

УДК 517.977

О. Б. Мокін, д. т. н., проф.; В. Б. Мокін, д. т. н., проф.;
Б. І. Мокін, акад. НАПН України, д. т. н., проф.; І. О. Чернова

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТАХ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЛІНЕАРИЗАЦІЮ, МАТЕМАТИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ НЕ ВИЩЕ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ, ЕКВІВАЛЕНТНИМИ ЗА ЧАСТОТОЮ ЗРІЗУ

Запропоновано метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію і працюють у режимі прямої передачі сигналу, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу. Алгоритм методу ґрунтується на системі рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються частотою зрізу, а інша частина синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів відносно логарифмічних частотних характеристик.

Ключові слова: динамічна система, математична модель, частота зрізу, диференціальне рівняння, еквівалентування, метод найменших квадратів.

Постановка завдання й вихідні передумови

У роботі [1] визначено умови, за яких процеси в динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію та описуються диференціальними рівняннями високих порядків, тобто диференціальними рівняннями, що мають вигляд

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \quad n > 3, \quad (1)$$

у діапазоні зміни координат руху можна еквівалентно (без внесення суттєвих похибок) описувати диференціальними рівняннями з порядком, не вищим третього, тобто диференціальними рівняннями, що мають вигляд

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x, \quad (2)$$

або вигляд

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_2 x, \quad (3)$$

чи навіть вигляд

$$a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 x. \quad (4)$$

Ці умови зводяться до того, що лише для тих динамічних об'єктів, під час подачі на вхід яких одиничного вхідного сигналу

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5)$$

для їхньої реакції $y(t)$ є справедливими вирази:

$$y'(0) \neq 0, \quad (6)$$

$$y''(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (7)$$

у якості еквівалентної моделі можна використовувати диференціальні рівняння вигляду (4).

Якщо ж для реакції $y(t)$ динамічного об'єкта є справедливими вирази:

$$y'(0) = 0 \quad (8)$$

$$y''(t_n) = 0, \quad t_n \in [0, \infty), \quad (9)$$

то в якості еквівалентної моделі можна використовувати диференціальні рівняння вигляду (3). А якщо для реакції $y(t)$ динамічного об'єкта є справедливими вирази (6) і (9), то в якості еквівалентної моделі можна використовувати диференціальні рівняння вигляду (2).

У тій же роботі [1] показано, що для синтезу еквівалентних моделей багатовимірних динамічних об'єктів у класах рівнянь (2) – (4) умови (6) – (9) є необхідними, але не достатніми, і визначено достатні умови еквівалентування динамічних об'єктів із використанням їхніх логарифмічних частотних характеристик — амплітудної (ЛАЧХ) $L(\omega)$ та фазової (ЛФЧХ) $\varphi(\omega)$ [2], які для динамічного об'єкта, рух якого в загальному вигляді описують диференціальним рівнянням n -го порядку (1), орієнтовно можна представити так, як показано на рис. 1.

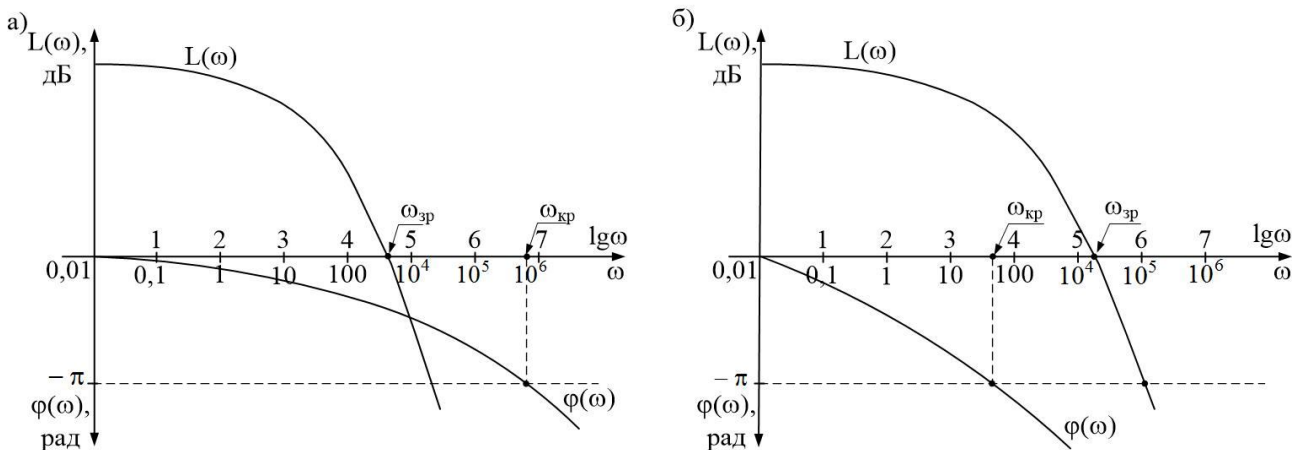


Рис. 1. Орієнтовні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ динамічного об'єкта n -го порядку

Нагадаємо про те, що, перетворюючи диференціальні рівняння (1) – (4) за Лапласом [2], можемо перейти до їхніх еквівалентів на комплексній площині — передаточних функцій — у вигляді:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \quad (10)$$

$$W_1(p) = \frac{K_1}{a_1 p + 1}, \quad (11)$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (12)$$

$$W_3(p) = \frac{K_3}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (13)$$

для яких справедливо:

$$W_i(j\omega) = W_i(p) \Big|_{p=j\omega} = R_i(\omega) + jQ_i(\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

$$A_i(\omega) = \sqrt{R_i^2(\omega) + Q_i^2(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \arctg \frac{Q_i(\omega)}{R_i(\omega)}, \quad (15)$$

$$L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega). \quad (16)$$

Нагадаємо також про те, що у виразах (16) для ЛАЧХ і ЛФЧХ прирости кругової частоти ω відкладаються на частотній осі в декадах.

Як відомо з роботи [2], для ЛАЧХ і ЛФЧХ є характерними дві частоти — частота зрізу $\omega_{зр}$ та критична частота $\omega_{кр}$, які знаходять із рівнянь:

$$L(\omega_{зр}) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -\pi \quad (18)$$

та мають графічну інтерпретацію, представлену на рис. 1.

Згідно з критерієм Найквіста [2], якщо, як показано на рис. 1а, для стійкого динамічного об'єкта виконується умова

$$\omega_{зр} < \omega_{кр}, \quad (19)$$

тоді він залишається стійким і після замикання його одиничним від'ємним зворотним зв'язком. Тобто в такому об'єкті характер процесів до його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком і після замикання не змінюється.

Якщо для динамічного об'єкта, стійкого в розімкненому стані, виконується умова (див. рис. 1б),

$$\omega_{зр} > \omega_{кр}, \quad (20)$$

то він стає нестійким після замикання його одиничним від'ємним зворотним зв'язком. Тобто у такому об'єкті характер процесів до його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком і після замикання змінюється.

Тож лише у разі виконання умови (19) для багатовимірного динамічного об'єкта можна використовувати для описання процесів у ньому еквівалентні моделі у вигляді (3) і (4), оскільки для першої із них, як відомо [2], справедливою є нерівність

$$\varphi_1(\omega) > -\frac{\pi}{2}, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (21)$$

а для другої із них справедливою є нерівність

$$\varphi_2(\omega) > -\pi, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (22)$$

Якщо ж для багатовимірного динамічного об'єкта виконується умова (20), то для описання процесів у ньому не можна використовувати еквівалентні моделі (3), (4), а необхідно використовувати еквівалентну модель (2), оскільки лише для неї справедливою є система нерівностей

$$\begin{aligned} \varphi_3(\omega) &\geq -\pi, & \forall \omega \in [0, \omega_{кр}], \\ \varphi_3(\omega) &< -\pi, & \forall \omega \in (\omega_{кр}, \infty), \end{aligned} \quad (23)$$

з якою збігається нерівність (20) в околі критичної частоти $\omega_{кр}$.

Із рис. 1 видно, що для динамічного об'єкта n -го порядку справедливою є система нерівностей

$$\begin{aligned} L(\omega) &\geq 0, & \forall \omega \in [0, \omega_{zp}], \\ L(\omega) &< 0, & \forall \omega \in (\omega_{zp}, \infty). \end{aligned} \quad (24)$$

Верхня нерівність із системи (24) свідчить про те, що на частотах до частоти зрізу динамічний об'єкт веде себе як підсилувач, для якого є справедливою нерівність

$$A(\omega) \geq 1, \quad (25)$$

а нижня нерівність із системи (24) свідчить про те, що за значень частоти, більшої частоти зрізу, динамічний об'єкт веде себе як фільтр, для якого є справедливою нерівність

$$A(\omega) < 1. \quad (26)$$

Із вищевикладеного випливає, що під час синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, який функціонує в режимі перетворювача вхідного сигналу у вихідний без необхідності його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком, обов'язково необхідно враховувати умови (25), (26). А під час синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, керування яким здійснюватиметься з використанням одиничного від'ємного зворотного зв'язку, обов'язково необхідно враховувати умови (20), (23).

У цій статті ми представляємо метод синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, який функціонує в режимі перетворювача вхідного сигналу у вихідний, а метод синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, керування яким здійснюватиметься з використанням одиничного від'ємного зворотного зв'язку, буде представлений у нашій наступній статті.

Розв'язання поставленої задачі

Оскільки для багатовимірного динамічного об'єкта, що функціонує в режимі передачі сигналу зі входу на вихід, під час його еквівалентування необхідно забезпечити однаковість характеру розв'язків основної математичної моделі (1) та еквівалентної моделі із множини (2) – (4), якими ми описуватимемо процеси в цьому об'єкті як у частотній області підсилення сигналів, так і в частотній області їхньої фільтрації, то і графіки ЛАЧХ $L(\omega)$ основної моделі (1), і графіки асимптотичних ЛАЧХ $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$ еквівалентних моделей (2) – (4) повинні починатися з однієї і тієї ж точки за найменшого початкового значення ω_n частоти ω , у якій

$$L(\omega_n) = L_1(\omega_n) = L_2(\omega_n) = L_3(\omega_n), \quad (27)$$

і проходити через одну й ту ж точку на частоті зрізу ω_{zp} , тобто мати орієнтовний вигляд, показаний на рис. 2.

Для подальшого розв'язання задачі вважатимемо, що в нас є можливість подати на вхід динамічного об'єкта, еквівалентну математичну модель якого ми синтезуємо, одиничний сходиноквий сигнал (5), реакція на який дозволяє визначити, які з вимог (6) – (9) виконуються, і є можливість експериментально зняти амплітудну $A(\omega)$ та фазову $\varphi(\omega)$ частотні характеристики об'єкта у вигляді послідовностей $A(\omega_s)$, $\varphi(\omega_s)$, $s = 1, 2, \dots, N$ за допомогою стандартного комплексу приладів, що серійно випускають і який складається з генератора синусоїдальних сигналів, подвійного пікового вольтметра та частотоміра-фазометра та доповнюється пристроями спряження цих приладів зі входом і виходом динамічного об'єкта. А до логарифмічних частотних характеристик об'єкта нам допомагають перейти співвідношення (16). Тож, маючи ЛАЧХ $L(\omega)$, за допомогою співвідношення (17) ми легко знаходимо частоту зрізу ω_{zp} динамічного об'єкта.

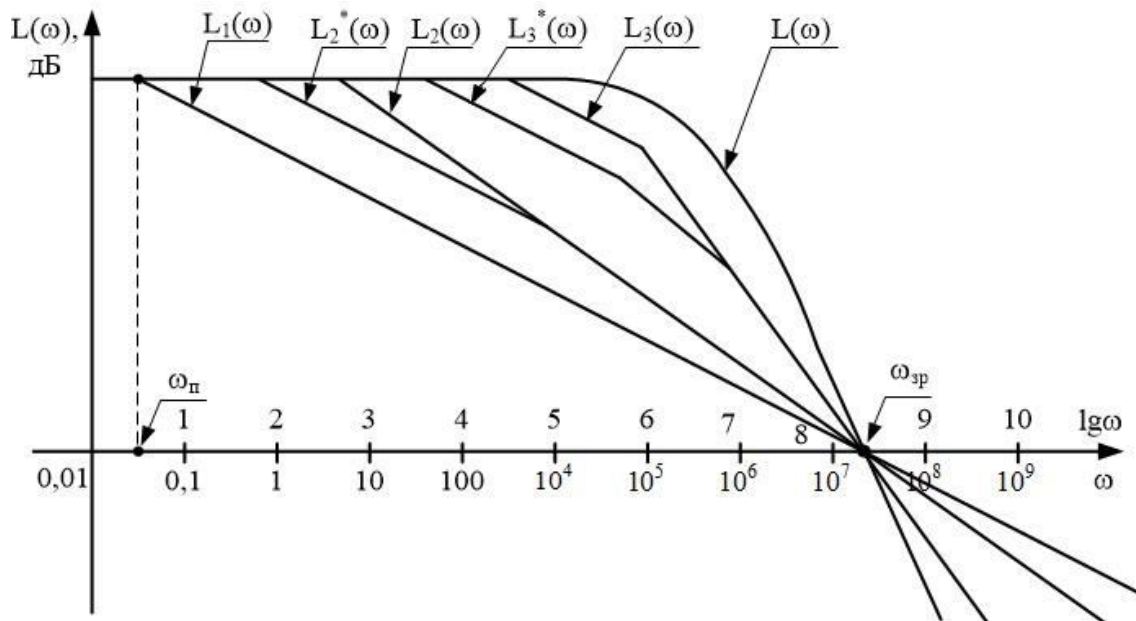


Рис. 2. Орієнтовний вигляд графіка ЛАЧХ основної моделі багатовимірнього динамічного об'єкта та графіків асимптотичних ЛАЧХ його еквівалентних моделей

Як відомо з теорії автоматичного керування [2] і показано на рис. 2, графік асимптотичної ЛАЧХ $L_1(\omega)$ математичної моделі першого порядку має лише два прямолінійних відрізки — початковий із нульовим нахилом і кінцевий з нахилом 20 дБ на декаду. Графік асимптотичної ЛАЧХ математичної моделі другого порядку має або два прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (12) є пара комплексно спряжених чисел), перший із яких має нульовий нахил, а другий має нахил 40 дБ на декаду — це графік $L_2(\omega)$ на рис. 2, або три прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (12) є пара дійсних від'ємних чисел), перший із яких має нульовий нахил, другий має нахил 20 дБ на декаду, а третій — нахил 40 дБ на декаду (це графік $L_2^*(\omega)$ на рис. 2). Графік асимптотичної ЛАЧХ математичної моделі третього порядку має або три прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (13) є одне дійсне від'ємне число і два комплексно спряжених чисел), перший із яких має нульовий нахил, другий має нахил 20 дБ на декаду (або 40 дБ на декаду), а третій має нахил 60 дБ на декаду (це графік $L_3(\omega)$ на рис. 2), або чотири прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (13) є три дійсні від'ємні числа), перший із яких має нульовий нахил, другий має нахил 20 дБ на декаду, третій має нахил 40 дБ на декаду, а четвертий має нахил 60 дБ на декаду (це графік $L_3^*(\omega)$ на рис. 2). Із цього всього запам'ятемо лише те, що нахил останнього прямолінійного відрізка графіка асимптотичної ЛАЧХ, який перетинає частотну вісь у точці ω_{zp} для об'єкта з моделлю 1-го порядку (4) дорівнює 20 дБ на декаду, для об'єкта з моделлю 2-го порядку (3) дорівнює 40 дБ на декаду, а для об'єкта 3-го порядку (2) дорівнює 60 дБ на декаду.

А далі, скориставшись виразами (11) – (16), знайдемо, що

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= 20 \lg A_1(\omega) = 20 \lg K_1 - 10 \lg(1 + a_1^2 \omega^2), \\ \varphi_1(\omega) &= -\arctg(a_1 \omega); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} L_2(\omega) &= 20 \lg A_2(\omega) = 20 \lg K_2 - 10 \lg[(1 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2], \\ \varphi_2(\omega) &= -\arctg \frac{a_1 \omega}{1 - a_2 \omega^2}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$L_3(\omega) = 20 \lg A_3(\omega) = 20 \lg K_3 - 10 \lg \left[(1 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega - a_3 \omega^3)^2 \right],$$

$$\varphi_3(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{a_1 \omega - a_3 \omega^3}{1 - a_2 \omega^2}. \quad (30)$$

Згідно із загальноприйнятим підходом у теорії ідентифікації [3] в якості критеріїв еквівалентування в нашій задачі ми теж скористаємося стандартними критеріями найменших квадратів у нашому випадку відносно експериментально знятої ЛАЧХ багатовимірного об'єкта $L(\omega_s)$, $s=1, 2, \dots, N$ та ЛАЧХ еквівалентних моделей $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$, тобто скористаємося функціоналами:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_1(\omega_s))^2, \quad (31)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_2(\omega_s))^2, \quad (32)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_3(\omega_s))^2, \quad (33)$$

підставляючи в які вирази для $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$, взяті із співвідношень (28) – (30), матимемо:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_1 + 10 \lg(1 + a_1^2 \omega_s^2))^2, \quad (34)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_2 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + a_1^2 \omega_s^2))^2, \quad (35)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_3 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + (a_1 \omega_s - a_3 \omega_s^3)^2))^2. \quad (36)$$

Далі згідно зі стандартною процедурою метода найменших квадратів у разі, якщо ми в якості еквівалентної математичної моделі вибираємо диференціальне рівняння (4), то повинні були б узяти частинні похідні від Σ_1 за невідомими коефіцієнтами K_1 , a_1 , прирівняти ці похідні до нуля і, розв'язавши отриману систему двох рівнянь відносно двох невідомих K_1 , a_1 , отримати числові значення цих двох невідомих коефіцієнтів.

Аналогічно в разі, якщо ми в якості еквівалентної математичної моделі вибираємо диференціальне рівняння (3), то повинні були б узяти частинні похідні від Σ_2 за невідомими коефіцієнтами K_2 , a_1 , a_2 , прирівняти ці похідні до нуля і, розв'язавши отриману систему трьох рівнянь відносно трьох невідомих K_2 , a_1 , a_2 , отримати числові значення цих невідомих коефіцієнтів.

А якщо ми в якості еквівалентної математичної моделі вибираємо диференціальне рівняння (2), то повинні були б узяти частинні похідні від Σ_3 за невідомими коефіцієнтами K_3 , a_1 , a_2 , a_3 , прирівняти ці похідні до нуля і, розв'язавши отриману систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих K_3 , a_1 , a_2 , a_3 , отримати числові значення цих невідомих коефіцієнтів.

Але якщо ми так вчинимо, то отримаємо моделі процесів у динамічних об'єктах, розв'язки яких наблизатимуться до реальних процесів у середньому квадратичному, не збігаючись зі значеннями реальних процесів на кінцях діапазонів, які в частотній області

задаватимуться частотами ω_n та ω_{zp} і для яких повинні виконуватися вимоги (17) та (27), які під час еквівалентування повинні виконуватись обов'язково.

Тож виходить, що під час еквівалентування математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (4), що містить лише два невідомих параметри K_1 , a_1 , для їх визначення потрібно мати систему лише із двох рівнянь, яку можна побудувати й без узяття частинних похідних від виразу (34), а скориставшись граничними умовами (17), (27), адже із (27) через малість ω_n витікає, що

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_1, \quad (37)$$

а із (17) витікає, що

$$20 \lg K_1 - 20 \lg a_1 - 20 \lg \omega_{zp} = 0. \quad (38)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (37), (38), матимемо:

$$K_1 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_{zp}} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (39)$$

Однак під час еквівалентування математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (3), що містить три невідомих параметри K_1 , a_1 , a_2 , для їх визначення потрібно мати систему із трьох рівнянь, яку побудувати, скориставшись лише граничними умовами (17), (27), уже не вдасться, оскільки ці граничні умови дають нам лише два рівняння, а саме:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_2, \quad (40)$$

$$20 \lg K_2 - 20 \lg a_2 - 40 \lg \omega_{zp} = 0, \quad (41)$$

із яких матимемо:

$$K_2 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_2 = \frac{1}{\omega_{zp}^2} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (42)$$

А що ж до третього невідомого параметра a_1 , то в цьому разі для його визначення вже необхідно брати частинну похідну за ним від виразу (35) і отримувати, прирівнявши цю похідну до нуля, у доповнення до рівнянь (42) ще й третє рівняння —

$$\sum_{i=1}^N \left[L(\omega_i) - \lg \frac{10K_2^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} \right] \frac{\omega_i^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} = 0 \quad (43)$$

нелінійне, але з одним невідомим a_1 , для розв'язання якого, наприклад, у пакеті прикладних програм Mathcad, закладено стандартну процедуру.

Що ж до еквівалентування математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (2), що містить чотири невідомих параметри K_1 , a_1 , a_2 , a_3 , то для їх визначення потрібно мати систему із чотирьох рівнянь, яку побудувати, скориставшись лише граничними умовами (17), (27), теж не вдасться, оскільки ці граничні умови дають нам лише два рівняння, а саме:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_3, \quad (44)$$

$$20 \lg K_3 - 20 \lg a_3 - 60 \lg \omega_{zp} = 0, \quad (45)$$

із яких матимемо:

$$K_3 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_3 = \frac{1}{\omega_{3p}^3} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (46)$$

А що ж до ще двох невідомих параметрів a_1, a_2 , то в цьому разі для їх визначення вже необхідно брати дві частинні похідні за ними від виразу (36) й отримувати, прирівнявши ці похідні до нуля, у доповнення до рівнянь (46) ще два рівняння:

$$\sum_{s=1}^N \left\{ \left[L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \cdot \frac{a_1\omega_s^2 - a_3\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right\} = 0, \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^N \left[L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \frac{\omega_s^2 - a_2\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} = 0, \quad (48)$$

розв'язавши які як систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими за стандартною процедурою в пакеті прикладних програм Mathcad ми й отримаємо в доповнення до вже знайдених раніше за виразами (46) чисельних значень параметрів K_3, a_3 також і чисельні значення параметрів a_1, a_2 .

Але визначенням повної множини параметрів еквівалентних моделей (2), (3) чи (4) не завершується процедура синтезу еквівалентної математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта, адже потрібно оцінити ще й похибку еквівалентування, до процедури побудови методики визначення якої ми й перейдемо.

Оцінювання похибки еквівалентування

Як видно з рис. 3, похибку еквівалентування моделями (2) – (4) багатовимірного динамічного об'єкта в частотній області можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i(j\omega) &= Y(j\omega) - Y_i(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega) - W_i(j\omega)X(j\omega) = \\ &= (W(j\omega) - W_i(j\omega))X(j\omega) = W_{\Delta i}(j\omega)X(j\omega), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (49)$$

де АФЧХ динамічного об'єкта за похибкою еквівалентування $W_{\Delta i}(j\omega)$ може бути представленою й так:

$$\begin{aligned} W_{\Delta i}(j\omega) &= W(j\omega) - W_i(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} - A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} = \\ &= [A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)] + j[A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)] = A_{\Delta i}(\omega)e^{j\varphi_{\Delta i}(\omega)}, \quad (50) \\ & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

де амплітудна частотна характеристика (АЧХ) динамічного об'єкта за похибкою еквівалентування — це:

$$A_{\Delta i}(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + A_i^2(\omega) - 2A(\omega)A_i(\omega)\cos(\varphi(\omega) - \varphi_i(\omega))}, \quad (51)$$

а фазова частотна характеристика (ФЧХ) — це:

$$\varphi_{\Delta i} = \arctg \frac{A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)}{A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)}. \quad (52)$$

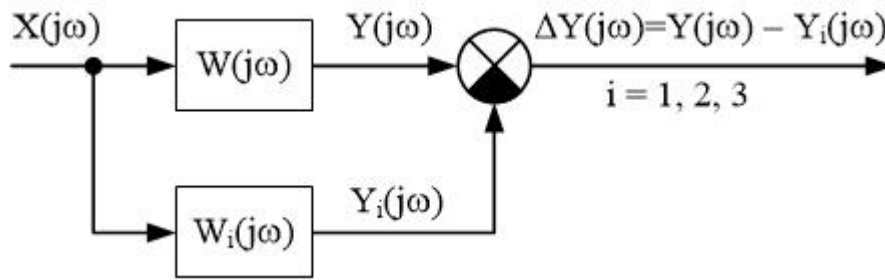


Рис. 3. Структурна схема формування похибки еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта

Якщо у виразі (49) задати всі комплексні величини в показниковій формі, то отримаємо вираз —

$$\Delta Y_i(\omega) e^{j\varphi_{\Delta Y_i}(\omega)} = A_{\Delta i}(\omega) X(\omega) e^{j(\varphi_{\Delta i}(\omega) + \varphi_X(\omega))}, \quad (53)$$

із якого витікає, що АЧХ динамічного об'єкта за похибкою еквівалентування $\Delta Y_i(\omega)$ дорівнюватиме —

$$\Delta Y_i(\omega) = A_{\Delta i}(\omega) X(\omega), \quad (54)$$

де $X(\omega)$ — АЧХ вхідного сигналу динамічного об'єкта.

Як відомо [4], використовуючи рівність Парсеваля, середній квадрат похибки $\overline{\Delta y_i(t)}$, який характеризує її середню потужність, можна визначити з виразу:

$$\overline{\Delta y_i(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Delta Y_i(\omega)]^2 d\omega, \quad (55)$$

підставляючи в який вираз (54) та замінюючи інтеграл сумою значень у точках дискретизації спектра, отримаємо:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_i(t)} &\approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 = \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s))] X^2(\omega_s), \end{aligned} \quad (56)$$

де $\Delta\omega$ — інтервал дискретизації за частотою в логарифмічному масштабі, ω_{\max} — верхня частота смуги пропускання динамічного об'єкта, а кількість дискрет m знаходять із виразу:

$$m = \frac{\omega_{\max} - \omega_n}{\Delta\omega}. \quad (57)$$

Найбільшою середня похибка $\overline{\Delta y_i(t)}$ буде під час відпрацювання динамічним об'єктом стрибкоподібного вхідного сигналу (5), для якого

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (58)$$

Підставляючи $X(\omega)$ із (58) у (56), матимемо:

$$\overline{\Delta y_i(t)} \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 =$$

$$= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s)\cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s))] \frac{1}{\omega_s^2}. \quad (59)$$

За аналогією з виразами (55), (56), (58) та (59) середню потужність $\overline{y(t)}$ вихідного сигналу $y(t)$ динамічного об'єкта як його реакцію на вхідний одиничний сигнал (5) можна представити у вигляді —

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [Y(\omega)]^2 d\omega \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A(\omega_s)X(\omega_s)]^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m A^2(\omega_s) \frac{1}{\omega_s^2}. \quad (60)$$

З урахуванням виразів (59) і (60) відносний середній квадрат похибки еквівалентування $\delta y_i(t)$, виражений у процентах, можна представити у вигляді —

$$\overline{\delta y_i(t)} = \frac{\overline{\Delta y_i(t)}}{\overline{y(t)}} 100\%, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (61)$$

Розраховуючи за виразом (61) з урахуванням виразів (59) і (60) відносний середній квадрат похибки еквівалентування, ми і прийматимемо рішення задовольняє нас вибрана еквівалентна модель багатовимірного динамічного об'єкта чи ні.

Висновки

1. Запропоновано метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію і працюють у режимі прямої передачі сигналу, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу.

2. Алгоритм методу ґрунтується на системі рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються частотою зрізу, а інша частина синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів відносно логарифмічних частотних характеристик.

3. У якості критерію можливості еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта вибраною еквівалентною математичною моделлю запропоновано використовувати відносний середній квадрат похибки еквівалентування, для якого отримано обчислювальну форму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін О. Б. Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2014. — №4. — С. 7 – 15.
2. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. — М.: Машиностроение, 1977. — 464 с.
3. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Цыпкин Я. З. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. Бабак В. П. Обробка сигналів / В. П. Бабак, В. С. Хандецький, Е. Шрюфер. — К.: Либідь, 1999. — 496 с.

Мокін Олександр Борисович – д. т. н., професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів (ВЕТЕСК), e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокін Віталій Борисович – д. т. н., професор, завідувач кафедри комп'ютерного еколого-економічного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: vbmokin@gmail.com.

Мокін Борис Іванович – акад. Національної АПН України, д. т. н., проф., професор кафедри ВЕТЕСК.

Чернова Ірина Олександрівна – інженер науково-дослідної частини.
Вінницький національний технічний університет.