УДК 517.589

ЦЕНТРАЛЬНІ ФАКТОРІАЛЬНІ СТЕПЕНІ ТА ДЕЯКІ ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Гой Тарас

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Анотація

Запропоновані дві нові функції дійсної змінної, означені з використанням зростаючих факторіальних степенів. Встановлені деякі їхні властивості, зокрема, показаний зв'язок з узагальненими гіпергеометричними функціями. Виведені звичайні диференціальні рівняння, роз-в'язками яких є введені функції.

Abstract

We consider two new real-valued functions defined by central factorial powers. We find some of their basic properties. In particular, we established the relationship of these functions with the generalized hypergeometric functions. It is shown that constructed functions are solutions of ordinary differential equations derived in the paper.

Вступ

Математичні моделі багатьох природних і технічних процесів приводять до задач, точні розв'язки яких отримати класичними методами неможливо. Розширення "бібліотеки" неелементарних функцій приводить до необхідності розширення кола задач, які можуть бути розв'язані у замкненому вигляді. При цьому особлива увага приділяється дослідженню нових функцій з метою їх подальшого застосування до розв'язування теоретичних задач і задач практики.

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x,$ $\cos x$ задаються як степеневі ряди

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

які побудовані при допомозі спадних факторіальних степенів (факторіал $m!$ є водночас спадним факторіальним степенем). Замінивши у цих рядах спадні факторіальні степені відповідними центральними факторіальними степенями, у [2, 3] означені нові неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Expc}(x)$, $\mathrm{Sinc}(x)$, $\mathrm{Cosc}(x)$. Зокрема, у [3] встановлені деякі властивості цих функцій, виведені формули для їхнього аналітичного представлення та побудовані графіки. Також показано, що кожна з функцій $\mathrm{Sinc}(x)$, $\mathrm{Cosc}(x)$ є розв'язком задачі Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами.

У цій статті вивчаються дві нові неелементарні функції дійсної змінної типу гіперболічних функцій $\mathrm{Shc}(x) = \left(\mathrm{Expc}(x) - \mathrm{Expc}(-x)\right)/2$ і $\mathrm{Chc}(x) = \left(\mathrm{Expc}(x) + \mathrm{Expc}(-x)\right)/2$.

Факторіальні степені

Для довільних $x \in \mathbf{R}$ і $m \in \mathbf{N}$ ***факторіальним степенем*** m з кроком $k \in \mathbf{R}$ називають вираз

$$x^{m\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(m-1)k), & \text{якщо } m \neq 0, \\ 1, \quad \text{якщо } m = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь називають ***зростаючим***, якщо $k > 0$, і ***спадним***, якщо $k < 0$. У випадку $k = 0$ маємо звичайний степінь, тобто $x^{m\{0\}} = x^m$.

Зростаючий факторіальний степінь m з кроком 1 і спадний факторіальний степінь m з кроком (– 1) позначатимемо через $x^{\overline{m}}$ і $x^{\underline{m}}$ відповідно:

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1), \qquad x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Зростаючі та спадні факторіальні степені тісно пов'язані зі звичайною факторіальною функцією, адже $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Для довільних $x \in \mathbf{R}$ і $m \in \mathbf{N}$ ***центральним факторіальним степенем*** m з кроком $k > 0$ називають вираз

$$x^{m[k]} = \begin{cases} x\left(x + mk/2 - k\right)\left(x + mk/2 - 2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - mk/2 + k\right), & \text{якщо } m \neq 0, \\ 1, \quad \text{якщо } m = 0. \end{cases}$$

Центральний факторіальний степінь m з кроком 1 позначатимемо через $x^{[m]}$, тобто $x^{[m]} = x^{m[1]}$. Наприклад,

$$x^{[5]} = (x-3/2)(x-1/2)x(x+1/2)(x+3/2), \quad x^{[6]} = (x-2)(x-1)\,x^2\,(x+1)(x+2).$$

Функції $\mathrm{Expc}(x)$, $\mathrm{Sinc}(x)$, $\mathrm{Cosc}(x)$

Через $\mathrm{Expc}(x)$, $\mathrm{Sinc}(x)$, $\mathrm{Cosc}(x)$ позначимо функції дійсної змінної, визначені при допомозі відповідних степеневих рядів:

$$\mathrm{Expc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{[n]}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^3}{5/2\cdot 3\cdot 7/2} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5} + \ldots,$$

$$\mathrm{Sinc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{5/2\cdot 3\cdot 7/2} + \frac{x^5}{7/2\cdot 9/2\cdot 5\cdot 11/2\cdot 13/2} - \ldots,$$

$$\mathrm{Cosc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots.$$

Теорема 1. *Для всіх* $x \in (-\infty;\infty)$ *справджуються тотожності* [3]

$$\mathrm{Expc}(x) = 1 + x\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right) + \frac{x^2}{4}\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right),$$

$$\mathrm{Sinc}(x) = x\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27}\right), \qquad \mathrm{Cosc}(x) = 1 - \frac{x^2}{4}\cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27}\right),$$

де ${}_1F_2\left(a_1; b_1, b_2; z\right)$ *– узагальнена гіпергеометрична функція* [1], *тобто функція, визначена при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду* ${}_1F_2\left(a_1; b_1, b_2; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\, b_2^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!}$.

Функції $\mathrm{Shc}(x)$, $\mathrm{Chc}(x)$.

Позначимо через $\mathrm{Shc}(x)$, $\mathrm{Chc}(x)$ функції дійсної змінної, визначені за формулами

$$\mathrm{Shc}(x) = \frac{\mathrm{Expc}(x) - \mathrm{Expc}(-x)}{2}, \qquad \mathrm{Chc}(x) = \frac{\mathrm{Expc}(x) + \mathrm{Expc}(-x)}{2}.$$

Легко показати, що

$$\mathrm{Shc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = x + \frac{x^3}{5/2\cdot 3\cdot 7/2} + \frac{x^5}{7/2\cdot 9/2\cdot 5\cdot 11/2\cdot 13/2} + \ldots,$$

$$\mathrm{Chc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1 + \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots,$$

причому обидва ці ряди збігаються на всіх дійсних x.

Графіки функцій $y = \mathrm{Shc}(x)$ і $y = \mathrm{Chc}(x)$ наведені на рисунках 1, 2.

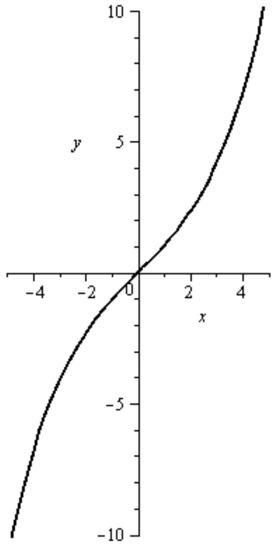

Рисунок 1 – Графік функцій $y = \mathrm{Shc}(x)$

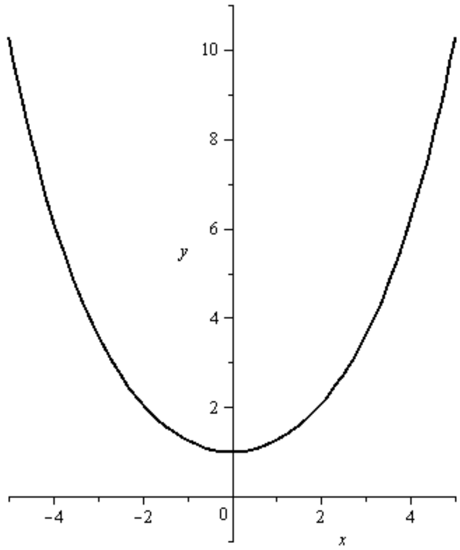

Рисунок 2 – Графік функцій $y = \mathrm{Chc}(x)$

Теорема 2. *Для всіх* $x \in (-\infty;\infty)$ *справджуються тотожності*

$$\mathrm{Shc}(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};\frac{x^2}{27}\right), \qquad \mathrm{Chc}(x) = 1 + \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};\frac{x^2}{27}\right).$$

Теорема 3. *Функції* $\mathrm{Shc}(x)$, $\mathrm{Chc}(x)$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші для лінійних диференціальних рівнянь третього порядку*:

$$27x^3y''' + 4x(6 - x^2)y' - 4(x^2 + 6)y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0;$$

$$27x^3y''' - 27x^2y'' + x(51 - 4x^2)y' - 48y = -48, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0{,}5.$$

Встановлені також деякі співвідношення між введеними функціями. Зокрема,

$$\mathrm{Chc}(ix) = \mathrm{Cosc}(x), \qquad \mathrm{Shc}(ix) = i\,\mathrm{Sinc}(x),$$

$$\mathrm{Chc}^2(x) - \mathrm{Shc}^2(x) = \mathrm{Expc}(ix) \cdot \mathrm{Expc}(-ix).$$

Висновки

У статті досліджені деякі властивості двох нових неелементарних функцій дійсної змінної $\mathrm{Shc}(x)$, $\mathrm{Chc}(x)$, які побудовані у вигляді степеневих рядів з використанням зростаючих факторіальних степенів, за аналогією із степеневими розвиненнями гіперболічних функцій $\mathrm{sh}\, x$ і $\mathrm{ch}\, x$.

Встановлені деякі властивості цих функцій $\mathrm{Shc}(x)$, $\mathrm{Chc}(x)$, побудовані їхні графіки. Показано, що вони є розв'язками лінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку з многочленними коефіцієнтами.

Список використаних джерел:

1. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – 294 с.

2. Гой Т. П. Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями / Т. П. Гой // КММК – 2013: тези Кримської міжнар. матем. конф. Том 2. – Сімферополь : Вид-во КНЦ НАНУ, 2013. – С. 4–5.

3. Гой Т. П. Функції, породжені центральними факторіальними степенями, та їхні властивості / Т. П. Гой, О. В. Шевчук // Інформатика та системні науки (ІСН – 2014): матер. V Всеукр. наук.-практ. конф. – Полтава : ПУЕТ, 2014. – С. 67–70.