УДК 519.64

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРОМ КОШИ

Кублашвили Мурман[1], Саникидзе Джемал[2]

[1]Грузинский Технический Университет
[2]Институт Вычислительной Математики им. Н.И. Мусхелишвили

Аннотация

Строятся и иследуются квадратурные формулы повышенной точности для интегралов с ядром Коши.

Abstract

Quadrature formulas of improved accuracy for one-dimensional singular integrals with a Cauchy-type kernel are constructed and researched.

В различных приложениях, в частности в граничных задачах теории функций, существенна роль сингулярных интегралов с ядром Коши

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t)\frac{\varphi(t)dt}{t-x} \quad (-1<x<1)$$

(рассматриваеммых в смысле главного значения). Предполагается, что весовая функция ρ(t) удовлетворяет обычно принятым в теории таких интегралов условиям. В данном случае основные результаты заметки относятся к случаю Т.Н. Чебышевской весовой функции $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, наиболее часто встречающиегося в приложениях, т.е., к рассматрению интегралов вида

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\phi(t)dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} \quad (-1<x<1).$$

В заметке [1] была предложена определенная квадратурная формула для указанного интеграла, содержащая в качестве узлов нули полинома $T_n(x)T_{n+1}(x)$, где $T_m(x)(m=n,n+1)$ суть полиномы Чебышева cos(marccosx) соответствующих степеней. Упомянутая квадратурная формула обладает определенным удобством в тех случаях, когда возникает надобность перевычисления и сравнения между собой результатов, полученных при различных последующих значениях n. Тем не менее, наиболее примечательным при использовании такого рода квадратурных формул следовало бы считать то обстоятельство, что надлежащим подбором параметра сингулярности $x \in (-1,+1)$ могут быть получены отдельные квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющие высокую алгебраическую степень точности 2n. В случае рассматриваемой здесь весовой функции такими значениями x являются нули многочлена Чебышева второго рода (см., напр., [2]) степени n-1. При этом, как известно [3], указанной степенью точности значения параметра x в соответствующих формулах определяются однозначно.

С другой стороны, исходя из эффективности в приложениях квадратурных формул для сингулярных интегралов высоких точностей естественно попытаться по возможности расширять множества тех значений параметра сингулярности x, при которых можно было бы добыться в той или иной мере более высокой степени точности соответствующих квадратурных формул для сингулярных интегралов. Исходя из ряда общетеоретических и экспериментальных рассмотрений, здесь ниже указываются некоторые общие подходы к построению ряда таких квадратурных формул для сингулярных интегралов с весовыми функциями:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\phi(t_k)}{t_k - x} \text{ ; } x \in (-1,+1), \quad x \neq t_k ,$$

где $\{t_k\}$, $\{A_k\}$ - соответственно, узлы и веса обычной квадратурной формулы Гаусса, причем предполагается, что весовая функция $\rho(t)$ удовлетворяет известным (см., нпр., [2]) стандартным условиям. При условии, что указанные приближенные равенства переходили бы в точные, когда $\varphi(t)$ является произвольным многочленом степени $\leq 2n,$ мы имеем указанные в [3] квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы Гаусса) для сингулярных интегралов. Если же считать, что аналогичные равенства имеют место лишь для многочленов степеней r_n, где для натурального r_n имеет место $n < r_n \leq 2n-1,$ то в таких случаях мы будем говорить вообще о квадратурных формулах со степенью точности выше интерполяционной. Наиболее близкие к 2n-1 значения r_n, естественно, приводят к квадратурным формулам для сингулярных интегралов, соответственно близким по точности к гауссовским.

Ряд численных экспериментов в этом направлении, подтверждающих наводящие в данном направлении теоретические соображения, был проведен при различных значениях числа узлов n.

Список использованных источников:

1. Д.Г. Саникидзе, К.Р. Купатадзе, Ш.С. Хубежты. Об одном классе квадратурных формул повышенной точности для сингулярных интегралов с ядром Коши. Труды XVI Междунар. Симпоз. МДОЗМФ, Харьков-Херсон, 2013, 345-348.
2. В.И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1962, 500 с.
3. А.А. Корнейчук. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика. М., «Наука», 1962.