УДК 512 + 513 + 517

В. А. Касимов, к. фіз.-мат. н., доц.

ПРО КВАЗІПЕРІОДИЧНЕ РІЗНОМАНІТТЯ І КАТЕГОРІЇ

Визначено відношення бордантності квазиперіодичних різноманіть таким чином, щоб інваріант бордизмів типу сигнатури набував нетривіальних числових значень. Побудовано категорії, пов'язані з асимптотичними поданнями груп.

Ключові слова: *квазіперіодичний, орієнтований, різноманіття, бордизм, диференційна форма, функція Морса, подрібнення, укрупнення, сигнатура, асимптотичне подання.*

Вивчення геометричних об'єктів шляхом алгебраїчних методів призвело до появи нових поглядів і теорій як у геометрії, так і в алгебрі. Як відомо, алгебра функцій різноманіття містить достатньо повну інформацію про це різноманіття. У роботі [4] для вивчення різноманіть запропоновано в деякому сенсі зворотний підхід до цього питання, саме: не різноманіттям зіставляти алгебри, а, навпаки, алгебрами зіставляти різноманіття, алгебри функцій яких ізоморфні вихідним алгебрам. Поняття квазіперіодичного орієнтованого різноманіття узагальнює поняття періодичного орієнтованого різноманіття, яке є універсальним покриттям компактного орієнтованого різноманіття, фундаментальна група якого ізоморфна нескінченній циклічній групі $\mathbf{Z}$. Ця робота складається з двох частин. У першій частині визначено відношення бордантності квазіперіодичних різноманіть таким чином, щоб інваріант бордизмів типу сигнатури набував нетривіальних числових значень. Другу частину роботи присвячено побудові категорій, пов'язаних з асимптотичними поданнями групи.

Інтерес до квазіперіодичних різноманіть зумовлений тим, що такі різноманіття використовують у різних завданнях топології і геометрії. Так, наприклад, структура квазіперіодичних різноманіть виникає під час розгляду поверхні рівня багатозначних функцій Морса, що задаються морсовськими диференціальними формами з несумірними періодами [1], [2], [3].

Основні визначення

Періодичне різноманіття можна охарактеризувати як таке відкрите різноманіття W_∞, яке подано у вигляді об'єднання зліченої кількості копій $\mathrm{W}_k, -\infty < k < \infty$, компактного орієнтованого різноманіття $\mathrm{V}, \varphi_k\colon \mathrm{W}_k \to \mathrm{V}$, межа якого складається з неперетинних двох примірників різноманіття M з протилежними орієнтаціями: $\partial \mathrm{V} = M_+ \sqcup M_-$. Отже, $\partial \mathrm{W}_k = M_k^- \sqcup M_k^+$, а об'єднання $\mathrm{W}_\infty = \bigcup\limits_k \mathrm{W}_k$ полягає в ототожненні точок межі $M_k^+ \cong M_{k+1}^-$. Зрозуміло, на різноманітті W_∞ вільно діє нескінченна група $\mathbf{Z}$ шляхом зсуву точок з одного доданку на інший, $a(x) = \varphi_{k+1}^{-1}\varphi_k(x),\ x \in \mathrm{W}_\mathrm{k},\ a \in \mathbf{Z}$ елемент, що утворює. Чинник різноманіття під дією групи дифеоморфний до різноманіття V після ототожнення його точок на межі в силу ототожнення $M^+ \cong M^-$.

Іншими словами, періодичне (орієнтовне) різноманіття або, точніше, періодична структура на різноманітті характеризується таким набором даних:

– *відкритим (орієнтовним) різноманіттям* W_∞;

– *розбиттям* W_∞ *на підрізноманіття*

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k; \tag{1}$$

– системою гомоморфізмів (дифеоморфізмів)

$$\varphi_k : \mathrm{W}_k \to \mathrm{V}, \tag{2}$$

де V – орієнтоване компактне різноманіття з межею, тобто різноманіття W_k моделюються деяким (одним) різноманіттям V;

– умовами на покриття (1):

$$\partial\,\mathrm{W}_k = (\mathrm{W}_{k-1} \cap \mathrm{W}_k) \sqcup (\mathrm{W}_k \cap \mathrm{W}_{k+1}) = M_k^- \sqcup M_k^+, \tag{3}$$

$$\mathrm{W}_k \cap \mathrm{W}_{k+1} = \partial\,\mathrm{W}_k \cap \partial\,\mathrm{W}_{k+1} = M_k^+ = M_{k+1}^-. \tag{4}$$

Набір даних (1), (2), (3), (4) індукує вільну дію нескінченної циклічної групи $\mathbf{Z}$ на різноманітті W_∞, перетворюючи його на тотальний простір покриття над компактним різноманіттям.

Структура квазіперіодичного різноманіття на W_∞ відрізняється від структури періодичного різноманіття тільки тим, що гомеоморфізми (2) замінюються на гомеоморфізми

$$\varphi_k : \mathrm{W}_k \to \mathrm{V}_\alpha\ ,\ \alpha = \alpha(k), \tag{5}$$

де індекс $\alpha \in A$ пробігає деяку кінцеву множину, тобто різноманіття W_k моделюється кількома різноманіттями V_α, причому функція $\alpha = \alpha(k)$ не є постійною ні на якому інтервалі $(-\infty, k]$ або $[k, \infty)$. Решта умов (1), (3), (4) під час визначення структури квазіперіодичного різноманіття зберігаються.

Розглянемо, наприклад, компактне різноманіття X з фундаментальної групи $\pi_1(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Нехай $\omega \in \Omega_1(X)$ – замкнена морсовська форма на різноманітті X. Нехай $p : \widetilde{X} \to X$ – універсальне покриття, $\widetilde{\omega} = p^*(\omega), f$ – функція Морса на покритті $\widetilde{X}, df = \widetilde{\omega}$. Розглянемо неособливе значення c функції f і поверхню рівня $\mathrm{W}_\infty = \{f = c\}$. Нехай $a, b \in \pi_1(X)$ – твірні фундаментальної групи, а періоди

$$\lambda_1 = \int_a \omega \quad \lambda_2 = \int_b \omega$$

– несумірні. Отже, вони, принаймні, не дорівнюють нулю. Нехай $Y \subset X$ – підрізноманіття корозмірності 1 – двоїсте, скажімо, елементу $a \in H_1(X; \mathbf{Z})$. Без обмеження загальності можна припустити, що різноманіття W_∞ і $p^{-1}(Y)$ перетинаються трансверсально, а обмеження функції f на підрізноманітті $p^{-1}(Y)$ є функцією Морса. Тоді підрізноманіття $p^{-1}(Y)$ розбиває різноманіття W_∞ на компоненти, що утворюють структуру квазіперіодичного різноманіття.

Структура квазіперіодичного різноманіття може бути піддана двом природним операціям: *подрібненню і укрупненню.*

Подрібнення полягає в тому, що різноманіття V_α, у свою чергу, можуть бути подані у вигляді кінцевого розбиття типу (1), (5), (3), (4), що дозволяє отримати більш дрібне розбиття різноманіття W_∞.

Укрупнення полягає в тому, що за заданої строго монотонної послідовності n_k з умовою, що $n_{k+1} - n_k < Const$, як розбиття беруться різноманіття $W_k' = W_{[n_k \ldots n_{k+1}-1]}$.

Нехай F – лівоінваріантний нормалізований функціонал на просторі $L^{\infty}(\mathbf{Z})$ обмежених функцій на вільній циклічній групі $\boldsymbol{Z}$. Розглянемо функцію $s(m)$, $m \in \mathbf{Z}$, що задана формулою

$$s(m) = \frac{\mathrm{sign}X_{[k_{n+1} \cdots l_{n+1}]} - \mathrm{sign}X_{[k_n \cdots l_n]}}{l_{n+1} - k_{n+1} - l_n + k_n - 2} \quad , k_{n+1} \le m \le k_n \text{ Або } k_n \le m \le k_{n+1} .$$

Теорема 1. *Функція $s(m)$ обмежена, тобто $s \in L^{\infty}(\mathbf{Z})$ і значення функціоналу*

$$sign(W_{\infty}) = F(s)$$

не залежить від вибору підпослідовностей k_n, l_n.

Теорема 1 потребує додаткового дослідження інваріантності зазначеного в теоремі значення $\mathrm{sign}(\mathrm{W}_{\infty})$ щодо деякого відношення бордантності квазіперіодичних різноманіть. Нехай задано квазіперіодичне (орієнтоване) різноманіття W_{∞}, тобто задано структуру квазіперіодичного різноманіття у вигляді розбиття (1), що задовольняє умови (5), (3), (4). Скажімо, що різноманіття W_{∞} *бордантне нулю,* якщо воно є межею іншого (орієнтованого) різноманіття P_{∞}, яке допускає розбиття у вигляді об'єднання

$$\mathrm{P}_{\infty} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}_k ,$$

гомеоморфізми

$$\psi_k : P_k \to Q_{\alpha} \ , \ \alpha = \alpha(k),$$

які задовольняють умови

$$\partial P_k = (P_{k-1} \cap P_k \sqcup \mathrm{W}_k \sqcup (P_k \cap P_{k+1}) = N_k^- \sqcup \mathrm{W}_k \sqcup N_k^+ ,$$

$$P_k \cap P_{k+1} = \partial P_k \cap \partial P_{k+1} = N_k^+ = N_{k+1}^- \ ,$$

$$\partial N_k^+ = M_k^+ = M_{k+1}^- = \partial N_{k+1}^- \ .$$

Орієнтації всіх різноманіть повинні бути узгоджені за звичайними правилами.

Умови (3), (4), (5) визначають на різноманітті W_{∞} структуру так званого квазіперіодичного різноманіття. Можна визначити відповідне відношення еквівалентності таких структур. Іншими словами, визначивши клас так званих квазіперіодичних відображень, дві структури квазіперіодичного різноманіття будемо вважати еквівалентними, якщо тотожне відображення з однієї структури в іншу є квазіперіодичним. Зокрема, розглянемо деяку квазіперіодичну структуру

$$W_{\infty} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k$$

і деяке її укрупнення

$$W_{\infty} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W'_k = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} W_{[n_k \ldots n_{k+1} - 1]}$$

з умовою

$$1 \le n_{k+1} - n_k \le \lambda = Const \ . \tag{6}$$

Умова (6) означає, що

$$k \le n_k \le \lambda k \ .$$

Отже, нехай задано два квазіперіодичних різноманіття W_{∞} і W'_{∞} зі структурою квазіперіодичних різноманіть, описаних умовами (1), (5), (3), (4). Відображення

$f : W_\infty \to W'_\infty$ називають *квазіперіодичним,* якщо існує послідовність n_k і константа λ, що задовольняють умови:

1. $1 \le n_{k+1} - n_k \le \lambda = Const$;
2. $f(W_k) \subset W'_{[n_k \ldots n_{k+1} + \lambda]}$;
3. *Відображення*

$$u_k = (\varphi_k \cup \varphi_{k+1}) \circ f \circ \varphi_k^{-1} : V_{\alpha(k)} \to \left(\bigcup_{j=n_k}^{n_{k+1}+\lambda} V'_{\alpha'(f)} \right)$$

набувають кінцеву кількість значень.

Теорема 2. *Тотожне відображення квазіперіодичної структури в її укрупнення є квазіперіодичним відображенням.*

Композиція квазіперіодичних відображень є квазіперіодичним відображенням.

Якщо квазіперіодичне відображення є дифеоморфізмом, то зворотне відображення теж є квазіперіодичним.

Теорема 2 вводить відношення еквівалентності на множині всіх квазіперіодичних структур. Виникає проблема опису множини класів еквівалентності квазіперіодичних структур. Ми висловлюємо гіпотезу, що на будь-якому квазіперіодичному різноманітті є тільки один клас еквівалентних квазіперіодичних структур. Підставою для такої гіпотези є таке міркування. Якщо різноманіття W_∞ розбито двома способами у квазіперіодичні структури

$$\mathrm{W}_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{W}_k = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{W}'_k ,$$

то кожне підрізноманіття W'_k лежить у кінцевому об'єднанні $\mathrm{W}'_k \subset \bigcup_{j=n_k}^{m(k)} W_j$. Суттєвим у нашій гіпотезі є міркування, що $m(k) - n(k)$ має бути обмежене деякою константою. В іншому випадку, із суто гомологічних міркувань різноманіття W'_k не можуть бути диферморфні один одному.

Категорії асимптотичних уявлень

Побудуємо дві категорії, пов'язані з асимптотичними поданнями. Першу з них будують таким чином. Нехай $A - C^* -$ алгебра з одиницею, G – топологічна (компактна) група. Позначимо через $a.R(G, A)$ клас усіх асимптотичних подань групи G у гільбертових $C^* - A$ модулях. Далі, M і L – гільбертові модулі над алгеброю A і задані $a.G$ подання $\Phi = \{\Phi_n : G \to GL(M)\}_{n \in N}$ та $\Psi = \{\Psi_n : G \to GL(L)\}_{n \in N}$ групи G в модулях M та L відповідно. Кожне $a.G$ подання Φ групи G в модулі M природно визначає в модулі M $a.G$ дію, а саме: сімейство $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in N}$, визначене за формулою $\varphi_n(g, m) = \Phi_n(g)(m)$, є $a.$ дією групи G в модулі M. Отже, (M, φ) є модулем. Так само визначається $a.G$ модуль (L, ψ). Позначимо через $a.Hom_A(M, L)$ клас усіх A-гомоморфізмів $f : M \to L$, які задовольняють умову С1 роботи [3]. Ці самі гомоморфізми називатимемо гомоморфізмами, які сплітають $a.$, подань Φ і Ψ і позначимо через $f : \Phi \to \Psi$. Множина всіх гомоморфізмів, які сплітають, подань Φ і Ψ позначимо через $mor(\Phi, \Psi)$. Отже,

$$mor(\Phi, \Psi) = a.Hom_A(M, L). \tag{7}$$

Легко перевірити справедливість таких властивостей.

Властивість 1. Сума гомоморфізмів, які сплітають, також є сплітальним гомоморфізмом, тобто якщо $f, g \in mor(\Phi, \Psi)$, то $f + g \in mor(\Phi, \Psi)$.

Властивість 2. Якщо $f : \Phi \to \Psi$ – гомоморфізм, який сплітає, $a \in A$, то af також є сплітальним гомоморфізмом.

Властивість 3. Гомоморфізми, які сплітають, утворюють підмодуль $mor_A(\Phi, \Psi)$ в A-модулі $Hom_A(M, L)$.

Множину всіх гомоморфізмів, які сплітають, подань групи G позначимо через $a.Mor(G)$. Пара класів ($a.R(A, G), a.MorG$) утворює категорію асимптотичних уявлень і сплітає гомоморфізм. Позначимо цю категорію через **a.R** $(A,G)_1$.

Друга категорія асимптотичних уявлень будується так. Клас об'єктів $a.R(A, G)$ не змінюється. Нехай $\Phi = \{\Phi_n : G \to GL(M)\}_{n \in N}$ і $\Psi = \{\Psi_n : G \to GL(L)\}_{n \in N}$ – два $a.G$ подання з $a.R(A, G)$. Родину $\alpha = \{\alpha_n : M \to L\}_{n \in N}$ A-гомоморфізмів назвемо асимптотично сплітальним **(**$a.$**-**сплітальним) гомоморфізмом, який сплітає $a.G$ подань Φ і Ψ, якщо виконується така умова:

$$\left\| \alpha_n \circ \Phi_n(g) - \Psi_n(g) \circ \alpha_n \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{8}$$

Якщо α є α-сплітальним гомоморфізмом α-подавань Φ і Ψ, то це позначимо через $\alpha : \Phi \sim \Psi$.

Пропозиція 1. Відношення асимптотичної сплітальності є рефлексивним і транзитивним.

Зіставляючи клас морфізмів кожної категорії з деяким групоїдом, ми можемо трактувати гомоморфізми групоїдів як функтори. Нехай $(\mathbf{G}, \mathbf{G}'; \varphi)$ і $(\mathbf{H}, \mathbf{H}'; \varphi)$ – групоїди, а $K_{\mathbf{G}}$ й $K_{\mathbf{H}}$ – відповідні категорії, а саме: відповідності $\mathsf{E}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \to MOR(K_{\mathbf{G}})$ та $\mathsf{E}_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \to MOR(K_{\mathbf{H}})$ зіставляють з групоїдами $(\mathbf{G}, \mathbf{G}'; \varphi)$ і $(\mathbf{H}, \mathbf{H}'; \varphi)$ класи морфізмів категорій $K_{\mathbf{G}}$ і $K_{\mathbf{H}}$ відповідно. Розглянемо контрваріантний функтор $F : K_{\mathbf{G}} \to K_{\mathbf{H}}$. Визначимо гомоморфізм $F^{\#} : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ таким чином: *якщо* $F(\mathbf{g}) = \mathbf{h}$, *то* $F^{\#}(g) = h$, *де* $\mathsf{E}_{\mathbf{G}} : (g) = \mathbf{g}$ *і* $\mathsf{E}_{\mathbf{G}} : (h) = \mathbf{h}$. Тоді для $\varphi(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) \in \mathbf{G}'$ маємо $F(\varphi(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)) = \psi(F(\mathbf{g}_1), \mathrm{F}(\mathbf{g}_1))$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса / С. П. Новиков // Успехи математических наук. – 1982. – Т. 37. – Вып. 5. – С. 3 – 49.

2. Алания Л. А. О топологической структуре поверхностей уровня морсовских 1-форм // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46 – Вып. 3. – С. 179 – 180.

3. Касимов В. А. О связях некоторых новых классов многообразий с теорией категорий / В. А. Касимов // Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана. – Баку. – 2009. – С. 171 – 172.

4. Кассель К. Квантовые группы / К. Кассель. М.: Фазис, 1999. – 666 с.

Касимов Вагіф Алі-Мухтар огли – к. фіз.-мат. н., доц., завідувач кафедри алгебри та геометрії; тел.: (99412) 510-33-64, 465-87-11, E-Mail: kavagif@mail.ru

Бакинський державний університет.