)$

Методика виконання лабораторної роботи мовою PYTHON

1. У робочому вікні Jupyter.Notebook [13] імпортуємо бібліотеки Numpy [15] та Matplotlib [14]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

2. Вхідні дані (табл. 2.3) задаємо у вигляді двох векторів:

```
X = np.array([0, 2, 4, 10, 20])
P = np.array([0.4, 0.3, 0.1, 0.15, 0.05])
```

3. Розраховуємо основні числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

```
mx = np.dot(X, P)  # Математичне сподівання M(X)
dx = np.dot(X**2, P) - mx**2  # Дисперсія D(X)
sx = dx**0.5     # середнє квадратичне відхилення g(X)
```

4. Задаємо команди виведення результату розрахунків:

```
print('ДВВ X =', X)
print('    P =', P)

print('Математичне сподівання M(X)=', mx)
print('Дисперсія D(X) =', round(dx, ndigits=2))
print('СКВ g(X) =', round(dx**0.5, ndigits=2))
```

5. Будуємо многокутник розподілу ДВВ X. Математичне сподівання зображуємо у вигляді вертикальної прямої. Середнє квадратичне відхилення використовуємо для побудови границь інтервалу:

$$(M(X) - \sigma(X)\ ;\ M(X) + \sigma(X))$$

```python
plt.figure(figsize=(8, 5))

plt.plot(X, P, 'bo')
plt.plot(X, P, color='blue', lw=1.5)

plt.axvline(mx, color='red', lw=1)
plt.axvline(mx-sx, color='red', linestyle='--', lw=1)
plt.axvline(mx+sx, color='red', linestyle='--', lw=1)

plt.text(mx+0.3, np.max(P)-0.02, round(mx, 2), color='red', fontsize=14)
plt.text(mx+0.3, np.max(P)+0.02, "M(x)", color='red', fontsize=14)

xq = np.linspace(mx-sx, mx+sx)
plt.fill_between(xq, 0, np.max(P)+0.1, color='blue', alpha=0.1)

plt.title('Многокутник розподілу', fontsize=16)
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel('Ймовірність, P', fontsize=14)
```

6. Результат роботи програми наведено на рис. 2.9 та рис. 2.10.

```
ДВВ X = [ 0   2   4 10 20]
    P = [0.4  0.3  0.1  0.15 0.05]
Математичне сподівання M(X)= 3.5
Дисперсія D(X) = 25.55
СКВ g(X) = 5.05
```

Рисунок 2.9 – Результат розрахунку числових характеристик ДВВ *X*

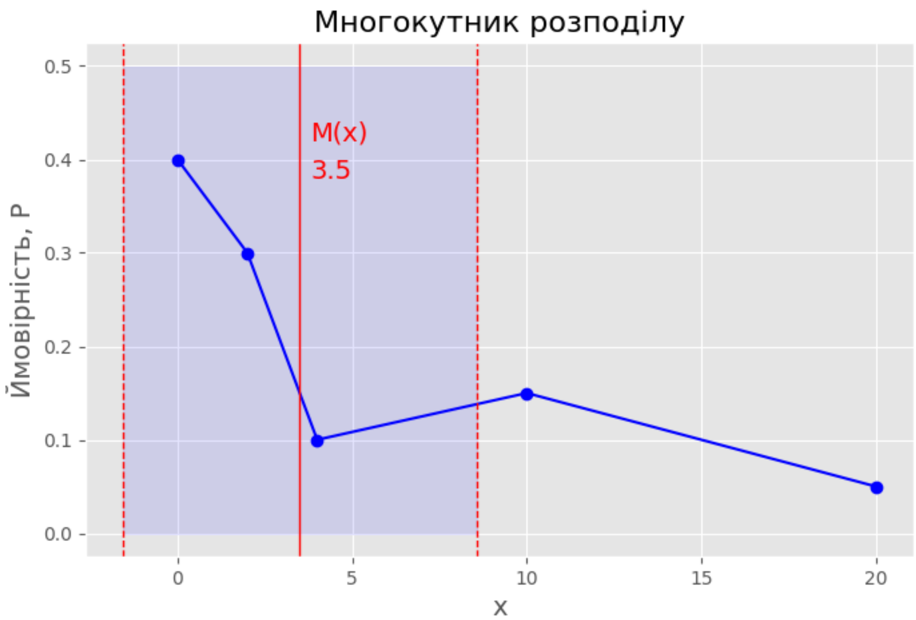


Рисунок 2.10 – Многокутник розподілу ДВВ *X*

Варіанти завдань

2.1.

X	10	12	14	16	18
P	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1

2.2.

X	–10	0	10	20	30
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

2.3.

X	110	120	130	140	150
P	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

2.4.

X	–5	–1	3	7	11
P	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

2.5.

X	2	3	4	5	6
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.6.

X	3	8	13	18	23
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

2.7.

X	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

2.8.

X	5	15	25	35	45
P	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

2.9.

X	25	30	35	40	45
P	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

2.10.

X	–1	6	13	20	27
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

2.11.

X	1	3	4	7	8
P	0,2	0,05	0,4	0,25	0,1

2.12.

X	2	3	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2

2.13.

X	–7	–2	2	5	8
P	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2

2.14.

X	2	1	5	6	12
P	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

2.15.

X	–11	–4	2	5	6
P	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

2.16.

X	3	12	18	26	30
P	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1

2.17.

X	–10	4	13	20	35
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

2.18.

X	100	120	135	140	150
P	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

2.19.

X	–15	–1	13	17	19
P	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

2.20.

X	1	3	4	8	16
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.21.

X	1	7	13	18	23
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

2.22.

X	4	15	21	27	30
P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

2.23.

X	11	14	22	35	45
P	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

2.24.

X	25	33	35	43	45
P	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

2.25.

X	–12	6	13	23	27
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

2.26.

X	5	13	14	17	18
P	0,15	0,25	0,4	0,1	0,1

2.27.

X	0	3	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2

2.28.

X	–4	–2	2	5	8
P	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2

2.29.

X	–3	–2	1	6	8
P	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1

2.30.

X	–10	4	13	20	35
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Контрольні питання

1. Дискретна випадкова величина (ДВВ). Ряд розподілу дискретної випадкової величини.
2. Многокутник розподілу ймовірностей ДВВ *X*.
3. Математичне сподівання дискретної випадкової величини та його властивості.
4. Початкові й центральні моменти випадкових величин.
5. Дисперсія дискретної випадкової величини та її властивості.
6. Середнє квадратичне відхилення.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета: набути навичок обчислення ймовірності появи певної події залежно від параметрів законів розподілу дискретних величин.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути лише одного числового значення, заздалегідь невідомого і обумовленого випадковими причинами.

Випадкові величини прийнято позначати великими літерами X, Y, Z, а їх можливі значення – відповідними малими літерами з індексами.

Випадкові величини бувають дискретними та неперервними.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може набувати окремих ізольованих одне від одного числових значень (їх можна пронумерувати) з відповідними ймовірностями.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може набувати будь-якого числового значення з деякою скінченного або нескінченного інтервалу (a, b). Кількість можливих значень такої величини є нескінченна.

Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

У випадку ДВВ X функціональну залежність можна задавати таблично, аналітично та графічно.

У випадку НВВ для її повної характеристики вводять інтегральну та диференціальну функції розподілу.

Біноміальний розподіл

Якщо дискретна випадкова величина *X*, набуває лише цілих невід'ємних значень k (тобто $k = 1, 2, ..., n$) з імовірностями

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (p + q = 1,\ p > 0,\ q > 0),$$

то кажуть, що вона розподілена за *біноміальним законом*.

Можна довести, що для біноміально розподіленої випадкової величини X

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \text{звідки} \quad \sigma_X = \sqrt{npq}\,.$$

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд (табл. 3.1):

Таблиця 3.1 – Біноміальний закон розподілу

X	0	1	2	…	k	…	n
$P(X=k)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Розподіл Пуассона

Дискретна випадкова величина X, яка може набувати лише цілих невід'ємних значень k з імовірностями

$$P(X=k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0,1,2,..., \quad a > 0, \qquad (3.1)$$

називається розподіленою *за законом Пуассона з параметром a*.

Такий розподіл ми одержуємо в схемі повторних випробувань Бернуллі, якщо $n \to \infty$, $p \to 0$, але $np \to a = \text{const}$. У такому разі розподіл Пуассона інтерпретується як *закон «рідкісних» явищ,* і за досить малих p та великих n формула (3.1) використовується як наближення замість точної формули Бернуллі.

Отже, формула (3.1) виражає розподіл ймовірностей масових (n – велике) рідкісних (p – мале) подій.

Математичне сподівання

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} = a \cdot e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a \cdot e^{-a} \cdot e^{a} = a.$$

Характерною особливістю розподілу Пуассона є збіг математичного сподівання та дисперсії. Оскільки за досить малих p, число q дуже близьке до 1, тому

$$a = M(X) = np \approx npq = D(X).$$

Тобто,

$$M(X) = D(X) = a.$$

Крім того, сума незалежних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, також розподілена за законом Пуассона.

Порядок виконання роботи

1. Дослідити властивості біноміального закону розподілу дискретних випадкових величин. Для цього потрібно:

- створити файл даних, в якому задати можливі значення k;
- обчислити значення $P_n(A=k)$ для різних значень p. Значення n і p вибираються за варіантом (див. табл. 3.4). Використати вбудовану функцію BINOM.DIST;
- побудувати графічну залежність біноміального закону розподілу для різних значень p;
- проаналізувати отримані результати.

2. Дослідити властивості закону розподілу Пуассона:

- обчислити значення $P_n(A=k)$ для різних значень λ. Значення n і p вибираються за варіантом (див. табл. 3.5). Використати вбудовану функцію POISSON.DIST;
- побудувати графічну залежність закону розподілу Пуассона за різних значень λ;
- проаналізувати отримані результати.

3. Оформити звіт і зробити висновки за результатами роботи.

Методика виконання

1. Створюємо файл в середовищі Excel: Створити → Пуста книга (рис. 3.1).

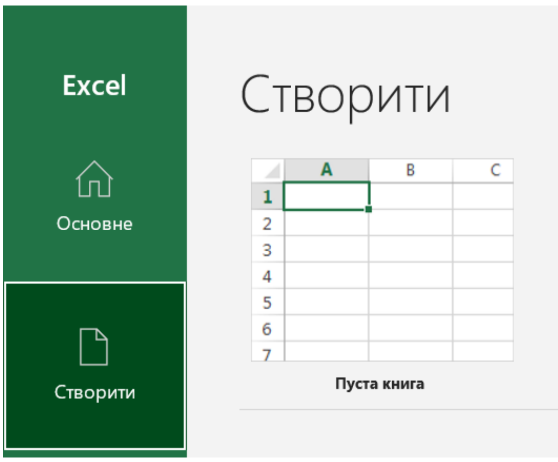


Рисунок 3.1 – Створення робочого вікна

2. Проведемо дослідження властивостей біноміального закону розподілу дискретних випадкових величин. Для цього задаємо назву змінних та нумерацію випробувань згідно з варіантом (табл. 3.2). На рис. 3.2 подано приклад занесення даних у таблицю.

Таблиця 3.2 – Варіант завдання для побудови біноміального розподілу

Біноміальний розподіл			
Значення p_i ($i = 1, 2, 3$)			n
0,03	0,6	0,88	11

	A	B	C	D
1		0,03	0,6	0,88
2	K	P1	P2	P3
3	0			
4	1			
5	2			
6	3			
7	4			
8	5			
9	6			
10	7			
11	8			
12	9			
13	10			
14	11			

Рисунок 3.2 – Приклад занесення даних у таблицю

3. Використовуючи формулу біноміального розподілу, заповнимо таблицю, використовуючи шлях: формули → вставити функцію → статистичні. Формат клітинок має бути загальний (рис. 3.3).

B3 | fx =BINOM.DIST(A3;11;B$1;FALSE)

	A	B	C	D
1		0,03	0,6	0,88
2	K	P1	P2	P3
3	0	0,715301403	4,1943E-05	7,43008E-11
4	1	0,243349962	0,00069206	5,9936E-09
5	2	0,037631437	0,005190451	2,19765E-07
6	3	0,003491577	0,02335703	4,83484E-06
7	4	0,000215974	0,070071091	7,0911E-05
8	5	9,35144E-06	0,147149292	0,000728019
9	6	2,8922E-07	0,220723937	0,005338807
10	7	6,38925E-09	0,236489933	0,027965181
11	8	9,88028E-11	0,17736745	0,102538996
12	9	1,01859E-12	0,088683725	0,250650878
13	10	6,30053E-15	0,026605117	0,367621288
14	11	1,77147E-17	0,003627971	0,245080859

Рисунок 3.3 − Приклад сформованих даних для побудови біноміального розподілу

4. Побудуємо графік біноміального розподілу. Вибираємо точкову діаграму з прямими лініями та маркерами (рис. 3.4).

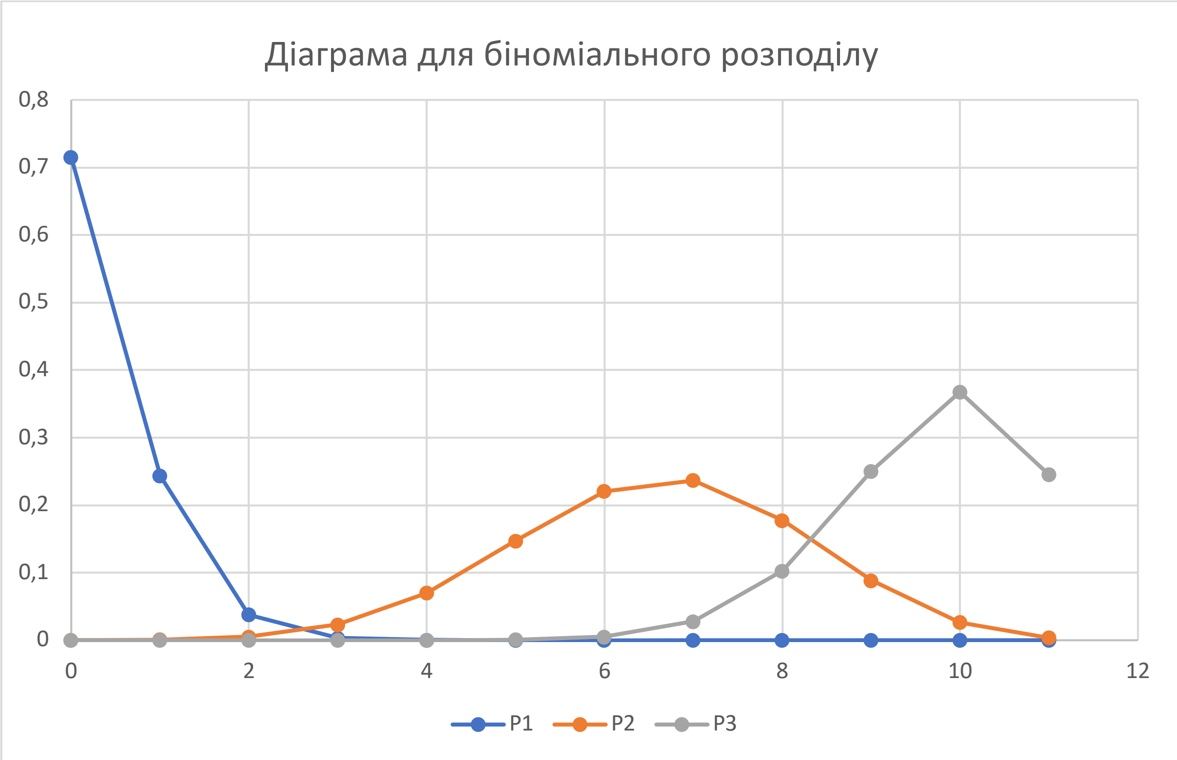


Рисунок 3.4 – Графічне зображення біноміального розподілу

5. Тепер перейдемо до дослідження властивостей розподілу Пуассона. Спочатку задаємо назву змінних та нумерацію випробувань згідно з варіантом (табл. 3.3). На рис. 3.5 подано приклад занесення даних у таблицю.

Таблиця 3.3 – Варіант завдання для побудови розподілу Пуассона

Розподіл Пуассона			
Значення p_i ($i = 1,2,3$)			k
0,0005	0,0003	0,0006	15000

Заносимо дані в таблицю MS Excel.

Для цього створюємо новий аркуш, задаємо ім'я змінних (P1, P2, P3). Заносимо у комірку C1 значення 0,0005, у комірку D1 значення 0,0005, у комірку E1 – значення 0,0006.

У комірку A1 заносимо значення k з нашого варіанта (k = 15000).

В стовпець B записуємо нумерацію випробувань (від 1 до 30), а в стовпець A – відповідно кількість випробувань на кожному етапі.

	A	B	C	D
1	15000	0,0005	0,0003	0,0006
2	K	P1	P2	P3
3	0			
4	1			
5	2			
6	3			
7	4			
8	5			
9	6			
10	7			
11	8			
12	9			
13	10			
14	11			
15	12			
16	13			
17	14			
18	15			
19	16			
20	17			
21	18			
22	19			
23	20			
24	21			
25	22			
26	23			
27	25			
28	50			
29	100			
30	1000			
31	5000			
32	10000			
33	15000			

Рисунок 3.5 – Приклад занесення даних у таблицю

6. Використовуючи формулу розподілу Пуассона, заповнимо таблицю, виконуючи таку послідовність дій: формули → вставити функцію → статистичні. Тепер необхідно вибрати розподіл Пуассона.

Формат клітинок має бути числовий (рис. 3.6).

FORECAS... =POISSON.DIST(A3;A$1*B$1;FALSE)

	A	B	C	D	E
1	15000	0,0005	0,0003	0,0006	
2	K	P1	P2	P3	
3	0	0,000553	0,011109	0,000123	
4	1	0,004148	0,049990	0,001111	
5	2	0,015555	0,112479	0,004998	
6	3	0,038889	0,168718	0,014994	
7	4	0,072916	0,189808	0,033737	
8	5	0,109375	0,170827	0,060727	
9	6	0,136718	0,128120	0,091090	
10	7	0,146484	0,082363	0,117116	
11	8	0,137329	0,046329	0,131756	
12	9	0,114440	0,023165	0,131756	
13	10	0,085830	0,010424	0,118580	
14	11	0,058521	0,004264	0,097020	
15	12	0,036575	0,001599	0,072765	
16	13	0,021101	0,000554	0,050376	
17	14	0,011304	0,000178	0,032384	
18	15	0,005652	0,000053	0,019431	
19	16	0,002649	0,000015	0,010930	

Рисунок 3.6 − Приклад сформованих даних для побудови розподілу Пуассона

7. Побудуємо графік розподілу Пуассона. Вибираємо точкову діаграму з прямими лініями та маркерами (рис. 3.7).

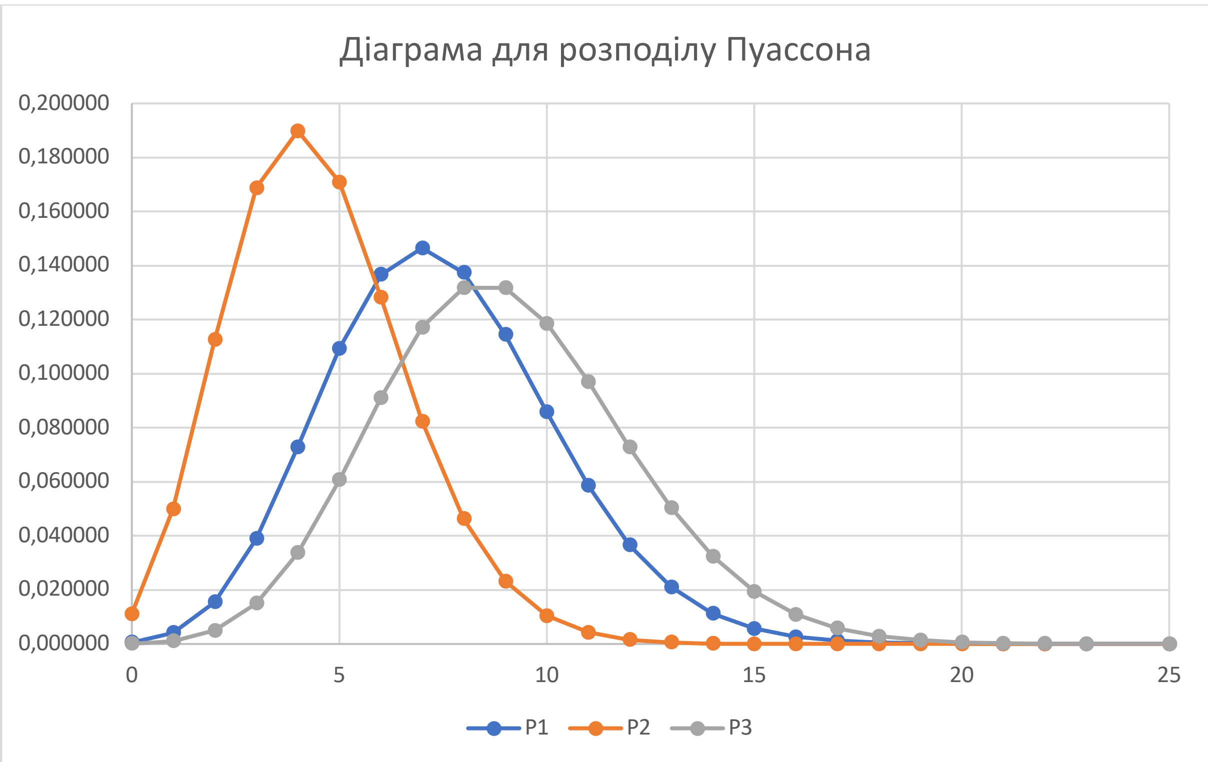


Рисунок 3.7 – Графічне зображення розподілу Пуассона

Варіанти завдань

Таблиця 3.4 – Вихідні дані для побудови біноміального розподілу

№ вар.	Значення p_i $(i=1, 2, 3)$			n
3.1	0,3	0,6	0,85	16
3.2	0,38	0,6	0,89	13
3.3	0,4	0,6	0,93	19
3.4	0,25	0,6	0,95	12
3.5	0,31	0,6	0,87	11
3.6	0,43	0,6	0,82	14
3.7	0,09	0,6	0,96	17
3.8	0,28	0,6	0,78	13
3.9	0,23	0,6	0,72	16
3.10	0,35	0,6	0,70	15
3.11	0,38	0,6	0,78	11
3.12	0,45	0,6	0,84	12
3.13	0,06	0,6	0,96	12
3.14	0,47	0,6	0,90	14
3.15	0,32	0,6	0,75	16
3.16	0,36	0,6	0,79	13
3.17	0,42	0,6	0,83	19
3.18	0,52	0,6	0,85	12
3.19	0,39	0,6	0,97	11
3.20	0,44	0,6	0,92	14
3.21	0,19	0,6	0,86	17
3.22	0,29	0,6	0,88	13
3.23	0,24	0,6	0,82	16
3.24	0,36	0,6	0,80	15
3.25	0,03	0,6	0,88	11
3.26	0,05	0,6	0,94	12
3.27	0,76	0,6	0,91	12
3.28	0,49	0,6	0,80	14
3.29	0,03	0,6	0,65	16
3.30	0, 25	0,6	0,77	10

Таблиця 3.5 – Вихідні дані для побудови розподілу Пуассона

№ вар.	Значення p_i $(i=1, 2, 3)$			n
3.1	0,002	0,005	0,003	1000
3.2	0,001	0,0007	0,0005	10000
3.3	0,0008	0,001	0,0004	9000
3.4	0,0076	0,0021	0,0033	12000

Продовження таблиці 3.5

№ вар.	Значення p_i $(i = 1, 2, 3)$			n
3.5	0,0002	0,0005	0,0003	20000
3.6	0,0025	0,0042	0,0018	1850
3.7	0,0018	0,003	0,0017	2100
3.8	0,0025	0,003	0,004	1700
3.9	0,0014	0,0017	0,0005	5300
3.10	0,0007	0,0008	0,0009	8000
3.11	0,0052	0,0068	0,0077	1025
3.12	0,007	0,0035	0,0083	1184
3.13	0,005	0,0045	0,009	1100
3.14	0,006	0,0065	0,0069	1300
3.15	0,002	0,006	0,004	1200
3.16	0,0003	0,0006	0,0005	16000
3.17	0,001	0,0003	0,0005	9300
3.18	0,008	0,0031	0,0058	1250
3.19	0,004	0,002	0,0035	2230
3.20	0,0004	0,00052	0,00065	14700
3.21	0,0027	0,0034	0,0019	2430
3.22	0,0035	0,004	0,0051	1860
3.23	0,0015	0,0005	0,0006	6300
3.24	0,0008	0,00093	0,00078	7800
3.25	0,0062	0,008	0,0069	1235
3.26	0,0038	0,0046	0,0071	1384
3.27	0,0006	0,00049	0,0008	12400
3.28	0,0065	0,0055	0,0028	1450
3.29	0,0008	0,0018	0,00096	3200
3.30	0,0036	0,0046	0,0039	1800

Контрольні питання

1. Поясніть суть терміна «випадкова величина». Які існують різновиди випадкових величин і як прийнято в технічній літературі позначати випадкові величини та їх можливі значення?

2. Поясніть суть термінів «дискретна випадкова величина» та «неперервна випадкова величина».

3. Розкрийте суть терміна «закон розподілу випадкової величини».

4. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?

5. Розкрийте суть формули Бернуллі і що вона дозволяє обчислити? Який вигляд вона має?

6. Коли доцільно застосовувати формулу Пуассона? Який вигляд вона має?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета: набути навичок обчислення і побудови функцій розподілу та функції густини заданого закону розподілу, оцінити вплив параметрів заданого закону на його поведінку.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо значення випадкової величини цілком заповнюють деякий інтервал (скінченний чи нескінченний), то така випадкова величина називається неперервною. Прикладом неперервної випадкової величини є, зокрема, результат вимірювання, зважування тощо.

Розглядаючи дискретні випадкові величини, ми користуємося їхніми законами розподілу, за якими кожному значенню x_i випадкової величини X відповідає певна ймовірність $p_i = P(X = x_i)$.

Для неперервної випадкової величини виписати її закон розподілу подібним чином неможливо. Тому під час вивчення неперервних випадкових величин потрібен інший підхід. Це реалізується через поняття функції розподілу випадкової величини (функція розподілу придатна також і для вивчення дискретних випадкових величин).

Якщо X – випадкова величина (неперервна або дискретна), а x – довільне число, то нерівність $(X < x)$ є випадковою подією. Її ймовірність $P(X < x)$ залежить від x. Тоді функція

$$F(x) = P(X < x)$$

називається *функцією розподілу* випадкової величини X.

Основні властивості функції розподілу:

1. Якщо $F(x)$ – функція розподілу, то $0 \le F(x) \le 1$ для будь-якого x.
2. Функція розподілу неспадна і $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
4. Якщо x_0 – точка неперервності функції розподілу $y = F(x)$ випадкової величини X, то $P(X = x_0) = 0$.

В процесі вивчення неперервних випадкових величин необхідно звернути увагу на те, що інтегральна функція розподілу використовується для задання як неперервної, так і дискретної випадкових величин. Диференціальна функція розподілу використовується лише для величин неперервних.

Власне кажучи, випадкову величину будемо називати неперервною, якщо її інтегральна функція неперервно диференційована. Розглядаючи закони розподілу випадкових неперервних величин, необхідно вивчити властивості функцій $f(x)$ і $F(x)$, їхній взаємозв'язок, імовірнісний зміст і числові характеристики.

Якщо функція розподілу F випадкової величини X диференційовна, то *щільністю розподілу ймовірностей* або *диференціальною функцією розподілу* називається функція

$$f(x) = F'(x).$$

Наведемо властивості функції розподілу $f(x)$.

1. $f(x) \geq 0$ для будь-якого x, як похідна неспадної функції $F(x)$.

2. Якщо $f(x)$ – щільність розподілу ймовірностей, то

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

3. Якщо $f(x)$ – щільність розподілу ймовірностей, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

4. Якщо $f(x)$ – щільність розподілу ймовірностей, а $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини X, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Показниковий розподіл

Кажуть, що випадкова величина X розподілена за *показниковим законом*, якщо її щільність ймовірностей задається функцією (рис. 4.1)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & за\ x \geq 0; \\ 0 & за\ x < 0. \end{cases}$$ (λ – деякий параметр)

Виявляється, що $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, а інтегральна функція розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

якщо скористатися формулою інтегрування частинами (рис. 4.2).

Як бачимо, показниковий розподіл визначається лише одним параметром λ. Ця особливість вказує на перевагу цього розподілу перед тими розподілами, які визначаються багатьма параметрами.

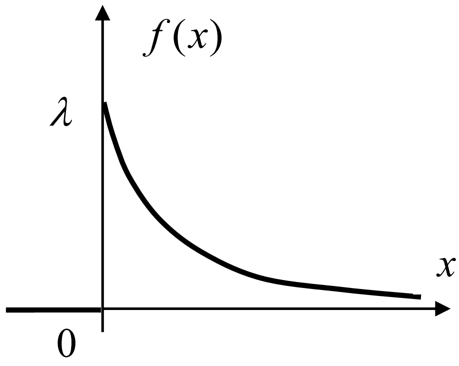


Рисунок 4.1

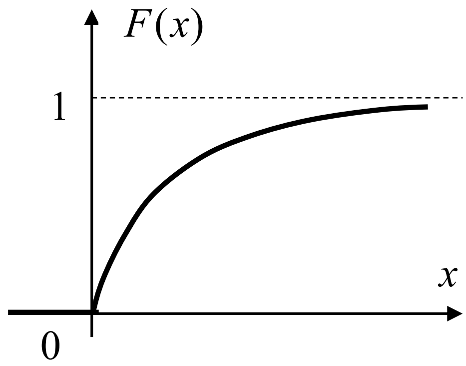


Рисунок 4.2

Нормальний розподіл

Розглянемо найважливіший із усіх розподілів – нормальний розподіл.

Багато випадкових величин, наприклад, помилки у вимірюваннях, відхилення під час стрільби та інші мають щільність імовірностей, що виражається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.1}$$

де a та σ – деякі параметри, до того ж $\sigma > 0$.

Тоді кажуть, що випадкова величина X підпорядкована *нормальному закону розподілу* (рис. 4.3).

Нормальний закон з’являється в схемі випробувань Бернуллі за великого числа випробувань і визначається лише двома параметрами: a та σ.

Якщо $a = 0$, $\sigma = 1$, то функція $f(x)$ збігається із функцією

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

яка є диференціальною функцією Лапласа (рис. 4.4).

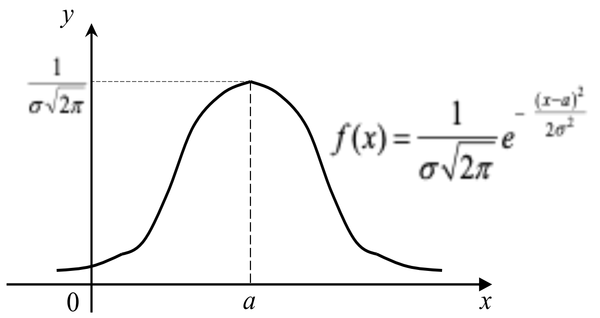


Рисунок 4.3

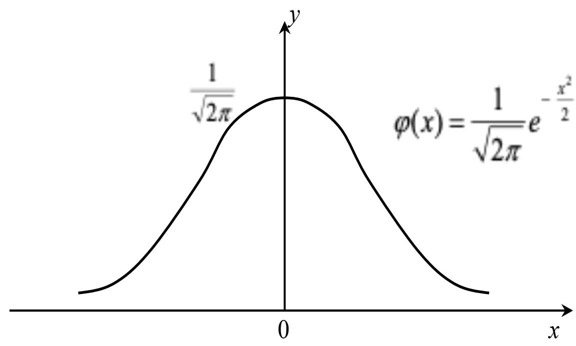


Рисунок 4.4

Неважко довести, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

a *− математичне сподівання*, а σ^2 *− дисперсія нормально розподіленої випадкової величини* X.

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{4.2}$$

де $\Phi(t) = \int\limits_{0}^{t} \varphi(z)dz$ − інтегральна функція Лапласа.

Ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини X *в інтервал* $(x_1; x_2)$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right] = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Тобто,

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{4.3}$$

Для функції щільності ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини характерно, що зі зменшенням σ її графік витягується вздовж прямої $x = a$ (рис. 4.5), а зміни інтегральної функції наведено на рис. 4.6.

Особливо важливим у практичних застосуваннях є «*правило трьох сигм*»:

$$P(|X - m_X| \geq 3\sigma) = 0{,}0027 \quad <=> \quad P(|X - m_X| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Це означає, що ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання більше ніж на 3σ дорівнює приблизно $\frac{1}{4}\%$. Така подія вважається практично *неможливою*.

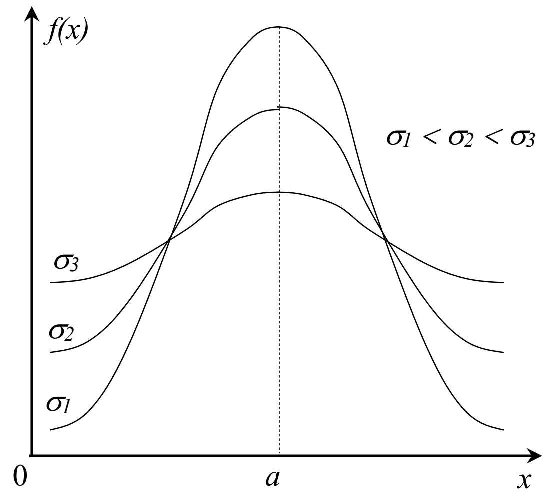


Рисунок 4.5

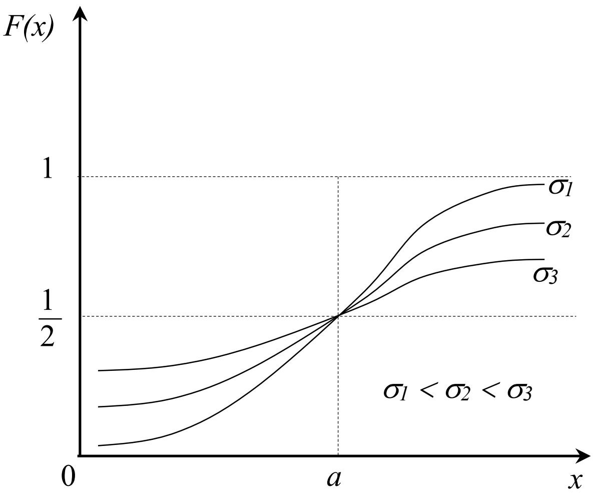


Рисунок 4.6

Інколи виникає потреба знайти ймовірність того, що відхилення $X - a$ нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше за задане число δ, тобто потрібно обчислити ймовірність виконання нерівності $|X - a| < \delta$.

Враховуючи, що

$$P\left(|X - a| < \delta\right) = P\left(a - \delta < X < a + \delta\right),$$

властивості функції Лапласа $\Phi\left(x\right)$ та (4.3), легко знаходимо, що

$$P\left(|X - a| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (4.4)$$

Зокрема за $a = 0$

$$P\left(|X| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Розглянемо також найважливіші спеціально побудовані випадкові величини, що мають широке застосування в математичній статистиці.

Розподіл χ^2

Нехай $X_1, X_2, \ \dots \ , X_n -$ *незалежні*, нормально розподілені випадкові величини, для яких $M\left(X_i\right)=0, \quad \sigma_{X_i}=1 \quad \left(i=1,2,\dots,n\right).$

Тоді кажуть, що випадкова величина

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 =: \chi^2$$

розподілена за *законом* χ^2 («*хі-квадрат*») з n степенями вільності.

Якщо випадкові величини X_i $i=1,2,\dots,n$ пов'язані лише одним лінійним співвідношенням, то число степенів вільності дорівнює $k=n-1$ (бо в такому разі одна з випадкових величин може бути лінійно виражена через решту випадкових величин, яких є $n-1$ і які вже є незалежні одна від одної).

Якщо ж випадкові величини $X_1, X_2, \ \dots \ , X_n$ пов'язані r лінійними співвідношеннями, то число степенів вільності дорівнює $k=n-r$, оскільки незалежних випадкових величин є $n-r$.

Диференціальна функція розподілу χ^2 має вигляд:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, & \textit{якщо } x > 0, \end{cases}$$

де $\Gamma\left(x\right)=\int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt -$ відома гамма-функція, для якої, $\Gamma\left(n+1\right)=n!$.

Звідси бачимо, що розподіл «хі-квадрат» визначається лише одним параметром $k -$ числом степенів вільності.

Під час збільшення числа степенів вільності цей розподіл повільно наближається до нормального.

Розподіл Стьюдента

Нехай $Z-$ нормально розподілена випадкова величина, $M\left(Z\right)=0$, $\sigma\left(Z\right)=1$, а $V-$ незалежна від Z випадкова величина, розподілена за законом χ^2 з k степенями вільності. Тоді величина $T = Z/\sqrt{V/k}$ має розподіл, який називають t*-розподілом* або *розподілом Стьюдента* з k степенями вільності.

Щільність ймовірностей розподілу Стьюдента

$$f(t)=\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \qquad t\in(-\infty;+\infty),$$

залежить лише від одного параметра $k-$ числа степенів вільності й не залежить від інших параметрів. У цьому є велика перевага розподілу Стьюдента.

Під час збільшення числа степенів вільності t-розподіл швидко наближається до нормального розподілу.

Розподіл Фішера

Якщо незалежні випадкові величини U та V розподілені за законом χ^2 із степенями вільності відповідно k_1та k_2, то випадкова величина

$$F=\frac{U/k_1}{V/k_2}$$

розподілена за законом, який називають F*-розподілом* або *розподілом Фішера-Снедекора і*з степенями вільності k_1 та k_2 (часто цей розподіл позначають через V^2).

Диференціальна функція цього розподілу

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{\Gamma\left((k_1+k_2)/2\right)\cdot k_1^{\frac{k_1}{2}}\cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}\cdot x^{\frac{k_1-2}{2}}}{\Gamma\left(k_1/2\right)\cdot\Gamma\left(k_2/2\right)\left(k_2+k_1x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & \text{якщо } x>0\end{cases}\cdot$$

Очевидно, що розподіл Фішера визначається двома параметрами k_1 та k_2

– числами степенів вільності.

Випадкові величини типу $X^0, U = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}, \overline{X}, \chi^2, T$ та F мають широке використання в розв'язуванні задач математичної статистики.

Наближення теоретичних розподілів до нормального. Асиметрія та ексцес

Емпіричним розподілом називають розподіл відносних частот. Такі розподіли вивчає математична статистика.

Теоретичним розподілом називають розподіл ймовірностей. Такі розподіли вивчає теорія ймовірностей.

У цьому підрозділі нами розглядаються теоретичні розподіли.

Під час вивчення розподілів, відмінних від нормального, виникає потреба оцінити наближеність того чи іншого розподілу до нормального. Для цього вводяться такі характеристики, як *асиметрія* та *ексцес*. Для нормального розподілу обидві ці характеристики дорівнюють нулю. А тому якщо для якогось розподілу *асиметрія* та *ексцес* близькі до нуля, то можна вважати такий розподіл близьким до нормального (за їх однакових математичних сподівань та однакових дисперсій).

Якщо крива розподілу випадкової величини X симетрична відносно вертикальної прямої $x = M\left(X\right)$, то розподіл називається *симетричним*.

Для симетричних розподілів всі центральні моменти непарних порядків дорівнюють нулю. Для несиметричних розподілів всі центральні моменти непарних порядків відмінні від нуля. Тому оцінкою асиметрії розподілу може слугувати будь-який з центральних моментів μ_k непарного порядку k (крім моменту першого порядку, котрий дорівнює нулю для всіх розподілів). Для простоти вибирають момент μ_3.

Для того, щоб характеристика асиметрії не залежала від одиниць вимірювання випадкової величини X (а моменти залежать), момент μ_3 ділять на куб середнього квадратичного відхилення σ.

Асиметрією теоретичного розподілу називають відношення центрального моменту третього порядку μ_3 до куба середнього квадратичного відхилення:

$$A_c = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Коли $A_c > 0$, то крива розподілу має вигляд, показаний на рис. 4.7.

Коли $A_c < 0$, то крива розподілу має вигляд, показаний на рис. 4.8.

Практично знак асиметрії визначається за розташуванням кривої розподілу відносно моди M_O (точки максимуму диференціальної функції).

Для оцінки «стрімкості» кривої теоретичного розподілу порівняно з кривою нормального розподілу, використовують таку характеристику як *ексцес*.

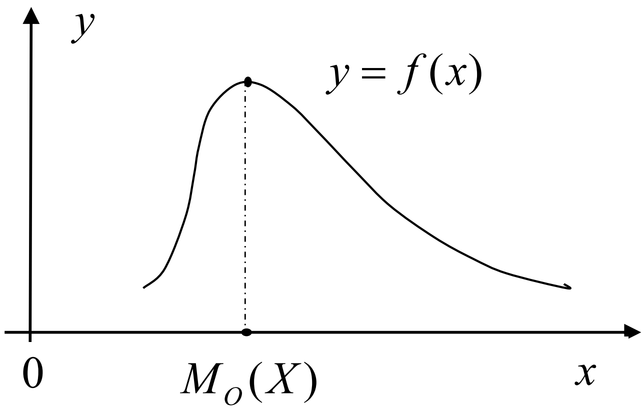


Рисунок 4.7

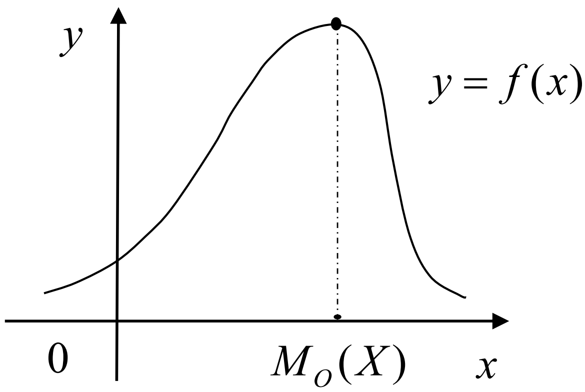


Рисунок 4.8

Ексцесом теоретичного розподілу називають характеристику, яка визначається рівністю:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

де μ_4 − центральний момент четвертого порядку.

Для нормального розподілу $E_k = 0$, оскільки для нього $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$.

Тому, коли для деякого розподілу ексцес $E_k \neq 0$, то такий розподіл відрізняється від нормального.

Якщо для деякого розподілу $E_k > 0$, то крива розподілу має вищу і «гострішу» вершину, ніж крива нормального розподілу (рис. 4.9).

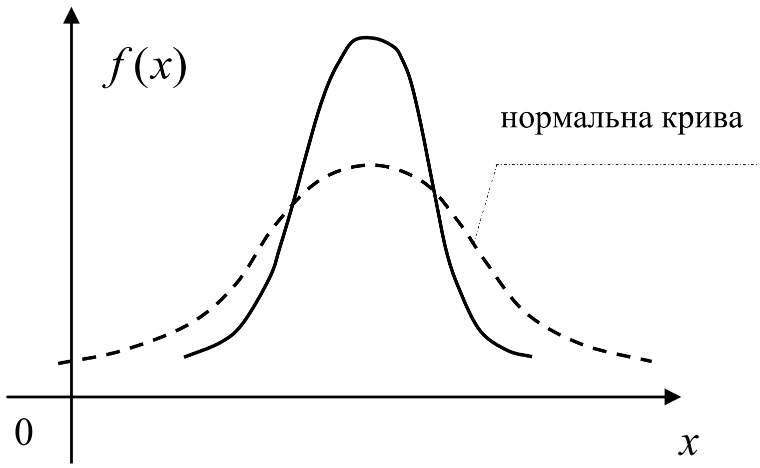


Рисунок 4.9

Якщо ексцес $E_k < 0$, то крива розподілу має нижчу й «приплюснуту» вершину порівняно з нормальною кривою (рис. 4.10).

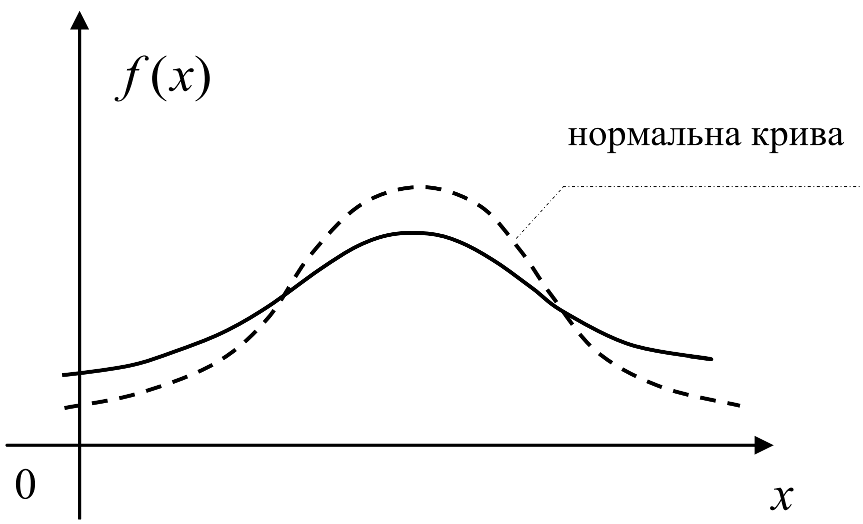


Рисунок 4.10

Під час порівняння розподілів вважаємо, що теоретичний і нормальний розподіли мають однакові математичні сподівання та дисперсії.

Порядок виконання роботи

1. Дослідження нормального закону розподілу.

- обчислити функцію розподілу і функцію щільності нормального закону розподілу для різних значень його параметрів;
- побудувати графічні залежності функції розподілу і функції щільності нормального закону розподілу за заданих значень a і σ.

2. Дослідження заданого закону розподілу неперервних випадкових величин.

- обчислити функцію розподілу і функцію щільності заданого закону розподілу за різних значень його параметрів;
- побудувати графічні залежності функції розподілу і функції щільності заданого закону розподілу за заданих значень його параметрів.

3. Оформити звіт, зробити висновки за результатами роботи.

Методика виконання

1. Створюємо файл в Excel : Створити → Пуста книга (рис. 4.11).

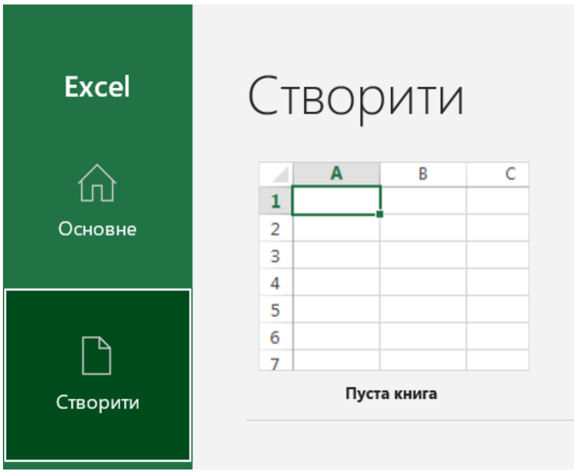


Рисунок 4.11 – Створення книги в MS Excel

2. Задаємо назву змінних та нумерацію випробувань згідно з варіантом.

Таблиця 4.1 – Завдання закону розподілу

<table>
<tr><th>№ варіанта</th><th>n</th><th>a</th><th>σ</th><th>Заданий закон розподілу</th></tr>
<tr><td rowspan="3">25</td><td rowspan="3">14</td><td>-1.4</td><td>0.9</td><td rowspan="3">χ^2 – розподіл
n = 1, n = 10, n = 18</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8,5</td></tr>
</table>

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		n	N1	N2	N3	IN1	IN2	IN3
2	1	-14						
3	2	-13,5						
4	3	-13						
5	4	-12,5						
6	5	-12						
7	6	-11,5						
8	7	-11						
9	8	-10,5						
10	9	-10						
11	10	-9,5						
12	11	-9						
13	12	-8,5						
14	13	-8						
15	14	-7,5						
16	15	-7						
17	16	-6,5						
18	17	-6						
19	18	-5,5						
20	19	-5						
21	20	-4,5						
22	21	-4						
23	22	-3,5						
24	23	-3						
25	24	-2,5						
26	25	-2						
27	26	-1,5						
28	27	-1						
29	28	-0,5						
30	29	0						

Рисунок 4.12 – Заповнення змінних в комірках таблиці MS Excel

30	29	0						
31	30	0,5						
32	31	1						
33	32	1,5						
34	33	2						
35	34	2,5						
36	35	3						
37	36	3,5						
38	37	4						
39	38	4,5						
40	39	5						
41	40	5,5						
42	41	6						
43	42	6,5						
44	43	7						
45	44	7,5						
46	45	8						
47	46	8,5						
48	47	9						
49	48	9,5						
50	49	10						
51	50	10,5						
52	51	11						
53	52	11,5						
54	53	12						
55	54	12,5						
56	55	13						
57	56	13,5						
58	57	14						

Рисунок 4.12, аркуш 2

3. Застосуємо формули нормального розподілу (=NORM.DIST(B2;-1,4;0,1;FALSE)) і густини нормального розподілу (=NORM.DIST(B2;-1,4;0,1;TRUE)).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		n	N1	N2	N3	IN1	IN2	IN3
2	1	-14	1,21845E-43	4,56736E-12	0,00028212	7,79354E-45	1,27981E-12	0,000389712
3	2	-13,5	2,49249E-40	2,54747E-11	0,000392813	1,65944E-41	7,39226E-12	0,000557061
4	3	-13	3,7447E-37	1,33478E-10	0,000541495	2,59937E-38	4,016E-11	0,000788846
5	4	-12,5	4,13199E-34	6,57001E-10	0,000739027	2,99579E-35	2,05226E-10	0,001106685
6	5	-12	3,34858E-31	3,03794E-09	0,00099858	2,54076E-32	9,86588E-10	0,001538195
7	6	-11,5	1,99306E-28	1,31962E-08	0,001335865	1,58599E-29	4,46217E-09	0,002118205
8	7	-11	8,71238E-26	5,38488E-08	0,001769291	7,2881E-27	1,89896E-08	0,002890068
9	8	-10,5	2,79713E-23	2,06424E-07	0,002320027	2,46608E-24	7,60496E-08	0,003907033
10	9	-10	6,5955E-21	7,4336E-07	0,003011923	6,14613E-22	2,86652E-07	0,005233608
11	10	-9,5	1,1422E-18	2,51475E-06	0,003871255	1,12859E-19	1,01708E-06	0,006946851
12	11	-9	1,45276E-16	7,99187E-06	0,004926254	1,52747E-17	3,39767E-06	0,009137468
13	12	-8,5	1,35707E-14	2,38593E-05	0,006206386	1,52444E-15	1,06885E-05	0,011910625
14	13	-8	9,31047E-13	6,69151E-05	0,007741371	1,12249E-13	3,16712E-05	0,015386335
15	14	-7,5	4,69136E-11	0,000176298	0,009559915	6,10192E-12	8,84173E-05	0,01969927
16	15	-7	1,73614E-09	0,000436341	0,011688189	2,45081E-10	0,000232629	0,024997895
17	16	-6,5	4,71877E-08	0,001014524	0,014148079	7,28011E-09	0,000577025	0,031442763
18	17	-6	9,41957E-07	0,002215924	0,016955272	1,60135E-07	0,001349898	0,039203903
19	18	-5,5	1,38099E-05	0,004546781	0,020117274	2,61237E-06	0,002979763	0,048457226
20	19	-5	0,0001487	0,00876415	0,023631459	3,16712E-05	0,006209665	0,059379941
21	20	-4,5	0,001175953	0,015869826	0,027483308	0,000286117	0,012224473	0,072145037
22	21	-4	0,006830089	0,026995483	0,031644958	0,001933028	0,022750132	0,086914962
23	22	-3,5	0,029135432	0,043138659	0,036074233	0,009815329	0,040059157	0,103834681
24	23	-3	0,091279876	0,064758798	0,040714278	0,03772018	0,066807201	0,123024403
25	24	-2,5	0,210032794	0,091324543	0,045493926	0,110811801	0,105649774	0,1445723
26	25	-2	0,354942228	0,120985362	0,050328868	0,252492538	0,158655254	0,168527607
27	26	-1,5	0,440541399	0,150568716	0,055123649	0,455764119	0,226627352	0,194894521
28	27	-1	0,401582033	0,176032663	0,059774481	0,671639357	0,308537539	0,223627292
29	28	-0,5	0,268856361	0,193334058	0,064172761	0,841344746	0,401293674	0,254626915
30	29	0	0,132197989	0,19947114	0,068209158	0,940093093	0,5	0,287739719

Рисунок 4.13 – Таблиці MS Excel з розрахованими формулами

32	31	1	0,012662207	0,176032663	0,074782121	0,996169619	0,691462461	0,359423567
33	32	1,5	0,002466547	0,150568716	0,077136674	0,999363998	0,773372648	0,397431887
34	33	2	0,000352881	0,120985362	0,078773672	0,999920883	0,841344746	0,436440537
35	34	2,5	3,70787E-05	0,091324543	0,079644966	0,999992657	0,894350226	0,476077817
36	35	3	2,86141E-06	0,064758798	0,079724651	0,999999493	0,933192799	0,515953437
37	36	3,5	1,62179E-07	0,043138659	0,079010348	0,999999974	0,959940843	0,555670005
38	37	4	6,75098E-09	0,026995483	0,077523323	0,999999999	0,977249868	0,594834872
39	38	4,5	2,06394E-10	0,015869826	0,075307432	1	0,987775527	0,633071736
40	39	5	4,63433E-12	0,00876415	0,072426976	1	0,993790335	0,670031446
41	40	5,5	7,6425E-14	0,004546781	0,0689636	1	0,997020237	0,705401484
42	41	6	9,25639E-16	0,002215924	0,065012453	1	0,998650102	0,7389137
43	42	6,5	8,23392E-18	0,001014524	0,060677857	1	0,999422975	0,770350003
44	43	7	5,37935E-20	0,000436341	0,056068762	1	0,999767371	0,799545807
45	44	7,5	2,58114E-22	0,000176298	0,051294259	1	0,999911583	0,82639122
46	45	8	9,09604E-25	6,69151E-05	0,046459401	1	0,999968329	0,85083005
47	46	8,5	2,35424E-27	2,38593E-05	0,041661558	1	0,999989311	0,872856849
48	47	9	4,47516E-30	7,99187E-06	0,036987456	1	0,999996602	0,892512303
49	48	9,5	6,24777E-33	2,51475E-06	0,032511011	1	0,999998983	0,909877328
50	49	10	6,40618E-36	7,4336E-07	0,028291993	1	0,999999713	0,9250663
51	50	10,5	4,82427E-39	2,06424E-07	0,024375507	1	0,999999924	0,938219823
52	51	11	2,66823E-42	5,38488E-08	0,020792219	1	0,999999981	0,949497417
53	52	11,5	1,08386E-45	1,31962E-08	0,017559214	1	0,999999996	0,959070491
54	53	12	3,23357E-49	3,03794E-09	0,014681363	1	0,999999999	0,967115881
55	54	12,5	7,08514E-53	6,57001E-10	0,012153034	1	1	0,973810155
56	55	13	1,14018E-56	1,33478E-10	0,009960018	1	1	0,979324837
57	56	13,5	1,34759E-60	2,54747E-11	0,008081511	1	1	0,983822617
58	57	14	1,16977E-64	4,56736E-12	0,006492053	1	1	0,987454539

Рисунок 4.13, аркуш 2

4. Побудуємо графічну залежність нормального розподілу для цієї таблиці.

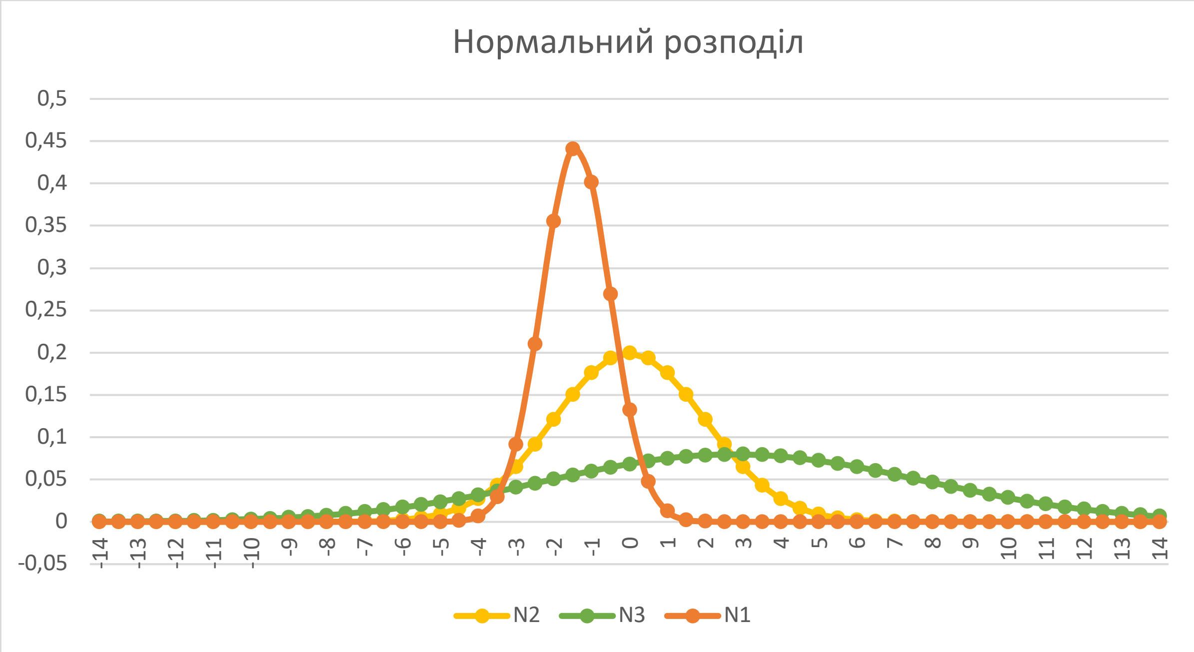


Рисунок 4.14 – Графік нормального закону розподілу

5. Побудуємо графічну залежність щільності нормального розподілу.

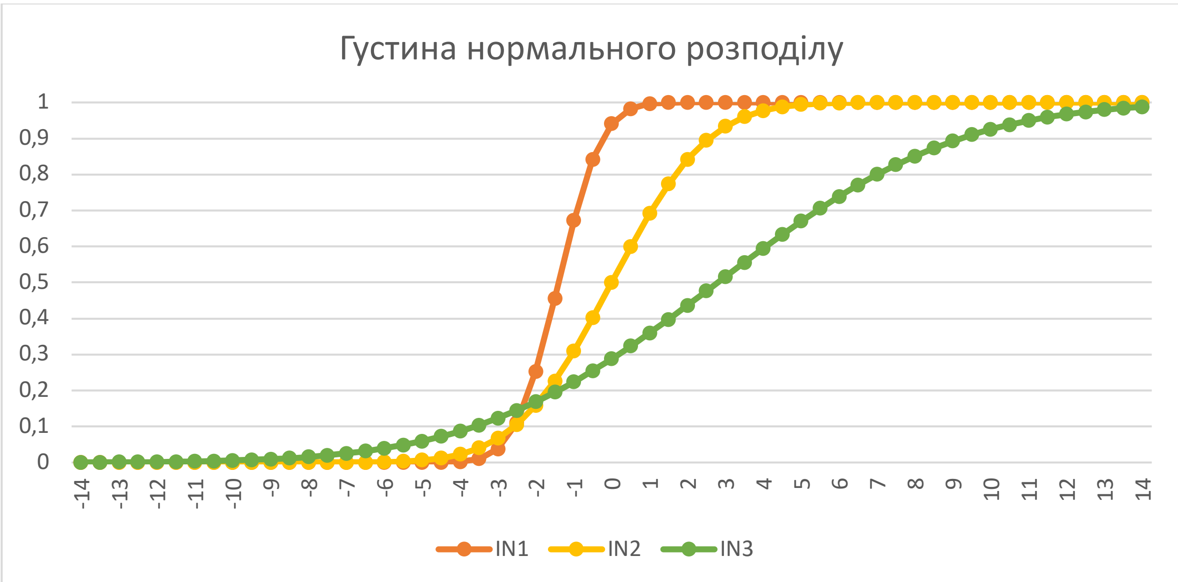


Рисунок 4.15 – Графік щільності нормального закону розподілу

6. Аналогічно застосовуємо формули для розподілу χ^2. Формула для розподілу (=CHISQ.DIST(B32;1;FALSE)) та для щільності (=CHISQ.DIST(B32;1; TRUE)). Починаємо вводити формулу зі значення 1, тому що для цього розподілу потрібні цілі та додатні числа.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		n	X1	X2	X3	IX1	IX2	IX3
2	1	-2	0	0	0	0	0	0
3	2	-1,5	0	0	0	0	0	0
4	3	-1	0	0	0	0	0	0
5	4	-0,5	0	0	0	0	0	0
6	5	0	0	0	0	0	0	0
7	6	0,5	0,439391289	6,3379E-05	1,47366E-10	0,520499878	6,61171E-06	8,3964E-12
8	7	1	0,241970725	0,000789753	2,93807E-08	0,682689492	0,000172116	3,43549E-09
9	8	1,5	0,153866323	0,003113744	5,86433E-07	0,779328638	0,001064678	1,05602E-07
10	9	2	0,103776874	0,007664155	4,562E-06	0,842700793	0,003659847	1,1252E-06
11	10	2,5	0,072288957	0,014572388	2,11769E-05	0,886153702	0,009124279	6,71095E-06
12	11	3	0,051393443	0,023533259	7,0915E-05	0,916735483	0,018575936	2,77358E-05
13	12	3,5	0,037056185	0,033954365	0,000189556	0,938631171	0,03290162	8,90144E-05
14	13	4	0,026995483	0,045111761	0,000429636	0,954499736	0,052653017	0,000237447
15	14	4,5	0,019821715	0,056276393	0,000858513	0,966105146	0,078014107	0,000550061
16	15	5	0,014644983	0,066800943	0,001553221	0,974652681	0,108821981	0,001140253
17	16	5,5	0,01087474	0,076169256	0,002592992	0,980983526	0,144621494	0,002160828
18	17	6	0,008108696	0,084015678	0,004050756	0,985694122	0,184736755	0,003802992
19	18	6,5	0,006067312	0,090122896	0,005984933	0,989212551	0,228346563	0,006291106
20	19	7	0,004553343	0,094406143	0,008432632	0,991849028	0,274555047	0,009873658
21	20	7,5	0,003425904	0,096890127	0,011405001	0,993830101	0,322452364	0,014811341
22	21	8	0,002583373	0,097683407	0,014885091	0,995322265	0,371163065	0,021363434
23	22	8,5	0,001951862	0,096953376	0,018828225	0,996448535	0,419881686	0,029773747
24	23	9	0,001477283	0,09490381	0,02316458	0,997300204	0,467896424	0,040257312
25	24	9,5	0,001119823	0,091755987	0,027803506	0,997945281	0,514602442	0,05298884
26	25	10	0,000850037	0,087733685	0,03263902	0,998434598	0,559506715	0,068093635

Рисунок 4.16 – Таблиці MS Excel з розрахованими формулами для розподілу χ^2

28	27	11	0,00049158	0,077909402	0,042435698	0,999088881	0,642481998	0,105643322
29	28	11,5	0,000374428	0,072483119	0,047162733	0,999304038	0,680088569	0,128051624
30	29	12	0,000285465	0,066926309	0,051628867	0,999467994	0,7149435	0,152762506
31	30	12,5	0,000217828	0,061367484	0,055737708	0,999593048	0,747014677	0,179620859
32	31	13	0,000166351	0,055911103	0,059407627	0,999688509	0,776328183	0,208426967
33	32	13,5	0,000127132	0,050639114	0,062573711	0,999761437	0,802956625	0,238944415
34	33	14	9,72265E-05	0,045613096	0,065188716	0,999817189	0,827008392	0,270908732
35	34	14,5	7,44031E-05	0,040876697	0,067223101	0,99985984	0,848618076	0,304036266
36	35	15	5,69713E-05	0,036458198	0,068664296	0,999892489	0,867938144	0,338032881
37	36	15,5	4,36478E-05	0,032373029	0,069515374	0,999917495	0,885131887	0,372602132
38	37	16	3,34576E-05	0,028626144	0,069793266	0,999936658	0,9003676	0,407452659
39	38	16,5	2,56589E-05	0,025214193	0,069526696	0,99995135	0,913813889	0,442304602
40	39	17	1,96871E-05	0,02212745	0,068753972	0,99996262	0,92563602	0,476894955
41	40	17,5	1,51117E-05	0,019351483	0,067520739	0,999971269	0,935993153	0,510981793
42	41	18	1,16044E-05	0,016868578	0,06587782	0,99997791	0,945036359	0,544347396
43	42	18,5	8,91457E-06	0,014658912	0,063879188	0,99998301	0,952907277	0,57680032
44	43	19	6,85071E-06	0,012701517	0,06158015	0,999986928	0,959737318	0,608176517
45	44	19,5	5,26649E-06	0,010975038	0,059035767	0,99998994	0,965647279	0,638339589
46	45	20	4,04996E-06	0,009458319	0,056299516	0,999992256	0,970747312	0,667180321
47	46	20,5	3,11541E-06	0,008130847	0,053422224	0,999994037	0,975137134	0,694615617
48	47	21	2,39722E-06	0,006973068	0,050451236	0,999995407	0,978906434	0,720586952
49	48	21,5	1,84512E-06	0,0059666	0,047429824	0,999996462	0,982135413	0,745058475
50	49	22	1,42056E-06	0,005094367	0,044396799	0,999997273	0,984895399	0,768014867
51	50	22,5	1,09397E-06	0,004340662	0,041386313	0,999997899	0,987249527	0,789459057
52	51	23	8,42674E-07	0,003691166	0,038427812	0,99999838	0,989253422	0,80940987
53	52	23,5	6,49256E-07	0,003132925	0,035546124	0,999998751	0,990955895	0,827899696
54	53	24	5,00346E-07	0,0026543	0,032761642	0,999999037	0,992399609	0,844972218
55	54	24,5	3,85673E-07	0,002244893	0,030090596	0,999999257	0,993621724	0,860680265
56	55	25	2,97344E-07	0,001895474	0,027545367	0,999999427	0,994654495	0,875083803
57	56	25,5	2,2929E-07	0,001597883	0,025134851	0,999999558	0,995525831	0,888248102
58	57	26	1,76846E-07	0,001344943	0,022864833	0,999999659	0,996259814	0,900242086

Рисунок 4.16, аркуш 2

7. Побудуємо графік функції розподілу χ^2.

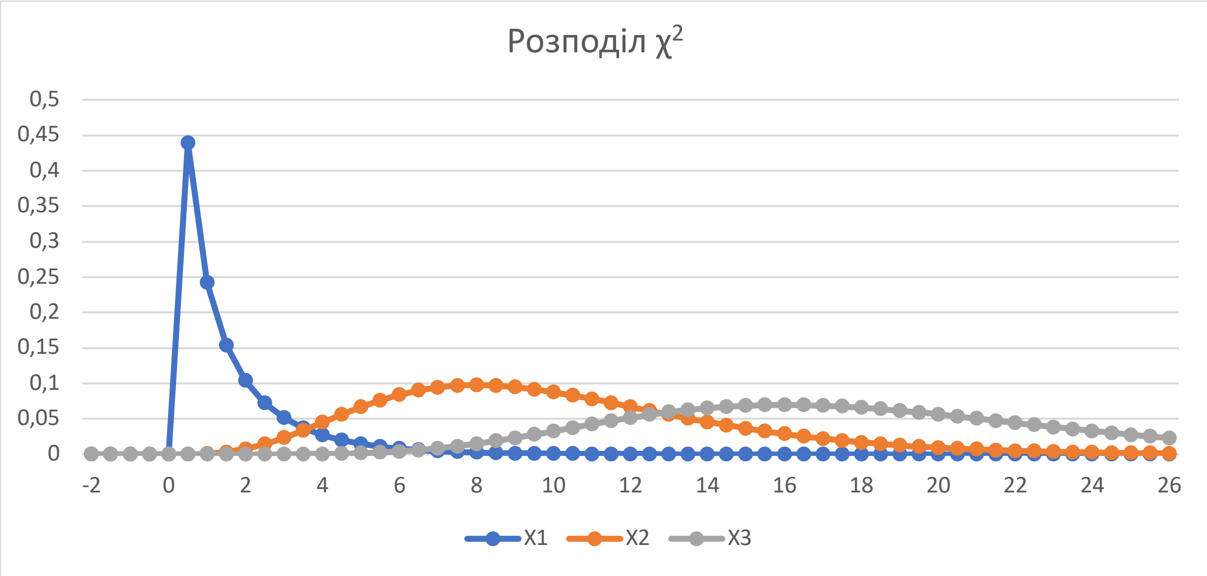


Рисунок 4.17 – Графік закону розподілу χ^2

8. Побудуємо графік щільності розподілу χ^2.

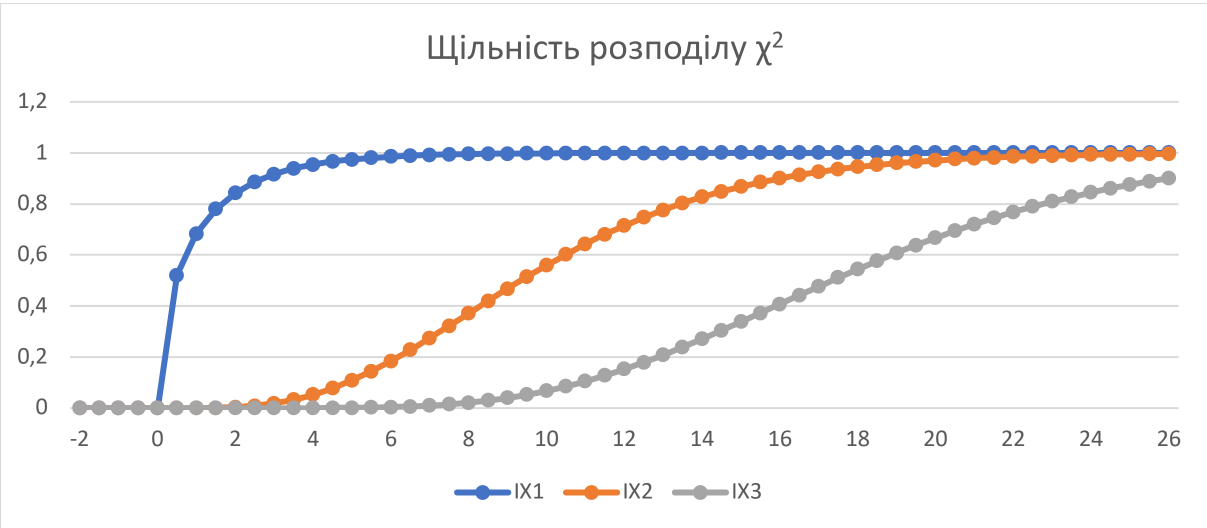


Рисунок 4.18 – Графік щільності закону розподілу χ^2

Додатково:

1. Для розподілу Стьюдента потрібно використати таку формулу =T.DIST(n;k;FALSE), а для щільності розподілу Стьюдента: =T.DIST(n;k;TRUE).
2. Для розподілу Фішера потрібно використати таку формулу =F.DIST(n;n1;n2;FALSE), а для щільності розподілу Фішера: =F.DIST(n;n1;n2;TRUE). Починаємо вводити формулу зі значення 0.
3. Для показникового (експоненційного) розподілу потрібно використати таку формулу =EXPON.DIST(n;λ;FALSE), а для

щільності експоненційного розподілу: =EXPON.DIST(n;λ;TRUE). Починаємо вводити формулу зі значення 0.

4. Для рівномірного розподілу потрібно 1/n, а для щільності нормального розподілу - n_i (1,2,3) * 1/n.

Варіанти завдань

Таблиця 4.2

№ вар.	n	a	σ	Заданий закон розподілу
1	12	2	0,8	F – розподіл (розподіл Фішера), $(n_1=1, n_2=4)$, $(n_1=n_2=4)$, $(n_1=4, n_2=1)$
		0	10	
		-3	2	
2	12	-4	0,7	t – розподіл (розподіл Стьюдента) $k=3$, $k=7$, $k=1$
		0	8	
		2	3	
3	14	2,5	0,8	Показниковий (експоненціальний) розподіл $\lambda=0,2$; $\lambda=0,9$; $\lambda=1,8$
		0	5	
		-0,5	2,5	
4	14	1,5	0,4	Рівномірний розподіл
		0	15	
		-5	3,8	
5	15	-1,5	0,2	χ^2 – розподіл $n=1$; $n=10$; $n=1,8$
		0	3	
		2,9	15	
6	15	3,5	1,7	F – розподіл (розподіл Фішера), $(n_1=2, n_2=4)$, $(n_1=n_2=2)$, $(n_1=4, n_2=2)$
		0	7	
		-3,5	0,5	
7	14	-1	2,5	t – розподіл (розподіл Стьюдента) $k=1$, $k=4$, $k=10$
		0	4	
		4	0,9	
8	15	2	3	Показниковий (експоненціальний) розподіл $\lambda=0,5$; $\lambda=3$; $\lambda=1$
		0	0,5	
		-2	7	
9	12	-1	4,5	χ^2 – розподіл $n=1$; $n=5$; $n=15$
		0	1	
		1	0,6	
10	16	-1	1,2	Рівномірний розподіл
		0	1	
		1,5	0,5	

Продовження таблиці 4.2

№ вар.	n	a	σ	Заданий закон розподілу
11	13	3	0,9	F – розподіл (розподіл Фішера),
		0	11	$(n_1 = 1, n_2 = 4)$, $(n_1 = n_2 = 4)$,$(n_1 = 4, n_2 = 1)$
		-4	3	
12	13	-5	0,8	t – розподіл (розподіл Стьюдента)
		0	9	$k = 3$, $k = 7$, $k = 1$
		2	4	
13	15	2,6	0,9	Показниковий (експоненціальний) розподіл
		0	6	$\lambda = 0{,}2$; $\lambda = 0{,}9$; $\lambda = 1{,}8$
		-0,6	2,6	
14	15	1,6	0,4	Рівномірний розподіл
		0	16	
		-6	4,8	
15	16	-1,6	0,3	χ^2 – розподіл
		0	4	$n = 1$; $n = 10$; $n = 1{,}8$
		3,0	16	
16	16	3,6	1,8	F – розподіл (розподіл Фішера),
		0	8	$(n_1 = 2, n_2 = 4)$, $(n_1 = n_2 = 2)$,$(n_1 = 4, n_2 = 2)$
		-3,6	0,6	
17	15	-2	2,6	t – розподіл (розподіл Стьюдента)
		0	5	$k = 1$, $k = 4$, $k = 10$
		5	1,0	
18	16	3	4	Показниковий (експоненціальний) розподіл
		0	0,6	$\lambda = 0{,}5$; $\lambda = 3$; $\lambda = 1$
		-3	8	
19	13	-2	5,5	χ^2 – розподіл
		0	2	$n = 1$; $n = 5$; $n = 15$
		2	1,6	
20	17	-2	2,2	Рівномірний розподіл
		0	2	
		2,5	1,5	
21	11	1	0,7	F – розподіл (розподіл Фішера),
		0	9	$(n_1 = 1, n_2 = 4)$, $(n_1 = n_2 = 4)$,$(n_1 = 4, n_2 = 1)$
		-2	1	
22	11	-1	0,6	t – розподіл (розподіл Стьюдента)
		0	7	$k = 3$, $k = 7$, $k = 1$
		1	2	

Продовження таблиці 4.2

№ вар.	n	a	σ	Заданий закон розподілу
23	13	1,5	0,7	Показниковий (експоненціальний) розподіл $\lambda=0,2;\quad \lambda=0,9;\quad \lambda=1,8$
		0	4	
		-0,4	1,5	
24	13	1,4	0,3	Рівномірний розподіл
		0	14	
		-4	3,7	
25	14	-1,4	0,1	χ^2 – розподіл $n=1;\quad n=10;\quad n=1,8$
		0	2	
		2,8	14	
26	14	3,4	1,6	F – розподіл (розподіл Фішера), $(n_1=2, n_2=4)$, $(n_1=n_2=2)$,$(n_1=4, n_2=2)$
		0	6	
		-3,4	0,4	
27	13	-3	2,7	t – розподіл (розподіл Стьюдента) $k=1,\quad k=4,\quad k=10$
		0	6	
		6	1,9	
28	14	1	2	Показниковий (експоненціальний) розподіл $\lambda=0,5;\quad \lambda=3;\quad \lambda=1$
		0	0,5	
		-1	6	
29	11	-3	5,5	χ^2 – розподіл $n=1;\quad n=5;\quad n=15$
		0	2	
		3	0,8	
30	15	-3	1,1	Рівномірний розподіл
		0	2	
		3,5	0,6	

Контрольні питання

1. Поясніть суть терміна «неперервна випадкова величина».
2. Поясніть, які властивості має інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини?
3. Поясність, що таке щільність розподілу і її зв’язок з функцією розподілу неперервної випадкової величини.
4. Поясність геометричне тлумачення щільності розподілу випадкової величини.
5. Поясніть, які властивості має диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ГРАФІЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ВИБІРКИ

Мета: дослідити методи графічного зображення статистичного розподілу вибірки.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Математична статистика − розділ вищої математики, що вивчає масові випадкові явища з метою встановлення їхніх закономірностей. Сучасну математичну статистику визначають як науку про прийняття рішень в умовах невизначеності.

Дані у статистиці, отримані за допомогою спеціальних досліджень або із звичайних робочих записів у бізнесі, надходять до дослідника у вигляді неорганізованої маси незалежно від того, чи є вони даними із вибіркової сукупності, чи даними з генеральної сукупності. Тому постає питання щодо оброблення і впорядкування даних.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів, з яких робиться вибірка.

Обсягом вибраної або генеральної сукупності називають число об'єктів її утворюючих.

Вибіркою називають сукупність випадково вибраних з генеральної сукупності однорідних об'єктів в процесі дослідження деякої якісної або кількісної ознаки.

Відбір об'єктів, що формують вибірку, може бути: простим випадковим; типовим; механічним і серійним.

Вид відбору визначає дослідник під час вирішення певного завдання.

Варіантою x_i називають спостережуване значення елемента вибірки.

Варіаційним рядом називають послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку.

Частотами n_i називають число спостереження варіанти x_i.

Відносними частотами називають відношення частот до обсягу вибірки.

$$W_i = n_i / n \cdot$$

Контроль правильності знаходження відносних частот вибірки обсягу n:

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1 \text{ , } \sum_{i=1}^{k} n_i = n \text{ (обсяг вибірки).}$$

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення *x* відносну частоту події $X < x$.

Теоретичною функцією розподілу називають функцію $F(x)$, що визначає для кожного значення *x* ймовірність події $X < x$.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот, поданих у вигляді таблиці (табл. 5.1):

Таблиця 5.1 – Статистичний розподіл вибірки

x_i	x_1	x_2	…	x_k	Σ
n_i	n_1	n_2	…	n_k	n
W_i	W_1	W_2	…	W_k	1

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки:

$$(x_1; n_1),\ (x_2; n_2),\ \ldots,\ (x_k; n_k).$$

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки:

$$(x_1; W_1),\ (x_2; W_2),\ \ldots,\ (x_k; W_k).$$

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, що складається із прямокутників з основами на осі абсцис (часткові інтервали) і висотами, які дорівнюють щільності частот. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, що складається із прямокутників, основами яких слугують часткові інтервали довжини h, а висоти дорівнюють відношенню W_i / h. Площа цієї гістограми дорівнює одиниці.

Порядок виконання роботи

1. Обчислити емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ випадкової величини *X*.

2. Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

3. Побудувати полігон частот n_i.

4. Побудувати полігон відносних частот W_i.

5. Побудувати гістограму частот n_i та гістограму відносних частот W_i неперервної випадкової величини.

Методика виконання

1. Створюємо файл в середовищі Excel. Для цього потрібно виконати такі дії: Створити → Пуста книга (рис. 5.1).

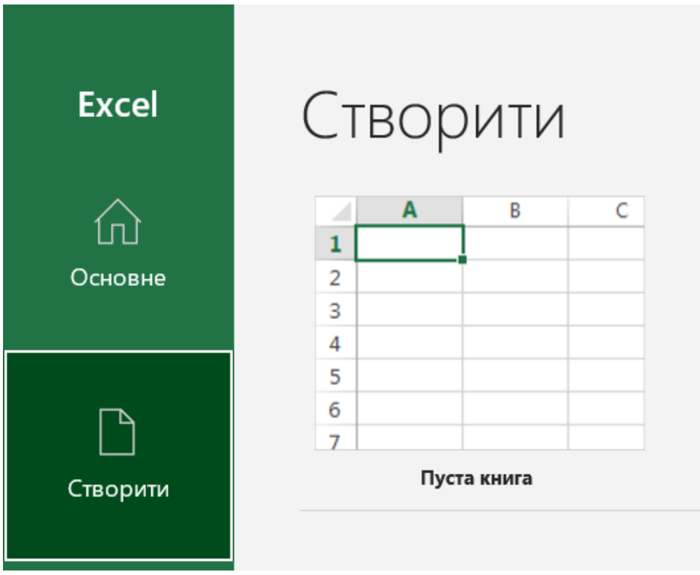


Рисунок 5.1 – Створення робочого вікна

2. Задаємо назву змінних та нумерацію випробувань згідно з варіантом (табл. 5.2). На рис. 5.2 подано приклад занесення даних в електронну таблицю.

Таблиця 5.2 – Варіант завдання для побудови емпіричної функції розподілу, полігона частот та полігона відносних частот

x_i	3	4	8	11
n_i	15	19	12	18

	A	B	C	D
1	Xi	ni	Wi	F*(x)
2	3	15		
3	4	19		
4	8	12		
5	11	18		
6	Сума			

Рисунок 5.2 – Приклад занесення даних в електронну таблицю

3. Застосовуємо формули для знаходження значень відносних частот та емпіричної функції розподілу. Для обчислення значення w_i використаємо формулу: $w_i = n_i / n \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots)$. Сума значень W_i має дорівнювати 1. Для того, щоб обчислити значення $F^*(x)$ потрібно виконати такі дії: n_1 / n; $(n_1 + n_2) / n$; $(n_1 + n_2 + n_3) / n$ і т. д. (рис. 5.3).

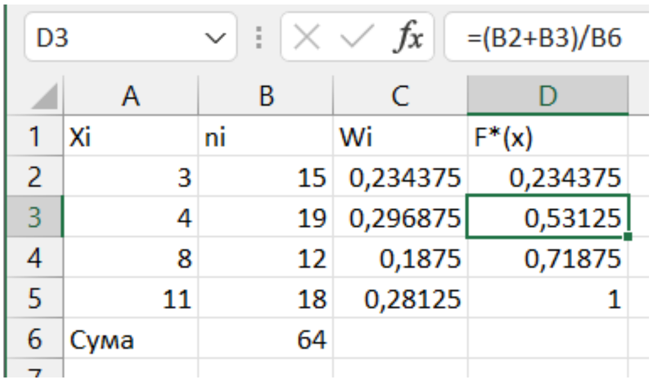


Рисунок 5.3 – Приклад сформованих даних для побудови емпіричної функції розподілу

4. Побудуємо емпіричну функцію розподілу $F^{*}(x)$. Вибираємо точкову діаграму з прямими лініями (рис. 5.4).

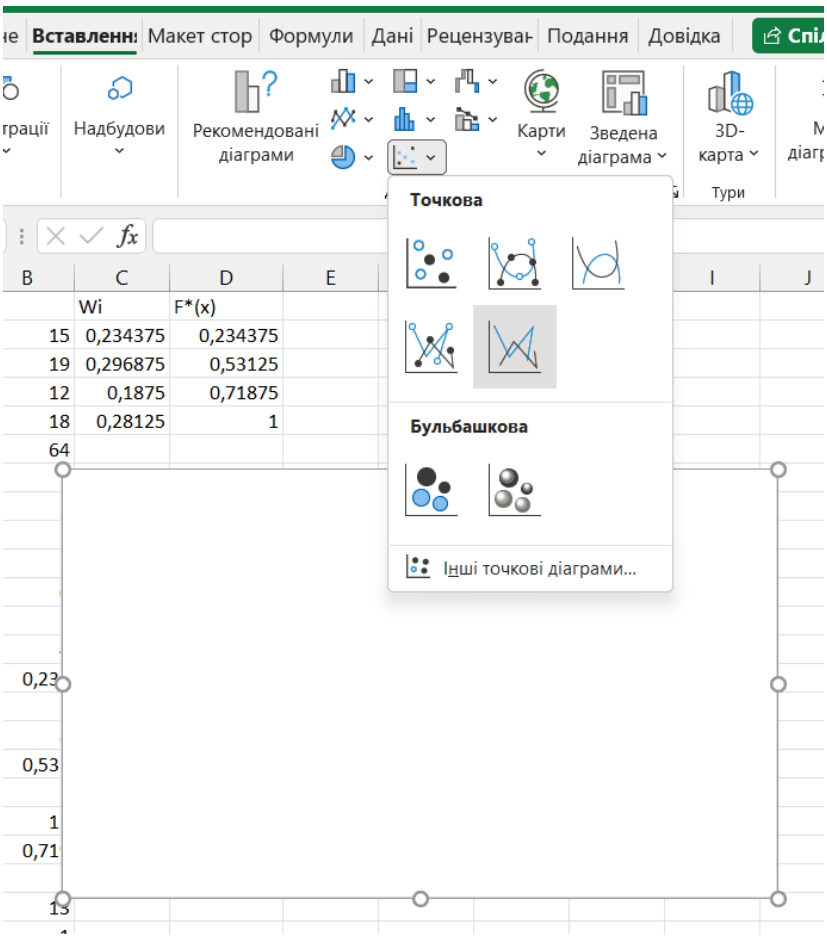


Рисунок 5.4 – Початковий етап побудови точкової діаграми з прямими лініями

5. В спадному меню натискаємо «Вибрати дані» (рис. 5.5).

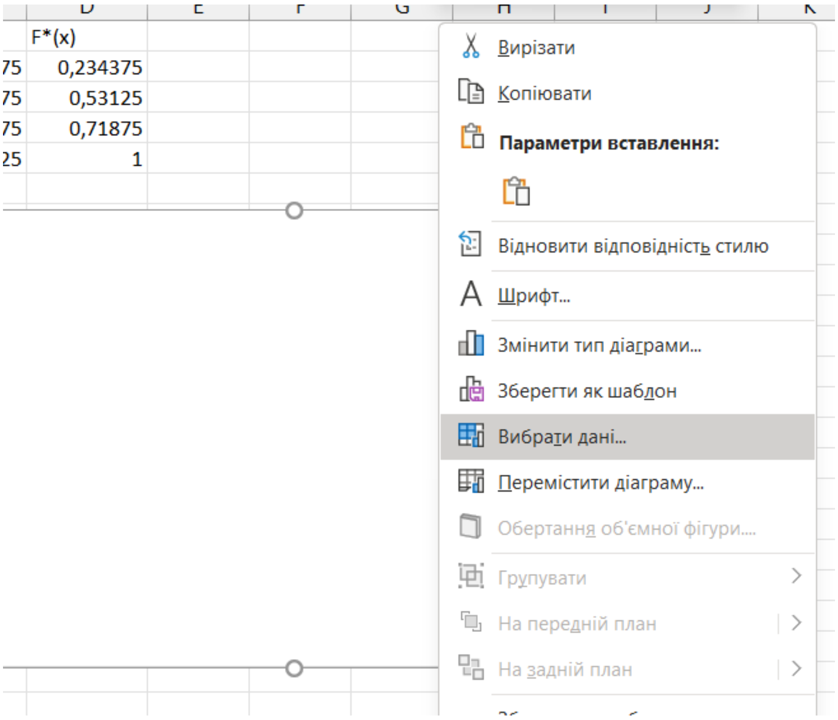


Рисунок 5.5 – Вибір даних для побудови емпіричної функції розподілу

6. Створюємо таку таблицю даних (рис. 5.6).

0	3
0	0
3	4
0,234	0,234
4	8
0,531	0,531
8	11
0,719	0,719
11	13
1	1

Рисунок 5.6 – Таблиця даних для побудови емпіричної функції розподілу на площині $X0Y$

7. Потім натискаємо додати і в рядку, де розміщено значення абсциси X виділяємо клітинки 0 та 3, а в рядку, де є значення ординати Y – 0 і 0. І так додаємо кожен рядок відповідно (рис. 5.7).

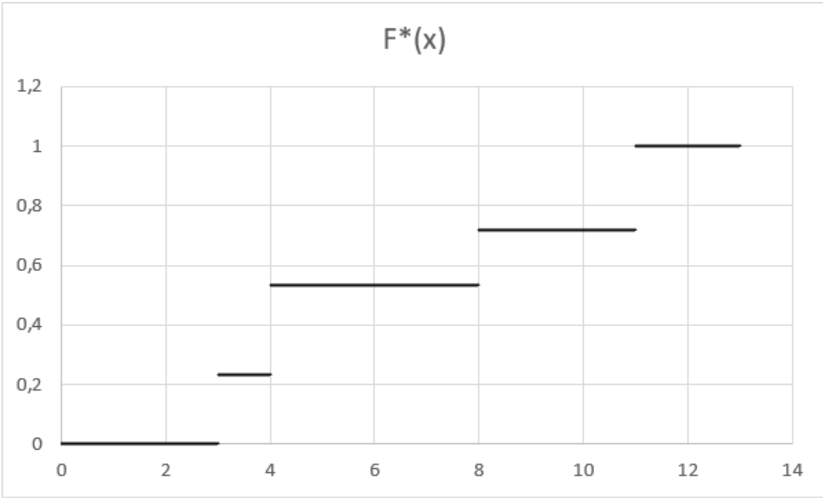


Рисунок 5.7 – Графічне зображення емпіричної функції розподілу

8. Наступним етапом є побудова полігона частот n_i. Вибираємо точкову діаграму з прямими лініями (рис. 5.8).

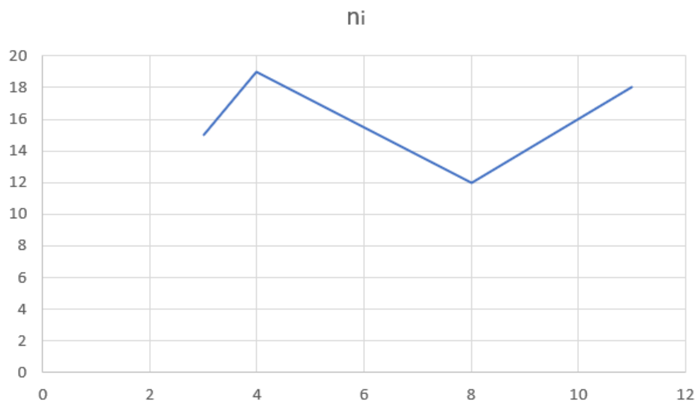


Рисунок 5.8 – Графічне зображення полігона частот

9. Будуємо полігон відносних частот W_i. Вибираємо точкову діаграму з прямими лініями (рис. 5.9).

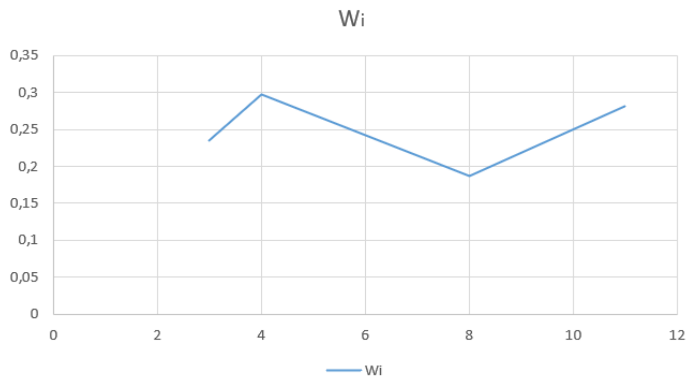


Рисунок 5.9 – Графічне зображення полігона відносних частот

10. Наступним етапом дослідження є побудова гістограми частот та гістограми відносних частот, використовуючи дані варіанту (табл. 5.3). Будуємо нову електронну таблицю та обчислюємо щільності частоти та щільності відносної частоти (рис. 5.10).

Таблиця 5.3 – Варіант завдання для побудови гістограми частот та гістограми відносних частот

x_i	4÷8	8÷12	12÷16	16÷20
n_i	19	15	13	18
h	4			

C2 =B2/4

	A	B	C	D	E
1	Xi	ni	ni/h	Wi	Wi/h
2	4	19	4,75	0,292308	0,073077
3	8	15	3,75	0,230769	0,057692
4	12	13	3,25	0,2	0,05
5	16	18	4,5	0,276923	0,069231
6	Сума	65		1	

Рисунок 5.10 – Приклад сформованих даних для побудови гістограми частот та гістограми відносних частот

11. Тепер побудуємо гістограму частот n_i, тобто натискаємо Вставка → Ілюстрації → Фігури і зображаємо гістограму, використовуючи дані з таблиці (рис. 5.10). На рис. 5.11 подано графічне зображення гістограми частот.

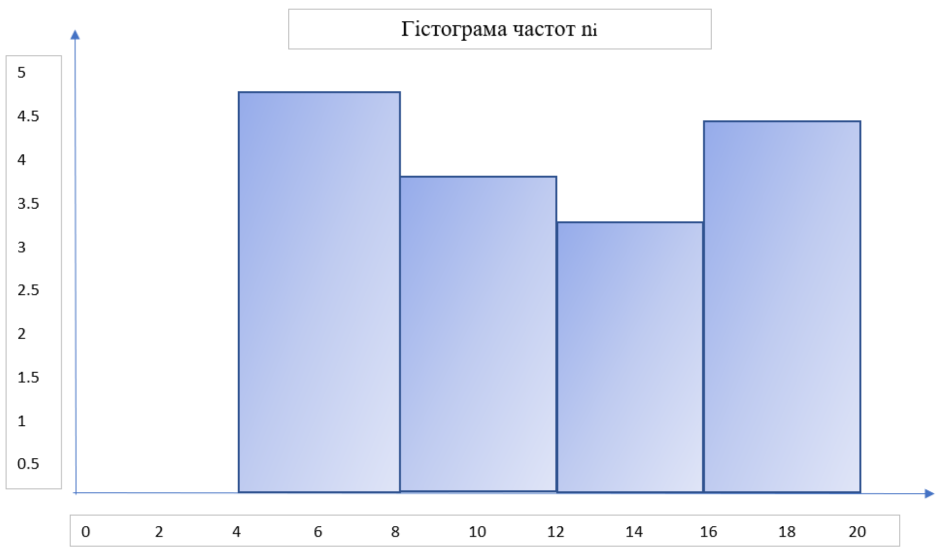


Рисунок 5.11 – Графічне зображення гістограми частот

12. На основі сформованих даних (рис. 5.10) побудуємо гістограму відносних частот W_i, виконуючи такі дії: натискаємо Вставка → Ілюстрації → Фігури. На рис. 5.12 подано графічне зображення гістограми відносних частот.

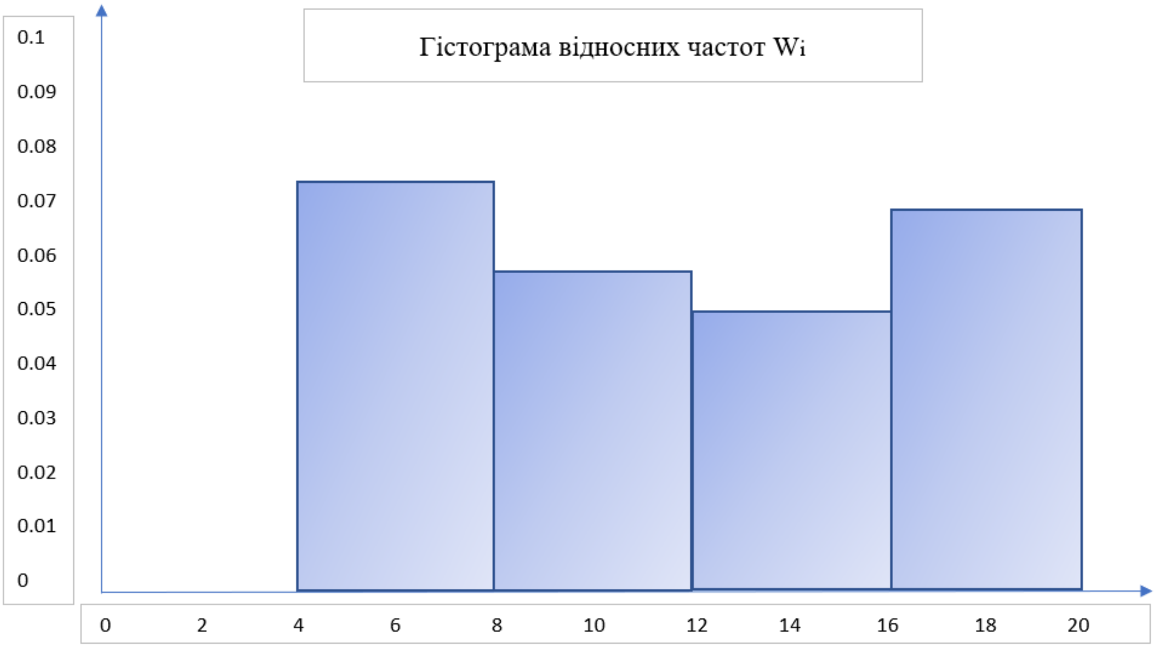


Рисунок 5.12 – Графічне зображення гістограми відносних частот

Варіанти завдань

5.1

x_i	5	7	10	15
n_i	2	3	8	7

x_i	2÷5	5÷8	8÷11	11÷14
n_i	9	10	25	6
h	3			

5.2

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	10	9	16	2
h	3			

5.3

x_i	2	5	8	11	14
n_i	9	10	25	6	6

x_i	2÷4	4÷6	6÷8	8÷10
n_i	3	3	14	5
h	2			

5.4

x_i	3	4	8	11	14
n_i	5	10	2	8	7

x_i	3÷7	7÷11	11÷15	15÷19
n_i	2	2	10	5
h	4			

5.5

x_i	3	5	12	15
n_i	2	2	7	11

x_i	2÷5	5÷8	8÷11	11÷14
n_i	14	3	5	2
h	3			

5.6

x_i	2	4	7	10
n_i	5	15	2	8

x_i	2÷4	4÷6	6÷8	8÷10
n_i	5	15	2	8
h	2			

5.7

x_i	1	2	4	7
n_i	17	3	2	8

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	5	15	2	8
h	3			

5.8

x_i	7	9	12	16
n_i	3	4	9	8

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	9	10	25	6
h	3			

5.9

x_i	2	4	6	8	10
n_i	11	14	31	34	15

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	10	9	16	2
h	3			

5.10

x_i	4	6	7	10	12
n_i	8	12	21	16	6

x_i	3÷5	5÷7	7÷9	9÷11
n_i	3	3	14	5
h	2			

5.11

x_i	3	4	8	11
n_i	4	11	12	9

x_i	4÷8	8÷12	12÷16	16÷20
n_i	2	2	10	5
h	4			

5.12

x_i	4	6	13	10
n_i	2	2	7	11

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	14	3	5	2
h	3			

5.13

x_i	2	4	7	10
n_i	6	16	12	9

x_i	3÷5	5÷7	7÷9	9÷11
n_i	5	15	2	8
h	2			

5.14

x_i	2	3	5	8
n_i	17	7	2	9

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	17	3	2	8
h	3			

5.15

x_i	7	9	12	16
n_i	13	15	10	9

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	10	9	21	8
h	3			

5.16

x_i	1	3	5	7	9
n_i	12	17	32	34	14

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	11	6	10	12
h	3			

5.17

x_i	2	5	8	11	14
n_i	19	15	24	16	6

x_i	3÷5	5÷7	7÷9	9÷11
n_i	13	5	11	15
h	2			

5.18

x_i	3	4	8	11
n_i	15	13	12	18

x_i	4÷8	8÷12	12÷16	16÷20
n_i	12	5	13	15
h	4			

5.19

x_i	3	5	12	15
n_i	21	27	17	11

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	12	5	13	15
h	3			

5.20

x_i	2	4	7	10
n_i	15	10	12	14

x_i	3÷5	5÷7	7÷9	9÷11
n_i	3	5	12	18
h	2			

5.21

x_i	1	2	4	7
n_i	18	13	12	8

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	17	7	12	6
h	3			

5.22

x_i	7	9	12	16
n_i	30	14	19	17

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	12	19	20	18
h	3			

5.23

x_i	1	3	5	7	9
n_i	13	14	29	30	18

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	13	15	11	10
h	3			

5.24

x_i	2	5	8	11	14
n_i	19	15	20	16	6

x_i	3÷5	5÷7	7÷9	9÷11
n_i	15	9	10	12
h	2			

5.25

x_i	3	4	8	11
n_i	15	19	12	18

x_i	4÷8	8÷12	12÷16	16÷20
n_i	19	15	13	18
h	4			

5.26

x_i	3	5	12	15
n_i	12	25	17	11

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	18	10	3	13
h	3			

5.27

x_i	2	4	7	10
n_i	15	17	12	8

x_i	3÷5	5÷7	7÷9	9÷11
n_i	7	16	10	13
h	2			

5.28

x_i	1	2	4	7
n_i	18	31	12	18

x_i	1÷4	4÷7	7÷10	10÷13
n_i	27	6	10	16
h	3			

5.29

x_i	2	3	4	7
n_i	15	13	27	18

x_i	2÷5	5÷8	8÷11	11÷14
n_i	12	27	21	16
h	3			

5.30

x_i	3	5	12	15
n_i	11	17	7	10

x_i	3÷6	6÷9	9÷12	12÷15
n_i	19	15	13	18
h	3			

Контрольні питання

1. Розкрийте суть термінів «генеральна сукупність», «обсяг вибірки», «вибірка».

2. Поясніть суть термінів «варіанта» і «варіаційний ряд» та наведіть приклади.

3. Поясніть суть термінів «частота» і «відносна частота» та наведіть приклади.

4. В чому полягає відмінність між емпіричною функцією розподілу та теоретичною функцією розподілу? Наведіть методику розрахунку емпіричної функції розподілу.

5. Охарактеризуйте суть терміна «статистичний розподіл вибірки» та наведіть його приклад.

6. Охарактеризуйте графічне зображення статистичних розподілів: полігонів частот та відносних частот, а також гістограм частот і відносних частот та наведіть їх приклади.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ВИБІРКИ ТА ЙОГО ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОВОЮ PYTHON

Мета: набути практичних навичок розрахунку основних числових характеристик статистичного розподілу вибірки в програмному середовищі *Python*.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики

Нехай для вивчення певної кількісної ознаки X з генеральної сукупності обсягом N отримано вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ обсягом n.

Дослідні значення x_i ознаки X називають *варіантами*, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, називають *варіаційним рядом*.

Різницю $x_k - x_1$ між найбільшою та найменшою варіантами називають *розмахом варіації вибірки*.

Число

$$\overline{x}_B = x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_k w_k = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i \tag{6.1}$$

називають *вибірковим* (*емпіричним*) *математичним сподіванням* або *математичним сподіванням вибірки*.

Число

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i \tag{6.2}$$

називають *вибірковою* (*емпіричною*) *дисперсією* або *дисперсією вибірки*.

Аналогічно, число

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \tag{6.3}$$

називається *вибірковим середнім квадратичним відхиленням*.

Число

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x}_B} \cdot 100\% \tag{6.4}$$

називають *коефіцієнтом варіації* вибірки.

Вибірковою модою d_X унімодального (одновершинного) розподілу називають елемент вибірки, що має найбільшу частоту. (*Унімодальним* називають розподіл, який має лише одне значення з найбільшою частотою.)

Вибірковою медіаною називають число h_X, яке ділить варіаційний ряд на дві частини, що містять однакову кількість елементів. Якщо $n = 2l + 1$ – непарне число, то медіаною є елемент варіаційного ряду з середнім номером $l + 1$. Якщо $n = 2l$, то $h_X = (x_l + x_{l+1}) / 2$.

Вибірковим початковим моментом r-го порядку називають число

$$\nu_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r = \sum_{i=1}^{k} x_i^r \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i^r w_i . \tag{6.5}$$

Очевидно, що вибірковий початковий момент першого порядку дорівнює вибірковій середній: $\nu_1^* = \overline{x}_B$.

Вибірковим центральним моментом r-го порядку називають число

$$\mu_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_B)^r = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^r \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^r w_i . \tag{6.6}$$

Очевидно, що вибірковий центральний момент другого порядку дорівнює вибірковій дисперсії: $\mu_2^* = D_B$.

Вибірковим коефіцієнтом асиметрії розподілу випадкової величини *X* називають число

$$A_C(X) = \frac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}, \tag{6.7}$$

де μ_3^* – вибірковий центральний момент третього порядку,

σ_B – середнє квадратичне відхилення вибірки.

Вибірковим коефіцієнтом ексцесу розподілу випадкової величини *X* називають число

$$E_k(X) = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3, \tag{6.8}$$

де μ_4^* – вибірковий центральний момент четвертого порядку.

Порядок виконання роботи

1. У середовищі *Jupyter Notebook* за допомогою мови програмування *Python* створити вектор статистичних даних X та розрахувати основні числові характеристики вибірки:

- знайти обсяг вибірки n, x_{min}, x_{max}, розмах варіації вибірки R;

- знайти вибіркове середнє $\overline{x}_B$, вибіркову дисперсію σ_B^2, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B та коефіцієнт варіації вибірки V;

- знайти незміщену дисперсію s_B^2 та незміщене середнє квадратичне відхилення s_B;

- знайти моду d_X, медіану d_X, коефіцієнт асиметрії A_c та коефіцієнт ексцесу E_k вибірки.

2. Побудувати гістограми відносних частот вибірки, розбивши весь інтервал $(x_{\min}, x_{\max})$ (від найменшого значення варіаційного ряду до найбільшого) на n інтервалів однакової довжини, використавши три різних набори значень n;

3. Побудувати відповідні емпіричні функції розподілу вибірки (гістограми накопичувальних відносних частот) використавши три різних набори значень n.

4. Проаналізувати отримані результати.

5. Оформити звіт і зробити висновки за результатами роботи.

Методика виконання лабораторної роботи мовою PYTHON

1. У робочому вікні *Jupyter Notebook* імпортуємо бібліотеки *Numpy*, *Matplotlib* та *Seaborn*:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

2. Вхідні дані задаємо у вигляді вектора X:

```
X = ([2, 4, 5, 7, 5, 8, 5, 4, 5, 6, 7, 7, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 5, 6, 6, 5, 8,
     4, 5, 3, 5, 6, 3, 4, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 9, 10, 12, 12, 11, 11])
```

3. Знаходимо обсяг вибірки n, x_{min}, x_{max} та розмах варіації вибірки R:

```
n = len(x)
x_min = np.min(X)
x_max = np.max(X)
R = x_max - x_min
```

4. Розраховуємо $\overline{x}_B$, σ_B^2, σ_B та коефіцієнт варіації вибірки V.

```
x_mean = np.mean(X)
x_var = np.var(X)
x_std = np.std(X)    # або x_std = x_var**0.5
V = np.std(X)/x_mean*100
```

5. Розраховуємо s_B^2 та s_B.

```
x_var_1 = np.var(X, ddof=1)
x_std_1 = np.std(X, ddof=1)
```

6. Знаходимо моду d_X, медіану h_X, коефіцієнт асиметрії A_c та коефіцієнт ексцесу E_k вибірки.

```
h_x = np.median(X)
d_x = stats.mode(X)
A_c = stats.skew(X, bias = False)      # False – для вибіркової сукупності
E_k = stats.kurtosis(X, bias = False)  # True – для генеральної сукупності
```

7. Задаємо команди виведення результату розрахунків (рис. 6.1):

```
print('Обсяг вибірки =', n)
print('x_min =', x_min)
print('x_max =', x_max)
print('Розмах R =', R)
print('Середнє вибіркове =', round(x_mean, ndigits=2))
print('Вибіркова дисперсія =', round(x_var, ndigits=2))
print('Вибіркове середнє квадратичне відхилення =', round(x_std, ndigits=2))
print('Коефіцієнт варіації вибірки V =', round(V, ndigits=2),"%")
print('Виправлена дисперсія s^2=', round(x_var_1, ndigits=2))
print('Виправлене середнє квадратичне відхилення s =', round(x_std_1, ndigits=2))
print('Медіана h_x =', h_x)
print('Мода:', d_x)
print('Асиметрія Ac =', round(A_c, ndigits=2))
print('Ексцес Ek =', round(E_k, ndigits=2))
```

```
Обсяг вибірки = 43
x_min = 2
x_max = 12
Розмах R = 10
Середнє вибіркове = 5.84
Вибіркова дисперсія = 6.83
Вибіркове середнє квадратичне відхилення = 2.61
Коефіцієнт варіації вибірки V = 44.78 %
Виправлена дисперсія s^2= 7.0
Виправлене середнє квадратичне відхилення s = 2.65
Медіана h_x = 5.0
Мода: ModeResult(mode=5, count=9)
Асиметрія Ac = 0.83
Ексцес Ek = 0.02
```

Рисунок 6.1 – Результат розрахунку

8. Будуємо гістограми відносних частот вибірки, розбивши весь інтервал $(x_{\min}, x_{\max})$ на 4, 8 та 10 інтервалів однакової довжини (рис. 6.2)

```
n1 = 4
n2 = 8
n3 = 10

fig, axs = plt.subplots(figsize=(20, 5), ncols=3)
k1 = str(n1)
k2 = str(n2)
k3 = str(n3)
axs[0].set_title("Кількість інтервалів: " + k1)
axs[1].set_title("Кількість інтервалів: " + k2)
axs[2].set_title("Кількість інтервалів: " + k3)

sns.histplot(data = X, bins=n1, kde=True, stat="density", ax=axs[0])
sns.histplot(data = X, bins=n2, kde=True, stat="density", ax=axs[1])
sns.histplot(data = X, bins=n3, kde=True, stat="density", ax=axs[2])
plt.savefig('hist.png')
plt.show()
```

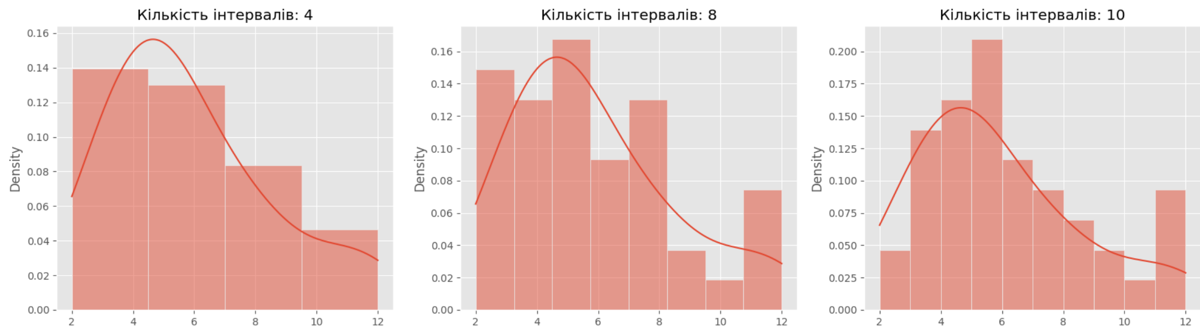


Рисунок 6.2 – Гістограми відносних частот вибірки

9. Будуємо гістограми накопичувальних частот вибірки розбивши весь інтервал на 4, 8 та 10 інтервалів однакової довжини (рис. 6.3)

```
fig, axs = plt.subplots(figsize=(20, 5), ncols=3)

axs[0].set_title("Кількість інтервалів: " + k1)
axs[1].set_title("Кількість інтервалів: " + k2)
axs[2].set_title("Кількість інтервалів: " + k3)

sns.histplot(data = X, bins=n1, cumulative=True, stat="density", ax=axs[0])
sns.histplot(data = X, bins=n2, cumulative=True, stat="density", ax=axs[1])
sns.histplot(data = X, bins=n3, cumulative=True, stat="density", ax=axs[2])
plt.savefig('hist2.png')
plt.show()
```

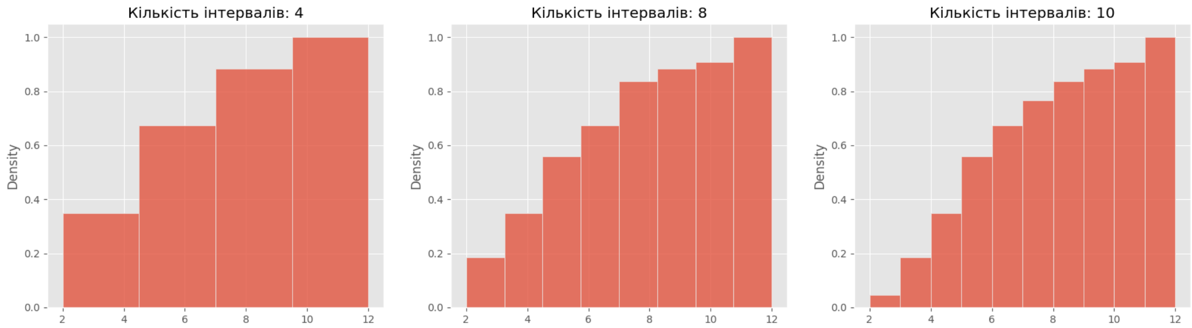


Рисунок 6.3 – Гістограми накопичувальних частот вибірки

Варіанти завдань

6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	6.10
531,8	246,9	406,0	218,7	406,7	420,2	93,7	239,2	585,1	207,6
521,6	254,6	484,4	217,2	438,2	395,7	225,1	265,2	537,0	329,2
565,1	242,3	447,6	139,1	417,5	419,0	198,8	247,7	580,9	179,6
588,7	240,0	426,8	169,7	462,3	376,5	226,2	445,6	478,5	408,5
549,2	268,9	435,9	267,5	485,6	418,7	153,4	356,4	550,4	303,0
509,1	286,2	425,6	194,5	460,6	406,5	140,9	366,1	483,8	156,8
532,3	244,8	408,6	279,1	405,1	424,8	191,6	524,5	628,2	215,3
559,6	256,3	452,5	110,0	421,4	401,0	206,7	424,5	626,8	260,5
612,5	267,3	424,2	180,3	400,9	369,1	410,4	502,0	505,1	377,6
529,2	226,4	478,6	244,2	353,0	403,2	329,9	322,5	585,0	226,4
627,4	245,3	459,2	218,3	421,9	427,8	141,6	353,0	530,4	448,3
626,5	269,0	438,7	164,6	512,3	448,2	138,4	485,3	764,9	261,9
542,1	269,2	433,8	243,6	454,0	332,4	253,8	300,9	555,2	310,8
588,9	289,3	431,8	134,0	363,6	444,0	142,3	431,9	577,8	404,7
544,9	259,3	444,7	177,8	434,3	434,8	171,0	286,6	546,2	231,4
516,3	250,2	450,9	242,7	445,8	391,9	103,0	408,6	584,4	319,1
596,0	262,8	422,2	276,8	417,6	390,1	149,0	304,0	622,2	262,9
550,4	274,4	473,2	286,7	395,6	389,0	318,2	536,9	591,8	144,5
549,1	270,4	425,6	169,3	443,6	396,1	244,9	427,7	495,2	199,2
560,1	240,2	444,8	113,9	459,4	422,4	201,6	407,7	533,2	333,5
547,7	247,6	442,2	176,0	440,1	407,4	316,7	400,0	614,7	137,2
561,4	257,1	408,6	299,8	463,8	382,6	83,2	570,5	603,5	383,6
558,3	255,1	391,0	221,7	439,9	379,6	31,2	403,4	512,2	203,6
526,0	259,8	410,3	233,6	446,5	365,8	203,5	418,6	673,1	305,9
576,8	260,3	481,7	187,0	375,7	385,1	338,7	389,1	651,7	334,1
602,8	270,9	482,1	177,4	417,6	389,2	229,8	319,8	592,0	390,4
529,0	247,7	484,4	260,0	407,9	370,2	181,6	456,3	731,3	260,1
579,6	272,2	442,5	173,5	490,8	320,1	219,7	456,1	492,3	486,5
526,7	265,5	397,2	113,9	398,8	377,1	122,4	274,9	549,2	211,5
585,7	259,5	411,5	195,3	419,6	459,0	167,2	287,1	596,7	268,0
554,0	242,8	386,3	120,8	409,4	348,9	310,0	517,9	512,3	170,7
572,6	240,0	452,1	268,7	363,9	365,4	222,9	319,0	581,2	99,0
628,4	295,6	411,1	170,9	341,5	421,1	100,2	355,5	674,7	303,0
524,4	239,9	467,0	350,8	465,1	325,7	261,4	362,0	563,0	297,4
513,9	257,7	386,6	150,1	453,6	348,0	97,5	386,6	620,5	314,3
503,8	294,6	431,5	240,7	409,6	362,0	110,8	375,9	640,9	296,2
537,0	245,4	446,3	248,4	374,3	374,6	226,0	369,1	671,9	162,2
530,9	258,0	443,0	170,4	430,3	357,2	225,2	351,1	575,7	180,0
570,9	254,6	356,1	299,4	397,5	382,6	180,7	455,2	598,5	244,2
521,5	269,7	446,9	262,1	382,1	321,4	96,6	287,5	661,4	312,1
600,8	281,9	436,5	247,0	450,8	330,8	314,9	233,0	680,4	224,6

Варіанти завдань

6.11	6.12	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17	6.18	6.19	6.20
134,8	254,8	559,6	246,5	489,1	137,4	500,8	301,2	335,1	341,5
151,7	171,5	545,7	292,9	476,2	136,2	670,5	293,9	339,5	372,5
149,2	332,8	548,6	176,0	599,0	132,7	524,2	312,4	280,3	373,4
181,8	285,3	565,0	99,8	477,7	153,6	423,9	302,8	314,3	382,3
177,3	203,8	536,7	236,3	432,4	159,2	461,3	325,1	283,3	375,7
126,0	334,6	565,6	228,1	566,2	151,6	483,0	325,3	288,9	361,2
173,4	268,0	540,0	209,1	411,1	95,9	549,0	305,3	266,5	360,5
118,4	174,5	548,7	146,7	550,5	156,1	449,6	321,0	238,0	361,6
141,5	222,2	540,6	170,2	537,1	127,6	498,6	314,5	323,1	389,3
109,1	251,8	567,0	92,3	504,6	115,3	487,8	298,9	302,1	383,5
178,3	238,9	555,3	202,1	695,9	89,9	484,7	350,6	339,5	359,1
175,9	260,1	545,5	187,3	461,0	147,2	508,1	335,8	284,1	370,6
121,4	121,6	558,0	301,7	534,3	115,8	536,5	279,5	329,1	376,8
151,3	277,8	537,7	266,1	542,1	130,5	552,9	302,8	321,8	367,5
131,6	204,1	528,0	150,1	553,1	121,1	445,0	310,0	309,7	381,8
161,0	355,8	548,7	472,7	389,6	137,6	530,8	303,4	326,8	364,2
139,0	304,9	556,0	167,7	668,1	131,4	489,8	296,8	311,2	353,7
168,8	237,4	537,1	161,1	505,5	141,3	462,7	305,4	258,9	371,5
114,8	279,5	552,5	225,9	469,5	150,5	490,0	304,7	292,6	327,5
165,2	319,1	537,7	388,5	572,0	126,7	495,5	279,5	303,0	352,9
137,6	119,1	535,9	231,2	531,6	139,2	459,7	296,3	323,9	375,0
111,6	139,9	562,7	211,5	410,8	155,0	440,1	272,5	317,4	361,4
151,2	214,3	549,8	129,1	770,7	123,5	471,7	328,9	300,6	401,2
200,7	276,2	549,4	242,5	540,7	118,1	471,1	305,0	314,5	360,1
198,5	326,9	574,3	310,1	487,6	130,0	545,4	323,4	265,5	375,2
183,8	231,5	522,5	227,9	605,3	135,1	465,8	318,1	309,2	349,7
193,4	337,2	540,9	375,0	550,9	112,8	520,7	278,3	281,8	351,8
184,2	217,0	568,5	24,3	418,5	120,9	476,6	318,5	337,5	391,4
152,1	235,9	524,7	293,1	437,8	151,3	389,4	290,4	348,4	352,9
156,8	188,8	554,9	228,3	533,2	138,4	458,8	273,3	324,7	366,4
187,4	250,4	556,8	280,0	737,6	169,6	547,7	311,5	317,8	358,3
112,8	228,7	534,3	349,2	581,1	118,4	480,5	272,5	309,8	363,9
196,4	273,0	574,4	228,3	477,7	124,2	550,4	310,8	275,2	386,9
100,3	340,4	531,5	278,4	597,0	143,9	491,6	321,0	302,5	347,5
186,9	264,5	542,5	276,5	578,2	113,8	451,7	350,9	347,9	359,5
165,7	227,1	552,4	354,7	660,8	124,6	537,6	290,2	324,4	373,2
169,6	231,0	577,4	177,4	597,7	131,5	431,1	307,0	319,7	387,2
140,2	295,4	535,3	295,1	614,9	122,7	478,4	282,4	316,8	374,0
164,1	246,7	548,0	402,1	620,7	122,5	555,5	303,7	309,3	346,9
144,0	256,6	533,6	172,7	753,0	112,0	454,0	325,3	328,3	354,4
122,2	177,9	525,6	254,7	360,4	164,6	437,2	298,5	279,0	393,3
149,6	267,4	538,0	212,9	382,5	145,0	371,3	274,1	316,3	374,8
215,7	309,7	540,9	113,7	686,9	100,0	384,8	307,3	259,2	373,8
148,3	253,5	555,4	330,2	351,5	104,9	445,5	357,0	315,6	350,4
161,2	295,9	534,9	306,2	590,9	133,6	537,2	289,5	376,0	368,3
121,7	278,9	535,1	210,0	577,8	92,2	396,3	280,7	306,7	399,6
100,5	257,5	521,5	239,9	556,4	138,6	464,5	313,4	332,6	382,5
135,6	320,9	586,5	259,9	519,1	161,6	508,5	278,0	322,0	365,9
182,6	200,4	520,4	296,7	410,9	145,5	509,2	309,8	316,7	352,2
119,6	156,9	536,4	192,0	541,6	182,0	502,3	292,4	302,5	375,8

Варіанти завдань

6.21	**6.22**	**6.23**	**6.24**	**6.25**	**6.26**	**6.27**	**6.28**	**6.29**	**6.30**
137,4	398,4	558,2	599,1	281,4	324,3	156,8	440,3	207,3	433,6
117,6	262,4	596,0	651,6	299,3	309,6	77,7	529,3	150,0	414,8
104,9	421,2	361,1	703,9	392,9	339,7	135,6	409,5	115,0	377,3
105,1	339,8	445,5	539,5	389,6	348,1	101,2	469,4	179,3	395,0
170,7	227,4	396,0	475,8	385,2	324,5	73,4	547,2	39,1	387,9
114,4	312,3	384,4	402,1	325,6	301,3	87,9	548,7	228,4	410,1
206,1	381,7	295,2	640,2	235,8	325,5	122,0	485,7	150,5	414,9
186,3	334,7	449,2	525,3	335,8	314,9	103,1	578,8	186,5	391,0
184,1	428,3	304,5	696,2	215,3	337,2	185,6	589,0	98,9	402,1
89,4	364,5	485,6	514,8	347,5	324,9	77,1	526,2	221,0	396,8
308,1	297,1	357,4	629,6	359,4	337,2	48,9	383,2	134,7	398,4
237,6	438,9	457,5	558,4	239,5	258,2	75,7	442,8	83,9	391,0
238,4	525,3	485,8	410,2	303,2	315,5	198,8	510,6	204,6	411,9
82,6	204,5	347,8	572,3	322,5	320,0	213,8	499,9	284,9	417,6
185,8	412,6	308,4	509,6	352,9	351,3	136,2	610,3	155,2	387,3
168,8	390,3	371,2	518,7	363,4	343,3	125,9	541,9	31,9	395,2
204,6	389,8	505,8	580,1	317,5	290,5	145,2	524,2	203,5	399,1
133,2	490,0	610,4	459,4	264,0	322,2	103,5	495,0	187,2	412,7
118,9	431,7	618,8	458,7	270,5	310,9	105,0	459,9	195,5	390,8
224,4	463,3	280,0	605,5	414,8	357,5	196,6	511,3	128,6	380,1
230,2	421,0	348,3	650,1	371,2	300,1	91,8	467,7	309,7	380,9
211,9	248,9	203,2	599,0	263,9	327,8	246,8	492,2	94,4	388,4
175,8	471,2	303,0	559,0	486,8	308,8	203,3	402,0	229,5	383,6
68,1	376,4	279,0	495,8	317,8	298,3	152,3	505,7	169,1	395,8
177,2	422,2	349,2	682,8	324,2	275,8	146,0	520,7	392,5	384,0
140,6	478,5	359,3	544,9	353,8	338,6	140,2	546,6	210,9	413,5
102,3	484,0	470,3	657,0	250,1	334,2	129,9	460,1	127,3	381,5
151,9	433,0	361,4	439,3	299,5	306,6	205,6	455,5	345,9	397,6
147,5	487,5	481,6	503,6	341,6	313,8	215,4	575,9	176,0	401,0
153,2	569,4	485,3	444,2	358,2	310,1	217,3	573,0	29,0	409,9
135,9	390,9	450,9	572,8	385,4	299,6	229,1	482,7	139,0	415,6
213,7	325,6	574,3	514,4	337,3	301,8	118,7	466,4	93,2	396,7
169,3	389,7	506,0	532,9	377,1	344,6	108,7	322,9	62,1	388,1
144,7	498,8	696,6	544,0	436,2	329,3	91,8	451,5	348,7	373,2
195,1	221,4	445,5	522,4	331,4	320,8	215,1	587,8	67,6	394,6
120,6	322,3	567,6	356,3	267,2	335,4	130,0	309,6	258,3	385,1
162,9	415,1	463,8	584,9	348,2	318,2	184,1	243,0	134,5	392,7
229,9	401,7	459,3	548,0	354,4	313,4	145,4	609,3	152,2	444,1
99,8	243,7	676,2	610,4	266,9	302,2	142,6	607,3	334,5	437,2
205,2	471,9	453,4	462,7	366,0	340,8	188,3	463,2	300,6	408,1
179,3	449,2	277,8	589,4	232,3	321,9	94,8	506,2	153,4	397,2
158,1	406,9	343,9	494,5	322,4	327,3	95,6	559,1	81,7	406,9
105,9	390,6	396,3	592,6	383,1	297,2	49,6	480,1	181,4	421,5
53,9	407,3	353,6	413,5	260,6	306,2	147,1	524,9	325,8	404,2
41,4	229,8	502,5	588,3	351,4	345,5	192,6	694,7	226,8	393,1
106,1	392,0	466,1	524,4	319,9	334,8	261,0	485,6	174,4	402,9
261,9	418,1	443,3	484,5	351,9	318,6	91,9	504,9	243,7	417,9
124,6	419,0	354,6	475,0	289,6	297,4	169,0	504,3	258,7	398,3
110,7	337,4	513,8	347,1	288,2	313,9	160,4	372,0	230,7	385,3
154,9	395,5	459,5	520,9	348,9	306,6	131,3	447,3	240,9	374,8

Контрольні питання

1. Які статистичні показники є характеристиками центральної тенденції варіаційного ряду?
2. Які статистичні показники є характеристиками розсіювання варіаційного ряду?
3. Що характеризує коефіцієнт варіації? З якою метою його розраховують?
4. Що характеризує і як розраховується асиметрія?
5. Що характеризує і як розраховується ексцес?
6. Як визначається кількість інтервалів та їхня довжина за групування з інтервалами однакової довжини?
7. Що таке ядрова оцінка щільності розподілу?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

ТОЧКОВІ ТА ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ МОВОЮ PYTHON

Мета: набути практичних навичок точкового та інтервального оцінювання невідомих параметрів законів розподілу випадкових величин в програмному середовищі *Python*.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Точкові оцінки та вимоги до них

Наближене числове значення $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ називають *точковою оцінкою* параметра θ. Тобто,

$$\overline{\theta} \approx \theta. \tag{7.1}$$

Число $\overline{\theta}$ не може бути довільним, а є результатом статистичної обробки деякої вибірки, тому такі точкові оцінки називаються *статистичними*. До статистичних точкових оцінок висувають певні вимоги, а саме: *незміщеність*; *змістовність*; *ефективність*.

Умова *незміщеності* означає, що математичне сподівання випадкової величини $\overline{\theta}$ має дорівнювати оцінюваному параметру θ, тобто

$$M(\overline{\theta}) = \theta. \tag{7.2}$$

Змістовність точкової оцінки $\overline{\theta}$ полягає в тому, що числа $\overline{\theta}$ у разі збільшення обсягу вибірки «за ймовірністю» наближаються до оцінюваного параметра θ. Іншими словами це означає, що точкова оцінка $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ називається *змістовною*, якщо виконується рівність:

$$\lim_{n \to 0} P\left(|\,\overline{\theta} - \theta\,| > a\right) = 0 \tag{7.3}$$

для довільного числа $a > 0$.

Точкова оцінка $\overline{\theta}$ невідомого параметра θ називається *ефективною*, якщо для будь-якої іншої точкової оцінки $\overline{\theta}^*$ того самого параметра θ виконується нерівність:

$$D(\overline{\theta}) < D(\overline{\theta}^*). \tag{7.4}$$

Точкова оцінка вибіркового математичного сподівання

Нехай за певною кількісною ознакою X досліджується деяка генеральна сукупність об’єктів обсягом *N*. Через x_i позначимо значення випадкової величини *X*. Нехай

$$x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n \tag{7.5}$$

є вибіркою обсягом *n*.

Середнє

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{7.6}$$

вибірки (7.5) називається *вибірковим* (*емпіричним*) *математичним сподіванням*. Воно за досить великих n приблизно дорівнює $\overline{x}_Г = M(X)$. Таким чином,

$$\overline{x}_B \approx M(X), \tag{7.7}$$

а тому число $\overline{x}_B$ *є точковою оцінкою невідомого математичного сподівання* $M(X)$. Можна довести, що *вибіркове математичне сподівання* $\overline{x}_B$, *визначене рівністю* (7.6), *є незміщеною, змістовною й ефективною точковою оцінкою невідомого математичного сподівання* $M(X) = \overline{x}_Г$.

Точкова оцінка вибіркової дисперсії

Число

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_B)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_B)^2 n_i \tag{7.8}$$

називається *вибірковою* (*емпіричною*) *дисперсією* вибірки (7.5).
Якщо n − обсяг вибірки, то число

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_B)^2 \tag{7.9}$$

називається *дисперсією генеральної сукупності* (N − обсяг генеральної сукупності). Зрозуміло, що за дисперсію $D(X)$ кількісної ознаки X варто приймати дисперсію генеральної сукупності $D_Г$. Тобто

$$D_Г = D(X). \tag{7.10}$$

Зрозуміло також, що за великих *n*

$$D_В(X) \approx D_Г = D(X), \tag{7.11}$$

а тому число $D_В$ є *точковою оцінкою невідомої дисперсії* $D(X)$.
Насправді виявляється, що $D_В$ є *зміщеною* точковою оцінкою невідомого параметра $D(X)$, тобто $M(D_В) \neq D(X)$. Проте, коли в (7.8) замість множника $\frac{1}{n}$ взяти множник $\frac{1}{n-1}$, то отримуємо *незміщену* (*виправлену*) точкову оцінку невідомої дисперсії $D(X)$

$$D_В^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_В)^2 . \tag{7.12}$$

Зауважимо також, що за великих значень n $D_В^* \approx D_В$.

Надалі $s_В = \sqrt{D_В^*}$ – *незміщене середнє квадратичне відхилення вибірки*; $\sigma_В = \sqrt{D_В}$ – *зміщене середнє квадратичне відхилення вибірки*; $s_В^2$ – *незміщена вибіркова дисперсія*; $\sigma_В^2 = D_В$ – *зміщена вибіркова дисперсія.*

Поняття довірчої інтервальної оцінки

Недолік точкових оцінок полягає в тому, що невідомо, з якою точністю вони дають значення невідомого параметра, котрий оцінюється. Такі оцінки можна взяти за початкові орієнтири, і якщо за великих вибірок для практичних висновків зазвичай буває достатньо незміщеності, змістовності та ефективності точкових оцінок, то для вибірок малого обсягу питання про точність оцінок є суттєвим. Цією обставиною продиктовано потребу введення інтервальних оцінок.

Нехай θ – невідомий параметр розподілу. Числа θ_1 і θ_2, знайдені за здійсненою вибіркою (за певними правилами), такі, що виконується умова:

$$P(\theta \in (\theta_1; \theta_2)) \geq \gamma , \tag{7.13}$$

називають *довірчими межами*, а інтервал $(\theta_1; \theta_2)$ – *довірчим інтервалом* для параметра θ. Число γ називають *надійністю* зробленої оцінки й вибирають заздалегідь. Зазвичай приймають γ= 0,95, γ=0,99 або γ=0,999.

Оскільки довірчий інтервал залежить від вибірки, тому він сам є випадковим. Отже, він може покривати невідомий параметр θ або не покривати. Тому випадкова подія $(\theta \in (\theta_1; \theta_2))$ полягає в тому, що довірчий інтервал $(\theta_1; \theta_2)$ покриває параметр θ.

Довірчий інтервал для математичного сподівання нормального розподілу за відомої дисперсії σ^2

Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом, для якого відома дисперсія σ^2.

Тоді вибірку

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

можна розглядати як n незалежних однаково розподілених (за тим самим законом, що й величина X) випадкових величин. Це означає, що

$$M(x_1) = M(x_2) = ... = M(x_n) = a$$

і

$$D(x_1) = D(x_2) = ... = D(x_n) = \sigma^2.$$

Для середнього арифметичного $\overline{x}_B$ вибірки, як для суми однаково розподілених випадкових величин, також нормально розподіленого,

$$M(\overline{x}_B) = a, \; D(\overline{x}_B) = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad (7.14)$$

За заданою надійністю γ підберемо число $\delta > 0$ так, щоб виконувалася умова:

$$P(|\,\overline{x}_B - a\,| < \delta) = \gamma. \qquad (7.15)$$

Оскільки випадкова величина $\overline{x}_B$ розподілена нормально з параметрами (7.14) і, то її функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Тому ліва частина рівності (7.15) набуває вигляду:

$$P(|\bar{x}_B - a| < \delta) = P(a - \delta < \bar{x}_B < a + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Підберемо δ так, щоб виконувалася рівність:

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma.$$

Оскільки функція $\Phi(t)$ неперервна на $[0;\infty)$ і зростає від 0 до 0,5, то для будь-якого числа $\gamma \in (0;1)$ (оскільки $\gamma -$ ймовірність) існує єдине значення t_γ аргументу функції таке, що

$$\Phi\left(t_\gamma\right) = \frac{1}{2}\gamma. \tag{7.16}$$

Число t_γ називається *квантилем* $\frac{\gamma+1}{2}$ *нормального розподілу*. Використовуючи його, умову (7.15) можна переписати так:

$$P\left(\bar{x}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma < a < \bar{x}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right) = \gamma,$$

бо $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ і $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$. Число t_γ у конкретних задачах підбирають за таблицею значень функції $\Phi(t)$.

Отже, з *надійністю* γ *довірчий інтервал*

$$\left(\bar{x}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma;\ \bar{x}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right)$$

покриває невідомий параметр a, де $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$*; число* $\bar{x}_B$, *як точкова оцінка, дає значення* a *з точністю до* $\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$ *і надійністю* γ.

Довірчий інтервал для математичного сподівання нормального розподілу за невідомої дисперсії (і обсягу вибірки $n < 30$)

За вибірки обсягом n і заданої надійності γ довірчим інтервалом для математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X є інтервал:

$$\left(\overline{x}_B - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma;\ \overline{x}_B + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma \right), \tag{7.17}$$

де s – незміщене (виправлене) вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ – визначається за заданими n і γ за розподілом Стьюдента.

Довірчий інтервал для дисперсії нормального розподілу

Нехай для випадкової величини X, розподіленої нормально, дисперсія σ^2 невідома. Її вибірку (вибірку різних значень)

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

обсягом n знову розглядаємо, як n незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена так само, як X.

Розглянемо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}, \tag{7.18}$$

де s^2 – незміщена («виправлена») вибіркова дисперсія.

Закон розподілу величини χ^2 є розподілом «хі-квадрат» з $n-1$ степенями вільності. Функція розподілу $F(x)$ цієї величини є зростаючою і неперервною (бо неперервною є випадкова величина χ^2 як сума нормально розподілених, а отже, і неперервних випадкових величин).

За заданою надійністю γ підберемо два додатних числа $x_1^2(\gamma)$ та $x_2^2(\gamma)$ так, щоб виконувалися рівності:

$$F(x_1^2(\gamma)) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad F(x_2^2(\gamma)) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Оскільки $\frac{1-\gamma}{2} < \frac{1+\gamma}{2}$, а функція F неперервна і монотонно зростаюча, то для довільного γ $(0<\gamma<1)$ числа $x_1(\gamma)$ та $x_2(\gamma)$ існують і є єдиними. Тоді

$$P\left(x_1^2(\gamma) < \chi^2 < x_2^2(\gamma)\right) = F\left(x_2^2(\gamma)\right) - F\left(x_1^2(\gamma)\right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma .$$

Тобто

$$P\left(x_1^2(\gamma) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < x_2^2(\gamma) \right) = \gamma$$

або

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{x_2^2(\gamma)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x_1^2(\gamma)} \right) = \gamma .$$

Таким чином, *інтервал*

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{x_2^2(\gamma)};\ \frac{(n-1)s^2}{x_1^2(\gamma)} \right) \tag{7.19}$$

є довірчим інтервалом для дисперсії σ^2 *з надійністю* γ, а *інтервал*

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\,s}{x_2(\gamma)};\ \frac{\sqrt{n-1}\,s}{x_1(\gamma)} \right) \tag{7.20}$$

є довірчим інтервалом для параметра σ *нормального розподілу з надійністю* γ.

Під час знаходження меж інтервалу використовують розподіл величини χ^2. У цьому випадку значення параметра α, є розв'язком рівняння:

$$1 - F(x^2) = \alpha \tag{7.21}$$

або

$$1-\alpha = F(x^2) = P(\chi^2 < x^2) \quad \Leftrightarrow \quad P(\chi^2 > x^2) = \alpha.$$

У цих позначеннях для нашої задачі

$$F\left(x_2^2(\gamma)\right)=1-\alpha,\ 1-F\left(x_2^2(\gamma)\right)=\alpha,$$

$$F\left(x_1^2(\gamma)\right)=\alpha,\ 1-F\left(x_1^2(\gamma)\right)=1-\alpha,$$

а з (7.19) отримуємо такий зв'язок надійності γ з числом α: $\gamma=1-2\alpha$.

Порядок виконання роботи

1. У середовищі *Jupyter Notebook* за допомогою мови програмування *Python* задати вектор статистичних даних *Y* згідно з вибраним варіантом.
2. Побудувати гістограму відносних частот вибірки та візуально оцінити наявний теоретичний розподіл (рівномірний, нормальний, показниковий).
3. Методом моментів знайти точкові оцінки невідомих параметрів для вибраного закону розподілу НВВ.
4. Побудувати на гістограмі відносних частот диференціальну функцію теоретичного розподілу з відповідними параметрами. Порівняти між собою отримані графіки.
5. Приймаючи гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, побудувати довірчі інтервали для невідомого параметра (математичного сподівання, дисперсії, середнього квадратичного відхилення) за різних значень довірчої ймовірності *P*.
7. Проаналізувати отримані результати.
8. Оформити звіт і зробити висновки за результатами роботи.

Методика виконання лабораторної роботи мовою PYTHON

1. У робочому вікні *Jupyter Notebook* імпортуємо бібліотеки *Numpy*, *Scipy.stats, Matplotlib* та *Seaborn*:

```
import numpy as np
import scipy.stats as stats
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

2. Вхідні дані задаємо у вигляді вектора *Y*:

```
y = ([2, 4, 5, 7, 5, 8, 5, 4, 5, 6, 7, 7, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 5, 6, 6, 5,
      8, 4, 5, 3, 5, 6, 3, 4, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 9, 10, 12, 12, 11, 11])
```

3. Будуємо гістограму відносних частот та за її виглядом (рис. 7.1) висуваємо гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності:

```
# Кількість інтервалів для побудови гістограми визначається автоматично
plt.hist(y, density = True, edgecolor = 'Black')
sns.kdeplot(data=y, lw=2)
plt.title("Гістограма відносих частот")
plt.savefig('ЛБ_7_1.png')
plt.show()
```

Рисунок 7.1 – Гістограма відносних частот
статистичного розподілу вибірки

4. Точкову оцінку невідомих параметрів нормального закону розподілу (a та σ^2) проводимо за методом моментів (рис. 7.2):

```
# Точковою оцінкою математичного сподівання є вибіркова середня:
a = np.mean(y)
print('Точкова оцінка математичного сподівання a =', round(a, ndigits=2))

# Точковою оцінкою дисперсії є вибіркова дисперсія:
D = np.var(y)
print('Точкова оцінка дисперсії D =', round(D, ndigits=2))
```

```
Точкова оцінка математичного сподівання a = 5.84
Точкова оцінка дисперсії D = 6.83
```

Рисунок 7.2 – Результат розрахунку

5. Генеруємо диференціальну функцію нормального закону розподілу з отриманими параметрами та будуємо її на гістограмі відносних частот вибірки (рис. 7.3):

```
plt.hist(y, density = True, edgecolor = 'Black')
sns.kdeplot(data = y, lw = 1)

x = np.linspace(-3, 16, 100)
norm_rv = stats.norm(loc = a, scale = D**0.5)
pdf = norm_rv.pdf(x)
plt.plot(x, pdf, color = 'Blue', linestyle = '--', lw = 2)
plt.savefig('ЛБ_7_2.png')
plt.show()
```

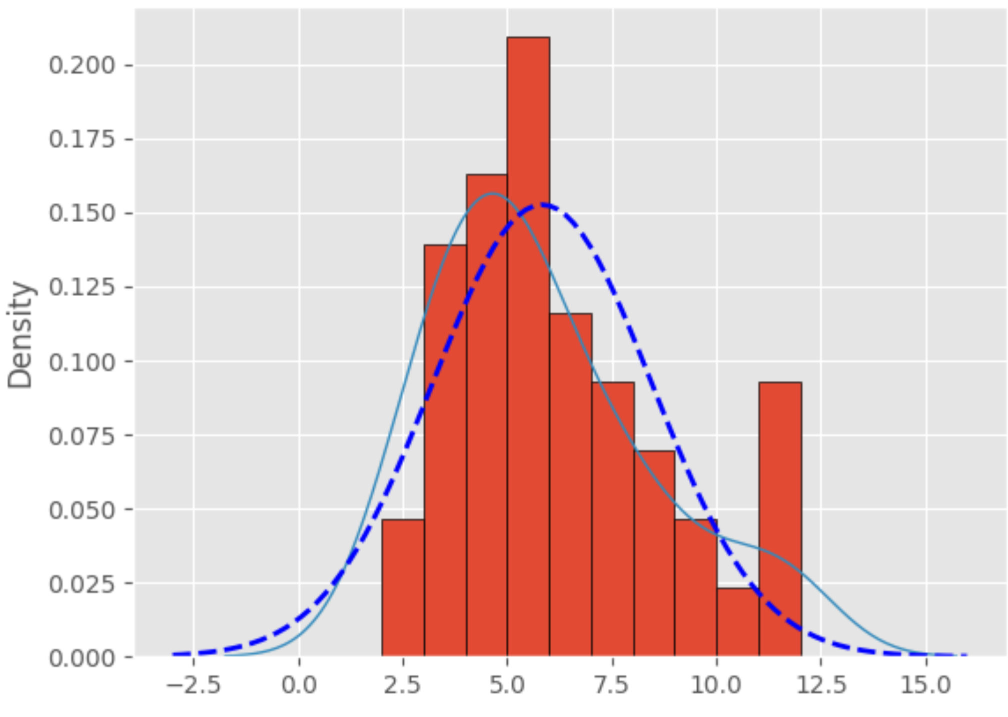


Рисунок 7.3 – Гістограма відносних частот та відповідна диференціальна функція нормального закону розподілу

6. Проводимо інтервальне оцінення невідомих параметрів нормального закону розподілу.

6.1. Будуємо довірчі інтервали для математичного сподівання *M*(*X*) за невідомої дисперсії генеральної сукупності (7.17) та різних значень довірчої ймовірності *P* (рис. 7.4). Отримані інтервали подаємо також у графічному вигляді (рис. 7.5):

```
n = len(y)
D_1 = np.var(y, ddof=1)
P = [0.9, 0.95, 0.99]

for i, (p) in enumerate(P):
    int = stats.t.interval(confidence = p, df = n-1, loc = a, scale = (D_1/n)**0.5)
    int = np.around(int, decimals = 2) # округлюємо всі елементи заданого списка
    print('Довірчий інтервал для M(Y) =', int, 'якщо p =', p)
    P1 = ([p, p])
    plt.plot(P1, int, color = 'blue', lw=2.5)
    plt.plot(P1, int, 'bo')

A = [a, a, a]
plt.plot(P, A, 'ro')
plt.axhline(a, color = 'red', linestyle='--', lw=1)
plt.ylabel('Оцінка мат. сподівання M(X)')
plt.xlabel('Довірча ймовірність P')
plt.text(0.92, a + 0.1, round(a, 2), color='red', fontsize = 14)
plt.savefig('ЛБ_7_3.png')
plt.show()
```

```
Довірчий інтервал для M(Y) = [5.16 6.52] якщо p = 0.9
Довірчий інтервал для M(Y) = [5.02 6.65] якщо p = 0.95
Довірчий інтервал для M(Y) = [4.75 6.93] якщо p = 0.99
```

Рисунок 7.4 – Результат розрахунку

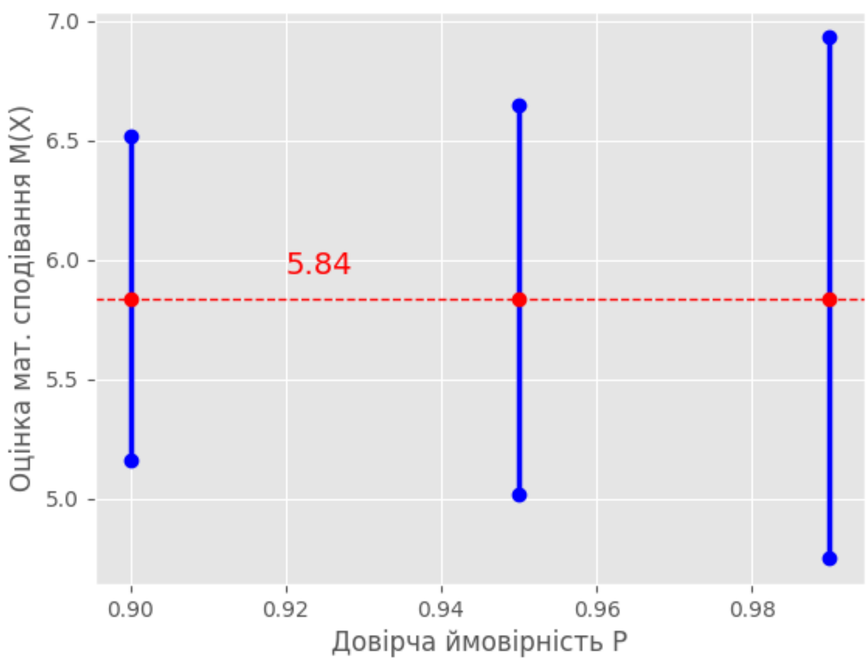


Рисунок 7.5 – Довірчі інтервали для математичного сподівання

6.2. Будуємо довірчі інтервали для дисперсії $D(X)$ для різних значень довірчої ймовірності P за формулою (7.19):

```
n = len(y)
D_1 = np.var(y, ddof = 1)
df = n-1

for i, (p2) in enumerate(P):
    alpha2 = 1 - p2
    chi_crit_upper = stats.chi2.ppf(alpha2 / 2, df)
    chi_crit_lower = stats.chi2.ppf(1 - alpha2 / 2, df)
    low_D = round(df*D_1/chi_crit_lower, 2)
    up_D = round(df*D_1/chi_crit_upper, 2)
    interval_D = (low_D, up_D)
    print('Довірчий інтервал для дисперсії D(Y) =', interval_D, 'якщо p =', p2)
```

```
Довірчий інтервал для дисперсії D(Y) = (5.06, 10.44) якщо p = 0.9
Довірчий інтервал для дисперсії D(Y) = (4.76, 11.3) якщо p = 0.95
Довірчий інтервал для дисперсії D(Y) = (4.24, 13.27) якщо p = 0.99
```

Рисунок 7.6 – Результат розрахунку

Контрольні питання

1. Яка оцінка параметра називається незміщеною?
2. Яка оцінка параметра називається змістовною?
3. Яка оцінка параметра називається ефективною?
4. Розкрийте суть методу моментів точкової оцінки параметрів.
5. Розкрийте суть методу максимальної правдоподібності точкової оцінки параметрів.
6. Що таке довірчий інтервал та довірча ймовірність?
7. Що відбувається з границями довірчого інтервалу за зміни обсягу вибірки або довірчої ймовірності?
8. На основі яких теоретичних розподілів будується довірчий інтервал для математичного сподівання?
9. На основі яких теоретичних розподілів будується довірчий інтервал для дисперсії?
10. Що таке точність та надійність інтервальної оцінки?

Варіанти завдань

7. 1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	7.10
30,43	585,1	107,79	20,74	8,05	406,7	13,21	123,98	406,0	127,22
30,86	537,0	107,26	17,37	7,41	438,2	14,48	124,09	484,4	129,35
32,51	580,9	107,67	19,82	10,69	417,5	15,45	132,48	447,6	128,97
33,07	478,5	105,08	22,27	17,26	462,3	13,86	126,13	426,8	126,06
33,87	550,4	104,52	18,78	10,64	485,6	13,5	124,82	435,9	123,77
30,77	483,8	139,51	17,98	7,95	460,6	12,33	124,29	425,6	129,21
33,12	628,2	101,18	19,27	17,97	405,1	13,87	122,94	408,6	124,55
30,38	626,8	102,23	17,87	9,12	421,4	12,37	134,38	452,5	124,48
30,3	505,1	101,56	17,94	8,4	400,9	12,08	126,	424,2	122,69
31,05	585,0	117,42	22,45	28,24	353,0	12,99	154,24	478,6	128,79
33,05	530,4	112,76	15,76	23,32	421,9	15,74	121,79	459,2	129,07
33,27	764,9	101,74	15,65	4,15	512,3	14,98	125,96	438,7	121,78
30,42	555,2	102,88	22,83	7,71	454,0	15,81	120,11	433,8	120,21
31,92	577,8	100,99	19,16	8,57	363,6	14,16	128,56	431,8	129,87
31,59	546,2	117,2	17,38	18,43	434,3	12,39	124,41	444,7	122,47
30,07	584,4	100,11	20,03	43,4	445,8	15,24	143,31	450,9	128,11
36,77	622,2	103,31	20,22	25,32	417,6	13,68	142,97	422,2	126,54
32,69	591,8	106,93	22,18	23,29	395,6	14,86	125,21	473,2	121,12
32,8	495,2	106,19	21,67	4,43	443,6	15,53	120,55	425,6	126,16
30,77	533,2	105,01	18,87	15,73	459,4	14,6	127,92	444,8	121,42
32,66	614,7	105,88	22,24	15,56	440,1	13,75	123,42	442,2	120,02
30,41	603,5	128,41	21,25	8,26	463,8	13,15	134,56	408,6	129,16
32,31	512,2	100,5	16,29	25,09	439,9	15,92	139,06	391,0	121,05
31,62	673,1	111,54	20,9	13,52	446,5	12,34	128,54	410,3	122,64
32,3	651,7	117,57	16,87	9,35	375,7	15,4	141,02	481,7	129,87
31,34	592,0	100,84	15,72	38,28	417,6	15,33	136,36	482,1	126,44
30,44	731,3	103,5	22,6	8,37	407,9	14,78	130,72	484,4	125,28
31,71	492,3	107,71	16,83	6,72	490,8	15,51	122,23	442,5	128,91
33,75	549,2	110,33	15,5	15,18	398,8	15,58	131,29	397,2	125,78
31,46	596,7	100,43	21,43	33,75	419,6	12,84	121,77	411,5	127,51
31,05	512,3	112,01	18,6	12,69	409,4	12,21	137,88	386,3	124,32
36,66	581,2	105,46	21,8	5,87	363,9	14,58	152,95	452,1	123,18
33,42	674,7	106,71	15,41	6,3	341,5	13,23	127,29	411,1	123,64
32,64	563,0	104,	19,97	8,05	465,1	15,85	143,55	467,0	127,97
31,1	620,5	121,52	22,5	9,58	453,6	14,32	131,28	386,6	121,32
33,14	640,9	104,57	18,36	11,52	409,6	13,35	133,53	431,5	126,94
33,05	671,9	108,	15,49	5,43	374,3	13,45	121,16	446,3	129,75
30,49	575,7	103,39	15,83	9,61	430,3	12,62	130,54	443,0	125,2
32,57	598,5	114,08	16,98	8,95	397,5	12,06	135,61	356,1	125,58
30,02	661,4	101,01	18,43	8,34	382,1	13,18	121,69	446,9	120,48
31,52	680,4	104,43	15,92	11,99	450,8	14,76	126,98	436,5	128,31
30,12	513,2	114,73	17,53	17,6	449,9	13,34	138,72	437,0	128,47
33,62	639,2	114,24	18,93	8,44	370,6	12,5	130,6	463,2	122,54
30,32	567,9	108,75	19,66	6,45	450,3	12,16	124,99	420,7	124,43
31,6	547,1	104,09	17,12	19,03	466,2	15,79	137,93	441,9	126,88
34,92	637,6	100,2	17,65	5,97	410,5	12,59	121,85	448,6	126,13
31,64	686,2	119,59	17,24	7,14	370,7	13,84	123,9	465,0	125,72
30,96	699,7	103,09	21,7	4,38	428,5	14,88	123,15	449,7	123,76
35,3	484,0	107,98	18,12	6,2	454,2	12,48	144,23	410,0	125,16
30,5	627,4	102,11	20,98	4,04	381,6	12,65	127,23	413,3	127,32

Варіанти завдань

7.11	7.12	7.13	7.14	7.15	7.16	7.17	7.18	7.19	7.20
18,59	246,9	58,62	93,7	34,96	420,2	17,69	218,7	207,6	35,01
18,14	254,6	100,48	225,1	35,7	395,7	26,23	217,2	329,2	37,27
18,07	242,3	49,9	198,8	34,24	419,0	21,12	139,1	179,6	35,28
18,97	240,0	50,13	226,2	34,56	376,5	20,65	169,7	408,5	34,74
18,41	268,9	49,99	153,4	37,52	418,7	14,9	267,5	303,0	35,53
18,09	286,2	85,08	140,9	35,53	406,5	23,48	194,5	156,8	36,7
18,37	244,8	50,91	191,6	34,86	424,8	17,88	279,1	215,3	35,22
18,41	256,3	53,53	206,7	35,31	401,0	34,2	110,0	260,5	34,49
18,98	267,3	48,13	410,4	36,28	369,1	27,02	180,3	377,6	35,36
18,86	226,4	48,19	329,9	36,32	403,2	21,3	244,2	226,4	35,33
18,33	245,3	50,61	141,6	35,81	427,8	15,44	218,3	448,3	36,22
18,94	269,0	65,84	138,4	34,21	448,2	17,38	164,6	261,9	34,27
18,68	269,2	64,36	253,8	34,08	332,4	14,93	243,6	310,8	35,03
18,78	289,3	48,01	142,3	34,78	444,0	18,49	134,0	404,7	35,57
18,15	259,3	62,58	171,0	37,22	434,8	16,68	177,8	231,4	37,92
18,07	250,2	53,9	103,0	35,85	391,9	23,51	242,7	319,1	35,25
18,17	262,8	64,01	149,0	35,11	390,1	24,93	276,8	262,9	36,27
18,74	274,4	53,13	318,2	34,55	389,0	30,92	286,7	144,5	36,42
18,19	270,4	58,43	244,9	34,17	396,1	28,79	169,3	199,2	34,29
18,88	240,2	48,53	201,6	37,53	422,4	18,04	113,9	333,5	34,46
18,42	247,6	55,48	316,7	34,56	407,4	14,05	176,0	137,2	36,23
18,16	257,1	51,73	83,2	36,91	382,6	15,44	299,8	383,6	34,7
18,97	255,1	91,11	31,2	36,4	379,6	39,09	221,7	203,6	37,33
18,11	259,8	57,01	203,5	36,86	365,8	21,96	233,6	305,9	36,7
18,29	260,3	56,32	338,7	36,03	385,1	17,01	187,0	334,1	34,36
18,06	270,9	50,12	229,8	35,96	389,2	37,38	177,4	390,4	34,38
18,52	247,7	62,75	181,6	35,22	370,2	14,95	260,0	260,1	34,48
18,01	272,2	48,26	219,7	36,29	320,1	14,13	173,5	486,5	34,71
18,76	265,5	58,65	122,4	35,49	377,1	40,76	113,9	211,5	37,79
18,42	259,5	101,87	167,2	36,86	459,0	23,38	195,3	268,0	36,58
18,78	242,8	59,92	310,0	37,58	348,9	22,18	120,8	170,7	34,94
18,27	240,0	65,95	222,9	35,37	365,4	14,56	268,7	99,0	34,71
18,66	295,6	49,04	100,2	37,97	421,1	15,49	170,9	303,0	36,47
18,45	239,9	53,81	261,4	36,03	325,7	19,08	350,8	297,4	37,47
18,78	257,7	61,87	97,5	34,41	348,0	15,29	150,1	314,3	37,83
18,06	294,6	56,73	110,8	36,82	362,0	45,13	240,7	296,2	34,2
18,77	245,4	56,89	226,0	34,27	374,6	14,12	248,4	162,2	37,69
18,16	258,0	69,63	225,2	35,91	357,2	18,79	170,4	180,0	34,17
18,91	254,6	53,32	180,7	36,53	382,6	19,51	299,4	244,2	35,78
18,77	269,7	68,96	96,6	36,23	321,4	40,99	262,1	312,1	35,29
18,14	281,9	53,47	314,9	35,38	330,8	14,6	247,0	224,6	34,89
18,78	253,6	48,8	218,1	37,14	417,1	53,08	146,5	399,8	35,78
18,9	233,5	48,25	170,6	35,3	368,9	15,63	238,5	224,2	34,48
18,02	272,1	58,93	269,1	35,89	420,5	20,55	248,8	360,2	37,15
18,98	250,3	48,84	115,2	36,16	412,3	41,59	222,3	389,5	37,24
18,24	285,8	67,43	289,7	34,11	368,3	26,18	194,7	300,9	35,28
18,45	288,4	60,67	207,9	35,24	396,5	15,54	221,6	352,7	36,27
18,62	264,8	52,02	161,3	34,77	414,9	47,01	259,7	360,6	35,96
18,82	262,5	54,46	163,7	36,7	368,4	22,96	232,1	370,2	34,98
18,09	240,4	58,11	268,3	37,03	385,5	23,09	192,6	222,3	35,1

Варіанти завдань

7.21	7.22	7.23	7.24	7.25	7.26	7.27	7.28	7.29	7.30
43,85	56,88	154,63	254,8	24,94	246,5	489,1	239,2	585,1	301,2
28,43	57,32	147,66	171,5	31,73	292,9	476,2	265,2	537,0	293,9
22,62	57,9	148,76	332,8	27,43	176,0	599,0	247,7	580,9	312,4
23,5	56,21	149,45	285,3	21,64	99,8	477,7	445,6	478,5	302,8
22,02	57,4	174,22	203,8	26,42	236,3	432,4	356,4	550,4	325,1
26,58	56,15	162,09	334,6	15,62	228,1	566,2	366,1	483,8	325,3
28,53	56,51	146,1	268,0	20,94	209,1	411,1	524,5	628,2	305,3
24,04	57,93	148,14	174,5	15,09	146,7	550,5	424,5	626,8	321,0
24,2	56,73	147,7	222,2	16,5	170,2	537,1	502,0	505,1	314,5
25,04	56,11	146,68	251,8	46,16	92,3	504,6	322,5	585,0	298,9
41,62	57,55	146,09	238,9	33,07	202,1	695,9	353,0	530,4	350,6
39,48	57,36	158,72	260,1	25,15	187,3	461,0	485,3	764,9	335,8
22,72	56,53	149,35	121,6	19,24	301,7	534,3	300,9	555,2	279,5
26,65	57,95	146,09	277,8	28,61	266,1	542,1	431,9	577,8	302,8
44,21	57,48	166,42	204,1	17,54	150,1	553,1	286,6	546,2	310,0
25,79	57,79	155,17	355,8	29,63	472,7	389,6	408,6	584,4	303,4
34,79	56,39	145,58	304,9	15,82	167,7	668,1	304,0	622,2	296,8
24,29	56,72	146,72	237,4	19,08	161,1	505,5	536,9	591,8	305,4
42,26	57,64	152,79	279,5	16,15	225,9	469,5	427,7	495,2	304,7
42,29	56,84	148,85	319,1	32,47	388,5	572,0	407,7	533,2	279,5
21,69	56,06	155,91	119,1	22,03	231,2	531,6	400,0	614,7	296,3
36,54	57,17	151,83	139,9	17,02	211,5	410,8	570,5	603,5	272,5
47,83	57,77	159,77	214,3	31,25	129,1	770,7	403,4	512,2	328,9
29,74	56,92	153,68	276,2	34,19	242,5	540,7	418,6	673,1	305,0
23,67	57,95	167,56	326,9	21,22	310,1	487,6	389,1	651,7	323,4
21,98	57,78	146,13	231,5	39,68	227,9	605,3	319,8	592,0	318,1
35,36	56,67	150,38	337,2	18,83	375,0	550,9	456,3	731,3	278,3
34,98	57,66	148,74	217,0	15,3	24,3	418,5	456,1	492,3	318,5
31,66	57,29	161,25	235,9	19,06	293,1	437,8	274,9	549,2	290,4
23,35	56,64	150,49	188,8	15,75	228,3	533,2	287,1	596,7	273,3
22,7	56,99	145,	250,4	25,16	280,0	737,6	517,9	512,3	311,5
21,15	57,53	156,39	228,7	19,52	349,2	581,1	319,0	581,2	272,5
25,03	56,9	146,55	273,0	33,78	228,3	477,7	355,5	674,7	310,8
40,29	56,44	146,9	340,4	22,67	278,4	597,0	362,0	563,0	321,0
54,91	57,37	149,02	264,5	30,42	276,5	578,2	386,6	620,5	350,9
29,86	56,34	146,95	227,1	23,06	354,7	660,8	375,9	640,9	290,2
36,28	56,58	155,52	231,0	25,85	177,4	597,7	369,1	671,9	307,0
30,57	56,67	146,71	295,4	17,99	295,1	614,9	351,1	575,7	282,4
26,77	57,49	154,21	246,7	18,47	402,1	620,7	455,2	598,5	303,7
21,6	57,8	149,52	256,6	16,49	172,7	753,0	287,5	661,4	325,3
22,61	56,45	147,07	177,9	45,32	254,7	360,4	233,0	680,4	298,5
38,18	57,76	148,36	267,4	24,06	212,9	382,5	221,7	513,2	274,1
21,71	57,39	152,33	309,7	16,39	113,7	686,9	245,3	639,2	307,3
30,4	57,47	147,96	253,5	41,43	330,2	351,5	374,8	567,9	357,0
21,09	57,87	146,99	295,9	28,72	306,2	590,9	200,4	547,1	289,5
36,78	57,44	161,38	278,9	19,68	210,0	577,8	472,3	637,6	280,7
29,19	56,19	164,19	257,5	50,22	239,9	556,4	548,9	686,2	313,4
29,69	57,72	149,26	320,9	25,78	259,9	519,1	483,6	699,7	278,0
40,2	57,35	150,75	200,4	20,57	296,7	410,9	316,4	484,0	309,8
29,39	56,85	168,61	156,9	32,98	192,0	541,6	452,4	627,4	292,4

ЛІТЕРАТУРА

1. Найко Д. А., Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Вінниця : ТОВ «ТВОРИ», 2020. 384 с.
2. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посіб. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
3. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
4. Донченко В. С., Сидоров М. В. Теорія ймовірностей та математична статистика для соціальних наук : навч. посіб. К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. 400 с.
5. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. К. : НТУУ «КПІ», 2014. 212 с.
6. Донченко В. С., Сидоров М. В. Теорія ймовірностей та математична статистика для соціальних наук : навч. посіб. К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. 400 с.
7. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.; за ред. Г. О. Михаліна. К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с.
8. Авраменко В. І., Карімов І. К. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. 2-ге вид., перероб. і доп. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2013. 245 с.
9. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : навч. посіб. К. : Центр учбової літератури, 2007. 576 с.
10. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика : посіб. К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 494 с.
11. Турчин В. М. Теорія ймовірностей і математична статистика: Основні поняття, приклади, задачі. Дніпропетровськ : ДНУ, 2006. 476 с.
12. Welcome to Python.org. *Python.org*. URL: https://www.python.org
13. Project Jupyter. *Project Jupyter | Home*. URL: https://jupyter.org
14. Matplotlib – Visualization with Python. *Matplotlib – Visualization with Python*. URL: https://matplotlib.org
15. NumPy –. *NumPy*. URL: https://numpy.org
16. SciPy documentation – SciPy v1.14.1 Manual. *Numpy and Scipy Documentation – Numpy and Scipy documentation*.
URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html
17. Seaborn: statistical data visualization – seaborn 0.13.2 documentation. *Seaborn: statistical data visualization – seaborn 0.13.2 documentation*. URL: https://seaborn.pydata.org/

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	940	925	909	893	878	863	848	833	818	804
1,8	790	775	761	748	734	721	707	694	681	669
1,9	656	644	632	620	608	596	584	573	562	551
2	0,054	529	519	508	498	488	478	468	459	449
2,1	440	431	422	413	404	396	387	379	371	363
2,2	355	347	339	332	325	317	310	303	297	290
2,3	283	277	270	264	258	252	246	241	235	229
2,4	224	219	213	208	203	198	194	189	184	180
2,5	175	171	167	163	158	154	151	147	143	139
2,6	136	0132'	129	126	122	119	116	113	110	107
2,7	104	101	99	96	93	91	88	86	84	81
2,8	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61
2,9	60	58	56	55	53	51	50	48	47	46
3	0,0044	43	42	40	39	38	37	36	35	34
3,1	33	32	31	30	29	28	27	26	25	25
3,2	24	23	22	22	21	20	20	19	18	18
3,3	17	17	16	16	15	15	14	14	13	13
3,4	12	12	12	11	11	10	10	10	9	9
3,5	9	8	8	8	8	7	7	7	7	6
3,6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	4
3,7	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3
3,8	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
3,9	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1

Додаток Б

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$

Таблиця Б.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186	1,21	0,3869
0,01	0,004	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212	1,22	0,3883
0,02	0,008	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238	1,23	0,3907
0,03	0,012	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264	1,24	0,3925
0,04	0,016	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289	1,25	0,3944
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315	1,26	0,3962
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,334	1,27	0,398
0,07	0,0279	0,38	0,148	0,68	0,2517	0,98	0,3365	1,28	0,3997
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389	1,29	0,4015
0,09	0,0359	0,4	0,1554	0,7	0,258	1	0,3413	1,3	0,4032
0,1	0,0398	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438	1,31	0,4049
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461	1,32	0,4066
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485	1,33	0,4082
0,13	0,0517	0,44	0,17	0,74	0,2703	1,04	0,3508	1,34	0,4099
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531	1,35	0,4115
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554	1,36	0,4131
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577	1,37	0,4147
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599	1,38	0,4162
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621	1,39	0,4177
0,19	0,0753	0,5	0,1915	0,8	0,2881	1,1	0,3643	1,4	0,4192
0,2	0,0793	0,51	0,195	0,81	0,291	1,11	0,3665	1,41	0,4207
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686	1,42	0,4222
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708	1,43	0,423
0,23	0,091	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729	0,144	0,4251
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749	1,45	0,4265
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,377	1,46	0,4279
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,379	1,47	0,4292
0,27	0,1064	0,58	0,219	0,88	0,3106	1,18	0,381	1,48	0,4305
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,383	1,49	0,4319
0,29	0,1141	0,6	0,2257	0,9	0,3159	1,2	0,3849	1,5	0,4332
0,3	0,1179								

Продовження таблиці Б.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,51	0,4345	1,81	0,4649	2,22	0,4868	2,82	0,4976
1,52	0,4357	1,82	0,4656	2,24	0,4875	2,84	0,4977
1,53	0,437	1,83	0,4664	2,26	0,4881	2,86	0,4979
1,54	0,4382	1,841	0,4671	2,28	0,4887	2,88	0,498
1,55	0,4394	1,85	0,4678	2,3	0,4893	2,9	0,4981
1,56	0,4406	1,86	0,4686	2,32	0,4898	2,92	0,4982
1,57	0,4418	1,87	0,4693	2,34	0,4904	2,94	0,4984
1,58	0,4429	1,88	0,4699	2,3	0,4909	2,96	0,4985
1,59	0,4441	1,89	0,4706	2,38	0,4913	2,98	0,4985
1,6	0,4452	1,9	0,4713	2,4	0,4918	3	0,49865
1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0,4922	3,2	0,49931
1,62	0,4474	1,92	0,4726	2,44	0,4927	3,4	0,49966
1,33	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931	3,6	0,499841
1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934	3,8	0,499928
1,65	0,4505	1,95	0,4744	2,5	0,4938	4	0,499968
1,6	0,4515	1,96	0,475	2,52	0,4941	4,5	0,499997
1,67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945	5	0,499997
1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948		
1,69	0,4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951		
1,7	0,4554	2	0,4772	2,6	0,4953		
1,71	0,45641	2,02	0,4783	2,62	0,4956		
1,72	0,4573	2,04	0,4793	2,64	0,4959		
1,73	0,4582	2,06	0,4803	2,66	0,4961		
1,74	0,4591	2,08	0,4812	2,68	0,4963		
1,75	0,4599	2,1	0,4821	2,7	0,4965		
1,76	0,4608	2,12	0,483	2,72	0,4967		
1,77	0,4616	2,14	0,4838	2,74	0,4969		
1,78	0,4625	2,16	0,4846	2,76	0,4971		
1,79	0,4633	2,18	0,4854	2,78	0,4973		
1,8	0,4641	2,2	0,4861	2,8	0,4974		

Додаток В

Таблиця значень функції $p_k(\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Таблиця В.1

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	–	0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	–	–	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	–	–	–	–	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7	–	–	–	–	–	–	0,00001	0,00002	0,00004

Продовження таблиці В.1

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01074	0,00500
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14307	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	–	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10141	0,12408	0,13176
10	–	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858
11	–	0,00001	0,00022	0,00193	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702
12	–	–	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07276
13	–	–	0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038
14	–	–	–	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238
15	–	–	–	0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943
16	–	–	–	–	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093
17	–	–	–	–	0,00001	0,00012	0,00059	0,00212	0,00579
18	–	–	–	–	–	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289
19	–	–	–	–	–	0,00001	0,00008	0,00040	0,00137

Додаток Г

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ **(квантилів** $(\gamma+1)/2$ **нормального розподілу)**

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4.03	6,86	25	2,064	2.797	3.745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2.756	3.659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2.708	3.558
10	2.26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2.23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2.633	3.403
16	2,13	2.95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.576	3.291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток Д

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
5	1,37	2,67	5.64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1.07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0.96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0.92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток Е

Критичні точки розподілу χ^2

Таблиця Е.1

Число степенів вільності k	Рівень значущості α								
	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,025	0,05	0,10	0,2
1	10,83	9,5	7,9	6,6	5,4	5,0	3,8	2,7	1,64
2	13,8	12,4	11,6	9,2	7,8	7,4	6,0	4,6	3,22
3	16,3	14,8	12,8	11,3	9,8	9,4	7,8	6,3	4,64
4	18,5	16,9	14,9	13,3	11,7	11,1	9,5	7,8	6,0
5	20,5	18,9	16,3	15,1	13,4	12,8	11,1	9,2	7,3
6	22,5	20,7	18,6	16,8	15,0	14,4	12,6	10,6	8,6
7	24,3	22,6	20,3	18,5	16,6	16,0	14,1	12,0	9,8
8	26,1	24,3	21,9	20,1	18,2	17,5	15,5	13,4	11,8
9	27,9	26,1	23,6	21,7	19,7	19,0	16,9	14,7	12,2
10	29,6	27,7	25,2	23,2	21,2	20,5	18,3	16,0	13,4
11	31,3	29,4	26,8	24,7	22,6	21,9	19,7	17,3	14,6
12	32,9	31	28,3	26,2	24,1	23,3	21,0	18,5	15,8
13	34,5	32,5	29,8	27,7	25,5	24,7	22,4	19,8	17,0
14	36,1	34	31	29,1	26,9	26,1	23,7	21,1	18,2
15	37,7	35,5	32,5	30,6	28,3	27,5	25,0	22,3	19,3
16	39,2	37	34	32,0	29,6	28,8	26,3	23,5	20,5
17	40,8	38,5	35,5	33,4	31,0	30,2	27,6	24,8	21,6
18	42,3	40	37	34,8	32,3	31,5	28,9	26,0	22,8
19	43,8	41,5	38,5	36,2	33,7	32,9	30,1	27,2	23,9
20	45,3	43	40	37,6	35,0	34,2	31,4	28,4	25,0
21	46,8	44,5	41,5	38,9	36,3	35,5	32,7	29,6	26,2
22	48,3	46	42,5	40,3	37,7	36,8	33,9	30,8	27,3
23	49,7	47,5	44	41,6	39,0	38,1	35,2	32,0	28,4
24	51,2	48,5	45,5	43,0	40,3	39,4	36,4	33,2	29,6
25	52,6	50	47	44,3	41,6	40,6	37,7	34,4	30,7
26	54,1	51,5	48	45,6	42,9	41,9	38,9	35,6	31,8
27	55,5	53	49,5	47,0	44,1	43,2	40,1	36,7	32,9
28	56,9	54,5	51	48,3	45,4	44,5	41,3	37,9	34,0
29	58,3	56	52,5	49,6	46,7	45,7	42,6	39,1	35,1
30	59,7	57,5	54	50,9	48,0	47,0	43,8	40,3	36,3

Продовження таблиці Е.1

Число степенів вільності k	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99
1	1,07	0,455	0,148	0,064	0,016	0,0039	0,00098	0,0006	0,00016
2	2,41	1,386	0,713	0,446	0,211	0,103	0,051	0,040	0,020
3	3,66	2,366	1,424	1,005	0,584	0,352	0,216	0,185	0,115
4	4,9	3,36	2,19	1,65	1,06	0,711	0,484	0,43	0,297
5	6,1	4,35	3,00	2,34	1,61	1,15	0,831	0,75	0,554
6	7,2	5,35	3,83	3,97	2,20	1,64	1,24	1,13	0,872
7	8,4	6,35	4,67	3,82	2,83	2,17	1,69	1,56	1,24
8	9,5	7,34	5,53	4,59	3,49	2,73	2,18	2,03	1,65
9	10,7	8,34	6,39	5,38	4,17	3,33	2,70	2,53	2,09
10	11,8	9,34	7,27	6,18	4,86	3,94	3,25	3,06	2,55
11	12,9	10,3	8,1	7,0	5,6	4,57	3,82	3,6	3,05
12	14,0	11,3	9,0	7,8	6,3	5,23	4,40	4,2	3,57
13	15,1	12,3	9,9	8,6	7,0	5,89	5,01	4,8	4,11
14	16,2	13,3	10,8	9,5	7,8	6,57	5,63	5,4	4,66
15	17,3	14,3	11,7	10,3	8,5	7,26	6,26	6,0	5,23
16	18,4	15,3	12,6	11,2	9,3	7,96	6,91	6,6	5,81
17	19,5	16,3	13,5	12,0	10,1	8,67	7,56	7,3	6,41
18	20,6	17,3	14,4	12,9	10,9	9,39	8,23	7,9	7,01
19	21,7	18,3	15,4	13,7	11,7	10,1	8,91	8,6	7,63
20	22,8	19,3	16,3	14,6	12,4	10,9	9,59	9,2	8,26
21	23,9	20,3	17,2	15,4	13,2	11,6	10,3	9,9	8,90
22	24,9	21,3	18,1	16,3	14,0	12,3	11,0	10,6	9,54
23	26,0	22,3	19,0	17,2	14,8	13,1	11,7	11,3	10,2
24	27,1	23,3	19,9	18,1	15,7	13,8	12,4	12,0	10,9
25	28,1	24,3	20,9	18,9	16,5	14,6	13,1	12,7	11,5
26	29,3	25,3	21,8	19,8	17,3	15,4	13,8	13,4	12,2
27	30,3	26,3	22,7	20,7	18,1	16,2	14,6	14,1	12,9
28	31,4	27,3	23,6	21,6	18,9	16,9	15,3	14,8	13,6
29	32,5	28,3	24,6	22,5	19,8	17,7	16,0	15,6	14,3
30	33,5	29,3	25,5	23,4	20,6	18,5	16,8	16,3	15,0

Додаток Ж
Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів вільності k	Рівень значущості α (двостороння критична область)								
	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,003	0,002	0,001
1	6,31	12,7	25,452	31,82	63,7	127,3	212,2	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,205	6,97	9,92	14,089	18,216	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,177	4,54	5,84	7,153	8,891	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,495	3,75	4,60	5,597	6,435	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,163	3,37	4,03	4,773	5,376	5,89	6,86
6	1,94	2,45	2,969	3,14	3,71	4,317	4,800	5,21	5,96
7	1,89	2,36	2,841	3,00	3,50	4,029	4,412	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,752	2,90	3,36	3,833	4,199	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,685	2,82	3,25	3,690	4,024	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,634	2,76	3,17	3,581	3,892	4,14	4,59
11	1,80	2,20		2,72	3,11			4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,560	2,68	3,05	3,428	3,706	3,93	4,32
13	1,77	2,16		2,65	3,01			3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,510	2,62	2,98	3,326	3,583	3,79	4,14
15	1,75	2,13		2,60	2,95			3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,473	2,58	2,92	3,252	3,494	3,69	4,01
17	1,74	2,11		2,57	2,90			3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,445	2,55	2,88	3,193	3,428	3,61	3,92
19	1,73	2,09		2,54	2,86			3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,423	2,53	2,85	3,153	3,376	3,55	3,85
21	1,72	2,08		2,52	2,83			3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,405	2,51	2,82	3,119	3,335	3,51	3,79
23	1,71	2,07		2,50	2,81			3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,391	2,49	2,80	3,092	3,302	3,47	3,74
25	1,71	2,06		2,49	2,79			3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,379	2,48	2,78	3,067	3,274	3,44	3,71
27	1,71	2,05		2,47	2,77			3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,369	2,46	2,76	3,047	3,250	3,40	3,66
29	1,70	2,05		2,46	2,76			3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,360	2,46	2,75	3,030	3,230	3,39	3,65
40	1,68	2,02		2,42	2,70			3,31	3,55
60	1,67	2,00		2,39	2,66			3,23	3,46
120	1,66	1,98		2,36	2,62			3,17	3,37
200		1,972		2,345	2,601				3,339
500		1,965		2,334	2,586				3,310
∞	1,64	1,96	2,241	2,33	2,58	2,807	2,968	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,025	0,015	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область)								

Додаток И

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Імовірність події

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

2. Відносна частота події

$$W(A)=\frac{m}{n};\quad W(A)\approx P(A).$$

3. Розміщення

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

4. Перестановки

$$P_n=n!\qquad 0!=1.$$

5. Комбінації

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C_n^{n-m}.$$

6. Геометричні ймовірності

$$P(g)=\frac{mg}{mG};\quad P=\frac{l}{L};\quad P=\frac{Sd}{SD};\quad P=\frac{v}{V}.$$

7. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B);\quad P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

8. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

9. Теорема множення ймовірностей незалежних подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);$$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

10. Теорема множення ймовірностей залежних подій

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P_B\cdot P_B(A);$$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_n}(A_n).$$

11. Імовірність повної групи несумісних подій

$$P\left(A_1+A_2+\ldots+A_n\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots+P\left(A_n\right)=1.$$

12. Сума ймовірностей протилежних подій

$$P\left(A\right)+P\left(\bar{A}\right)=1.$$

13. Імовірність появи, принаймні, однієї із подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$P\left(A\right)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n;$$

$$P\left(A\right)=1-q^n, \quad \text{якщо} \quad P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=\ldots=P\left(A_n\right)=p.$$

14. Формула повної ймовірності

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)\cdot P_{B_2}\left(A\right)+\ldots+P\left(B_n\right)\cdot P_{B_n}\left(A\right),$$

$$\text{якщо} \quad P\left(B_1\right)+P\left(B_2\right)+\ldots+P\left(B_n\right)=1.$$

15. Формула Бейєса

$$\mathrm{P_A}\left(\mathrm{B_i}\right)=\frac{P\left(B_i\right)\cdot P_{B_i}\left(A\right)}{P\left(A\right)} \qquad \left(i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n\right),$$

де $P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)\cdot P_{B_2}\left(A\right)+\ldots+P\left(B_n\right)\cdot P_{B_n}\left(A\right).$

16. Формула Бернуллі

$$P_n\left(k\right)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}.$$

17. Локальна теорема Лапласа

$$P_n\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{n\,p\,q}}\cdot\phi\left(x\right),$$

$$\text{де} \quad \phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x=\frac{k-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}; \qquad \phi\left(-x\right)=\phi\left(x\right).$$

18. Інтегральна теорема Лапласа

$$P_n\left(k_1,k_2\right)=F\left(x''\right)-F\left(x'\right),$$

$$\text{де} \quad F\left(x\right)=\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \quad x'=\frac{k_1-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}, \quad x''=\frac{k_2-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}; \quad F\left(-x\right)=-F\left(x\right).$$

$$F\left(x\right)=0{,}5 \text{ для } x>5.$$

19. Відхилення відносної частоти від сталої ймовірності у незалежних випробуваннях

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\cong 2F\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

20. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях

$$np-q\le k_0<np+p.$$

21. Біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини

$$X=k,\ k=1,2,...,n,\quad \text{де } P\left(X=k\right)=P_n\left(k\right)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

22. Закон Пуассона розподілу дискретної випадкової величини

$$P_n\left(k\right)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad \text{де } \lambda=np.$$

23. Числові характеристики дискретних випадкових величин
    а) математичне сподівання

$$M\left(X\right)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i.$$

    б) дисперсія

$$D\left(X\right)=M\left(X-M\left(X\right)\right)^2=M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2.$$

    в) середнє квадратичне відхилення

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}.$$

24. Інтегральна функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

$$F\left(x\right)=P\left(X<x\right),$$

$$\text{або } F\left(X\right)=P\left(X\in\left(-\infty;x\right)\right),\quad x\in\left(-\infty;\infty\right).$$

25. Диференціальна функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right),\qquad F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}f\left(x\right)dx.$$

26. Математичне сподівання неперервної випадкової величини

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad \text{для} \quad x\in R. \qquad M(X)=\int_{a}^{b} x f(x)dx \quad \text{для} \quad x\in(a;b).$$

27. Дисперсія неперервної випадкової величини

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2, \quad x\in R;$$

$$D(X)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-(M(X))^2, \quad x\in(a;b).$$

28. Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

29. Рівномірний розподіл

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad \text{для} \quad x\in(a;b);$$

$$f(x)=0 \quad \text{для} \quad x\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty).$$

30. Нормальний розподіл

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання,

σ – середнє квадратичне відхилення.

$$P(\alpha<X<\beta)=F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad P(|X-a|<\delta)=2F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

де

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

31.Коефіцієнт кореляції

$$\rho(X,Y)=\frac{K(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}.$$

32.Пряма регресії Y на X:

$$y=\rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)+m_Y.$$

Пряма регресії X на Y:

$$x = \rho\left(X,Y\right)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y - m_Y\right) + m_X \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{\rho\left(X,Y\right)}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x - m_X\right) + m_Y .$$

33. Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вибірка, то

середня вибірки $\overline{x}_B = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

вибіркова дисперсія $\overline{S}_B = \dfrac{n}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \dfrac{n_i}{n}$;

зміщена вибіркова дисперсія $D_B = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \dfrac{n_i}{n}$;

середнє квадратичне вибірки $\sigma_B = \sqrt{S_B}$;

n – об’єм вибірки; n_i – частота значення x_i.

34. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії σ^2:

$$\left(\overline{x}_B - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x}_B + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де t_γ визначається з умови $2F\left(t_\gamma\right) = \gamma$.

35. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії σ^2:

$$\left(\overline{x}_B - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x}_B + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

36. Довірчий інтервал для оцінки середньоквадратичного відхилення σ нормального розподілу

$$s\left(1-q\right) < \sigma < s\left(1+q\right) \quad \left(q < 1\right),$$

де $q = P\left(\chi^2 > x^2\right), \quad \chi^2 = \dfrac{\left(n-1\right)s^2}{\sigma^2}.$

$$q > 1 \Rightarrow 0 < \sigma < s\left(1+q\right).$$

37. Мода M – це варіанта, що має найбільшу частоту.

38. Медіана m – це варіанта, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівних по числу варіант.

39. Розмах P – це різниця між найбільшою і найменшою варіантами.

40. Коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x}_B} \times 100\%,$$

41. Вибірковий коефіцієнт кореляції

$$\rho_B = \frac{\sum n_{xy}\, x\, y - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}.$$

42. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X:

$$\overline{y}_x = \rho_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right) + \overline{y};$$

вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y:

$$\overline{x}_y = \rho_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}\right) + \overline{x};$$

43. Невідомі параметри $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ лінійного рівняння $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ регресії для n факторів знаходяться з системи

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum x_{1i} + ... + a_n \sum x_{ni} = \sum y_i\,, \\ a_0 \sum x_{1i} + a_1 \sum x_{1i}^2 + ... + a_n \sum x_{ni} \cdot x_{1i} = \sum y_i \cdot x_{1i}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 \sum x_{ni} + a_1 \sum x_{ni} \cdot x_{1i} + ... + a_n \sum x_{ni}^2 = \sum y_i \cdot x_{ni}\,. \end{cases}$$

Зокрема, коли $y = a_0 + a_1x_1$, то ця система має вигляд:

$$\begin{cases} a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_0 \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,, \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases}$$

Електронне навчальне видання

Володимир Сергійович Озеранський
Людмила Вікторівна Крилик
Олександр Федорович Шевчук

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА для здобувачів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Лабораторний практикум

Рукопис оформив *О. Шевчук*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет підготувала *Т. Старічек*

Підписано до видання 16.01.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-010.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: rvv.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.