УДК 62–50:519.7/8

ИНТЕРВАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Левин Виталий

Пензенский государственный технологический университет

Аннотация

Рассмотрено обобщение классического дифференциального исчисления на функции с интервальной неопределенностью. Введено понятие производной от интервальной функции и даны формулы для вычисления интервальных производных любого порядка.

Abstract

The generalization of the classical differential calculus on function with interval uncertainty is considered. The concept of a derivative of an interval function is introduced and formulas for calculating the interval derivatives of any order are given.

Встречающиеся на практике системы характеризуются той или иной степенью неопределенности. С целью построения и исследования таких систем чаще всего применяют математический аппарат теории вероятностей [1], нечетких множеств [2] и интервальной математики [3]. В нашей работе впервые предлагается новый математический аппарат для исследования недетерминированных систем – интервально-дифференциальное исчисление. Этот аппарат, в отличие от названных выше, нацеленных на исследование статических систем, применим к изучению и динамических систем. Он является аналогом классического дифференциального исчисления для систем с неопределенными параметрами интервального вида.

Будем использовать интервальную алгебру [3, 4]. Операнды в ней – замкнутые вещественные интервалы, определяемые как множества

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] \equiv \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}. \quad (1)$$

Указанные операнды можно назвать интервальными числами. Операции $\circ$ над такими числами $\tilde{a} = [a_1, a_2], \tilde{b} = [b_1, b_2]$ можно ввести как теоретико-множественные обобщения алгебраических операций над вещественными числами a, b:

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \circ b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \quad (2)$$

Таким образом, основные операции над интервальными числами

$$\begin{gathered}\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\},\\ k \cdot \tilde{a} = \{k \cdot a \mid a \in \tilde{a}\},\\ \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a \cdot b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} / \tilde{b} = \{a / b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}.\end{gathered} \quad (3)$$

На основе определений (3) операций над интервальными числами можно вывести формулы для вычисления результатов этих операций [3]

$$\begin{gathered}
\tilde{a}+\tilde{b} \equiv [a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2], \\
\tilde{a}-\tilde{b} \equiv [a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,a_2-b_1], \\
k\cdot\tilde{a} \equiv k\cdot[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2], & k>0, \\ [ka_2,ka_1], & k<0,\end{cases} \\
\tilde{a}\cdot\tilde{b} \equiv [a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)], \\
\tilde{a}/\tilde{b} \equiv [a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1].
\end{gathered} \tag{4}$$

Интервальная функция [5] вводится как однозначное отображение множества вещественных интервалов $\{\tilde{x}\}$, $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ вида (1) на такого же типа множество

$$\{\tilde{y}\},\ \tilde{y}=[y_1,y_2]:\ \tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x}), \tag{5}$$

где $\tilde{x}$ называется интервальной независимой переменной, $\tilde{y}$ – интервальной зависимой переменной, $\tilde{f}$ – интервальной функцией.

Введем понятие предела интервальной функции (5). Рассмотрим независимую переменную $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ этой функции. Будем говорить, что $\tilde{x}$ в процессе своего изменения неограниченно приближается к предельному интервалу $\tilde{x}_0=[x_{01},x_{02}]$, если в указанном процессе x_1 неограниченно приближается к x_{01}, а x_2 – к x_{02}. Символически это неограниченное приближение интервального аргумента $\tilde{x}$ к пределу $\tilde{x}_0$ показывается следующим образом:

$$(\tilde{x}\to\tilde{x}_0)\equiv(x_1\to x_{01},x_2\to x_{02})\equiv(\lim x_1=x_{01},\lim x_2=x_{02}). \tag{6}$$

Зависимая переменная $\tilde{y}$ интервальной функции (5) в процессе своего изменения может неограниченно приближаться к предельному интервалу $\tilde{y}_0=[y_{01},y_{02}]$, т.е.

$$(\tilde{y}\to\tilde{y}_0)\equiv(y_1\to y_{01},y_2\to y_{02}). \tag{7}$$

Если неограниченное приближение переменной $\tilde{y}$ интервальной функции (5) к интервалу $\tilde{y}_0$ вызвано неограниченным приближением переменной $\tilde{x}$ к $\tilde{x}_0$, будем говорить, что предел интервальной функции (5) при $x\to\tilde{x}_0$, равен $\tilde{y}_0$. Символически

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\tilde{y}=\tilde{y}_0 \quad \text{или, по-другому,} \quad \lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{y}_0. \tag{8}$$

Если интервальная функция (5) непрерывна, т.е. как нижняя, так и верхняя границы интервала $\tilde{y}$ (т.е. зависимой переменной) являются непрерывными функциями нижней и верхней границ интервала $\tilde{x}$, то предел функции (5) равен значению функции от предельного значения аргумента:

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{f}(\tilde{x}_0). \tag{9}$$

Рассмотрим произвольную интервальную функцию вида (5). Будем считать ее непрерывной. Зафиксируем некоторое значение $\tilde{x}_0=[x_{01},x_{02}]$ независимой переменной. Этому значению, в силу непрерывности интервальной функции, будет соответствовать фиксированное значение функции $\tilde{y}_0=\tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Определим теперь приращения независимой и зависимой переменных нашей функции относительно их указанных фиксированных значений

$$\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_0, \quad \Delta\tilde{y} = \tilde{y} - \tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0) \tag{10}$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{y}_0)/(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x} - \tilde{x}_0)\,. \tag{11}$$

Возьмем предел отношения (11) при неограниченном приближении независимой переменной $\tilde{x}$ к ее фиксированному значению $\tilde{x}_0$:

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x}\,. \tag{12}$$

Предел (12), если он существует, мы будем называть интервальной производной от функции (5) и обозначать $\tilde{y}'_{\tilde{x}_0}$ или же $\tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$. Таким образом,

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}_0} = \tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x}\,. \tag{13}$$

Теорема 1. Для того чтобы в точке $\tilde{x}_0$ существовала интервальная производная от интервальной функции (5), определяемая формулами (10)–(13), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки, включая ее саму, все значения независимой переменной $\tilde{x}$ были невырожденными интервалами (т.е. интервалами с несовпадающими нижней и верхней границами).

Теорема 2. Интервальная производная от непрерывной интервальной функции (5), определяемая для произвольной точки $\tilde{x}_0$ формулами (10)–(13) в виде предела, может быть выражена в конечном виде:

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}_0} \equiv \tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) = (\tilde{f}(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0)\,. \tag{14}$$

С первого взгляда выражение (14) выглядит как неопределенность вида $0/0$, но это неверно: по теореме 1 у любой существующей в точке $\tilde{x}_0$ интервальной производной интервал $\tilde{x}_0$ невырожден и потому, по (4), разности $\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0$ и $\tilde{f}(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\tilde{x}_0)$ не равны нулю (интервалу $[0,0]$).

Производная $\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ от интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ также является интервальной функцией, зависящей от того же самого аргумента $\tilde{x}$. Это позволяет продолжить процесс нахождения интервальных производных функций, получив сначала 2-ю производную $\tilde{f}''_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ (производную от $\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x})$), 3-ю производную $\tilde{f}'''_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ (производную от $\tilde{f}''_{\tilde{x}}(\tilde{x})$) и т.д., вплоть до производной любого n-го порядка.

Список использованных источников:

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 2004.
2. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
4. Левин В.И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности. Пенза: Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1999.
5. Левин В.И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации // Автоматика и вычислительная техника. – 2012. – № 4.