УДК 517.2

О. Б. Мокін, д. т. н., проф.; В. Б. Мокін, д. т. н., проф.;
Б. І. Мокін, акад. НАПН України, д. т. н., проф.

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ АВТОРЕГРЕСІЇ-КОВЗНОГО СЕРЕДНЬОГО АРКС(P,Q) З ДОВІЛЬНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ПОРЯДКІВ P, Q, ЯКИЙ УЗАГАЛЬНЮЄ МЕТОДИКУ ЮЛА – УОКЕРА

Запропоновано метод ідентифікації моделі авторегресії-ковзного середнього АРКС(p,q) з довільними значеннями порядків p,q, який методику Юла – Уокера, розроблену для ідентифікації моделі авторегресії АР(p), узагальнює на випадок, коли авторегресійний складник моделі АР(p) доповнюється складником ковзного середнього КС(q). Алгоритм запропонованого методу містить у собі як систему лінійних рівнянь типу Юла – Уокера для визначення p параметрів авторегресії, так і додаткові нелінійні рівняння для ідентифікації q параметрів ковзного середнього. Роботу алгоритму продемонстровано на прикладі p = 3, q = 3.

Ключові слова: *часові ряди, модель авторегресії-ковзного середнього, методика Юла – Уокера, нелінійне доповнення методики Юла – Уокера.*

Постановка задачі і вихідні передумови

Як відомо [1, 2], ідентифікувати модель АР(p), яка має вигляд

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \ldots + \varphi_p z_{t-p} + a_t, \tag{1}$$

де z_t – центроване значення часового ряду у момент часу t, a_t – імпульс білого шуму з дисперсією σ_a^2, згенерований в той же момент часу t, можна, застосовуючи методику Юла – Уокера, згідно з якою числові значення коефіцієнтів регресії φ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ знаходять із матричного рівняння

$$\varphi = M^{-1}\rho, \tag{2}$$

у якому матриця M^{-1} є оберненою до матриці M, а матриці φ, M, ρ мають вигляд:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \ldots \\ \varphi_p \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1\ \rho_1\ \rho_2\ \rho_3 \cdots \rho_{p-1} \\ \rho_1\ 1\ \rho_1\ \rho_2 \cdots \rho_{p-2} \\ \rho_2\ \rho_1\ 1\ \rho_1 \cdots \rho_{p-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{p-1}\rho_{p-2}\rho_{p-3}\ldots 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \ldots \\ \rho_p \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Нагадаємо, що в матрицях (3) ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ – це автокореляції центрованого часового ряду z_t, які розраховують за виразом

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}, i = 1,2,\ldots,p, \tag{4}$$

у якому γ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ – автоковаріації, що розраховують для центрованого часового ряду z_t за виразом

$$\gamma_i = \frac{1}{N-i}\sum_{t=1}^{N-i} z_t z_{t+i}, \; i = 1, 2, \ldots, p \tag{5}$$

та використовують, окрім розв'язання матричного рівняння (2), і для обчислення дисперсії σ_a^2 білого шуму a_t за виразом

$$\sigma_a^2 = \gamma_0 - \varphi_1\gamma_1 - \varphi_2\gamma_2 - \ldots - \varphi_p\gamma_p, \tag{6}$$

у який також підставляють результати розв'язання матричного рівняння (2).

Вирази (1) – (6) задають вихідні передумови для поставленої нами задачі побудови методу ідентифікації моделі авторегресії-ковзного середнього АРКС(p,q) з довільними значеннями порядків p, q, структура якої для центрованого часового ряду z_t має вигляд

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \ldots + \varphi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}, \tag{7}$$

шляхом подальшого розвитку методики Юла – Уокера.

До цих шести передумов необхідно додати ще одну – сьому передумову, яка зумовлена відсутністю кореляції між сусідніми імпульсами білого шуму й може бути задана відомими виразами [1, 2]:

$$\operatorname{cov}(z_t a_{t-i}) = \begin{cases} \sigma_a^2, \, для \, (i = 0), \\ 0, \, для \, (i \neq 0). \end{cases} \tag{8}$$

$$\operatorname{cov}(z_{t-k} a_{t-i}) = \begin{cases} \sigma_a^2, \, для \, (i = k), \\ 0, \, для \, (i \neq k). \end{cases} \tag{9}$$

Завершуючи вступ, аби підкреслити нетривіальність запропонованого нами методу ідентифікації моделі АРКС (p,q) за довільних значень порядків p, q наведемо цитату зі сторінки 97 монографії Бокса і Дженкінса [3]: «Як у випадку фіксованого σ_a^2, так і у випадку фіксованого σ_γ^2 (однакового за визначенням γ_0 – авторська ремарка) оптимальний вибір призводить до деяких випадкових процесів, параметри яких є функціями невідомих динамічних параметрів. Тому ми опиняємося в добре відомій парадоксальній ситуації, коли можна зібрати кращі дані тільки за умови, що вже щось відомо про відповідь, яку шукають. Послідовний похід, за якого ми покращуємо режим відповідно до отримання нових відомостей про параметри, відкриває можливості, які потребують подальшого вивчення».

Розв'язання поставленої задачі

На першому етапі побудови методу ідентифікації моделі АРКС(p,q) та його алгоритму в моделі (7) конкретизуємо значення параметрів на такому рівні, на якому вже можна буде робити узагальнення, але які ще не призводять до занадто громіздких математичних виразів. Очевидно, якщо задати p = 1, q = 1 або p = 2, q = 2, що є характерним для роботи [1], то отриманої інформації для узагальнення буде недостатньо, тому нехай p = 3 і q = 3. Тоді із виразу (7) для АРКС(3,3) матимемо:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varphi_3 z_{t-3} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3}. \tag{10}$$

Домножуючи обидві частини рівняння (10) по черзі на $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, z_{t-4}, z_{t-5}, z_{t-6}$, усереднюючи отримані добутки за виразом для автоковаріації (5) і враховуючи умови (8), (9), отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}\gamma_0=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_2+\varphi_3\gamma_3+\sigma_a^2-\theta_1(\varphi_1-\theta_1)\sigma_a^2-\theta_2(\varphi_2-\theta_2)\sigma_a^2-\theta_3(\varphi_3-\theta_3)\sigma_a^2,\\ \gamma_1=\varphi_1\gamma_0+\varphi_2\gamma_1+\varphi_3\gamma_2-\theta_1\sigma_a^2-\theta_2(\varphi_1-\theta_1)\sigma_a^2-\theta_3(\varphi_2-\theta_2)\sigma_a^2,\\ \gamma_2=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_0+\varphi_3\gamma_1-\theta_2\sigma_a^2-\theta_3(\varphi_1-\theta_1)\sigma_a^2,\\ \gamma_3=\varphi_1\gamma_2+\varphi_2\gamma_1+\varphi_3\gamma_0-\theta_3\sigma_a^2,\\ \gamma_4=\varphi_1\gamma_3+\varphi_2\gamma_2+\varphi_3\gamma_1,\\ \gamma_5=\varphi_1\gamma_4+\varphi_2\gamma_3+\varphi_3\gamma_2,\\ \gamma_6=\varphi_1\gamma_5+\varphi_2\gamma_4+\varphi_3\gamma_3.\end{cases} \tag{11}$$

Аналізуючи отриману систему рівнянь (11), бачимо, що з її перших чотирьох рівнянь, застосовуючи до них методику Юла – Уокера, легко можна знайти всі три параметри авторегресії. Очевидно, що в цьому випадку матриці, що використовуються в методиці Юла – Уокера, матимуть вигляд:

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},\quad M_\gamma=\begin{bmatrix}\gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1\\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3\end{bmatrix},\quad \gamma=\begin{bmatrix}\gamma_4\\ \gamma_5\\ \gamma_6\end{bmatrix}, \tag{12}$$

а аналогом матричного розв’язку (2) буде матричний вираз

$$\varphi=M_\gamma^{-1}\gamma\,, \tag{13}$$

у якому M_γ^{-1} – матриця, обернена до матриці M_γ, заданої виразом (12).

А далі діятимемо так. Для кожного з перших чотирьох рівнянь системи (11) знайдемо числові значення алгебраїчної суми складових, позначимо їх A, B, C, D, використовуючи такі вирази:

$$\gamma_0-\varphi_1\gamma_1-\varphi_2\gamma_2-\varphi_3\gamma_3=A, \tag{14}$$

$$\gamma_1-\varphi_1\gamma_0-\varphi_2\gamma_1-\varphi_3\gamma_2=B, \tag{15}$$

$$\gamma_2-\varphi_1\gamma_1-\varphi_2\gamma_0-\varphi_3\gamma_1=C, \tag{16}$$

$$\gamma_3-\varphi_1\gamma_2-\varphi_2\gamma_1-\varphi_3\gamma_0=D\,. \tag{17}$$

Підставляючи вираз (17) у четверте рівняння системи (11), знайдемо, що

$$\sigma_a^2=-\frac{D}{\theta_3}, \tag{18}$$

а підставляючи вирази (14) – (16) і вираз (18) у перші три рівняння системи (11), матимемо нову систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases}A\theta_3=D(-1+\theta_1(\varphi_1-\theta_1)+\theta_2(\varphi_2-\theta_2)+\theta_3(\varphi_3-\theta_3)),\\ B\theta_3=D(\theta_1+\theta_2(\varphi_1-\theta_1)+\theta_3(\varphi_2-\theta_2)),\\ C\theta_3=D(\theta_2+\theta_3(\varphi_1-\theta_1)),\end{cases} \tag{19}$$

із третього рівняння якої знайдемо, що

$$\theta_3=\frac{D\theta_2}{C-D(\varphi_1-\theta_1)}. \tag{20}$$

Підставляючи вираз (20) у перші два рівняння системи (19) та спрощуючи, отримаємо нову систему двох рівнянь із двома невідомими θ_1, θ_2, яка матиме вигляд:

$$\begin{cases} f_1(\theta_1, \theta_2) = 0, \\ f_2(\theta_1, \theta_2) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

у якій:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_1, \theta_2) = A\theta_2(C - D(\varphi_1 - \theta_1)) - (C - D(\varphi_1 - \theta_1))^2(-1 + \theta_1(\varphi_1 - \theta_1) + \theta_2(\varphi_2 - \theta_2)) - \\ - D\theta_2(\varphi_3(C - D(\varphi_1 - \theta_1)) - D\theta_2), \end{aligned} \tag{22}$$

$$f_2(\theta_1, \theta_2) = B\theta_2 - (C - D(\varphi_1 - \theta_1))(\theta_1 + \theta_2(\varphi_1 - \theta_1)) - D\theta_2(\varphi_2 - \theta_2). \tag{23}$$

Отже, другим етапом запропонованого методу ідентифікації буде визначення числових значень θ_1^*, θ_2^* параметрів θ_1, θ_2 ковзного середнього моделі.

Оскільки рівняння, що входять у систему (21), є нелінійними, то для розв'язання цієї системи нелінійних рівнянь застосуємо один із наближених методів. Якщо, наприклад, для розв'язання цієї системи ми застосуємо метод Ньютона [4], то, знаючи *n*-наближення параметрів θ_1, θ_2, їхнє (*n+1*)-наближення знайдемо за допомогою рекурентних виразів:

$$\theta_{1(n+1)} = \theta_{1(n)} + \frac{\Delta f_{\theta_2(n)}}{\Delta f_{\theta_1\theta_2(n)}}, \quad \theta_{2(n+1)} = \theta_{2(n)} + \frac{\Delta f_{\theta_1(n)}}{\Delta f_{\theta_1\theta_2(n)}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{24}$$

у яких:

$$\Delta f_{\theta_1\theta_2(n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}\theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \end{vmatrix}, \tag{25}$$

$$\Delta f_{\theta_2(n)} = \begin{vmatrix} -f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) & \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \\ -f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) & \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}\theta_{2(n)})}{\partial \theta_2} \end{vmatrix}, \; \Delta f_{\theta_1(n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & -f_1(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\ \dfrac{\partial f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)})}{\partial \theta_1} & -f_2(\theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Ітераційний процес зупиняємо після того, як відносна похибка чергового наближення стане меншою її заданого апріорі значення δ, тобто коли

$$\left| \frac{\theta_{1(n+1)} - \theta_{1(n)}}{\theta_{1(n)}} \right| \le \delta, \qquad \left| \frac{\theta_{2(n+1)} - \theta_{2(n)}}{\theta_{2(n)}} \right| \le \delta\,. \tag{27}$$

Ті числові значення параметрів θ_1, θ_2, які задовольняють нерівність (27), і приймаємо за дійсні значення цих параметрів, знайдені в результаті розв'язання задачі ідентифікації. Тобто приймаємо, що

$$\theta_1^* = \theta_{1(n)}, \quad \theta_2^* = \theta_{2(n)}. \tag{28}$$

А на заключному третьому етапі розв'язання поставленої задачі ідентифікації потрібно виконати лише дві дії, а саме – спочатку підстановкою виразів (28) у співвідношення (20) необхідно визначити числове значення θ_3^* третього невідомого параметру моделі АРКС(3,3), а потім підстановкою цього, уже знайденого, значення третього параметру у вираз (18) визначити числове значення дисперсії σ_a^2 білого шуму a_t, імпульси якого, згенеровані стандартною комп'ютерною програмою за заданого значення дисперсії, необхідно «підмішувати» до часового ряду (10) так, як того вимагає структура цієї моделі.

Легко помітити, що для отримання розрахункових виразів запропонованого методу для значень порядків p і q, меншим за три, необхідно в синтезованих нами виразах прирівняти нулю ті параметри, яких вибрана нами більш проста модель АРКС(p,q) у своїй структурі не має. Наприклад, якщо $p = 3$, $q = 2$, то замість системи рівнянь (11) матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \gamma_0 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \varphi_3\gamma_3 + \sigma_a^2 - \theta_1(\varphi_1 - \theta_1)\sigma_a^2 - \theta_2(\varphi_2 - \theta_2)\sigma_a^2, \\ \gamma_1 = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1 + \varphi_3\gamma_2 - \theta_1\sigma_a^2 - \theta_2(\varphi_1 - \theta_1)\sigma_a^2, \\ \gamma_2 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 + \varphi_3\gamma_1 - \theta_2\sigma_a^2, \\ \gamma_3 = \varphi_1\gamma_2 + \varphi_2\gamma_1 + \varphi_3\gamma_0, \\ \gamma_4 = \varphi_1\gamma_3 + \varphi_2\gamma_2 + \varphi_3\gamma_1, \\ \gamma_5 = \varphi_1\gamma_4 + \varphi_2\gamma_3 + \varphi_3\gamma_2, \end{cases} \tag{29}$$

а замість матриць M_γ, γ у вигляді (12) будемо мати їх у вигляді

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Замість виразу (18) матимемо

$$\sigma_a^2 = -\frac{C}{\theta_2}, \tag{31}$$

а замість системи рівнянь (19) будемо мати систему рівнянь

$$\begin{cases} A\theta_2 = C(-1 + \theta_1(\varphi_1 - \theta_1) + \theta_2(\varphi_2 - \theta_2)), \\ B\theta_2 = C(\theta_1 + \theta_2(\varphi_1 - \theta_1)), \end{cases} \tag{32}$$

з другого рівняння якої, замість виразу (20), матимемо

$$\theta_2 = \frac{C\theta_1}{B - C(\varphi_1 - \theta_1)}. \tag{33}$$

Замість системи нелінійних рівнянь (21) будемо мати лише одне нелінійне рівняння

$$f_1(\theta_1) = 0, \tag{34}$$

у якому

$$\begin{gathered} f_1(\theta_1) = A\theta_1(B - C(\varphi_1 - \theta_1)) - (-1 + \theta_1(\varphi_1 - \theta_1))(B - C(\varphi_1 - \theta_1))^2 - \\ \theta_1(\varphi_2(B - C(\varphi_1 - \theta_1)) - C\theta_1). \end{gathered} \tag{35}$$

У цьому випадку, замість процедури, заданої виразами (24) – (26), розв'язок рівняння (34) знаходитимемо за виразом

$$\theta_{1(n+1)} = \theta_{1(n)} - \frac{f_1(\theta_{1(n)})}{\dfrac{df_1(\theta_{1(n)})}{d\theta_1}}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{36}$$

Узагальнення запропонованого методу на моделі АРКС(p,q) за значень порядків p, q, більших за три, та алгоритм оптимізації структури моделі будуть запропоновані нами в наступній статті. А на завершення цієї статті пропонуємо звернути увагу на те, що, на відміну від алгоритму ідентифікації моделі АРКС(p,q) за методикою, викладеною в роботі [1], де і параметри регресії і параметри ковзного середнього пропонують визначати, використовуючи одні й ті ж значення автоковаріацій та застосовуючи процедуру мінімізації суми квадратів відхилень для пошуку оцінок параметрів ковзного середнього за визначених попередньо за тими ж значеннями автоковаріацій за методикою Юла – Уокера параметрами авторегресії, у нашому методі, по-перше, параметри авторегресії розраховують із використанням одного набору автоковаріацій, а параметри ковзного середнього розраховують із використанням іншого набору автоковаріацій, що відповідає кібернетичному принципу використання «свіжих точок» за розширення набору параметрів, оцінки яких знаходять, а по-друге, для визначення параметрів ковзного середнього застосовують пряму процедуру, яка не вимагає поновлення процедури мінімізації суми квадратів відхилень під час переходу до інших значень порядків авторегресії та ковзного середнього.

Висновки

1. Запропоновано метод ідентифікації моделі авторегресії-ковзного середнього АРКС(p,q) із довільними значеннями порядків p, q, який методику Юла – Уокера, розроблену для ідентифікації моделі авторегресії АР(p), узагальнює на випадок, коли авторегресійний складник моделі АР(p) доповнюється складником ковзного середнього КС(q).

2. Для реалізації алгоритму запропонованого методу необхідно на першому етапі розв’язувати систему лінійних рівнянь типу Юла – Уокера для визначення p параметрів авторегресії з використанням одного набору автоковаріацій, на другому етапі розв’язувати систему додаткових нелінійних рівнянь для ідентифікації q–1 параметрів ковзного середнього з використанням іншого набору автоковаріацій, а на третьому етапі здійснювати формульне довизначення останнього параметру ковзного середнього та довизначати значення дисперсії білого шуму, котрий необхідно «підмішувати» до моделі АРКС(p,q) для забезпечення її адекватності реальному часовому ряду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. — 408 с.

2. . Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 2 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 197 с.

3. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 260 с.

4. Численные методы / [Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., и др.]. – М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.

Мокін Олександр Борисович – д. т. н., професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокін Віталій Борисович – д. т. н., професор, завідувач кафедри комп’ютерного еколого-економічного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: vbmokin@gmail.com.

Мокін Борис Іванович – академік Національної АПН України, д. т. н., проф., професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів.

Вінницький національний технічний університет.