УДК 621.372.06

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Одокиенко Светлана, Костьян Наталья

Киевский национальный университет технологий и дизайна

Аннотация

В работе рассматриваются особенности методов решения обратной задачи динамики на основе непараметрических моделей в виде интегральных уравнений Вольтерра I рода. В частности, в работе рассматриваются методы решения задачи восстановления сигнала и задачи параметрической идентификации интегральных динамических моделей.

Abstract

The article analyzes the features of methods for solving the inverse problem of the dynamics based on non-parametric models in the form of Volterra integral equations of I kind. In particular, the article analyzes the methods for solving the problems of signal recovery and parametric identification of integrated the dynamic models.

Введение

При решении многих проблем физики и техники возникает необходимость в решении обратных задач. Исходя из общего назначения все обратные задачи, вне зависимости от рассматриваемого физического процесса или технической системы, можно разделить на три класса: обратные задачи, возникающие при диагностике и идентификации физических процессов; обратные задачи, возникающие при проектировании технических объектов; обратные задачи, возникающие при управлении процессами и объектами.

Постановка задачи

Целью данной работы является исследование особенностей применения интегральных моделей для решения обратных задач динамики. Основные задания исследования: определить область приложения интегральных уравнений относительно классов задач динамики и рассмотреть решение задач восстановления сигнала и идентификации объекта на основе интегральных моделей.

Задача восстановления сигнала

Одной из часто решаемых обратных задач является задача восстановления сигнала на входе динамического объекта. Для решения данного типа задач применяется как частотный метод, описанный в работе [1], так и метод решения на основе интегральных уравнений.

Отличительная особенность данного класса задач заключается в использовании, как традиционных численных методов, так и методов решения некорректных задач.

Если рассматривается задача интерпретации наблюдений, то связь между входным сигналом *y(s)*, поступившим в систему, и выходным сигналом *f(x)* описывается (для линейной системы) в виде уравнения Фредгольма I рода. Данной задаче применительно к динамической системе соответствует уравнение Вольтерра I рода

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \qquad x,s \in [a,b], \tag{1}$$

которое является частным случаем уравнения Фредгольма I рода.

Особенность задачи решения уравнений Вольтерра I рода состоит в том, что она является в определенном смысле промежуточной между задачами решения уравнений Вольтерра II рода и Фредгольма I рода. Если задача решения уравнения Вольтерра II рода является корректной и эффективно решается классическими методами (квадратур, итераций и др.), а задача решения уравнения Фредгольма I рода — некорректной в любых «разумных» функциональных пространствах и решается специальными методами (регуляризации, квазирешений и др.), то задача решения уравнения Вольтерра I рода может быть корректной и некорректной в зависимости от того, в каких пространствах она рассматривается и каким методом решается. Особенности уравнения Вольтерра I рода позволяют использовать для его решения как классические методы (например, метод квадратур), так и специальные методы регуляризации [2].

Одним из эффективных методов приближенного решения интегральных уравнений является метод квадратур, важным достоинством которого являются простота его реализации и высокая устойчивость вычислительных алгоритмов за счет регуляризирующих свойств метода, причем параметром регуляризации является шаг квадратуры.

При решении уравнений Вольтерра I рода с произвольным ядром время вычисления искомой функции $y(s_i)$ зависит от числа шагов дискретизации, что влияет на количество вычислительных операций. Данную трудность можно обойти, если регулярное ядро (например, степенного вида) интегрального уравнения (1) обладает свойством представимости в виде суммы произведений независимых функций, т.е. имеет вид: $K(x,s)=\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x)\beta_l(s)$, $(l=\overline{1,m})$, $m\in N$. С учетом этого уравнение (1) принимает вид

$$\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x)\int_a^x\beta_l(s)\varphi(s)ds = f(x). \qquad (2)$$

При решении уравнения (2) методом квадратур количество вычислений на каждом шаге остается неизменным. Поэтому при машинной реализации таких алгоритмов значительно сокращаются затраты времени на их решение и объем требуемой памяти ЭВМ.

Еще одним из путей преодоления трудностей, возникающих при решении интегральных уравнений Вольтерра I рода, является преобразование их к уравнениям Вольтерра II рода или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Это допустимо не всегда, но в некоторых случаях возможно и целесообразно. Учет особенностей уравнений Вольтерра в процедуре определения искомой функции при решении задачи восстановления сигнала проиллюстрировано на примерах в [3].

Задача идентификации объекта

Кроме рассмотренной выше задачи восстановления сигнала, к обратным задачам динамики относится также и задача идентификации объекта. Алгоритмы решения задачи идентификации не адаптированы к общему случаю и позволяют решать данную задачу только для отдельных видов моделей.

В рамках задачи идентификации исследуются модели с параметрами полиномиального вида и частный случай стационарного объекта, описываемого уравнением

$$\sum_{j=1}^{m} q_j \left[\int_0^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} y(s)ds - \sum_{k=0}^{m-j-1} c_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!} \right] = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t_j}{j!} - y(t),$$

где q_j – неизвестные, а c_j – известные постоянные величины, полученным на основе метода квадратур из модели нестационарного динамического объекта с сосредоточенными параметрами [4].

Суть квадратурного алгоритма расчета параметров интегральной модели состоит в том, что расчетные выражения в нем формируются на основе дискретизации интегралов при помощи квадратурных формул с отбрасыванием соответствующих остаточных членов. Учитывая тот факт, что значения входного и выходного сигналов заданы экспериментально с некоторыми погрешностями была получена система уравнений относительно приближенных значений компонент вектора $\tilde{q} = (\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_m)^T$. Примеры решения тестовых задач с применением данного метода приведены в работе [4].

Выводы

Интегральные уравнения Вольтерра I рода описывают задачу восстановления входных воздействий, поступающих на объект при известной его динамической характеристике и измеренном выходном сигнале. Особенности уравнений требуют целенаправленного выбора численных алгоритмов для решения. Исходя из компромисса между сложностью вычислительного процесса и точностью результатов, могут быть выбраны различные модификации метода квадратур. Достаточно эффективными при решении задач с „инженерной” точностью оказываются алгоритмы на основе формул прямоугольников и трапеций, причем в качестве регуляризирующего параметра может быть использована величина шага интегрирования. Но все же окончательный выбор квадратурной формулы должен производиться в зависимости от конкретных условий задачи, которые определяются свойствами ядра и характером искомого решения.

Предложенный метод решения задачи идентификации однозначно идентифицирует стационарные объекты с учетом погрешности входных и выходных сигналов. Результаты применения данного метода свидетельствуют о высокой устойчивости, эффективности по затратам машинного времени и объему вычислений, простоте реализации. Кроме того, в силу своей простоты алгоритм, реализующий данный метод, позволяет синтезировать высокопроизводительные вычислительные средства.

Список использованных источников:

1. Костьян Н.Л. Частотный способ восстановления сигнала на входе линейного динамического объекта Н.Л. Костьян, Б.С. Аскарходжаев, В.В. Понедилок / Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія технічні науки: зб. наук. праць. – Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. - 2012. - № 7. - С 88-94.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы. Алгоритмы. Программы: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 548 с.
3. Одокиенко С.Н. Особенности применения квадратурных алгоритмов численной реализации интегральных динамических моделей первого рода // Збірник наукових праць ІПМЕ. – Київ: ІПМЕ, 2008. - № 45. – С. 16-24.
4. Костьян Н.Л. Метод идентификации интегральных моделей линейных динамических объектов. “Віснику ЧДТУ”. Серія технічні науки: зб. наук. праць / Черкаський державний технологічний університет. – Черкаси : Черкаський державний технологічний університет. - 2013. - № 2. – С 84-89.