УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ

Гордезиани Давид[1], Меладзе Гамлет[2], Давиташвили Тинатин[1], Меладзе Юлия[2]

[1]Тбилисский гос. университет им. Ив.Джавахишвили,Фак. точных и естественных наук
[2]Грузинский Университет им. Святого Андрея Первозванного

Аннотация

В представленной работе для некоторых уравнений математической физики рассматриваются краевые и начально-краевые задачи с нелокальными контактеыми условиями. При помощи итерационной процедуры решение исходной задачи сводится к решению последовательности задач Дирихле.

Abstract

In the present paper the boundary and initial-boundary value problems with nonlocal contact conditions are considered for some equations of mathematical physics. The iteration process is constructed, which allows one to reduce the solution of the initial problem to the solution of a sequence of classical Dirichlet problems.

Введение

Нелокальные краевые и начально-краевые задачи представляют весьма интересное обобщение классических, в то же время они нередко получаются при построении математических моделей реальных процессов и явлений в физике, инженерии, социологии, экологии и т.д.

История развитий исследований нелокальных задач начинается с первой половины прошлого века (см. напр. [1]-[3]) и ныне развивается быстрими темпами вследствие их большого практического и теоретического значения при математическом моделировании новых и важных прикладных задач (см. напр. [4]-[16] и цитируемую в них литературу).

В представленной работе для некоторых уравнений математической физики рассматриваются краевые и начально-краевые задачи, названные в настоящей статье нелокальными контактными, и строятся и обосновываются алгоритмы их численного решения.

Рассматриваемые задачи по сути своей идейно примыкает к вышедшей в 1969 году известной работе А.А.Бицадзе и А.А.Самарского [4], которая придала мощный импульс исследованиям по нелокальным задачам и стимулировала появление новых, оригинальных обобщений и приближённых методов их решения.

Задача I

Найти функции $u^-(x)\in C^2(-1,0)\cap C^1[-1,0]$ и $u^+(x)\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1]$, удовлетворяющие уравнениям

$$L^-u^- \equiv \frac{d}{dx}\left\{K^-(x)\frac{du^-}{dx}\right\}-q^-(x)u^-(x)=f^-(x),\quad x\in D^-\equiv(-1,0), \tag{1}$$

$$L^+u^+ \equiv \frac{d}{dx}\left\{K^+(x)\frac{du^+}{dx}\right\}-q^+(x)u^+(x)=f^+(x),\quad x\in D^+\equiv(0,1), \tag{2}$$

краевым условиям

$$u^-(-1)=\varphi^-,\quad u^+(1)=\varphi^+, \tag{3}$$

нелокальному контактному условию

$$u^-(0) = u^+(0) \equiv u(0) = u^0, \quad u(0) = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu^- u^-\left(\xi_\mu^-\right) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^+ u^+\left(\xi_k^+\right) + \varphi^0, \tag{4}$$

$$-1 < \xi_m^- < \xi_{m-1}^- < \cdots < \xi_1^- < \xi^0 < \xi_1^+ < \xi_2^+ < \cdots < \xi_{n-1}^+ < \xi_n^+, \quad \xi^0 \equiv 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть, $K^-(x) \in C^1[-1,0]$, $K^-(x) > c_0 = const > 0$, и $K^+(x) \in C^1[0,1]$, $K^+(x) > c_0 = const > 0$, $q^-(x) \geq 0$, $q^+(x) \geq 0$, $q^-(x) \in C^1[-1,0]$, $q^+(x) \in C^1[0,1]$, $f^-(x) \in C^0[-1,0]$, $f^+(x) \in C^0[0,1]$,

$$\sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu^- + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^+ \leq 1 . \tag{5}$$

Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1)-(4).

Численное решение задачи (1)-(4) сводится к решению последовательности задач Дирихле для операторов L^- и L^+, соответственно, в областях D^- и D^+. Пользуясь этим, строятся разностные схемы точности $O(h^2)$ (h - шаг разностной сетки).

Задача II

Найти функции

$u^-(x,t) \in C^{2,1}\left(D^- \times (0,T]\right) \cap C^{1,0}\left(\overline{D}^- \times (0,T]\right)$ и $u^+(x,t) \in C^{2,1}\left(D^+ \times (0,T]\right) \cap C^{1,0}\left(\overline{D}^+ \times (0,T]\right)$,

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{K^-(x,t)\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial x}\right\} + q^-(x,t)u^-(x,t) = f^-(x,t), \quad (x,t) \in D^- \times (0,T], \tag{6}$$

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{K^+(x,t)\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial x}\right\} + q^+(x,t)u^+(x,t) = f^+(x,t), \quad (x,t) \in D^+ \times (0,T], \tag{7}$$

краевым условиям

$$u^-(-1,t) = \varphi^-(t), \quad u^+(1,t) = \varphi^+(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{8}$$

нелокальному контактному условию

$$\begin{gathered} u^-(0,t) = u^+(0,t) \equiv u(0,t) = u^0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0,t) = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu^- u^-\left(\xi_\mu^-, t\right) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^+ u^+\left(\xi_k^+, t\right) + \varphi^0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{gathered} \tag{9}$$

и начальному условию

$$u^-(x,0) = u_0^-(x), \quad x \in [-1,0], \quad u^+(x,0) = u_0^+(x), \quad x \in [0,1]. \tag{10}$$

При выполнении (5) и соответствующих требований, наложенных на исходные данные задачи (6)-(10), можно доказать теорему о существовании и единственности регулярного решения. Доказательство основывается на построении итерационного процесса и применения аналога первой теоремы Гарнака.

Численное решение задачи (6)-(10) сводится к решению последовательности задач Коши-Дирихле для уравнений (6) и (7) соответственно в областях $D^{-}\times\left(0,T\right]$ и $D^{+}\times\left(0,T\right]$.

Заметим, что при исследовании задач I-II требуется, что коэффициенты и правые части уравнений, а также функции, входящие в граничных и начальных условиях, постоянные удовлетворяют условиям, которые обеспечивают существование и единственность регулярного (классического) решения для задач Дирихле и Коши-Дирихле.

Список использованных источников:

1. T. Carleman, Sur la tehorie des equatuibs integrals et ses applications, Verh. Internat. Math. Kongr. (Orell Fussli, Zurich), Zurich – 1932 – 1 – pp.138-151.
2. R. Beals, Nonlocal Elliptic Boundary Value Problems, Bull. Amer. Math. Soc. – 1964 – V.70, No 5 – pp.693-696.
3. Canon J.R., The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963 – №21 – pp.155-160.
4. Бицадзе А.В., Самарский А.А., О некоторых простейших обобщениях линейных элиптических задач // Докл. АН СССР – 1969 – т.185, №2 – стр.739-740.
5. Гордезиани Д.Г., О методах решения одного класса нелокальных краевых задач / Изд. Тбил. гос. университета, Тбилиси. – 1981.
6. Скубачевский А.Л., О спектре некоторых нелокальных краевых задач // Матем. сборник – 1982 – т.117, №7 – стр.548-562.
7. Ильин В.А., Моисеев Е.И., Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // Матем. Моделироапние – 1990 – т.2, №8 – стр.130-156.
8. Gordeziani G., Gordeziani N., Avalishvili G., Non-local boundary value problem for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences – 1998 – 157, №1 – pp.365-369.
9. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A., On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one dimensional medium oscillation equations // Mathem. Mod. – 2000 – v.12, №1 – pp.93-103.
10. Gushchin A.K., Mikhailov V.P., On the stability of nonlocal problems for a second order elliptic equation // Math. Sb. – 1994 – №1 – pp.121-160.
11. Gurevich P.L., Asymtotivcs of Solution for nonlocal elliptic problemsin plane nounded domains, Functional Differential Equations. – 2003 – Vol. 10, No 1-2 – pp.175-214.
12. Ashyralyev A., Gercek , Okan, Nonlocal boundary value problem for elliptic-parabolic differential and difference equations. Discrete Dyn. Nat. Soc. – 2008 – Art.ID 904824 – p.16.
13. Sapagovas M.P., A difference method of increased order of accuracy for the Poisson equation with nonlocal conditions // Diff. Uravn. – 2008 – 44, №7 – pp.988-998.
14. D.Gordeziani, H.Meladze and G.Avalishvili. On one class of nonlocal in time problems for first order evolution equations // Jurn. Vich. I Prikl. Mat. – 2003 – №1 (88) – pp.66-78.

15. D.G. Gordeziani, On a method for solving the Bitsadze-Samarskii boundary value problem for elliptic equations, Inst, Prikl. Math.Tbilisi Gos. Univ., Dokl. – 1970 – pp.39-41.

16. Gordeziani D., Avalishvili G., Time nonlocal problems for Schrodinger type equations, I and II parts. Diff, Urav. – 2005 – V. 41, No 5,6 – pp. 703-711, pp. 852-859.