

УДК 653.13+531.3

О. Б. Мокін, к. т. н., доц.; Б. І. Мокін, д. т. н., проф.**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДВОВІСНОГО АВТОМОБІЛЯ В ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ЙОГО РУХОМ ЗА ВІДСУТНОСТІ ОБ'ЇЗДІВ І ОБГОНІВ**

Побудовано математичну модель двовісного автомобіля, придатну для розв'язання задачі керування його рухом по основній смузі дороги за відсутності об'їздів і обгонів. Модель задана в декартовій системі координат, прив'язаній до мата, і описує рух центра маси автомобіля вздовж осьової лінії основної смуги руху. Стаття є першою із циклу статей, присвячених розробці математичних моделей різних типів автомобілів і автомобільних потягів, що рухаються дорогою з асфальтним покриттям, яке може бути сухим, вологим, засніженим або зледенілим.

Ключові слова: математична модель, рух автомобіля, двоосний, поворот дороги, центр мас.

Вихідні умови та постановка завдання

У роботах [1, 2, 3] нами побудовані математичні моделі руху електропотяга, складеного з певної кількості зчеплених між собою вагонів (один-два – трамвай, три-чотири – швидкісний трамвай, п'ять-вісім – електропотяг метрополітену, дев'ять-чотирнадцять – пасажирський електропотяг, п'ятнадцять і більше – вантажний потяг з електричною тягою).

Оскільки характерною особливістю електропотягів є те, що вони рухаються від зупинки до зупинки залізничною колією і строго за графіком, що робить цей рух детермінованим як у просторі, так і в часі, то побудовані для опису їхнього руху математичні моделі без суттєвої трансформації не можуть бути використаними для математичного моделювання іншого виду колісного транспорту – автомобілів, котрі не мають детермінованої прив'язки до магістралі руху ні в часі, ні у просторі, оскільки їм доводиться під час руху від стартового пункту до кінцевого то прискорюватись, то раптово гальмувати і здійснювати обгони та об'їзди інших транспортних засобів, що рухаються чи стоять на цій же дорозі. Тож побудові математичних моделей, придатних для опису руху автомобілів, ми присвятимо цикл статей, в яких розглядатимуться різні типи автомобілів і автомобільних потягів, що рухаються дорогою з асфальтним покриттям, яке може бути сухим, вологим, засніженим або зледенілим. І першою із них буде стаття, де запропоновано математичну модель двовісного автомобіля, який є найпростішим з позицій механіки, в задачі керування його рухом у відсутності об'їздів, обгонів і гальмування.

Розв'язання задачі

Нехай двовісний автомобіль рухається зі швидкістю $\vec{v}(t)$ відрізком дороги АВ (рис. 1), перебуваючи в даний момент часу t в точці з координатами (x, y) .

Як і для будь-якого іншого фізичного тіла, що рухається, для цього автомобіля виконується другий закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}(x, y, t)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i(x, y, t), \quad (1)$$

в якому m – маса автомобіля, а $\sum_i \vec{F}_i(x, y, t)$ – векторна сума усіх сил, прикладених до центра маси C . З'ясуємо, що це за сили.

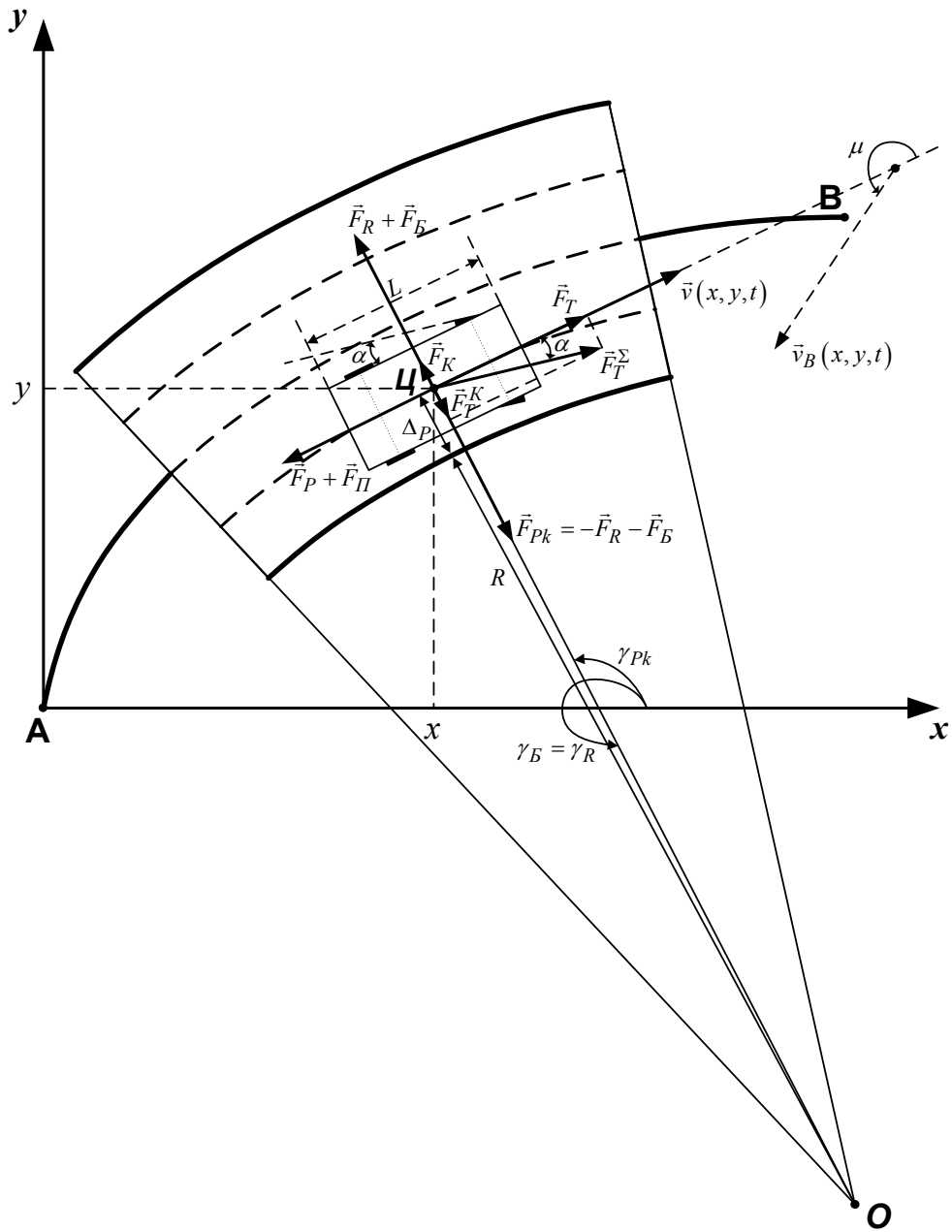


Рис. 1. Векторна діаграма сил, що діють на автомобіль, який рухається з лінійною швидкістю $\vec{v}(x, y, t)$ закругленим відрізком дороги АВ з однією смугою руху в кожному напрямку

Очевидно, що основною рушійною силою є сила тяги двигуна автомобіля \vec{F}_T (рис. 1), напрям дії якої збігається з напрямом дії вектора лінійної швидкості $\vec{v}(x, y, t)$ під час рівномірного прямолінійного руху, а модуль урівноважується сумою протилежно направлених сили \vec{F}_P тертя кочення коліс по дорозі та сили \vec{F}_Π лобового опору повітря просуванню автомобіля, при визначенні якої, звичайно ж, потрібно враховувати і швидкість вітру $\vec{v}_B(x, y, t)$. Зрозуміло, що автомобіль буде прискорюватись лише у випадку, коли сила тяги стане більшою за модулем суми сил тертя кочення та лобового опору. Але під час руху по закругленню дороги радіусом R , який визначається відрізком від центра O закруглення до ближнього краю полотна дороги, як показано на рис. 1, силі тяги \vec{F}_T^Σ , окрім долання

векторної суми сил тертя кочення та лобового опору, необхідно долати ще й коріолісову силу \vec{F}_K , яка є векторною сумою сил – відцентрової сили \vec{F}_R , коріолісової сили \vec{F}_K , сили \vec{F}_B бокового опору повітря, що виникає на бічній поверхні автомобіля при повороті, і сили \vec{F}_{Pk} тертя бокового ковзання коліс, яка урівноважує лише відцентрову силу та силу бокового опору повітря.

Отже, для моделювання загального випадку руху автомобіля по осьовій лінії своєї смуги замість узагальненого рівняння (1) можна записати розгорнуте рівняння у вигляді:

$$m \frac{d\vec{v}(x, y, t)}{dt} = \vec{F}_T + \vec{F}_T^K + \vec{F}_P + \vec{F}_\Pi + \vec{F}_R + \vec{F}_K + \vec{F}_B + \vec{F}_{Pk}, \quad (2)$$

або в проекціях на осі координат x, y –

$$\begin{cases} m \frac{dv_x(x, y, t)}{dt} = F_T \cos \gamma_T + F_T^K \cos \gamma_T^K + F_P \cos \gamma_P + \\ F_\Pi \cos \gamma_\Pi + F_R \cos \gamma_R + F_K \cos \gamma_K + F_B \cos \gamma_B + F_{Pk} \cos \gamma_{Pk}, \\ m \frac{dv_y(x, y, t)}{dt} = F_T \sin \gamma_T + F_T^K \sin \gamma_T^K + F_P \sin \gamma_P + \\ + F_\Pi \sin \gamma_\Pi + F_R \sin \gamma_R + F_K \sin \gamma_K + F_B \sin \gamma_B + F_{Pk} \sin \gamma_{Pk}, \end{cases} \quad (3)$$

де літерою γ позначено кут, який утворює в момент часу t в точці з координатами (x, y) вектор сили F , позначеної тим же індексом, з віссю x , додатне значення якого формується відліком проти годинникової стрілки. Це показано на рис. 1 для кутів $\gamma_{Pk}, \gamma_R, \gamma_B$. Аналогічна умова висувається і до кута μ між вектором швидкості вітру та вектором лінійної швидкості автомобіля. Для підвищення прозорості запису й полегшення його сприйняття в рівняннях (2), (3), пам'ятаючи про те, що F, γ є функціями x, y, t , ми ці незалежні змінні не наводимо, як не будемо наводити їх і надалі при використанні кута μ .

В якому напрямі діє вектор кожної сили, що входить в праву частину рівняння (2), видно із рис. 1, і в системі рівнянь (3) задається синусами та косинусами відповідних кутів. Тому для ідентифікації системи рівнянь (3) залишається лише з'ясувати, як визначаються модулі векторів, що входять в праві частини цієї системи рівнянь.

При прямолінійному русі автомобіля для аналізу цього руху потрібно знати модулі векторів лише трьох сил – F_P, F_Π, F_T , оскільки усі інші дорівнюють нулю.

Із розділу «Механіка» курсу фізики [4, 5] відомо, що модуль сили тертя кочення F_P знаходиться зі співвідношення

$$F_P = k_* P, \quad (4)$$

в якому P – вага тіла або її складова, що направлена перпендикулярно до площини руху, а коефіцієнт тертя кочення k_* може приймати одне із значень – k_c, k_m, k_z, k_o (залежно від того, котяться колеса по сухому асфальту, мокрому, засніженому чи зледенілому). Що ж до сили лобового опору повітря F_Π , то, використовуючи позначення рис. 1, знайдемо її зі співвідношення

$$F_\Pi = k_{\Pi L} S_L (v - v_B \cos(2\pi - \mu))^2 + k_{\Pi B} S_B (v - v_B \cos(2\pi - \mu)), \quad (5)$$

в якому S_L – площа лобового контакту повітря з автомобілем під час руху, S_B – площа бічного контакту повітря з автомобілем під час руху, а $k_{\Pi L}, k_{\Pi B}$ – коефіцієнти узгодження між відповідною силою та відповідними площами і квадратами швидкостей або самими швидкостями. Співвідношення (5) випливає із законів фізики, згідно з якими опір тіла набігаючому потоку є пропорційним квадратові лінійної швидкості набігання потоку на лобову поверхню тіла та пропорційним швидкості ковзання потоку по бічній поверхні тіла.

А сила тяги F_T легко визначається, якщо відомим є обертальний момент M_O на осі ведучого колеса радіуса r , який є функцією потужності двигуна та робочого стану коробки передач і положення педалі акселератора, зв'язаної з дросельною заслонкою, із співвідношення

$$F_T = 2 \frac{M_O}{r}, \quad (6)$$

якщо автомобіль має два ведучих колеса, або

$$F_T = 4 \frac{M_O}{r}, \quad (7)$$

якщо автомобіль має чотири ведучих колеса.

Під час аналізу руху автомобіля закругленням дороги крім трьох уже визначених модулів сил – F_P, F_{II}, F_T , потрібно знати, як визначати модулі ще 5 сил, що входять в рівняння (2), (3), – $F_R, F_K, F_B, F_T^K, F_{Pk}$. Покажемо, як їх знайти.

Із законів механіки [4, 5] та позначень рис. 1 випливає, що моделі для відцентрової сили F_R та коріолісової сили F_K можна записати у вигляді:

$$F_R = m \frac{v^2 + \omega^2 (R + \Delta_P)^2}{R + \Delta_P}, \quad (8)$$

$$F_K = 2mv\omega, \quad (9)$$

де ω – кутова швидкість обертання центра C маси автомобіля навколо центра O кола обертання. Із тих же міркувань, що були висловлені щодо співвідношення (5), і позначень рис. 1 для сили F_B , що виникає під час повороту за рахунок набігання повітряного потоку на бічну поверхню автомобіля та ковзання цього потоку по лобовій поверхні автомобіля, знайдемо

$$F_B = \frac{1}{2} k_{II} S_B (\omega L + v_B \sin(2\pi - \mu))^2 + k_{IB} S_L (\omega L + v_B \sin(2\pi - \mu)). \quad (10)$$

Із рис. 1 видно, що складова сили тяги F_T^K , яку необхідно створити для здійснення повороту автомобіля шляхом урівноваження коріолісової сили F_K , матиме вигляд

$$F_T^K = -F_K = -2mv\omega. \quad (11)$$

Що ж до сили F_{Pk} , яка урівноважує суму сил $F_R + F_B$, то вона формується, як і сила F_P , за рахунок тертя коліс об дорогу, але не тертя кочення, а тертя ковзання, тобто, математична модель для її розрахунку матиме вигляд

$$F_{Pk} = k_{**}(\omega, P)P, \quad (12)$$

в якій коефіцієнт тертя ковзання k_{**} , який залежить від розмірів плями контакту колеса з дорогою, котра при нормальному тиску повітря в шині є функцією ваги автомобіля та кутової швидкості його обертання навколо центра ваги, може приймати одне із значень – $k_c^K, k_m^K, k_z^K, k_o^K$ (залежно від того, ковзають колеса по сухому асфальту, мокрому, засніженому чи зледенілому).

Підставляючи співвідношення (4) – (12) в систему рівнянь (3), ми отримуємо повністю визначену модель для аналізу керованого руху автомобіля як по прямолінійному відрізку дороги, так і по закругленому за відсутності обгонів та об'їздів. При цьому керуючими змінними виступатимуть сила тяги F_T , яку можна змінювати за допомогою педалі акселератора, та сила F_T^K компенсації коріолісової сили F_K , яку можна змінювати за допомогою керма: поворотом передніх коліс на кут α . Значення кута α можна знайти з виразу

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{-2mv\omega}{F_T}. \quad (13)$$

Висновки

1. Побудовано математичну модель двовісного автомобіля, придатну для розв'язання задачі керування його рухом по основній смузі дороги за відсутності об'їздів і обгонів.
2. Модель задана в декартовій системі координат, прив'язаній до мапи, і описує рух центра маси автомобіля вздовж осьової лінії основної смуги руху.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін Борис Іванович. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 2008. – № 6. – С. 55 – 58.
2. Мокін Борис Іванович. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 2) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 2009. – № 1. – С. 28 – 33.
3. Мокін Борис Іванович. Модель обмеження на лінійну швидкість вагона електропотяга під час його руху по закругленню колії / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 2009. – № 3. – С. 27 – 29.
4. Фейнман Ричард. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 1 – 2. – М.: «Мир», 1976. – 439 с.
5. Павловський Михайло Антонович. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

Мокін Олександр Борисович – к. т. н., доцент, кафедра електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті, e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокін Борис Іванович – д. т. н., професор, кафедра електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті, ректор ВНТУ, тел.: (0432) 56-08-48.

Вінницький національний технічний університет.