УДК 519.711

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.; А. В. Пísклярова, к. т. н.;
Ю. В. Мокіна, к. е. н.

ДОСЛІДЖЕННЯ НА ФАЗОВІЙ ПЛОЩИНІ ПРОЦЕСУ ЗАСВОЄННЯ ПРОГРАМИ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ЗДІБНИМ СТУДЕНТОМ

За допомогою математичних моделей, синтезованих на фазовій площині, здійснено дослідження процесу засвоєння програми навчальної дисципліни здібним студентом.

Побудовано фазові траєкторії процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни за допомогою викладача та самостійно.

Ключові слова: *студент, навчальна дисципліна, фазова площина, математична модель.*

Ця робота є продовженням дослідження процесу засвоєння студентом навчальної дисципліни на фазовій площині в околі знайдених особливих точок [1 – 3], але тепер для здібного студента, тобто студента, для якого виконуються умови, що призводять до появи на фазовій площині в області допустимих значень фазових координат другої особливої точки.

Постановка завдання та вихідні передумови

У роботі [1] синтезовано математичні моделі процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни на фазовій площині у вигляді

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 \tag{1}$$

для i-*го* часового напівінтервалу $[t^{(i)})$, протягом якого студент цю навчальну дисципліну не вивчає, у вигляді

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 + \beta_{11}x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 \tag{2}$$

для j-*го* часового напівінтервалу $[t_1^{(j)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, спілкуючись в аудиторії з викладачем, та у вигляді

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 + \beta_{22}x_2 \tag{3}$$

для k-*го* часового напівінтервалу $[t_2^{(k)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, працюючи самостійно.

У математичних моделях (1), (2), (3) α_{11}, α_{22} – коефіцієнти, що характеризують ступінь забування студентом матеріалу навчальної дисципліни, вивченого раніше відповідно з викладачем і самостійно, α_{12}, α_{21} – коефіцієнти, що характеризують синергетичний вплив один на одного складників процесу засвоєння студентом навчального матеріалу з викладачем і самостійно, β_{11}, β_{22} – коефіцієнти, що характеризують ступінь засвоєння нових знань відповідно на заняттях з викладачем та самостійно, а x_1, x_2 – фазові координати, що задають у відносних одиницях ступінь засвоєння студентом програми навчальної дисципліни відповідно на заняттях з викладачем і самостійно, для яких виконуються умови:

$$x_1 = \frac{X_1}{X}, x_2 = \frac{X_2}{X}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} x_1 \le 1, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 1, \end{gathered} \tag{5}$$

де X – та кількість знань, яку може мати студент, засвоївши протягом визначеного часу T усі розділи програми певної навчальної дисципліни, X_1 – така кількість знань з певної навчальної дисципліни, яку студент отримує від викладача під час аудиторних занять, а X_2 – та кількість знань з певної дисципліни, яку студент засвоює, самостійно вивчаючи певні розділи програми.

У цій же роботі [1], допускаючи, що напівінтервали $[t^{(i)}), [t_1^{(j)}), [t_2^{(k)})$ слідують один за одним, і позначаючи кінцеві точки цих напівінтервалів символами $t_к^{(i)}$, $t_{1к}^{(j)}$, $t_{2к}^{(k)}$, визначаємо вихідні умови, необхідні для однозначного розв'язання систем диференціальних рівнянь (1), (2), (3), у вигляді:

для системи рівнянь (1) –

$$\begin{aligned} x_{1п}^{(i)} &= x_1(t_{2к}^{(k-1)}), \\ x_{2п}^{(i)} &= x_2(t_{2к}^{(k-1)}), \end{aligned} \tag{6}$$

для системи рівнянь (2) –

$$\begin{aligned} x_{1п}^{(j)} &= x_1(t_к^{(i)}), \\ x_{2п}^{(j)} &= x_2(t_к^{(i)}), \end{aligned} \tag{7}$$

для системи рівнянь (3) –

$$\begin{aligned} x_{1п}^{(k)} &= x_1(t_{1к}^{(j)}), \\ x_{2п}^{(k)} &= x_2(t_{1к}^{(j)}). \end{aligned} \tag{8}$$

У роботі [2] розпочато дослідження процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни на фазовій площині з використанням синтезованих математичних моделей на заданих напівінтервалах $[t^{(i)}), [t_1^{(j)}), [t_2^{(k)})$ і визначено особливі точки $O_l(x_{1o}, x_{2o}), l = 1,2$ фазової площини.

Показано, що всі три математичні моделі мають одну спільну особливу точку $O_1(0,0)$ та що кожна модель має ще одну особливу точку $O_2(x_{1o}, x_{2o})$, причому для моделі (1) – це точка $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$, для моделі (2) – це точка $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$, а для моделі (3) – це точка $O_2(\frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$. У цій же роботі [2] з'ясовано, якщо йдеться про студента, не наділеного потужними логікою і пам'яттю, тобто про студента середніх здібностей, то лише його особлива точка $O_1(0,0)$ розташована в області допустимих значень фазових координат, визначеній співвідношеннями (5), оскільки для цього випадку справедливими є умови

$$\alpha_{11} > \alpha_{12}, \alpha_{22} > \alpha_{21}. \tag{9}$$

З'ясовано також і те, коли йдеться про студента, наділеного потужними логікою і пам'яттю, то в заштрихованій області фазової площини, яка є допустимою за умовами нашої задачі, може знаходитись не лише особлива точка $O_1(0,0)$, але й особлива точка $O_2(x_{1o}, x_{2o})$, оскільки для цього випадку справедливими є умови

$$\alpha_{11} < \alpha_{12}, \alpha_{22} < \alpha_{21}. \tag{10}$$

У роботі [3] здійснено дослідження характеристик особливих точок на фазовій площині та визначено характер фазових траєкторій в околі цих особливих точок для процесу засвоєння програми навчальної дисципліни студентом середніх здібностей.

У цій роботі продовжимо дослідження процесу засвоєння студентом навчальної дисципліни на фазовій площині з використанням моделей (1), (2), (3) в околі знайдених особливих точок і побудуємо фазові траєкторії цього процесу, але тепер для здібного студента, тобто студента, для якого виконуються умови (10), що призводять до появи на фазовій площині в області допустимих значень фазових координат другої особливої точки.

Визначення характеристик особливих точок моделей здібного студента й побудова фазових траєкторій в їх околі

Оскільки на кожному з напівінтервалів $[t^{(i)}), [t_1^{(j)}), [t_2^{(k)})$ процес засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни описується різними моделями із множини (1), (2), (3), то й характер траєкторій на фазовій площині в допустимій області значень фазових координат і характеристики особливих точок $O_1(0,0)$, $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ теж відрізнятимуться.

Оскільки диференціальні рівняння лінійного наближення в околі особливої точки $O_1(0,0)$ для усіх моделей із множини (1), (2), (3) для здібного студента будуть такими самими, як і для студента середніх здібностей, то для здібного студента при розгляді процесу засвоєння ним програми навчальної дисципліни на фазовій площині щодо характеристик особливої точки $O_1(0,0)$ й характеру фазових траєкторій в її околі будуть справедливими всі ті результати, отримані нами в роботі [3] для студента середніх здібностей. Тому ті викладки, які опрацьовані в роботі [3], щодо особливої точки $O_1(0,0)$, у цій роботі дублювати не будемо, а лише використовуватимемо їх результати, сконцентрувавши увагу на визначенні характеристик особливих точок $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ і побудові як фазових траєкторій у їх околі, так і фазових портретів процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на кожному з вищевизначених напівінтервалів у цілому.

Перш, ніж перейти до розгляду характеристик особливої точки $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ і побудови фазових портретів на кожному із напівінтервалів $[t^{(i)}), [t_1^{(j)}), [t_2^{(k)})$ у цілому, звернемо увагу на одну спільну рису цих характеристик, яка полягає в тому, що в роботі [3] при розгляді особливої точки $O_1(0,0)$, синтезуючи лінеаризовані рівняння для моделей (1), (2), (3), просто відкидали нелінійні члени $\alpha_{12} x_2 x_1$ та $\alpha_{21} x_1 x_2$ з тих причин, що лінійні частини їх розкладу в степеневі ряди у цій точці дорівнюють нулю. Але при розкладі в степеневі ряди цих нелінійних членів в околі особливої точки $O_2(x_{1o}, x_{2o})$ лінійні частини цих розкладів уже не будуть дорівнювати нулю, а тому їх треба враховувати при лінеаризації моделей (1), (2), (3). І це будемо робити шляхом розкладання у степеневий ряд усієї правої частини кожного рівняння в моделях (1), (2), (3).

Перейдемо до аналізу на фазовій площині процесу засвоєння програми навчальної дисципліни здібним студентом на часовому напівінтервалі $[t^{(i)})$, протягом якого студент цю навчальну дисципліну не вивчає. Особливими точками процесу в цьому випадку, як показано в роботі [2], будуть точки фазової площини $O_1(0,0)$ та $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$, що лежать у допустимій області (5).

Характеристику особливої точки $O_1(0,0)$ і характер фазових траєкторій в її околі визначено в роботі [3]: вони мають вигляд, наведений на рис. 1а.

Визначимо тепер характеристику особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ і характер фазових траєкторій в її околі. Для цього нам потрібно, як показано в роботі [4], лінеаризувати в околі цієї особливої точки праву частину рівнянь (1). Тож, розкладаючи у степеневий ряд в околі цієї особливої точки праві частини рівнянь системи (1) і беручи лише лінійні частини, матимемо:

$$\begin{aligned} &-\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2x_1=-\alpha_{11}x_{1o}+\alpha_{12}x_{2o}x_{1o}+(-\alpha_{11}+\alpha_{12}x_{2o})(x_1-x_{1o})+\alpha_{12}x_{1o}(x_2-x_{2o}),\\ &-\alpha_{22}x_2+\alpha_{21}x_1x_2=-\alpha_{22}x_{2o}+\alpha_{21}x_{1o}x_{2o}+\alpha_{21}x_{2o}(x_1-x_{1o})+(-\alpha_{22}+\alpha_{21}x_{1o})(x_2-x_{2o}). \end{aligned} \tag{11}$$

А з урахуванням того, що

$$x_{1o}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},x_{2o}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \tag{12}$$

співвідношення (11) можна переписати й так:

$$\begin{aligned} &-\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2x_1=\alpha_{12}\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}(x_2-x_{2o}),\\ &-\alpha_{22}x_2+\alpha_{21}x_1x_2=\alpha_{21}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}(x_1-x_{1o}). \end{aligned} \tag{13}$$

Переходячи до системи координат

$$z_1=x_1-x_{1o},z_2=x_2-x_{20}, \tag{14}$$

тобто перемістивши початок системи координат в особливу точку $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ і враховуючи співвідношення (13), лінеаризовану систему рівнянь для математичної моделі (1) в околі цієї особливої точки можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_1}{dt}=\alpha_{12}\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}z_2,\\ &\frac{dz_2}{dt}=\alpha_{21}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}z_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Матриця коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь (15) матиме вигляд

$$A=\begin{bmatrix} 0..........\alpha_{12}\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \\ \alpha_{21}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}........0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

а характеристичне рівняння –

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda........\alpha_{12}\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \\ \alpha_{21}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}.......0-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{17}$$

або

$$\lambda^2-\alpha_{11}\alpha_{22}=0. \tag{18}$$

Коренями характеристичного рівняння (18) є

$$\lambda_1=\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}},\qquad \lambda_2=-\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}. \tag{19}$$

Оскільки вони є дійсними числами різних знаків, то особлива точка $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ – це «сідло».

Для визначення характеру фазових траєкторій в околі цієї особливої точки розділимо друге рівняння системи (15) на перше. У результаті отримаємо

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} \frac{z_1}{z_2}, \tag{20}$$

або

$$z_2 dz_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} z_1 dz_1. \tag{21}$$

Інтегруючи рівняння (21), отримаємо

$$z_2^2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} z_1^2 + 2C, \tag{22}$$

де C – стала інтегрування, чисельне значення якої знаходиться з вихідних умов (6).

Графіком рівняння (22) є гіпербола [5], для побудови якої це рівняння зручніше переписати у вигляді

$$z_2 = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} z_1^2 + 2C}. \tag{23}$$

Із рівняння (23) видно, що гіпербола має дві вершини з координатами $(0, \sqrt{2C})$, $(0, -\sqrt{2C})$ та «вуса» у вигляді прямих:

$$z_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}} z_1, \tag{24}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}} z_1. \tag{25}$$

Для визначення напряму руху точки по гіперболічних фазових траєкторіях повернемось до диференціальних рівнянь (15). Підставляючи в них рівняння (24), матимемо

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \alpha_{12} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}} z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \alpha_{21} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}}} z_2, \end{aligned} \tag{26}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{z_1} &= \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\, dt, \\ \frac{dz_2}{z_2} &= \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\, dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Інтегруючи рівняння (26), (27), отримаємо

$$\ln z_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\, t + \ln C_1, \tag{28}$$

$$\ln z_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,t + \ln C_2\,, \tag{29}$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, числове значення яких визначається вихідними умовами (6), причому в областях додатних значень фазових координат z_1, z_2 ці сталі будуть мати знаки «плюс», а в області від'ємних значень – знаки «мінус».

Рівняння (28), (29) можна переписати ще й так:

$$z_1 = C_1 e^{\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,t}, \tag{30}$$

$$z_2 = C_2 e^{\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,t}. \tag{31}$$

Із виразів (30), (31) видно, що з ростом показників часу t числові значення фазових координат по абсолютній величині збільшуються, а це, у свою чергу, означає, що по «вусу» (24) фазова точка рухається в напрямку від особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ в обидва кінці.

Проробивши усі ті ж викладки щодо «вуса» (25), отримаємо, що на ньому:

$$z_1 = C_1 e^{-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,t}, \tag{32}$$

$$z_2 = C_2 e^{-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,t}. \tag{33}$$

Із виразів (32), (33) видно, що з ростом показників t числові значення фазових координат по абсолютній величині зменшуються, а це, у свою чергу, означає, що по «вусу» (25) фазова точка рухається в напрямку до особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ з обох кінців.

Графічно все, викладене вище, щодо процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни в часовому напівінтервалі $[t^{(i)})$ зображено на рис. 1б.

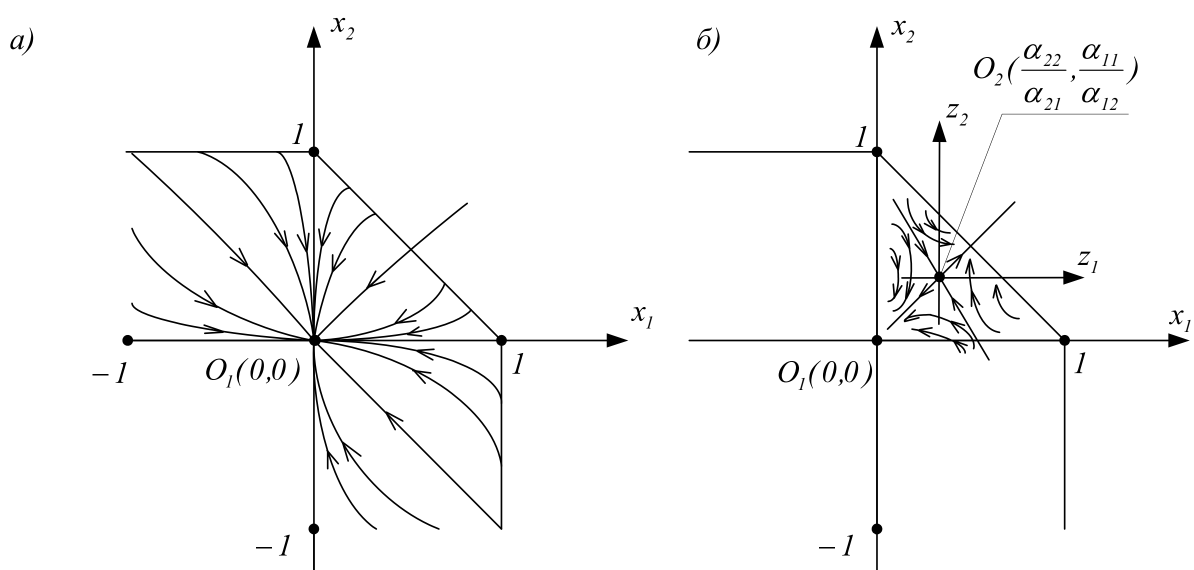

Рис. 1. Фазові траєкторії процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент не працює над вивченням дисципліни ні з викладачем, ні самостійно, в околі особливої точки $O_1(0,0)$ і в околі особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$

А на рис. 2 зображено фазовий портрет процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент не працює над вивченням дисципліни ні з викладачем, ні самостійно, «зшитий» із фазових траєкторій (рис. 1).

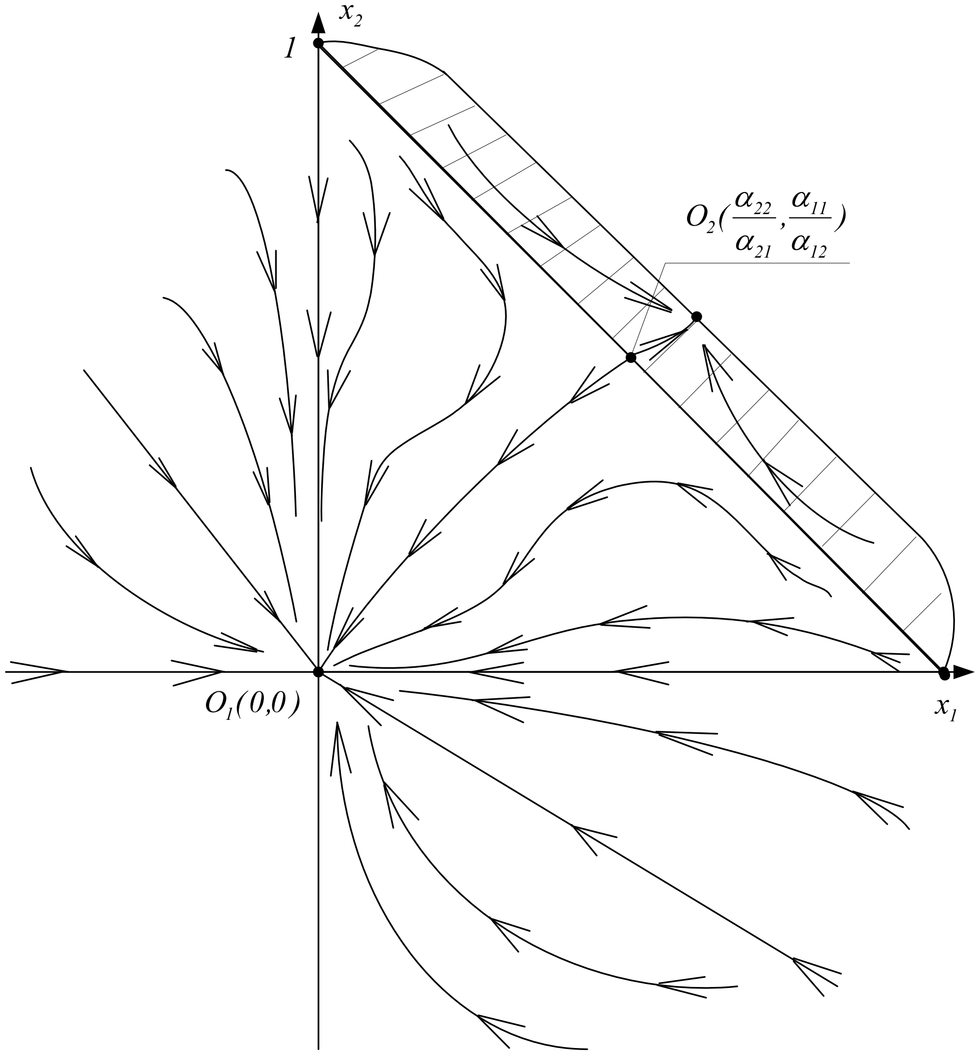

Рис. 2. Фазовий портрет процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент не працює над вивченням дисципліни ні з викладачем, ні самостійно

На фазовому портреті, зображеному на рис. 2, заштрихована область, при потраплянні фазової точки в яку має місце процес якісно відмінний від того, що має місце при попаданні фазової точки в будь-яку іншу область фазової площини, оскільки це область, у якій навіть без подальшої роботи з викладачем чи самостійно студент за рахунок синергетичного ефекту, зумовленого внутрішньою підсвідомою підкорковою роботою мозку, виходить на повне засвоєння програми навчальної дисципліни. Цю область будемо називати областю геніальності, оскільки лише для дуже незначної частки здібних студентів вона матиме місце.

Перейдемо до аналізу на фазовій площині процесу засвоєння програми навчальної дисципліни здібним студентом на часовому напівінтервалі $[t_1^{(j)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, спілкуючись в аудиторії з викладачем. Особливими точками процесу в цьому випадку, як показано в роботі [2], будуть точки фазової площини $O_1(0{,}0)$ та $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{12}})$, що лежать у допустимій області (5).

Характеристику особливої точки $O_1(0{,}0)$ та характер фазових траєкторій у її околі визначено в роботі [3]: вони мають вигляд, наведений на рис. 3а для випадку, коли студент є «розумнішим» за викладача ($\beta_{11} < \alpha_{11}$), і на рис. 3б для випадку, коли викладач є «розумнішим» за студента ($\beta_{11} > \alpha_{11}$).

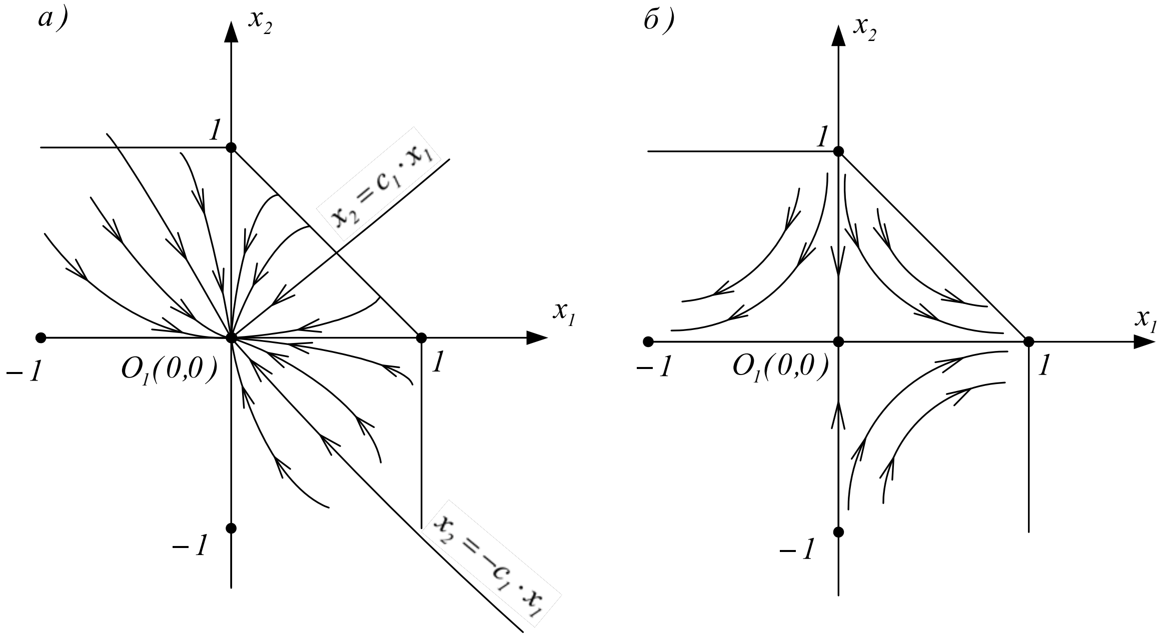

Рис. 3 Фазові траєкторії процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни в околі особливої точки $O_1(0{,}0)$ на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну з викладачем і студент є розумнішим за викладача (а), а також коли викладач є розумнішим за студента (б)

Визначимо тепер характеристику особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$ і характер фазових траєкторій в її околі. Для цього нам потрібно, як і в попередньому випадку, лінеаризувати в околі цієї особливої точки праву частину рівнянь (2). Тож, розкладаючи у степеневий ряд в околі цієї особливої точки праві частини рівнянь системи (2) й беручи лише лінійні частини, матимемо:

$$\begin{aligned}&(-\alpha_{11} + \beta_{11})x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 = (-\alpha_{11} + \beta_{11})x_{1o} + \alpha_{12}x_{2o}x_{1o} + (-\alpha_{11} + \beta_{11} + \alpha_{12}x_{2o})(x_1 - x_{1o}) + \\ &+ \alpha_{12}x_{1o}(x_2 - x_{2o}), \\ &-\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 = -\alpha_{22}x_{2o} + \alpha_{21}x_{1o}x_{2o} + \alpha_{21}x_{2o}(x_1 - x_{1o}) + (-\alpha_{22} + \alpha_{21}x_{1o})(x_2 - x_{2o}).\end{aligned} \tag{34}$$

А з урахуванням того, що

$$x_{1o} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, x_{2o} = \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}}, \tag{35}$$

співвідношення (34) можна переписати й так:

$$\begin{aligned}&-\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 = \alpha_{12}\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}(x_2 - x_{2o}), \\ &-\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 = \alpha_{21}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}(x_1 - x_{1o}).\end{aligned} \tag{36}$$

Переходячи до системи координат z_1, z_2, за співвідношеннями (14), тобто переносячи початок системи координат в особливу точку $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}})$ і враховуючи співвідношення (36), лінеаризовану систему рівнянь для математичної моделі (2) в околі цієї особливої точки отримуємо в тому ж таки вигляді, що і в попередньому випадку, тобто у вигляді (15). А це означає, що і для цього випадку справедливими є всі викладки, починаючи з матриці (16) і аж до співвідношень для фазових координат (32), (33).

А тому аналогічними до попередніх для цього випадку будуть і всі висновки щодо характеристики особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{12}})$ та характеру фазових траєкторій в її околі, тобто й у цьому випадку справедливим є рис.1б.

«Зшиваючи» фазові траєкторії, наведені на рис. 3а та рис. 1б, отримаємо фазовий портрет процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну за допомогою викладача і коли він є розумнішим за викладача (рис. 4а), а «зшиваючи» фазові траєкторії, наведені на рис. 3б та рис. 1б, отримаємо фазовий портрет аналогічного процесу, коли викладач є розумнішим за студента (рис. 4б).

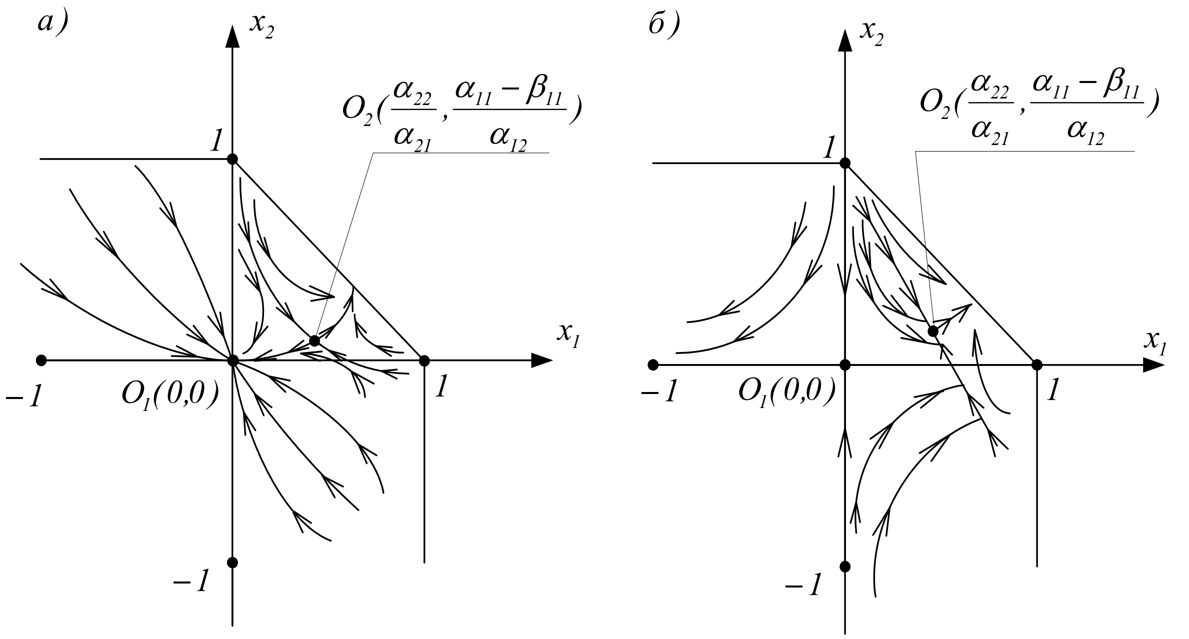

Рис. 4. Фазові портрети процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну за допомогою викладача і студент є розумнішим за викладача (а), а також коли викладач є розумнішим за студента (б)

Перейдемо до аналізу на фазовій площині процесу засвоєння програми навчальної дисципліни здібним студентом на часовому напівінтервалі $[t_2^{(k)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, працюючи самостійно.

Особливими точками процесу в цьому випадку, як показано в роботі [2], будуть точки фазової площини $O_1(0,0)$ та $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$, що лежать у допустимій області (5).

Характеристику особливої точки $O_1(0,0)$ і характер фазових траєкторій в її околі ми визначили в роботі [3]: вони мають вигляд, наведений на рис. 5а для випадку, коли студент є «розумнішим» за навчальний посібник ($\beta_{22} < \alpha_{22}$) та на рис. 5б для випадку, коли навчальний посібник є «розумнішим» за студента ($\beta_{22} > \alpha_{22}$).

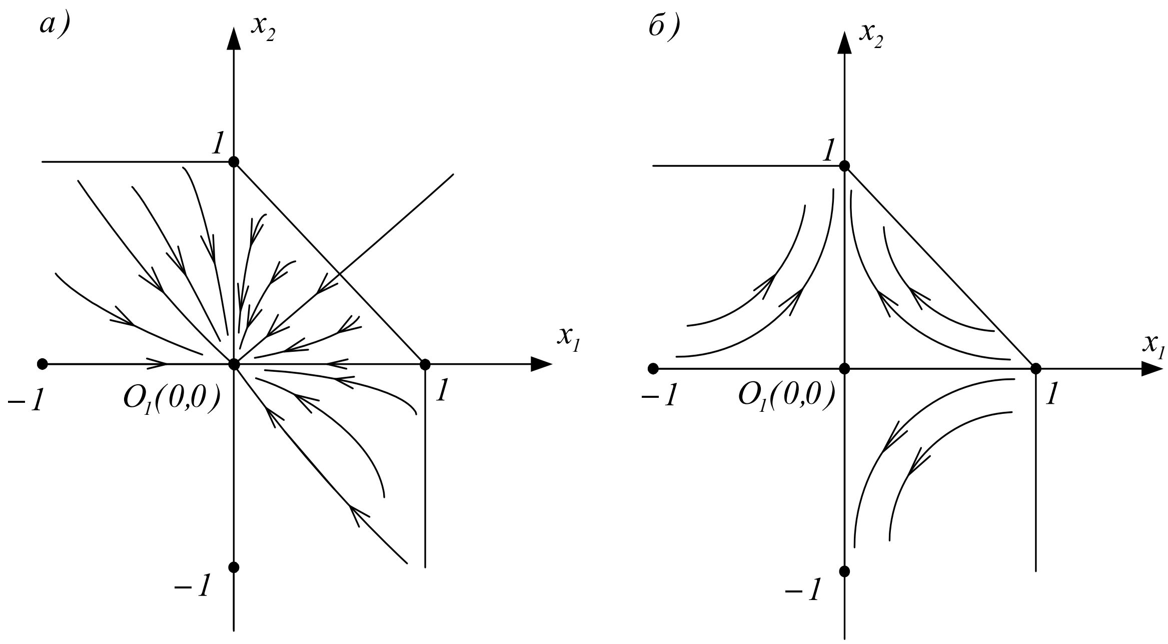

Рис. 5. Фазові траєкторії процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни в околі особливої точки $O_1(0,0)$ на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну самостійно і студент є «розумнішим» за навчальний посібник (а), а також коли навчальний посібник є «розумнішим» за студента (б)

Визначимо тепер характеристику особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ і характер фазових траєкторій в її околі. Для цього нам потрібно, як і в попередніх випадках, лінеаризувати в околі цієї особливої точки праву частину рівнянь (3). Тож, розкладаючи у степеневий ряд в околі цієї особливої точки праві частини рівнянь системи (3) й беручи лише лінійні частини, матимемо:

$$\begin{aligned}
&-\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2x_1=-\alpha_{11}x_{1o}+\alpha_{12}x_{2o}x_{1o}+(-\alpha_{11}+\alpha_{12}x_{2o})(x_1-x_{1o})+\\
&+\alpha_{12}x_{1o}(x_2-x_{2o}),\\
&(-\alpha_{22}+\beta_{22})x_2+\alpha_{21}x_1x_2=(-\alpha_{22}+\beta_{22})x_{2o}+\alpha_{21}x_{1o}x_{2o}+\alpha_{21}x_{2o}(x_1-x_{1o})+\\
&+(-\alpha_{22}+\beta_{22}+\alpha_{21}x_{1o})(x_2-x_{2o}).
\end{aligned} \tag{37}$$

А з урахуванням того, що

$$x_{1o}=\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},x_{2o}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \tag{38}$$

співвідношення (37) можна переписати й так:

$$\begin{aligned}
&-\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2x_1=\alpha_{12}\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}}(x_2-x_{2o}),\\
&-\alpha_{22}x_2+\alpha_{21}x_1x_2=\alpha_{21}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}(x_1-x_{1o}).
\end{aligned} \tag{39}$$

Переходячи до системи координат z_1, z_2, за співвідношеннями (14), тобто, переносячи початок системи координат в особливу точку $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ і враховуючи співвідношення (39), лінеаризовану систему рівнянь для математичної моделі (3) в околі цієї особливої точки отримуємо в тому ж таки вигляді, що і в попередніх випадках, тобто у вигляді (15), з тією лише різницею, що в першому рівнянні замість коефіцієнта α_{22} стоїть коефіцієнт $\alpha_{22}-\beta_{22}$. А це означає, що і для цього випадку справедливими є всі викладки, починаючи з матриці (16) і аж до співвідношень для фазових координат (32), (33), у яких замість коефіцієнта α_{22} поставлено коефіцієнт $\alpha_{22}-\beta_{22}$.

Але завдяки цій зміні, значення вказаних коефіцієнтів є аналогічними до попередніх для цього випадку будуть лише ті висновки щодо характеристики особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ та характеру фазових траєкторій в її околі, які стосуються лише студента «розумнішого» за навчальний посібник. Саме у цьому випадку фазові траєкторії в околі вказаної особливої точки матимуть той самий характер, що й на рис. 1б, який з новими координатами особливої точки для зручності продублюємо на рис. 6а.

Що ж до випадку, коли навчальний посібник є «розумнішим» за студента, то в цьому разі замість співвідношень (19) матимемо

$$\lambda_1=\sqrt{\alpha_{11}(\alpha_{22}-\beta_{22})},\qquad \lambda_2=-\sqrt{\alpha_{11}(\alpha_{22}-\beta_{22})},\tag{40}$$

які при $\beta_{22}>\alpha_{22}$ задаватимуть комплексно-спряжені числа. А замість рівняння (22) матимемо рівняння

$$z_2^2=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}-\beta_{22}}z_1^2+2C,\tag{41}$$

яке при $\beta_{22}>\alpha_{22}$ задаватиме вже не гіперболу, а еліпс з великою віссю на осі z_1 та з напрямом руху точки по фазовій траєкторії «зліва-направо» в нижній частині і «справа-наліво» у верхній (рис. 6б). А сама особлива точка $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ у цьому випадку перетворюється із «сідла» на «центр».

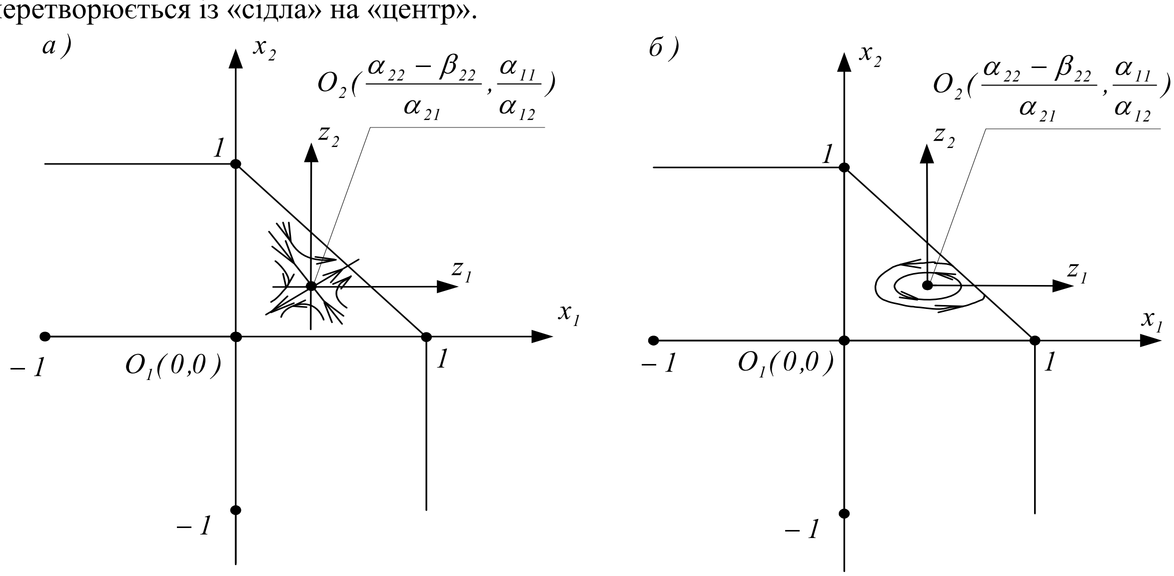

Рис. 6. Фазові траєкторії процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни в околі особливої точки $O_2(\frac{\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{21}},\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}})$ на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну самостійно і студент є «розумнішим» за навчальний посібник (а), а також коли навчальний посібник є «розумнішим» за студента (б)

«Зшиваючи» фазові траєкторії, наведені на рис. 5а та рис. 6а, отримаємо фазовий портрет процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну самостійно і коли він є «розумнішим» за навчальний посібник (рис. 7а). А «зшиваючи» фазові траєкторії, наведені на рис. 5б та рис. 6б, отримаємо фазовий портрет аналогічного процесу, коли навчальний посібник є «розумнішим» за студента (рис. 7б).

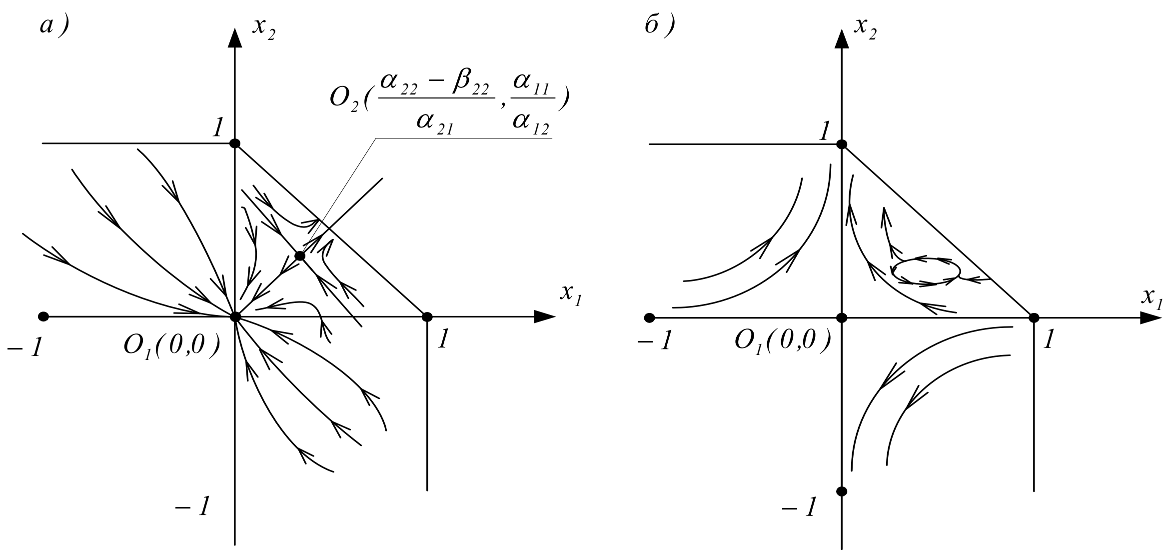

Рис. 7. Фазові портрети процесу засвоєння здібним студентом програми навчальної дисципліни на відрізку часу, коли студент вивчає дисципліну самостійно і студент є «розумнішим» за навчальний посібник (а), а також коли навчальний посібник є «розумнішим» за студента (б)

Висновки

1. Фазові портрети процесу засвоєння програми навчальної дисципліни здібними студентами суттєво відрізняються від фазових портретів аналогічного процесу для студентів середніх здібностей.

2. На фазових портретах процесу засвоєння програми навчальної дисципліни здібними студентами виявлено область «геніальності», потрапляючи в яку фазова точка досягає границі області знань навіть у випадках, коли студент перестає вивчати дисципліну і з викладачем, і самостійно.

3. Показано, що область «геніальності» формується за рахунок синергетичного ефекту на підсвідомому рівні, який властивий лише найздібнішим студентам і дозволяє їм самим генерувати ті знання, яких вони недовчили з викладачем чи з навчальним посібником.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін Б. І. Математичні моделі процесу засвоєння студентом навчальної дисципліни на фазовій площині / Б. І. Мокін, А. В. Писклярова, Ю. В. Мокіна // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 5. – С. 109 – 112.

2. Мокін Б. І. Дослідження характеру особливих точок на фазовій площині процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни / Б. І. Мокін, А. В. Писклярова, Ю. В. Мокіна // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 6. С. 108 – 113.

3. Мокін Б. І. Дослідження на фазовій площині процесу засвоєння програми навчальної дисципліни студентом середніх здібностей / Б. І. Мокін, А. В. Писклярова, Ю. В. Мокіна // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2010. – № 3. С. 40 – 49.

4. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – Киев: Высшая школа. – 1984. – 408 с.

5. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Москва: Наука. – 1967. – 608 с.

Мокін Борис Іванович – д. т. н., професор, академік НАПНУ, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів;

Писклярова Анна Валеріївна – к. т. н., проректор з науково-педагогічної роботи по організації виховного процесу;

Мокіна Юлія Вікторівна – к. е. н., доцент кафедри менеджменту та моделювання в економіці.
Вінницький національний технічний університет.